Capítulo IV:
Cinemática de manipuladores

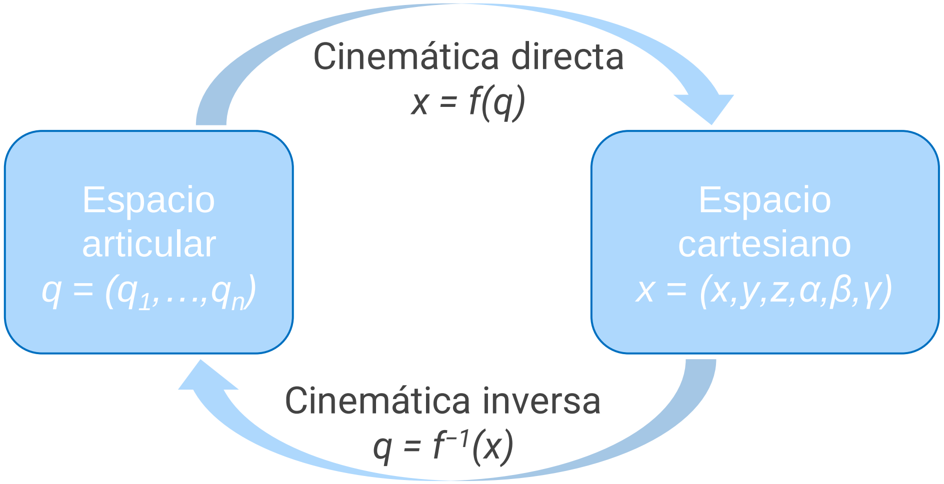
Introducción a la Robótica

Contenido:

Contenido:

Introducción cinemática directa e inversa

La relación entre *espacio articular* y el *espacio cartesiano* del robot se modela mediante dos funciones complementarias:



1. Cinemática directa "¿Dónde estoy?"

A partir de un conjunto de *variables articulares*

$$q = (q1,\ldots,qn)$$

se determina la *posición* y *orientación* de alguna parte del robot (ejemplo, el efector final).

$$x = (x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$$

2. Cinemática inversa "¿Cómo llego ahí?"

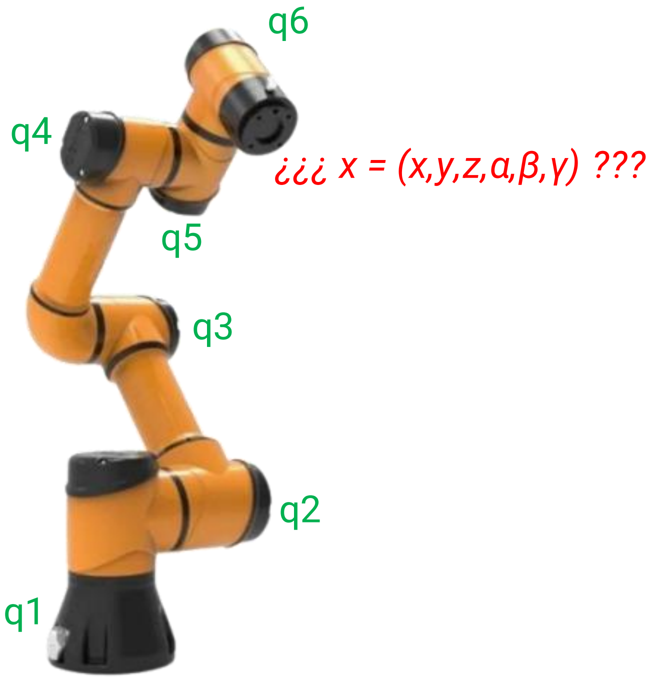
Dada una *pose deseada* en el espacio cartesiano: $x = (x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$

se calcula la *configuración articular* necesaria para alcanzarla. $q = (q1,\ldots,qn)$

Introducción cinemática directa e inversa

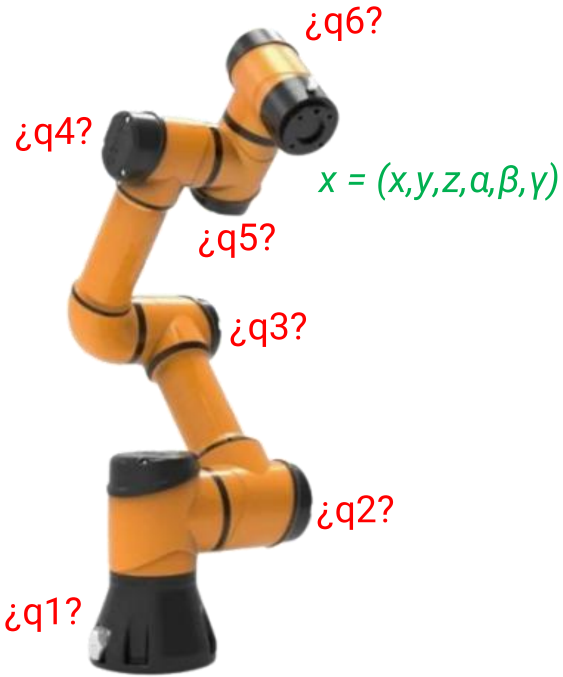
Cinemática directa

$x = f(q)$



Cinemática inversa

$q = f^{-1}(x)$



Cinemática Directa

De forma general, la cinemática directa establece una función:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q})$$

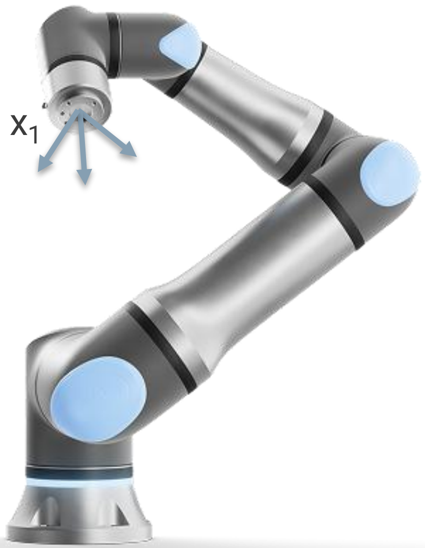
Donde:
- $\boldsymbol{q}$: *configuración articular* (ángulos o desplazamientos de cada articulación).
- $\boldsymbol{x}$: *posición y orientación* del punto operacional (por ejemplo, el efector final).

Punto operacional $\boldsymbol{x}$:

- Se define como el punto cuya pose se desea conocer.
- Normalmente se expresa *respecto al marco de la base* del robot.

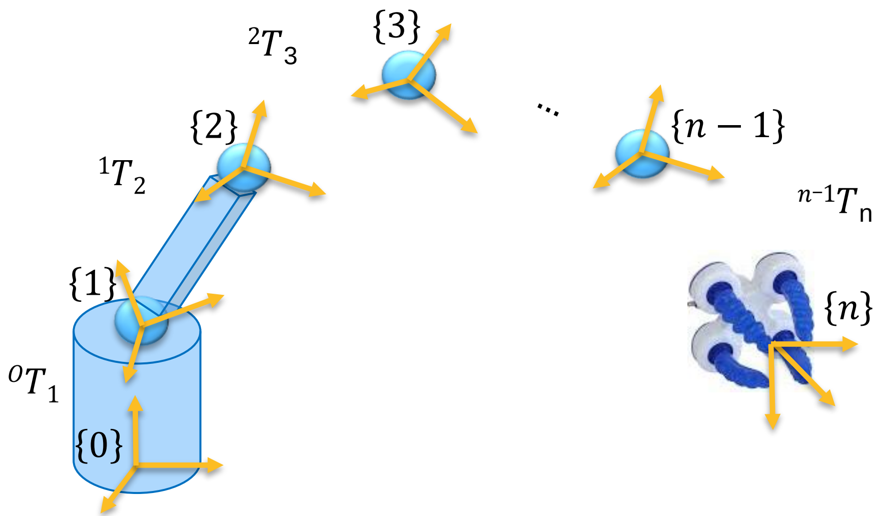
Función f de cinemática directa:

- La forma de f *depende del punto operacional elegido*.
- Es casi siempre una *función altamente no lineal*.
- Suele representarse mediante una *transformación homogénea*, que integra:
  - Posición
  - Orientación



Cinemática Directa - Cadena Cinemática Abierta

Un manipulador robótico con estructura *en serie* se modela como una secuencia de *marcos de referencia*:



$$\{0\} \to \{1\} \to \{2\} \to \cdots \to \{n\}$$

Donde cada sistema {i} está asociado a un eslabón y a su articulación correspondiente.

Transformación homogénea entre sistemas

Cada par de marcos consecutivos se relaciona mediante una matriz de transformación homogénea:

$${}^{i-1}T_i$$

Describe la posición y orientación del sistema {i} respecto al sistema anterior {i–1}.

Cada transformación depende, por lo general, de una sola variable articular (ángulo o desplazamiento).

Cinemática directa del robot

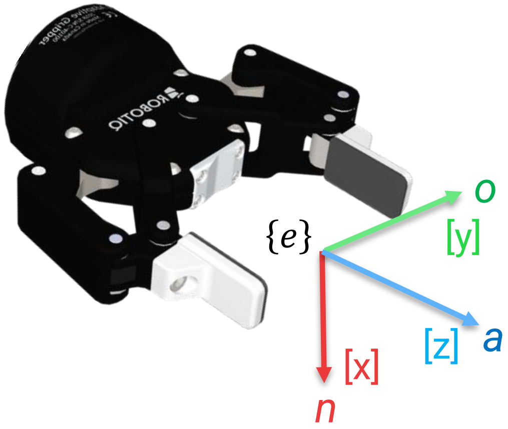
Para obtener la pose del efector final {n} con respecto a la base {0}, se multiplican todas las transformaciones consecutivas:

$${}^{0}T_n = ({}^{0}T_1)\,({}^{1}T_2)\,\cdots\,({}^{n-2}T_{n-1})\,({}^{n-1}T_n)$$

El resultado define la posición y la orientación del efector respecto al marco base.

Cinemática Directa - Sistema de Referencia del Efector Final

Por convención habitual (en la mayoría), el *efector final* se describe mediante un sistema de referencia $\{e\}$, cuya orientación se fija usando *tres vectores ortogonales*:



vectores ortogonales:

- a: vector approach
  - *Señala hacia afuera, en la dirección de aproximación.*
  - *Coincide con el eje de roll del efector.*
- o: vector orientación
  - *Se alinea con el eje de apertura/cierre de la garra.*
  - *En algunos textos se le denomina s (sliding plane of jaws).*
- n: vector normal
  - *Perpendicular al plano definido por o y a.*
  - *Completa la terna ortonormal (n, o, a).*

Matriz de transformación homogénea:

La pose del efector final respecto al marco base se expresa mediante:

$$
{}^{0}T_e = \left[\begin{array}{ccc|c} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

- *Las columnas (n, o, a) forman la matriz de rotación del efector.*
- *El vector (p_x ,p_y ,p_z) corresponde a la posición del efector respecto a la base.*

Cinemática Directa - Métodos

Métodos Geométricos

- Definen *sistemas de referencia* escogidos de forma *arbitraria* (habitualmente por inspección del mecanismo).
- Las transformaciones entre marcos también resultan *arbitrarias*, por lo que no existe una *forma general única* de matriz homogénea.
- Son métodos *intuitivos* y se basan directamente en la *geometría del robot*.

Se tiene:

- *Métodos de análisis geométrico.*
- *Producto de exponenciales (PoE).*

Métodos Sistemáticos

- Los *sistemas de referencia* se asignan siguiendo *reglas definidas*, garantizando consistencia.
- Las relaciones entre marcos se expresan mediante *parámetros estructurados*, derivados de esas reglas.
- Se obtienen transformaciones *genéricas y repetibles*, facilitando la formulación del modelo cinemático.

Se tiene:

- *Denavit–Hartenberg (DH)*
- *Hayati–Roberts*
- *Khalil–Kleinfinger, entre otros.*

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

- Se basa en la *asignación arbitraria* de *sistemas de referencia* a los eslabones del robot.
- No existe una regla estricta: los marcos se colocan según convenga para describir el movimiento.

Procedimiento

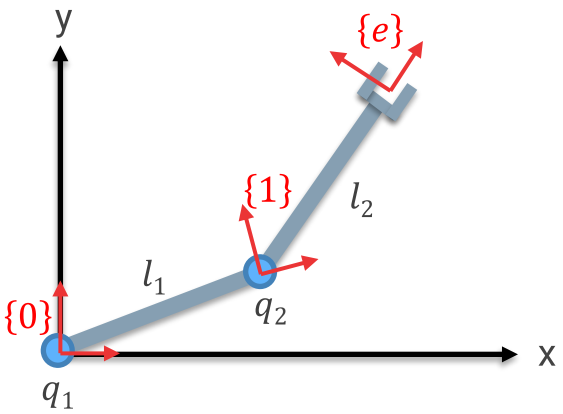
1) Asignar marcos arbitrarios a cada eslabón
   - *Cada sistema debe desplazarse junto con el eslabón.*
   - *El movimiento típico se modela alrededor del eje z o del eje x, según convenga.*
2) Describir cada sistema respecto al anterior
   - *Se utilizan matrices de transformación homogénea para especificar la posición y orientación entre eslabones consecutivos.*
3) Multiplicar las transformaciones sucesivas
   - *La composición de todas las transformaciones permite obtener la pose del efector final respecto al sistema base.*

Notas

- *Al finalizar, es posible incorporar un sistema de referencia (marco estándar) en el efector final para facilitar su interpretación o control.*
- *Los pasos 1 y 2 pueden ejecutarse de manera iterativa, es decir, eslabón por eslabón.*

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Robot R-R: El "Hola Mundo" de la Cinemática



Pasos:

1) Asignar marcos arbitrarios a cada eslabón

Cada eslabón recibe un marco propio que se desplaza con él.

2) Describir cada sistema respecto al anterior

Se construyen las transformaciones homogéneas $^0T_1$ *y* ^1T_e *siguiendo la secuencia de movimientos del robot.*

- Transformación $^0T_1$

Pasos geométricos

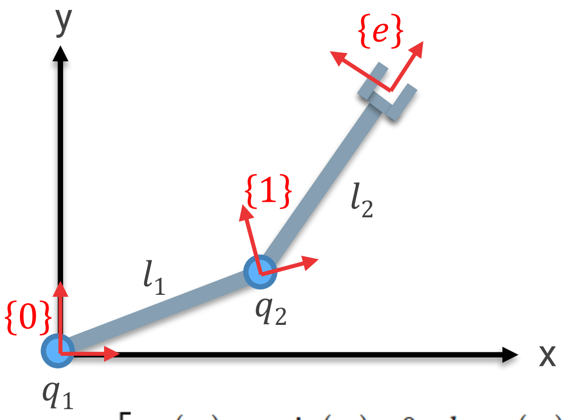
- *Rotar un ángulo* q_1 *alrededor del eje z:* $\mathrm{Rot}_z(q_1)$
- *Trasladar una distancia* l_1 *a lo largo del eje x del sistema ya rotado:* $\mathrm{Trasl}_x(l_1)$

La transformación total es: $^0T_1 = \mathrm{Trot}_z(q_1)\,\mathrm{Trasl}_x(l_1)$

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Robot R-R: El "Hola Mundo" de la Cinemática



- Transformación ^1T_e

$$^1T_e = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Multiplicar las transformaciones sucesivas $^0T_e = (^0T_1)\,(^1T_e)$

$$^0T_e = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0T_e = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1\sin(q_1)+l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Interpretación:

La orientación del efector viene dada por:

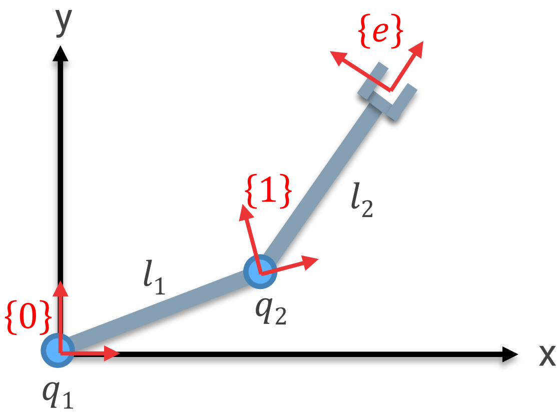
$\cos(q_1+q_2)$ y $\sin(q_1+q_2)$

La posición del efector respecto a la base es:

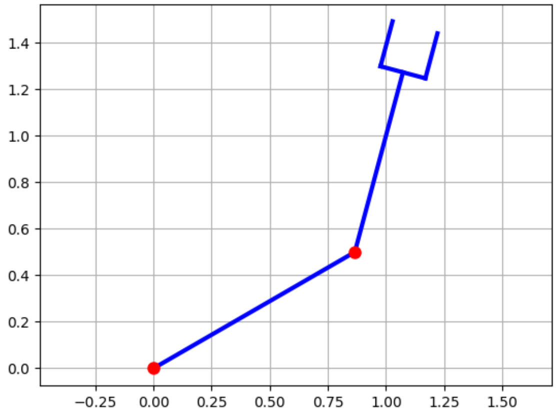
$$p_x = l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1+q_2)$$
$$p_y = l_1\sin(q_1) + l_2\sin(q_1+q_2)$$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Robot R-R: Ejemplo numérico: Se tiene el siguiente robot con: l_1 = 1.0 m, l_2= 0.8m, q_1 = 30° y q_2 = 45°, hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.

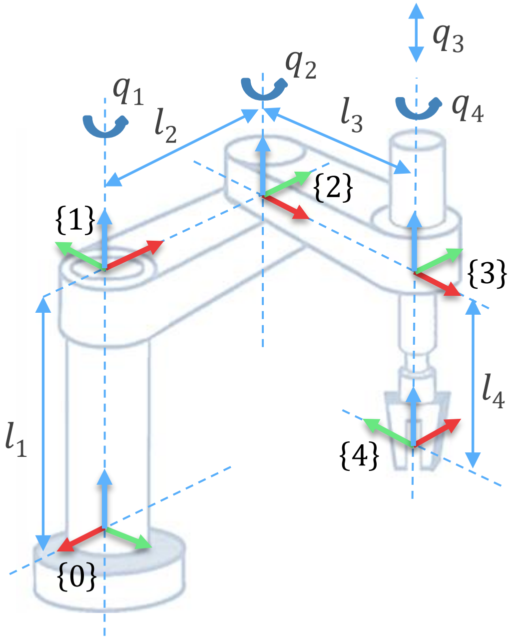


$$
{}^{0}T_{e} = \begin{bmatrix} 0.25881905 & -0.96592583 & 0 & 1.07308064 \\ 0.96592583 & 0.25881905 & 0 & 1.27274066 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:



Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 y l_4 como medidas de los eslabones; y q_1, q_2, q_3, q_4 como las articulaciones. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.

Pasos:

1) Asignar marcos arbitrarios a cada eslabón

Cada eslabón recibe un marco propio que se desplaza con él.

2) Describir cada sistema respecto al anterior

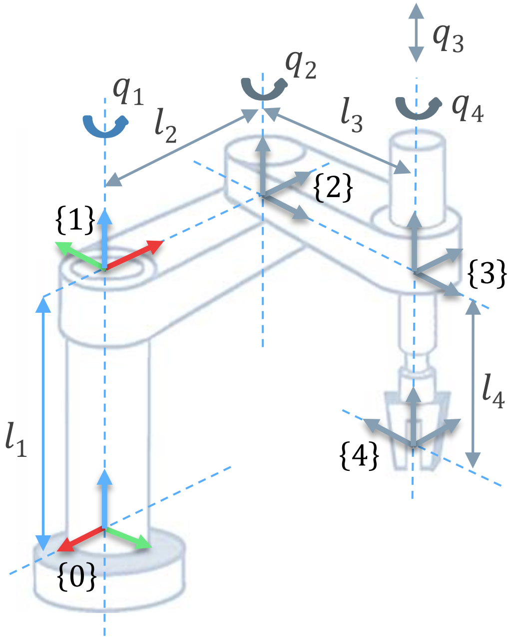
Se construyen las transformaciones homogéneas siguiendo la secuencia de movimientos del robot.

$$^0T_1, {}^1T_2, {}^2T_3, {}^3T_4 \ \ y \ \ 4Te$$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:

Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 y l_4 como medidas de los eslabones; y q_1, q_2, q_3, q_4 como las articulaciones. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.



- Transformación ${}^{0}T_1$:

Trasladar l_1 en z: $Tras_z(l_1)$.
Rotar (180° + q_1) alrededor de z: $Rot_z(180° + q_1)$

$$^{0}T_1 = \mathrm{Tras}_z(l_1) \cdot \mathrm{Rot}_z(180^\circ + q_1)$$

$$\mathrm{Tras}_z(l_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Rot}_z(180^\circ + q_1) = \begin{bmatrix} -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & 0 \\ -\sin(q_1) & -\cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

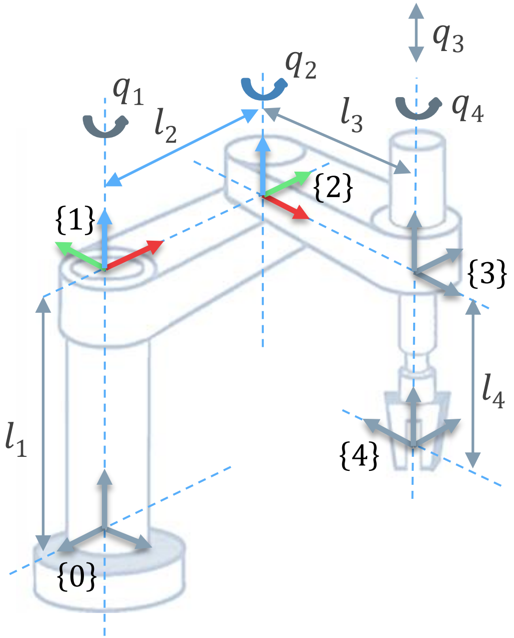
$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & 0 \\ -\sin(q_1) & -\cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando traslación y rotación son sobre el MISMO eje, ¡el orden NO importa!

$$\mathrm{Tras}_z(l_1) \cdot \mathrm{Rot}_z(q_1) = \mathrm{Rot}_z(q_1) \cdot \mathrm{Tras}_z(l_1)$$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:



Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 y l_4 como medidas de los eslabones; y q_1, q_2, q_3, q_4 como las articulaciones. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.

- Transformación ${}^{1}T_2$:

Trasladar l_2 en x: $Tras_x(l_2)$.
Rotar ($-90° + q_2$) alrededor de z: $Rot_z(-90° + q_2)$

$${}^{1}T_2 = \mathrm{Trasl}_x(l_2)\,\mathrm{Trot}_z(-90^\circ + q_2)$$

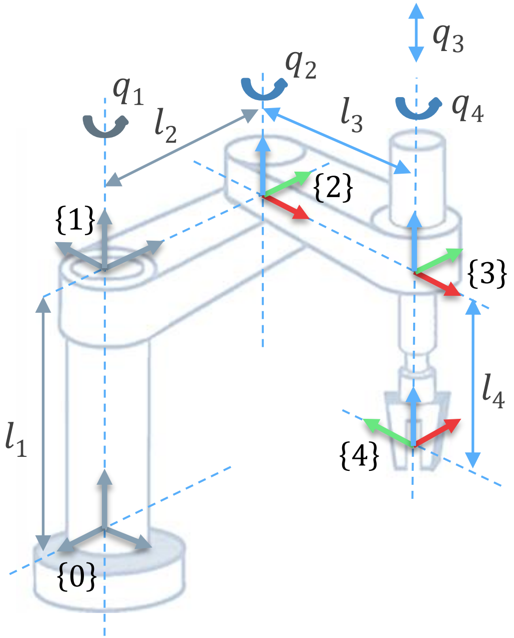
$$\mathrm{Tras}_x(l_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Rot}_z(-90^\circ + q_2) = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & l_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:

Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 y l_4 como medidas de los eslabones; y q_1, q_2, q_3, q_4 como las articulaciones. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.



- Transformación ${}^{2}T_{3}$:

  Trasladar l_3 en x: $Tras_x(l_3)$.

$$ {}^{2}T_{3} = \mathrm{Trasl}_x(l_3) \qquad {}^{2}T_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Transformación ${}^{3}T_{4}$:

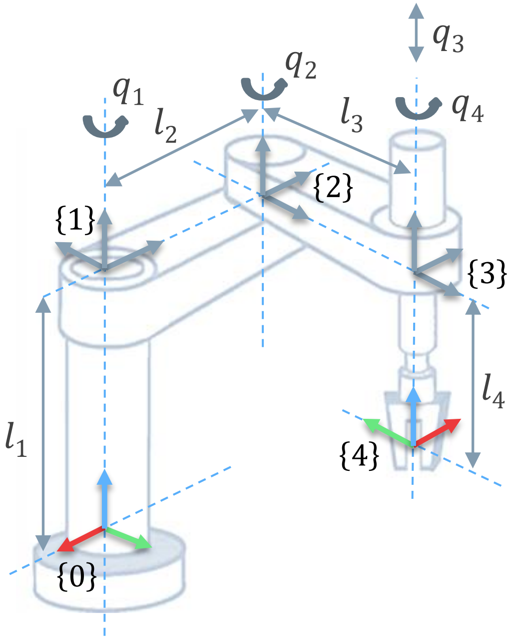
  Trasladar $-l_4 + q_3$ en z: $Tras_z(-l_4 + q_3)$.
  Rotar $(90° + q_4)$ alrededor de z: $Rot_z(90° + q_4)$

$$ {}^{3}T_{4} = \mathrm{Trasl}_z(-l_4 + q_3)\ \mathrm{Trot}_z(90^\circ + q_4) $$

$$ {}^{3}T_{4} = \begin{bmatrix} -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 - l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:



Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 y l_4 como medidas de los eslabones; y q_1, q_2, q_3, q_4 como las articulaciones. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.

Pasos:

3) Multiplicar las transformaciones sucesivas

El objetivo final es expresar la pose del efector {4} con respecto a la base del robot {0}.Para ello, se encadena la secuencia completa de transformaciones obtenidas en los pasos anteriores: $^0T_4 = (^0T_1)\,(^1T_2)\,(^2T_3)\,(^3T_4)$

$$^0T_4 = \begin{bmatrix} -c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & l_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 - l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

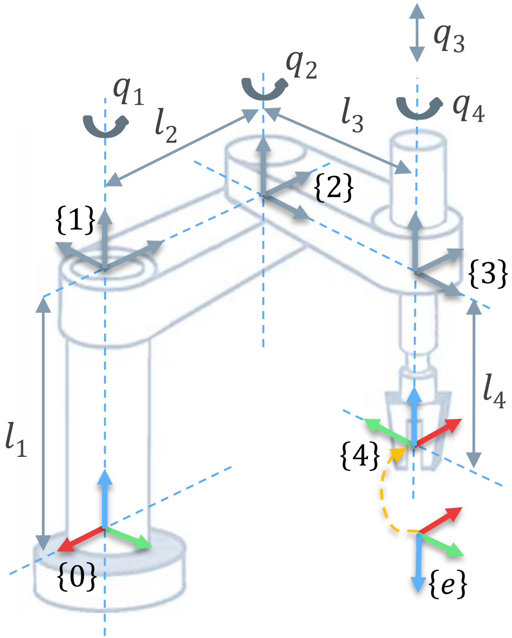
$$^0T_4 = \begin{bmatrix} -c_{124} & s_{124} & 0 & -l_3 s_{12} - l_2 c_1 \\ -s_{124} & -c_{124} & 0 & l_3 c_{12} - l_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 - l_4 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática directa usando sistemas de referencia arbitrarios

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:

Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 y l_4 como medidas de los eslabones; y q_1, q_2, q_3, q_4 como las articulaciones. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.



- Ajuste opcional del sistema del efector final:

En algunos casos, se desea que el sistema {e} del efector final adopte la convención estándar utilizada en robótica, donde: (n = x, o = y, a = z).

Para alinear {4} con la convención deseada, se realiza una rotación de 180° alrededor del eje x_4:

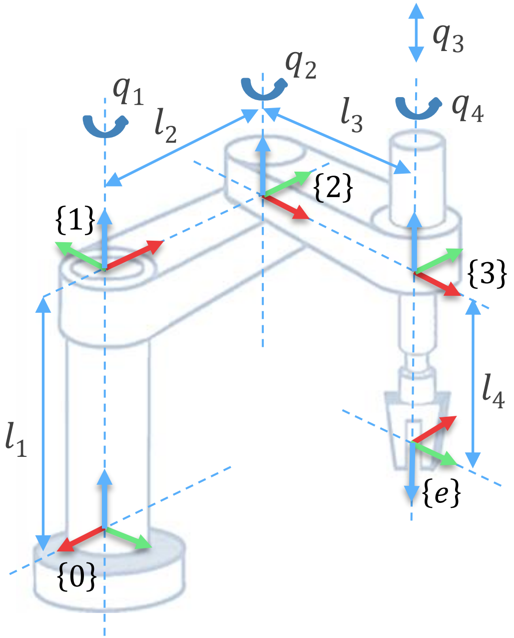
$$^{4}T_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) & 0 \\ 0 & \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La nueva transformación final se obtiene multiplicando: $^{0}T_e = (^{0}T_4)\,(^{4}T_e)$

$$^{0}T_e = \begin{bmatrix} -c_{124} & -s_{124} & 0 & -l_3 s_{12} - l_2 c_1 \\ -s_{124} & c_{124} & 0 & l_3 c_{12} - l_2 s_1 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 - l_4 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Directa - Método de Análisis Geométrico

Método Geométrico: Robot SCARA:



Se tiene el siguiente robot SCARA con: l_1, l_2, l_3 = 1.0 m, l_4= 0.5 m; q_1, q_2, q_4= 0° y q_3 = 0 m. Hallar la orientación y posición del efector final {e} respecto a la base {0}.

Pasos:

1) Asignar marcos arbitrarios a cada eslabón
2) Describir cada sistema respecto al anterior

   $^0T_1, {}^1T_2, {}^2T_3 \; y \; 3Te \qquad {}^0T_e = ???$

3) Multiplicar las transformaciones sucesivas

$$^0T_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1.0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$