Capítulo III: Matemática espacial para robots

Introducción a la Robótica

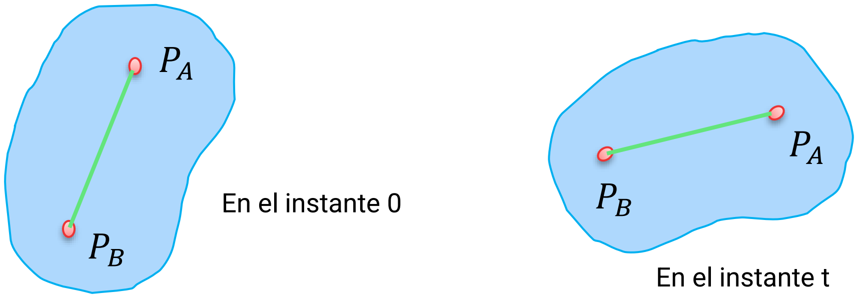
Contenido:

Contenido:

Conceptos Preliminares

Cuerpos Rígidos

Un *Cuerpo Rígido (RB)* es un conjunto de partículas en el que la *distancia relativa entre dos partículas permanece constante* en todo momento.



$$\|P_A(0) - P_B(0)\| = \|P_A(t) - P_B(t)\|$$

En un *cuerpo rígido, la distancia relativa entre dos puntos cualesquiera se mantiene constante*, sin importar el movimiento que realice.

- Cuerpo rígido planar:
  - Se mueve en *2 dimensiones* (x, y)
  - Ejemplo: un robot móvil terrestre.
- Cuerpo rígido espacial:
  - Se mueve en *3 dimensiones* (x, y, z).
  - Ejemplo: un dron, un brazo robótico industrial.

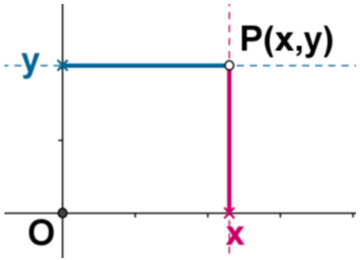
Conceptos Preliminares

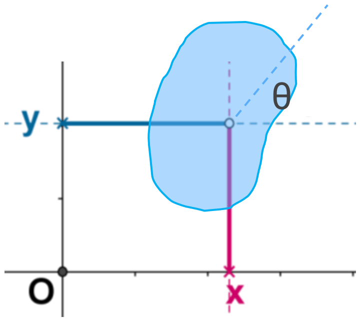
Cuerpos Rígidos – Configuración

- *Configuración* = descripción completa de la posición de todos los puntos del cuerpo rígido.
- Equivalente a: especificar *posición y orientación* del cuerpo (si se conoce su forma).

Ejemplos:

- Puerta con bisagra → configuración dada por el ángulo θ alrededor de la bisagra.
- Punto en el plano → coordenadas (x, y).
- Cuerpo rígido en el espacio → coordenadas (x, y, θ) - (posición en el plano + orientación).





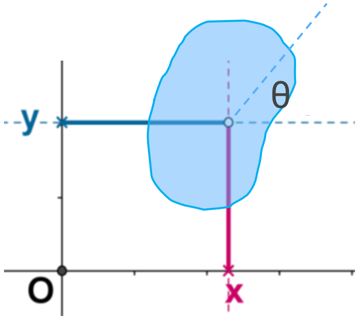
Conceptos Preliminares

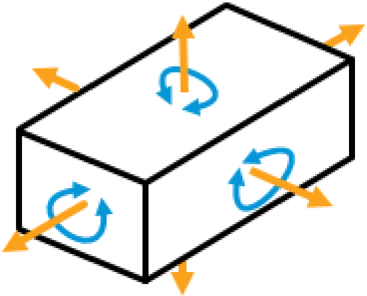
Cuerpos Rígidos – Grados de Libertad

- El *grado de libertad (gdl)* es el *número mínimo de parámetros independientes* necesarios para describir la *configuración* (posición y orientación) de un cuerpo rígido.

Ejemplos:

- Puerta con bisagra → 1 gdl (solo un ángulo θ).
- Punto en el plano → 3 gdl (2 de posición: x, y + 1 de orientación: θ).
- Cuerpo rígido en el espacio → 6 gdl (3 de posición: x, y, z + 3 de orientación: rotaciones).



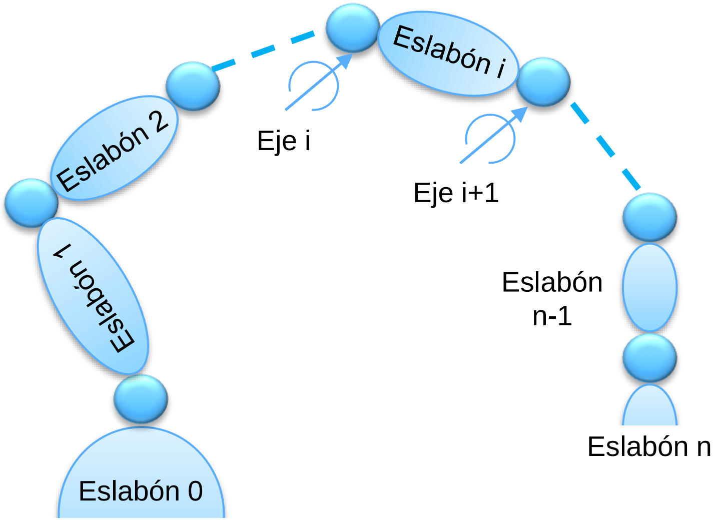


Conceptos Preliminares

Cuerpos Rígidos – Mecanismos

Un *mecanismo* es un sistema que genera movimiento y está compuesto por:

- *Cuerpos rígidos* → llamados *eslabones* (*links*).
- *Articulaciones* (*joints*) → permiten el movimiento relativo entre eslabones.



Relación con robótica:

- Un *robot* puede entenderse como un mecanismo.
- La *cadena cinemática* es la secuencia de *eslabones* y *articulaciones* que forman la estructura del robot.

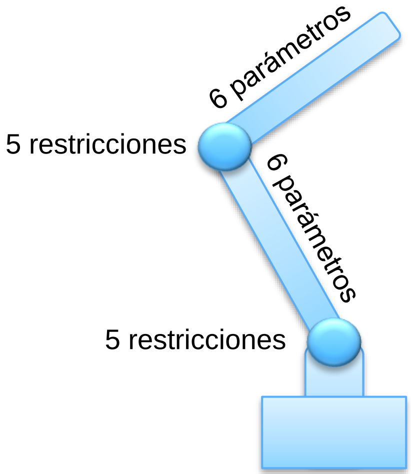
Conceptos Preliminares

Configuración de un Robot

Es la *especificación de la posición* y *orientación de cada eslabón* (cuerpo rígido) del robot mediante un conjunto de *parámetros mínimos*.

Ejemplo: Robot 2R

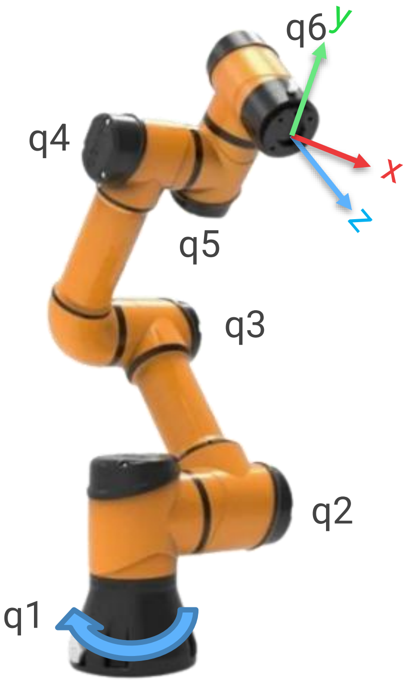
- Cada eslabón libre necesita *6 parámetros* (posición + orientación).
- Cada articulación agrega *5 restricciones*.
- Resultado: cada eslabón se describe con *1 parámetro* (el ángulo de la articulación).
- Configuración total del robot 2R = *2 parámetros* (θ_1, θ_2).



Conceptos Preliminares

¿Cómo representar la configuración del robot?

¿Cómo especificar las tareas que debe realizar?

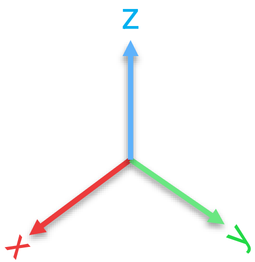


Espacio articular

$$q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

Espacio cartesiano



Conceptos Preliminares

Espacios usados en Robótica

Existen 2 espacios fundamentales:

- Espacio de Configuración (Configuration Space - C-space)
    - ➢ Contiene *todas las configuraciones posibles del robot*.
    - ➢ Permite especificar la *posición y orientación de cada cuerpo rígido*, considerando las articulaciones conocidas.
    - ➢ *Describe a todo el robot* (no solo al efector final).

- Espacio de la Tarea (Task Space / Espacio Operacional)
    - ➢ Contiene *todas las configuraciones posibles de la tarea*.
    - ➢ Describe lo que debe hacer el robot (por ejemplo, *movimiento de la garra o efector final*).
    - ➢ Usualmente expresado en el *espacio cartesiano* → posición y orientación.

Conceptos Preliminares

Relaciones entre ambos espacios

- Cinemática directa:
  - C-space →Task space
  - De ángulos articulares a posición/orientación cartesiana.

- Cinemática inversa:
  - Task space → C-space
  - De posición deseada a valores articulares.

- Cinemática diferencial directa/inversa:
  - Relaciona *velocidades* entre ambos espacios.

Conceptos Preliminares

a) Espacio de Configuración (Configuration Space - C-space)

- Es el espacio que contiene *todas las posibles configuraciones del robot*.
- Cada punto del espacio representa *una configuración única* (posición + orientación de todos los eslabones).
- También conocido como *C-space*.

Dimensión del espacio

- La *dimensión* del C-space es *igual al número de grados de libertad (gdl)* del robot.
- Si un robot tiene *n gdl*, su espacio de configuración tiene *dimensión n*.

Ejemplo:

- Robot 2R (2 articulaciones rotacionales) → C-space de 2 dimensiones: (θ_1, θ_2).

Conceptos Preliminares

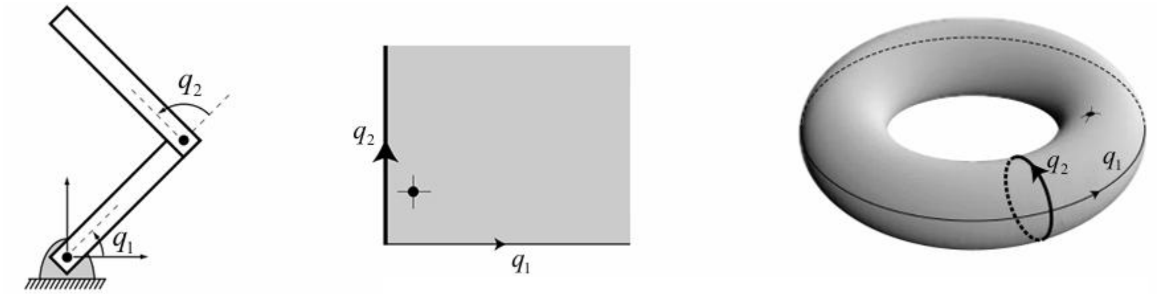
a) Espacio de Configuración (Configuration Space - C-space)

En robots manipuladores

- El espacio de configuración también se llama *espacio articular*.
- Se representa mediante el *vector de variables articulares*:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$$

- donde cada qi es la variable de la *articulación i* (ángulo o desplazamiento).



Conceptos Preliminares

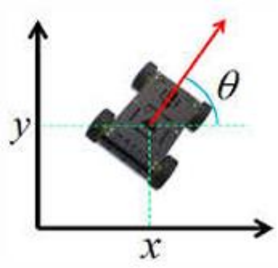
a) Espacio de Configuración (Configuration Space - C-space)

Otros Robots

Para otros tipos de robots, el *espacio de configuración* incluye no solo las variables articulares, sino también la *posición y orientación del cuerpo principal* en el entorno.

$$\mathbf{q} = (\underbrace{x, y}_{\text{posición}}, \theta)$$

orientación



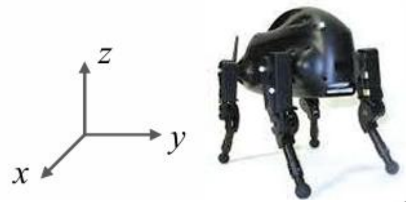
Robot móvil planar

- Se desplaza en un plano (2D).
- Su configuración incluye:

$$q=[x,y,\theta]$$

donde (x, y) es la posición y θ la orientación.

- Tiene 3 grados de libertad.



$$\mathbf{q} = (\underbrace{x, y, z}_{\text{posición}}, \underbrace{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}_{\text{orientación}}, \underbrace{q_1, q_2, \cdots, q_{12}}_{\text{valores articulares}})$$

Robot cuadrúpedo

- Su configuración combina:
- La posición y orientación del cuerpo en el espacio (6 gdl).
- Las articulaciones de las patas (ej. 3 por pata × 4 patas = 12 gdl).
- Total: 18 grados de libertad.

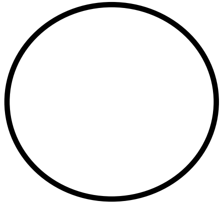
Conceptos Preliminares

a) Espacio de Configuración – Topología

Articulación prismática

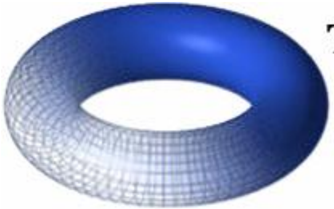
- Movimiento *lineal*.
- Su espacio es $\mathbb{R}$ → espacio *euclidiano 1D* (una *recta*).
- Ejemplo: Un actuador lineal con desplazamiento continuo en una dirección.

Articulación de revolución



- Movimiento *angular*.
- Su espacio es S^1 → *superficie cerrada 1D* (una *circunferencia*).
- Ejemplo: Un eje rotacional con giro de 0° a 360°.

Cuando existen varias articulaciones



- El *espacio total* se obtiene con el *producto cartesiano* de los espacios individuales.
- Ejemplo: Robot con *2 articulaciones de revolución*:
  Espacio de configuración = $S1 \times S1$ → topología equivalente a un toro (forma de “donut”).

Conceptos Preliminares

b) Espacio de la Tarea (Task Space / Espacio Operacional)

- Es el *espacio que contiene todas las configuraciones posibles de una tarea*.
- Describe las *posiciones y orientaciones* que puede alcanzar el *punto operacional*.

Punto Operacional

- Es una *parte específica del robot*, generalmente *fija a un eslabón* (como el efector final o una herramienta).
- La tarea se define respecto a este punto (por ejemplo, mover la garra a una posición deseada).

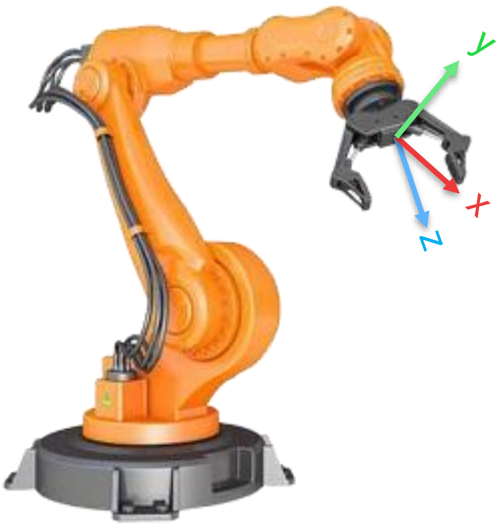
Interpretación:

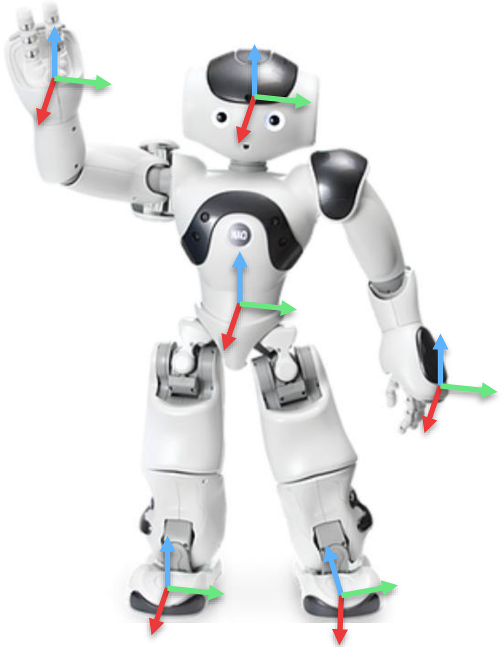
- El *espacio de la tarea* es también llamado *espacio operacional*.
- Cada punto del espacio representa una *configuración del punto operacional*.
- Generalmente expresado en *coordenadas cartesianas*:

$$\mathbf{x} = (\underbrace{x, y, z,}_{\text{posición}} \underbrace{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}_{\text{orientación}})$$

Conceptos Preliminares

b) Espacio de la Tarea (Task Space / Espacio Operacional)





Conceptos Preliminares

¿Cómo moverse hacia un objeto?

Paso 1: Asignación de sistemas de referencia

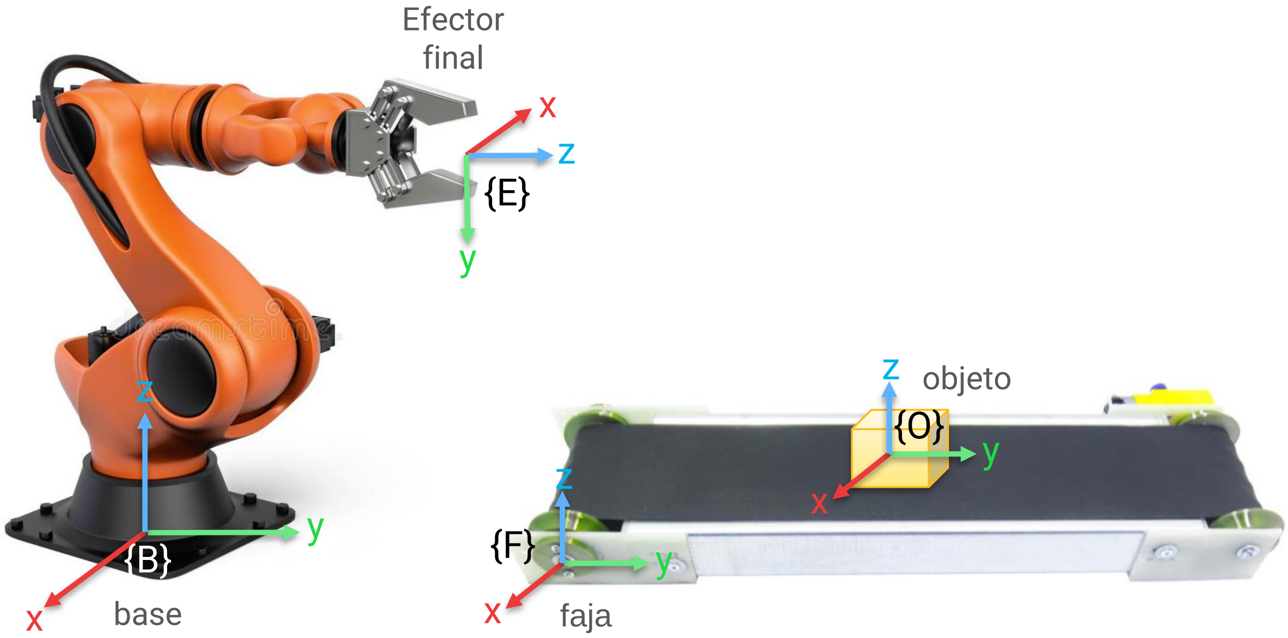
- Se asignan *sistemas de coordenadas* a las partes relevantes:
  - Objeto objetivo.
  - Efector final del robot.
  - Base del robot.
- Cada sistema define una *posición y orientación* local.

Paso 2: Descripción de relaciones

- Se describe la *posición y orientación de un sistema con respecto a otro*.
- Esta relación se expresa mediante:
  - Vectores de posición.
  - Matrices de rotación.
  - Transformaciones homogéneas (posición + orientación en una sola matriz).

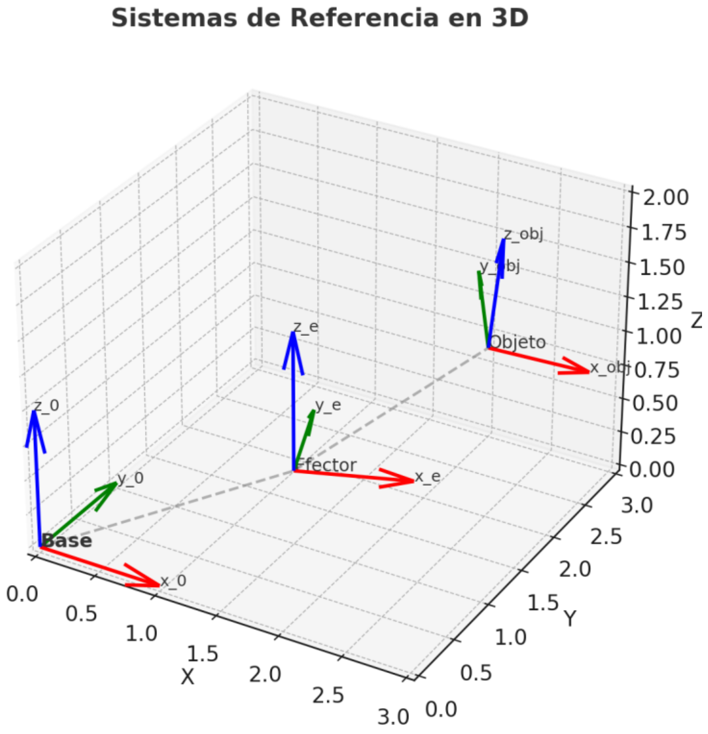
Conceptos Preliminares

¿Cómo moverse hacia un objeto?



Conceptos Preliminares

¿Cómo moverse hacia un objeto?



Conceptos Preliminares

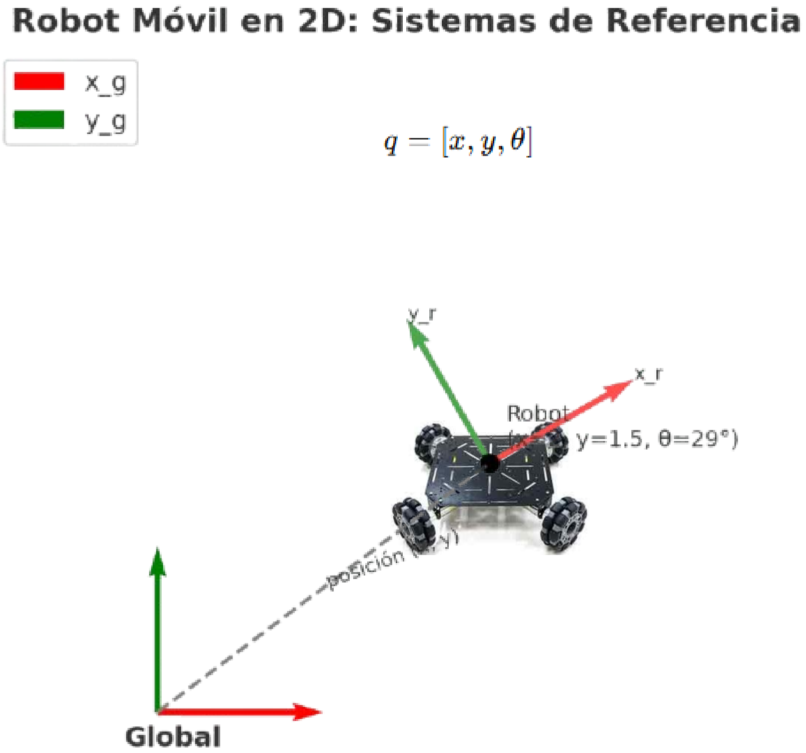
… y para un robot móvil

Paso 1: Sistema global (Base o Mundo)

- Es el sistema fijo en el entorno.
- Define el *punto (0,0)* y el *eje de orientación* del mapa o espacio de trabajo.

Paso 2: Sistema del robot (Propio o Local)

- Está fijo al robot.
- Su origen se ubica, por ejemplo, en el *centro geométrico* o *eje de las ruedas*.
- El eje *x* local apunta hacia el *frente del robot*, y *y* hacia un costado.



Conceptos Preliminares

… y para un robot aéreo

Paso 1: Sistema Global (Mundo)

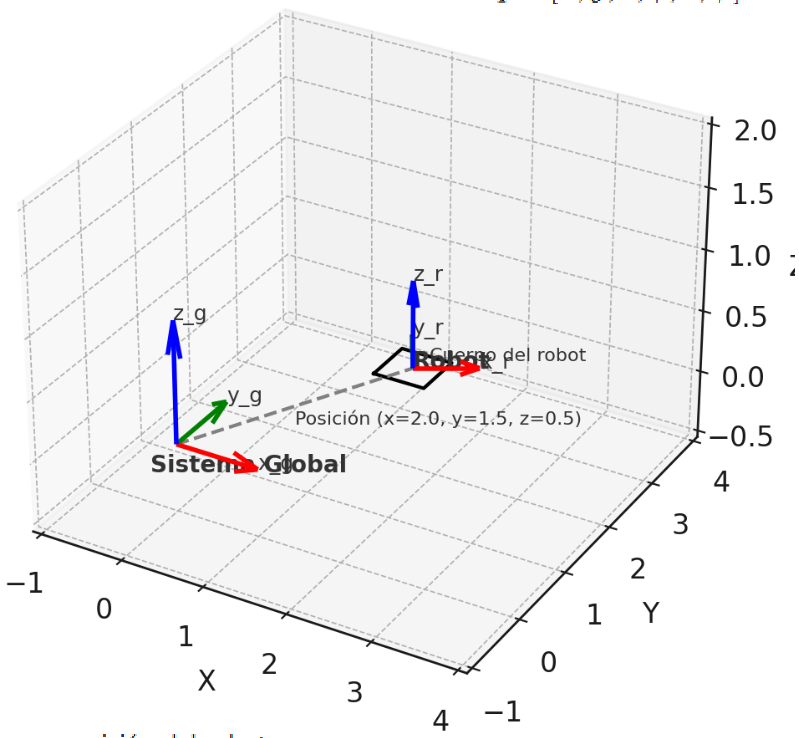
- Es fijo en el entorno.
- Define el origen (0,0,0) y los ejes Xg, Yg, Zg.
- Sirve como base para medir posición y orientación del robot

Paso 2: Sistema del robot (Propio o Local)

- Está fijo al robot.
- Su origen se ubica típicamente en el *centro geométrico* o en el *centro de masa*.
- Sus ejes (Xr, Yr, Zr) definen la orientación del robot respecto al entorno.

Robot Móvil en 3D: Sistemas de Referencia

$$q = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]$$



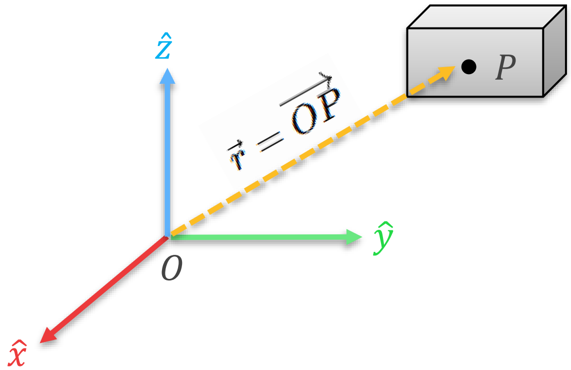
x, y, z: posición del robot.

φ (roll), θ (pitch), ψ (yaw): orientación (rotaciones en 3D).

Representación de la Posición

La *posición* de un *cuerpo rígido* se describe mediante la *posición de un punto fijo P* asociado a dicho cuerpo.

Vector posición: $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$



Donde:

- O: origen del sistema de referencia.
- P: punto fijo del cuerpo.
- $\vec{r}$: vector desde O hasta P

¿Cuántas coordenadas son necesarias?

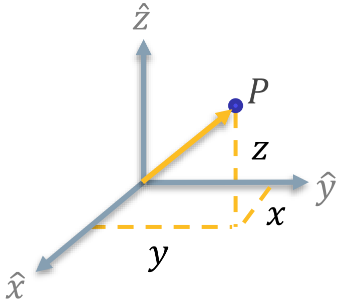
- En 2D → 2 coordenadas (x,y) → 2 gdl
- En 3D → 3 coordenadas (x,y,z) → 3 gdl

Representaciones de la posición (en 3D):

- Coordenadas Cartesianas: $\vec{r}=(x,y,z)$ — Usadas comúnmente en robótica.
- Coordenadas Cilíndricas: $\vec{r}=(\rho,\phi,z)$ — Convenientes para movimientos con simetría rotacional.
- Coordenadas Esféricas: $\vec{r}=(r,\theta,\phi)$ — Útiles para sistemas con simetría radial (ej. robots esféricos).

Representación de la Posición

a) Coordenadas Cartesianas

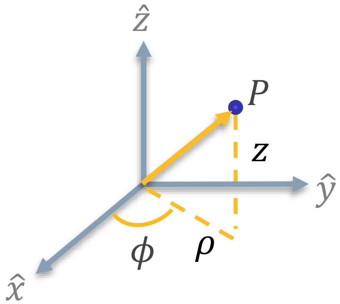


$$P = (x, y, z)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) Coordenadas cilíndricas



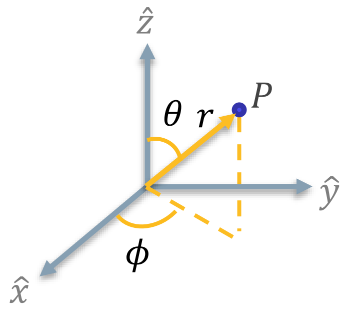
$$P = (\rho, \phi, z)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \operatorname{atan2}(y, x) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \\ z \end{bmatrix}$$

Representación de la Posición

c) Coordenadas esféricas



$$P = (r, \theta, \phi)$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

con:

$$0 \leq \theta \leq \pi$$
$$0 \leq \phi < 2\pi$$
$$r \geq 0$$

Relación con coordenadas Cartesianas (x, y, z)

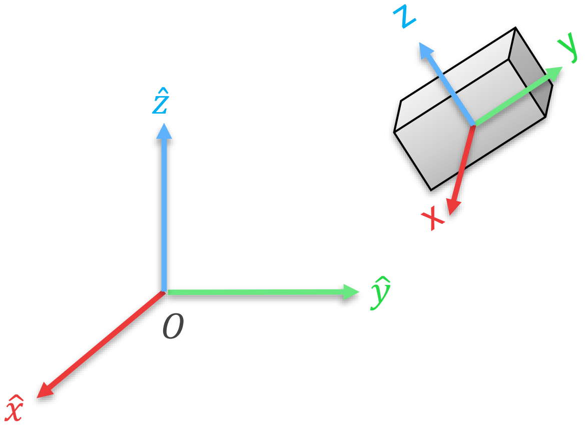
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \\ \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}\left(z / r\right) \\ \phi = \operatorname{atan2}(y, x) \end{cases}$$

Relación con coordenadas cílíndricas (ρ, θ_c, z)

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \theta_c = \phi \\ z = r\cos\theta \\ \\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \operatorname{atan2}(\rho, z) \\ \phi = \theta_c \end{cases}$$

Orientación de un Cuerpo Rígido

La *orientación* de un cuerpo rígido describe *cómo está rotado* con respecto a un *sistema de referencia* (por ejemplo, el sistema global).



Relación entre sistemas de referencia:

Se establece mediante la *transformación* que alinea los ejes del *sistema local* del cuerpo con los del *sistema global*.

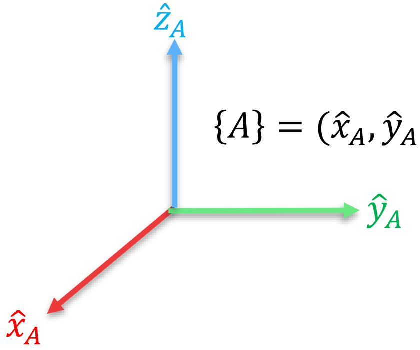
Representaciones de la Orientación

- En 2D, basta un solo ángulo para determinar la orientación.
- En 3D, existen múltiples formas de representar las 3 coordenadas de rotación:
  - Ángulos de Euler.
  - Ángulos de Cardan.
  - Cuaterniones.
  - Matrices de rotación

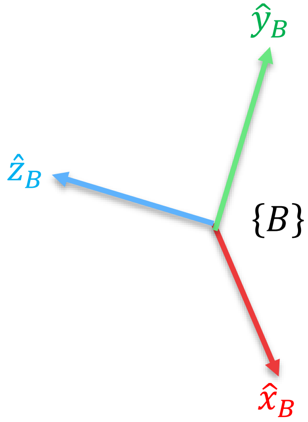
Contenido:

Matriz de Rotación - Sistema de Coordenadas

- Un *sistema de coordenadas* está definido completamente por la *orientación de sus ejes* (x, y, z).
- También se le denomina *sistema de referencia* (*reference frame*).
- Ejemplo: sistemas de coordenadas {A} y {B}.



$$\{A\} = (\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A)$$



$$\{B\} = (\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B)$$

$$^A\hat{x}_A = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ^A\hat{y}_A = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad ^A\hat{z}_A = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

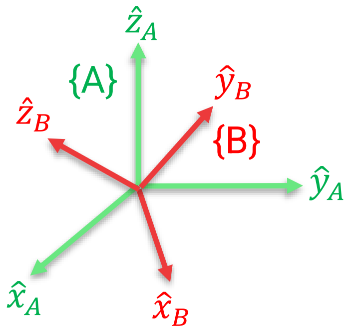
$$^B\hat{x}_B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ^B\hat{y}_B = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad ^B\hat{z}_B = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Donde:

- ❑ $\hat{v}$ vector *unitario*, El *superíndice* indica el sistema de referencia (respecto a cuál se mide el vector)

Matriz de Rotación Genérica

- Se consideran *dos sistemas de referencia*, {A} y {B}, que comparten el *mismo origen*, pero están *rotados entre sí*.
- *Objetivo:* expresar *la orientación del sistema {B}* en términos del *sistema {A}*.



Se obtienen las *proyecciones* de los ejes de {B} sobre los de {A}.

$$^{A}\hat{x}_B = (\hat{x}_B \cdot \hat{x}_A)\hat{x}_A + (\hat{x}_B \cdot \hat{y}_A)\hat{y}_A + (\hat{x}_B \cdot \hat{z}_A)\hat{z}_A$$
$$^{A}\hat{y}_B = (\hat{y}_B \cdot \hat{x}_A)\hat{x}_A + (\hat{y}_B \cdot \hat{y}_A)\hat{y}_A + (\hat{y}_B \cdot \hat{z}_A)\hat{z}_A$$
$$^{A}\hat{z}_B = (\hat{z}_B \cdot \hat{x}_A)\hat{x}_A + (\hat{z}_B \cdot \hat{y}_A)\hat{y}_A + (\hat{z}_B \cdot \hat{z}_A)\hat{z}_A$$

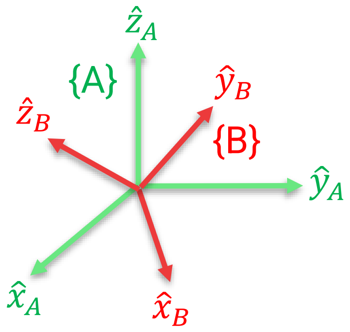
$$^{A}\hat{x}_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{x}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix} \quad ^{A}\hat{y}_B = \begin{bmatrix} \hat{y}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{y}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{y}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix}$$
$$^{A}\hat{z}_B = \begin{bmatrix} \hat{z}_B \cdot \hat{x}_A \\ \hat{z}_B \cdot \hat{y}_A \\ \hat{z}_B \cdot \hat{z}_A \end{bmatrix}$$

- En forma vectorial, las proyecciones de cada eje de *{B}* sobre *{A}* conforman las *columnas* de la *matriz de rotación*:

$$^{A}R_B = [^{A}\hat{x}_B \quad ^{A}\hat{y}_B \quad ^{A}\hat{z}_B] = \begin{bmatrix} \hat{x}_B.\hat{x}_A & \hat{y}_B.\hat{x}_A & \hat{z}_B.\hat{x}_A \\ \hat{x}_B.\hat{y}_A & \hat{y}_B.\hat{y}_A & \hat{z}_B.\hat{y}_A \\ \hat{x}_B.\hat{z}_A & \hat{y}_B.\hat{z}_A & \hat{z}_B.\hat{z}_A \end{bmatrix}$$

Cada columna representa a los ejes (x, y, z) del sistema {B} con respecto al sistema {A}

Matriz de Rotación Genérica



- Sistema {B} con respecto al sistema {A}

$$^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B.\hat{x}_A & \hat{y}_B.\hat{x}_A & \hat{z}_B.\hat{x}_A \\ \hat{x}_B.\hat{y}_A & \hat{y}_B.\hat{y}_A & \hat{z}_B.\hat{y}_A \\ \hat{x}_B.\hat{z}_A & \hat{y}_B.\hat{z}_A & \hat{z}_B.\hat{z}_A \end{bmatrix}$$

$$^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B.\hat{x}_A & \hat{y}_B.\hat{x}_A & \hat{z}_B.\hat{x}_A \\ \hat{x}_B.\hat{y}_A & \hat{y}_B.\hat{y}_A & \hat{z}_B.\hat{y}_A \\ \hat{x}_B.\hat{z}_A & \hat{y}_B.\hat{z}_A & \hat{z}_B.\hat{z}_A \end{bmatrix}$$

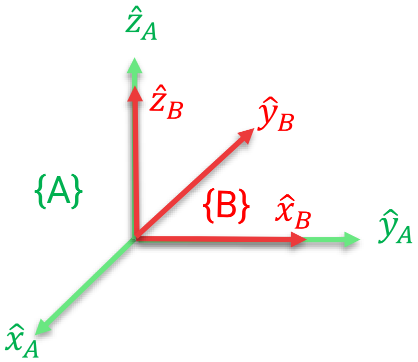
- Sistema {A} con respecto al sistema {B}

$$^{B}R_{A} = ({}^{A}R_{B})^{T}$$

$$^{B}R_{A} = \begin{bmatrix} \hat{x}_A.\hat{x}_B & \hat{y}_A.\hat{x}_B & \hat{z}_A.\hat{x}_B \\ \hat{x}_A.\hat{y}_B & \hat{y}_A.\hat{y}_B & \hat{z}_A.\hat{y}_B \\ \hat{x}_A.\hat{z}_B & \hat{y}_A.\hat{z}_B & \hat{z}_A.\hat{z}_B \end{bmatrix}$$

Matriz de Rotación Genérica

- Ejemplo 1: Dados los siguientes sistemas {A} y {B}, se pide calcular:



a) Calcular la rotación del sistema {B} con respecto al sistema {A}

$$ {}^{A}R_B = \begin{bmatrix} \hat{x}_B.\hat{x}_A & \hat{y}_B.\hat{x}_A & \hat{z}_B.\hat{x}_A \\ \hat{x}_B.\hat{y}_A & \hat{y}_B.\hat{y}_A & \hat{z}_B.\hat{y}_A \\ \hat{x}_B.\hat{z}_A & \hat{y}_B.\hat{z}_A & \hat{z}_B.\hat{z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90°) & \cos(180°) & \cos(90°) \\ \cos(0°) & \cos(90°) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(90°) & \cos(0°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

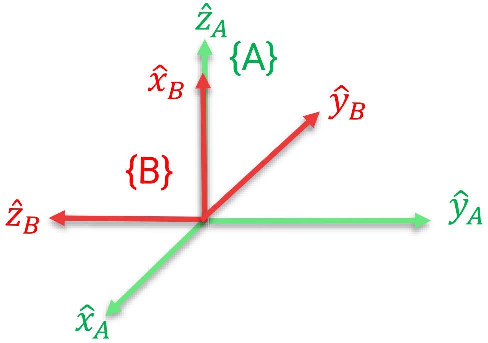
b) Calcular la rotación del sistema {A} con respecto al sistema {B}

$$ {}^{B}R_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

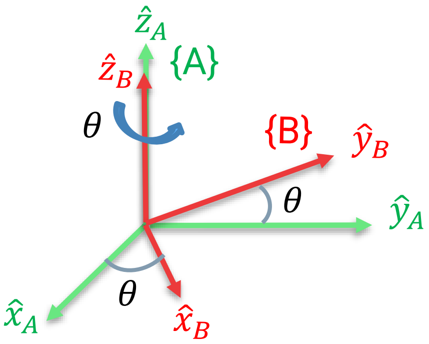
Matriz de Rotación Genérica

- Ejemplo 2: De la siguiente matriz de rotación, graficar el sistema {A} y {B}

$$ {}^{A}R_{B} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} {}^{A}\hat{x}_B & {}^{A}\hat{y}_B & {}^{A}\hat{z}_B \end{matrix} \end{array} $$



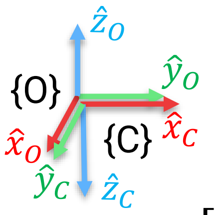
- Ejemplo 3: Calcular la rotación (alrededor del eje z) del sistema {B} con respecto al sistema {A}



$$ {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(90° + \theta) & \cos(90°) \\ \cos(90° - \theta) & \cos(\theta) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(90°) & \cos(0°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

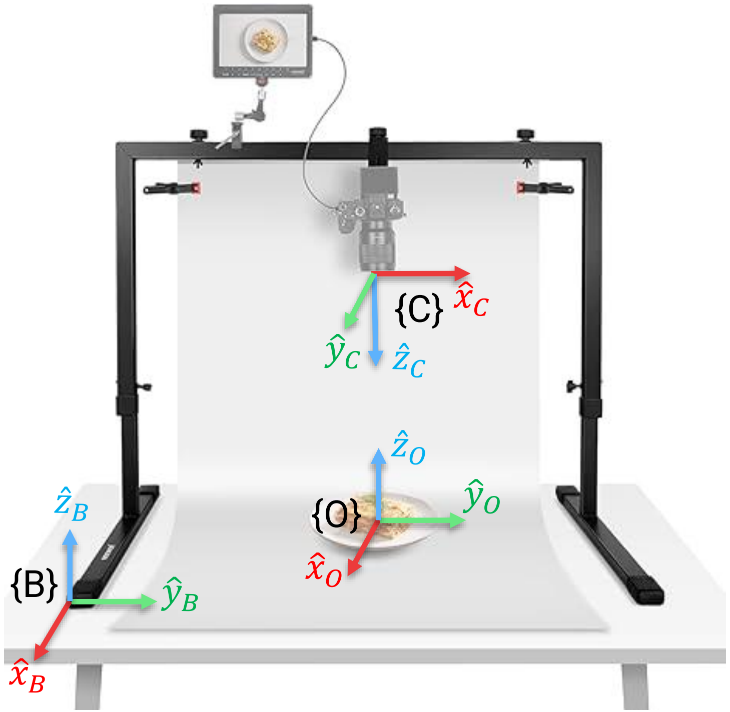
Matriz de Rotación Genérica

- Ejercicio:
  Se dispone de una mesa sobre la cual se coloca un objeto (plato) para su registro fotográfico. Una cámara está montada en una estructura superior, orientada verticalmente hacia abajo, y define un sistema de referencia propio {C} (de la cámara).El sistema asociado al objeto sobre la mesa se denomina {O}.
  Calcule la matriz de rotación que relaciona el sistema del objeto {O} con el sistema de la cámara {C}.

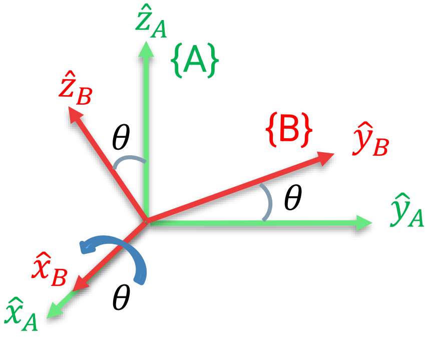


$$ {}^{C}R_O = \begin{bmatrix} \hat{x}_O.\hat{x}_C & \hat{y}_O.\hat{x}_C & \hat{z}_O.\hat{x}_C \\ \hat{x}_O.\hat{y}_C & \hat{y}_O.\hat{y}_C & \hat{z}_O.\hat{y}_C \\ \hat{x}_O.\hat{z}_C & \hat{y}_O.\hat{z}_C & \hat{z}_O.\hat{z}_C \end{bmatrix} $$

$$ {}^{C}R_O = \begin{bmatrix} \cos(90°) & \cos(0°) & \cos(90°) \\ \cos(0°) & \cos(90°) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(90°) & \cos(180°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} $$

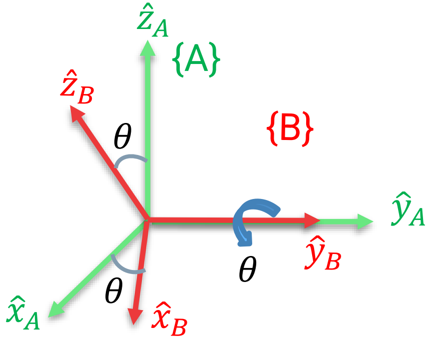


Matriz de Rotación – Rotaciones Elementales



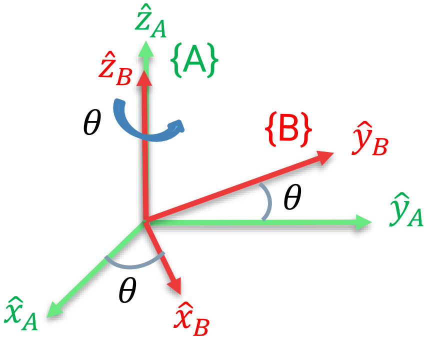
Rotación alrededor del eje *x*

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Rotación alrededor del eje *y*

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

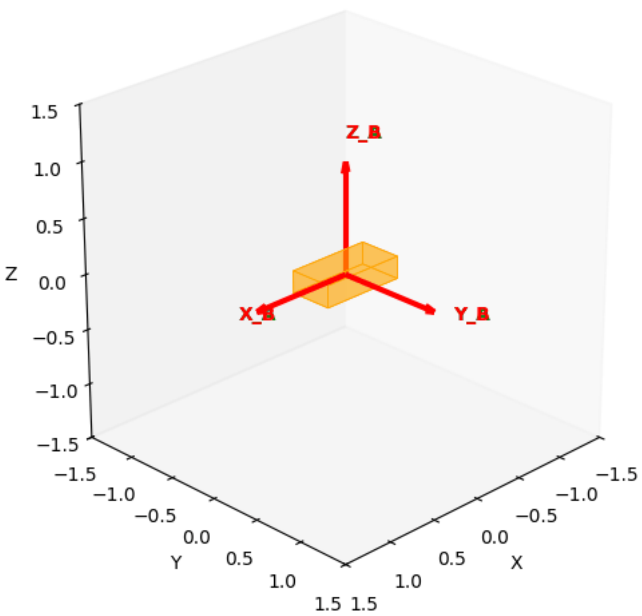


Rotación alrededor del eje *z*

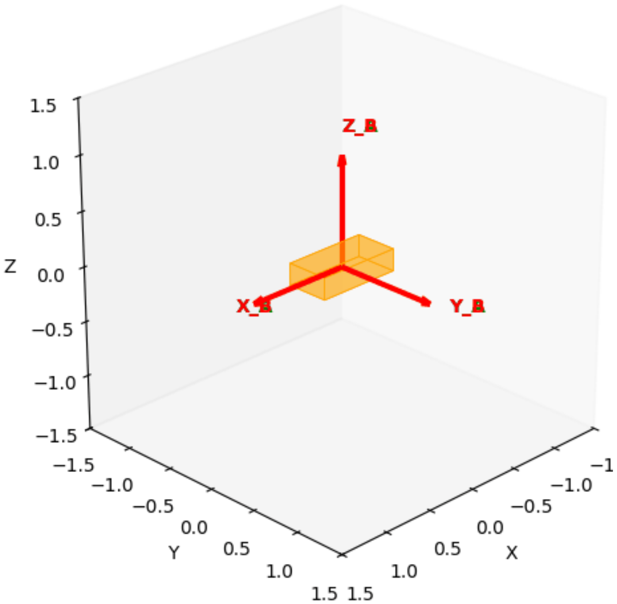
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rotación – Rotaciones Elementales

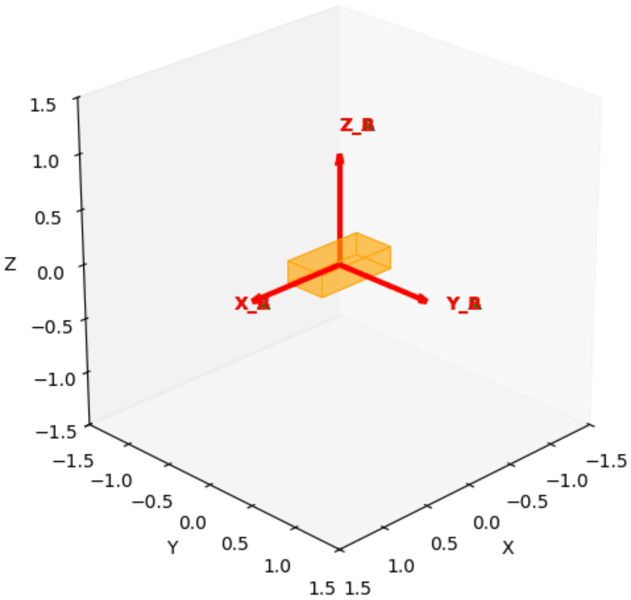
Rotación alrededor del Eje X
Ángulo: 0.0°



Rotación alrededor del Eje Y
Ángulo: 0.0°



Rotación alrededor del Eje Z
Ángulo: 0.0°



$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades de una Matriz de Rotación

1. *Transpuesta de la Matriz de Rotación R*

Cada eje ($\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$) es unitario y perpendicular a los otros 2

$$R^T R = \begin{bmatrix} .. & \hat{x}^T & .. \\ .. & \hat{y}^T & .. \\ .. & \hat{z}^T & .. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .. & .. & .. \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ .. & .. & .. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}^T\hat{x} & \hat{x}^T\hat{y} & \hat{x}^T\hat{z} \\ \hat{y}^T\hat{x} & \hat{y}^T\hat{y} & \hat{y}^T\hat{z} \\ \hat{z}^T\hat{x} & \hat{z}^T\hat{y} & \hat{z}^T\hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La *transpuesta R^T de una matriz de rotación* también es una *matriz de rotación*.

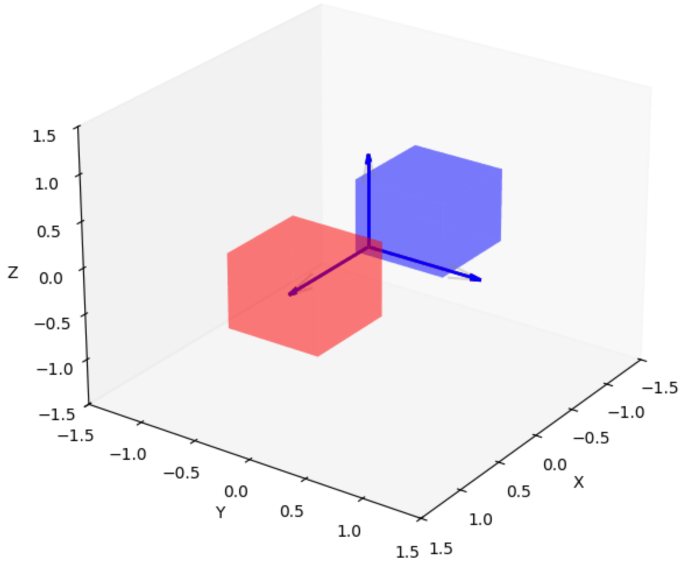
$$(R^T)^T(R^T) = RRT = I$$

En rotaciones, la *transpuesta equivale a la inversa*:

$$R^{-1} = R^T$$

R es una matriz ortogonal

R (rojo) vs R^T (azul)
Ángulo θ = 0°



Propiedades de una Matriz de Rotación

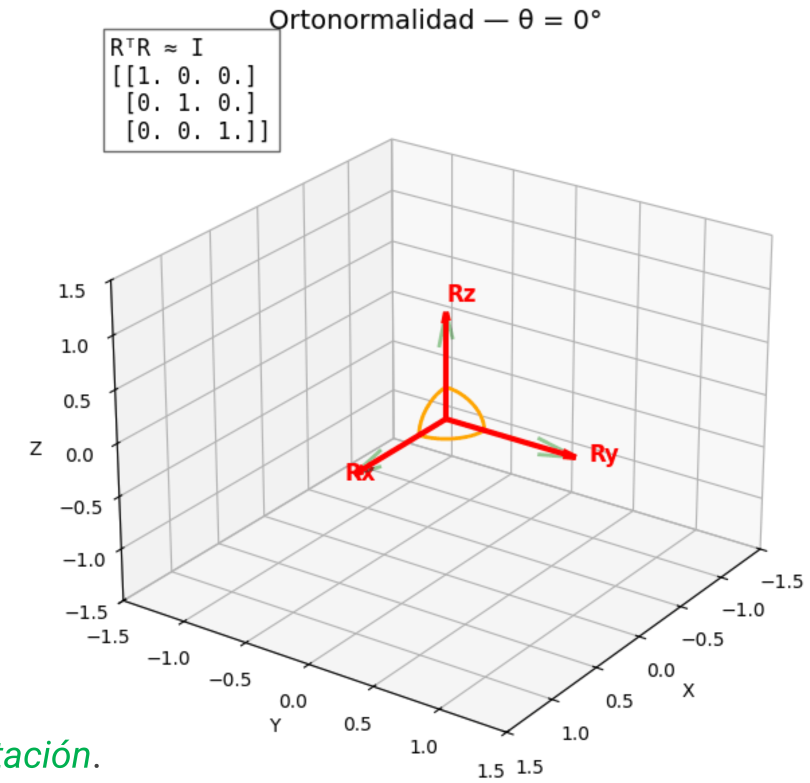
1. *Transpuesta de la Matriz de Rotación R*

   - R es una *matriz ortogonal*, lo que significa que:
     - Sus *filas y columnas son ortonormales*.

$$R = [r1 \quad r2 \quad r3] \quad r_i^T r_j = \begin{cases} 0, si\ i \neq j \\ 1, si\ i = j \end{cases}$$

3 restricciones
3 restricciones
6 restricciones

     - Forman una *base ortonormal* en $\mathbb{R}^3$.



   - Tiene *9 elementos*, pero existen *6 restricciones* por ortonormalidad.
   - Por tanto: $9 - 6 = 3\ grados\ de\ libertad\ (gdl)$
   - Solo se necesitan *3 parámetros* para describir la *orientación*.
   - *La matriz de rotación es redundante* (usa más variables de las necesarias).

Propiedades de una Matriz de Rotación

2. *Determinante de la matriz de rotación R*

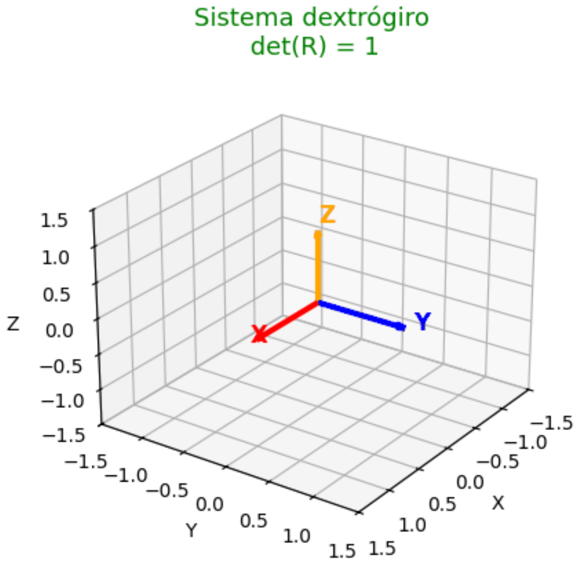
$$R^T R = I \quad \Rightarrow \quad \det(R^T)\det(R) = \det(I) \qquad \text{Como } \det(R^T) = \det(R): \quad (\det R)^2 = 1$$

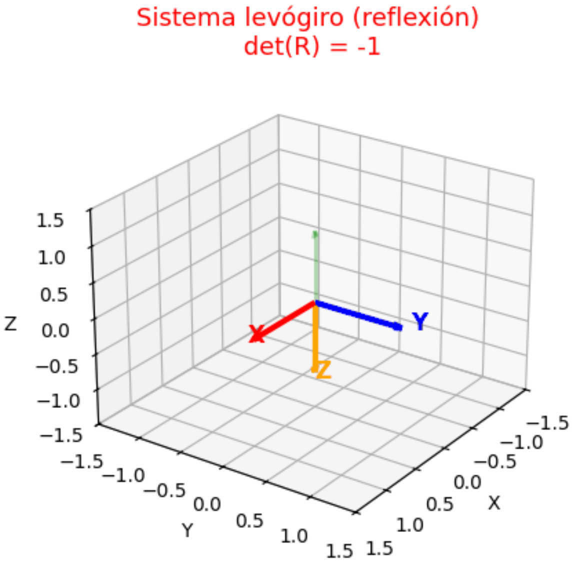
$$\det(R^T)\det(R) = 1 \qquad\qquad \det(R) = \pm 1$$

- Interpretación:

det(R) = +1 → *rotación propia* (sin reflexión), *sistemas dextrógiros* (los usados en robótica).

det(R) = -1 → *rotación impropia* (rotación + *reflexión*), no es una rotación pura





- En *robótica*, se exige *det(R) = +1*

Grupo de Rotación: SO(3)

- En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, las *rotaciones* se representan mediante el *grupo SO(3)* (Special Orthogonal group in 3D).

- SO:
  - ➢ Special → el *determinante* es *+1* (rotación pura, sin reflexión).
  - ➢ Orthogonal → las columnas de la matriz son *perpendiculares* y *unitarias*.

- SO(3): conjunto de todas las matrices $R \in \mathbb{R}^{3x3}$ que cumplen:

$$R^T R = I \quad y \quad \det(R) = +1$$

- Este conjunto *forma un grupo de Lie*, es decir, combina propiedades *algebraicas (grupo)* y *geométricas (variedad continua)*.

- En *robótica*, SO(3) describe todas las posibles *orientaciones de un cuerpo rígido*.

OJO:

❑ Para que una matriz *R* sea una *matriz de rotación*, debe *pertenecer a SO(3)*: debe cumplir

$$\boldsymbol{R^T R = I \quad y \quad \det(R) = +1}$$

Propiedades de una Matriz de Rotación

- Ejercicio:
  Analizar si las siguientes matrices satisfacen las condiciones necesarias para pertenecer al grupo de rotaciones $SO(3)$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

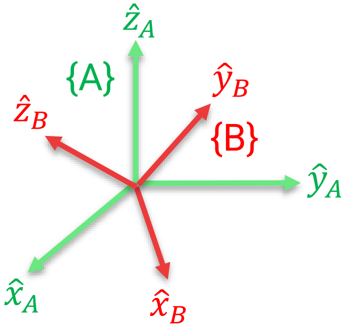
$$R_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & -0.8 \end{bmatrix}$$

Interpretaciones de la Matriz de Rotación

1. *Representación de la Orientación*

- La matriz de rotación *describe la orientación relativa* entre dos sistemas de referencia.



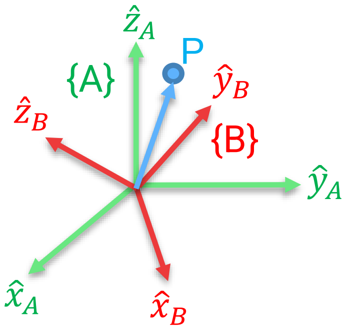
$^{A}R_{B}$:

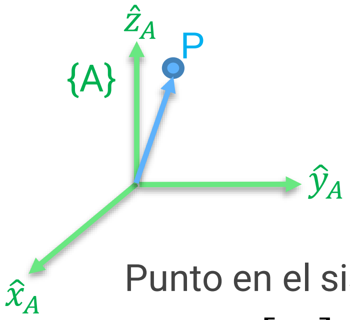
- Interpretación 1: Expresa cómo se encuentra orientado el sistema $\{B\}$ respecto al sistema $\{A\}$.
- Interpretación 2: Define la transformación que lleva las coordenadas del sistema $\{A\}$ hacia las del sistema $\{B\}$.
  - Se parte del sistema de referencia $\{A\}$, considerado canónico.
  - Se obtiene la orientación del sistema $\{B\}$, descrita mediante sus ejes expresados en el marco de $\{A\}$.

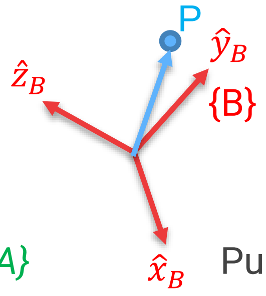
Interpretaciones de la Matriz de Rotación

2. *Mapeo entre Sistemas de Referencia*

- Permite *expresar un mismo punto físico* en distintos sistemas de referencia.







Punto en el sistema *{A}*

$$^{A}p = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$^{A}p = {}^{A}x\hat{x}_A + {}^{A}y\hat{y}_A + {}^{A}z\hat{z}_A$$

Punto en el sistema *{B}*

$$^{B}p = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

$$^{B}p = {}^{B}x\hat{x}_B + {}^{B}y\hat{y}_B + {}^{B}z\hat{z}_B$$

- El objetivo es *transformar las coordenadas* de un punto conocido en el sistema *{B}* para obtener su representación equivalente en el sistema *{A}*.

Interpretaciones de la Matriz de Rotación

2. *Mapeo entre Sistemas de Referencia*

- Proceso: Calcular las *proyecciones del punto* sobre los ejes (x, y, z) del *sistema {A}*.

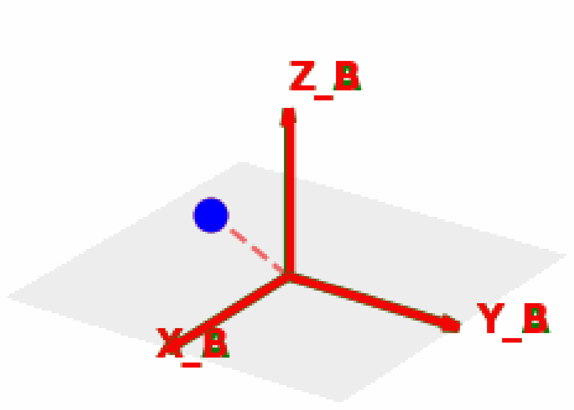
Punto en el sistema *{A}*

$$^{A}p = {}^{A}x\hat{x}_A + {}^{A}y\hat{y}_A + {}^{A}z\hat{z}_A$$

Punto en el sistema *{B}*

$$^{B}p = {}^{B}x\hat{x}_B + {}^{B}y\hat{y}_B + {}^{B}z\hat{z}_B$$

Rotación del sistema {B} respecto a {A}: 0°



$$^{A}x = {}^{B}p.\hat{x}_A \qquad {}^{A}x = {}^{B}x(\hat{x}_B.\hat{x}_A) + {}^{B}y(\hat{y}_B.\hat{x}_A) + {}^{B}z(\hat{z}_B.\hat{x}_A)$$

$$^{A}y = {}^{B}p.\hat{y}_A \qquad {}^{A}y = {}^{B}x(\hat{x}_B.\hat{y}_A) + {}^{B}y(\hat{y}_B.\hat{y}_A) + {}^{B}z(\hat{z}_B.\hat{y}_A)$$

$$^{A}z = {}^{B}p.\hat{z}_A \qquad {}^{A}z = {}^{B}x(\hat{x}_B.\hat{z}_A) + {}^{B}y(\hat{y}_B.\hat{z}_A) + {}^{B}z(\hat{z}_B.\hat{z}_A)$$

- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \\ {}^{A}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B.\hat{x}_A & \hat{y}_B.\hat{x}_A & \hat{z}_B.\hat{x}_A \\ \hat{x}_B.\hat{y}_A & \hat{y}_B.\hat{y}_A & \hat{z}_B.\hat{y}_A \\ \hat{x}_B.\hat{z}_A & \hat{y}_B.\hat{z}_A & \hat{z}_B.\hat{z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ {}^{B}z \end{bmatrix}$$

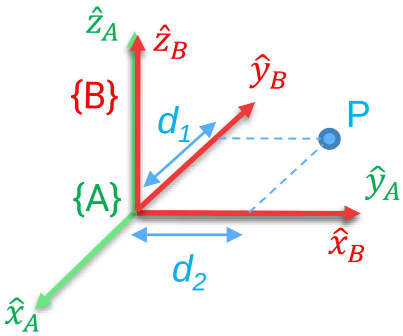
- Relación entre sistemas:

$$^{A}p = {}^{A}R_B {}^{B}P$$

$$^{B}p = {}^{B}R_A {}^{A}P$$

Matriz de Rotación Genérica

- Ejemplo 1:



a) Obtener por simple inspección las coordenadas del punto P en el marco {B}.

$$^{B}p = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Con base en la posición de P en el sistema {B}, derivar sus coordenadas correspondientes en el sistema {A}.

Matriz de rotación: $^{A}R_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Punto transformado: $^{A}p = {}^{A}R_B{}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matriz de Rotación Genérica

Ejemplo 2: El sistema {B} está rotado un ángulo $\theta = 53°$ alrededor del eje *z* con respecto al sistema {A}. Las coordenadas de un punto *P* en el sistema {B} son ${}^{B}P = [5, 0, 3]^T$. Calcular las coordenadas del punto *P* en el sistema {A}.

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{A}R_B \approx \begin{bmatrix} 0.6018 & -0.7986 & 0 \\ 0.7986 & 0.6018 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}P = {}^{A}R_B \cdot {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0.6018 & -0.7986 & 0 \\ 0.7986 & 0.6018 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.009 \\ 3.993 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3: El sistema {B} se obtiene rotando el sistema {A} con un ángulo $\varphi = 127°$ alrededor del eje *y*. n Un punto *P* tiene coordenadas en {B}: ${}^{B}P = [2, 4, 1]^T$. Calcular las coordenadas *P* en el sistema {A}.

Interpretaciones de la Matriz de Rotación

3. *Operador de Rotación*

   - Aplica transformaciones *rotacionales* a *vectores* en un *sistema coordenado constante*.
   - *Definición general*: transforma el vector p_1 en p_2 mediante una rotación de ángulo θ alrededor del vector unitario k.

$$p_2 = R(\theta, k)p_1$$

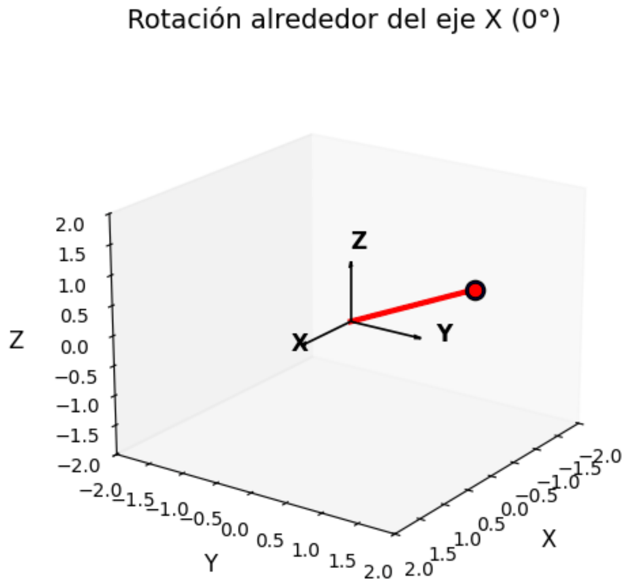
- Ejemplo 1: Hallar el vector resultante de rotar 30° alrededor del eje x al vector p_1 con las coordenadas $(0, \sqrt{3}, 1)$.

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_x(30^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = R_x(30^\circ)\,\mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$



Composición de Rotaciones

Cuando aplicamos *múltiples rotaciones* a un vector o sistema de referencia, el resultado equivalente es el producto de matrices de rotación.

$$R = R_z(\theta_z)\,R_y(\theta_y)\,R_x(\theta_x)$$

Importante: El orden importa → Las rotaciones no son conmutativas. $R_z(\theta_1)R_x(\theta_2) \neq R_x(\theta_2)R_z(\theta_1)$

Tipos de Composición

- Ejes Fijos – Extrínseca (world frame):
  - Cada rotación se aplica con respecto a los *ejes originales* del sistema fijo.
  - Las matrices se *multiplican en el orden natural (pre)* de aplicación.

$$R_{\text{total}} = R(\theta_n)\cdot R(\theta_{n-1})\cdots R(\theta_1)$$

- Ejes Móviles – Intrínseca (body frame):
  - Cada rotación se aplica con respecto a los *ejes actuales* del sistema móvil.
  - Las matrices se *multiplican en orden inverso (post)*.

$$R_{\text{total}} = R(\theta_1)\cdot R(\theta_2)\cdots R(\theta_n)$$

Propiedades:

Asociatividad:

$$(R_1\cdot R_2)\cdot R_3 = R_1\cdot(R_2\cdot R_3)$$

No conmutatividad:

$$R_1\cdot R_2 \neq R_2\cdot R_1$$

Ortogonalidad:

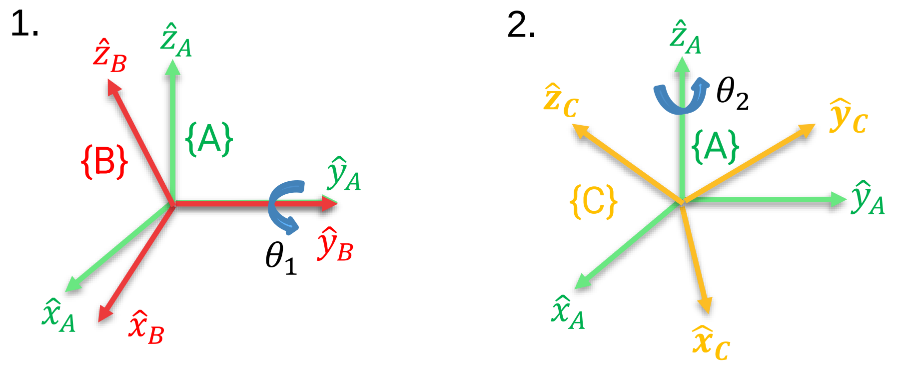
$$R^{-1} = R^T$$

Composición de Rotaciones

- Ejes Fijos – Extrínseca (world frame):

  Se tiene el sistema inicial {A}:
  1. Rotar θ_1 alrededor del eje $\hat{y}_A$
  2. Rotar θ_2 alrededor del eje $\hat{z}_A$

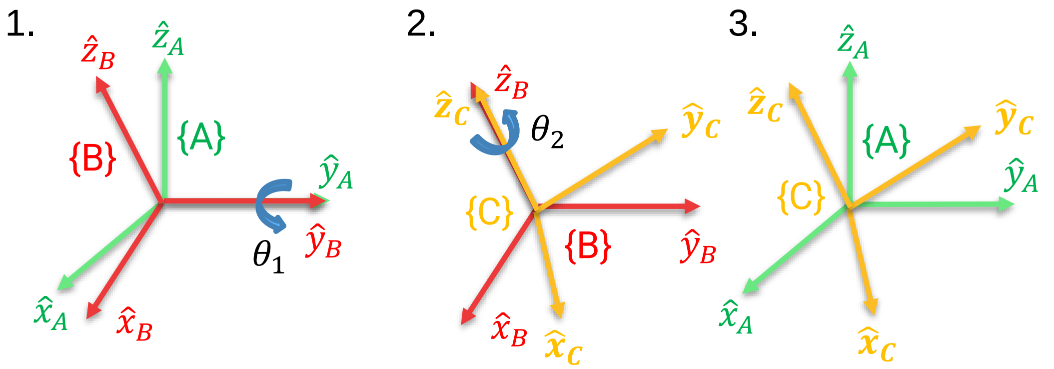
  Rotación que resulta: $R = R_Z(\theta_2)R_y(\theta_1)$



- Ejes Móviles – Intrínseca (body frame):

  Se tiene el sistema inicial {A}:
  1. Rotar θ_1 alrededor del eje $\hat{y}_A$
  2. Rotar θ_2 alrededor del eje $\hat{z}_B$

  Rotación que resulta: $R = R_y(\theta_1)R_z(\theta_2)$



Composición de Rotaciones

- Un sistema *{B}* se obtiene aplicando al sistema *{A}*, una rotación de 90°alrededor del eje *Z*, seguido de otra rotación de 90° alrededor del eje *Y* del sistema fijo. Si se tiene un punto ${}^{B}P = [1{,}2{,}3]^T$, encontrar el punto ${}^{A}P$.

Matrices individuales

$$R_z(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_y(90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Composición $\quad {}^{A}R_B = R_y(90^\circ) \cdot R_z(90^\circ)$

$${}^{A}R_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

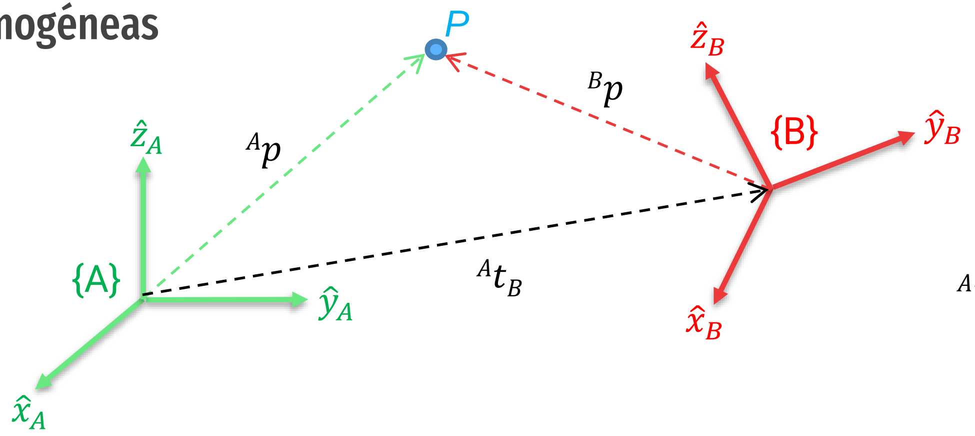
Transformación

$${}^{A}P = {}^{A}R_B \cdot {}^{B}P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Al sistema *{B}* se le aplican una rotación de 90°alrededor del eje *Z*, seguido de otra rotación de 90° alrededor del eje *Y* del sistema rotado. Si se tiene un punto ${}^{B}P = [1{,}0{,}0]^T$, encontrar el punto ${}^{A}P$.

Contenido:

Transformaciones homogéneas



$^{A}t_B$: Origen del sistema B con respecto al sistema A.

- Expresar el punto P del sistema de referencia {B} en el sistema de referencia {A}

$$^{A}p = {}^{A}t_B + {}^{A}R_B\, {}^{B}P$$

- De manera más concisa:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} ^{A}p \\ 1 \end{bmatrix}}^{^{A}\tilde{p}} = \underbrace{\begin{bmatrix} ^{A}R_B & ^{A}t_B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{^{A}T_B} \overbrace{\begin{bmatrix} ^{B}p \\ 1 \end{bmatrix}}^{^{B}\tilde{p}}$$

➡ *Coordenadas homogéneas.*

$^{A}T_B$ ➡ *MATRIZ DE TRANSFORMACION HOMOGENEA*

Transformaciones homogéneas

- *Representan tanto la posición como la orientación (o "pose")* de un sistema de referencia en relación con otro sistema de referencia.

Matriz de rotación (orientación).

Matriz de traslación (posición).

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

eso es lo que hace que sea "homogénea"

- Matemáticamente, pertenecen al grupo *SE(3)* = $\mathbb{R}^3$ × *SO(3)*.
  - SE(3) = *Special Euclidean Group* en 3D.
  - Es el conjunto de todas las posibles *rotaciones + traslaciones* en el espacio 3D.
- Transformaciones puras:

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Solo cambia la orientación.*
- *El origen se queda en el mismo lugar.*
- *Ejemplo: Girar un objeto sobre su eje sin moverlo.*

$$T = \begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *Solo cambia la posición.*
- *La orientación se mantiene igual.*
- *Ejemplo: Mover un objeto en línea recta sin rotarlo.*

Transformaciones Puras

- Rotaciones puras: $T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Rotación alrededor del eje X:

$$Trot_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Rotación alrededor del eje y:

$$Trot_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Rotación alrededor del eje z:

$$Trot_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Traslaciones puras: $T = \begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Traslación a lo largo del eje X:

$$Trasl_x(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Traslación a lo largo del eje y:

$$Trasl_y(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Traslación a lo largo del eje z:

$$Trasl_z(d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones homogéneas – Composición

1. Transformación respecto al *SISTEMA FIJO*:
    - Se usa *PRE-multiplicación (orden inverso)*.
    - Orden: Nueva transformación × Transformación actual
    - Analogía: "Instrucciones desde el cuarto de control"

2. Transformación respecto al *SISTEMA MOVIL*:
(es decir, el sistema actual, nuevo o transformado)
    - Se usa *POST-multiplicación (orden directo)*.
    - Orden: Transformación actual × Nueva transformación
    - Analogía: "Instrucciones desde la cabina del piloto"

Transformaciones homogéneas – Composición

Ejemplo 1: Un robot inicia en la posición (0, 0, 0) con su orientación alineada a los ejes globales. Luego, rota 90° alrededor del eje Z y, después de la rotación, se desplaza 2 metros en la nueva dirección del eje X. ¿cuál es su posición y orientación final después de estos movimientos?

Transformación 1: Rotación 90° alrededor del eje Z

$$T_1 = Trot_z(90^\circ) = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

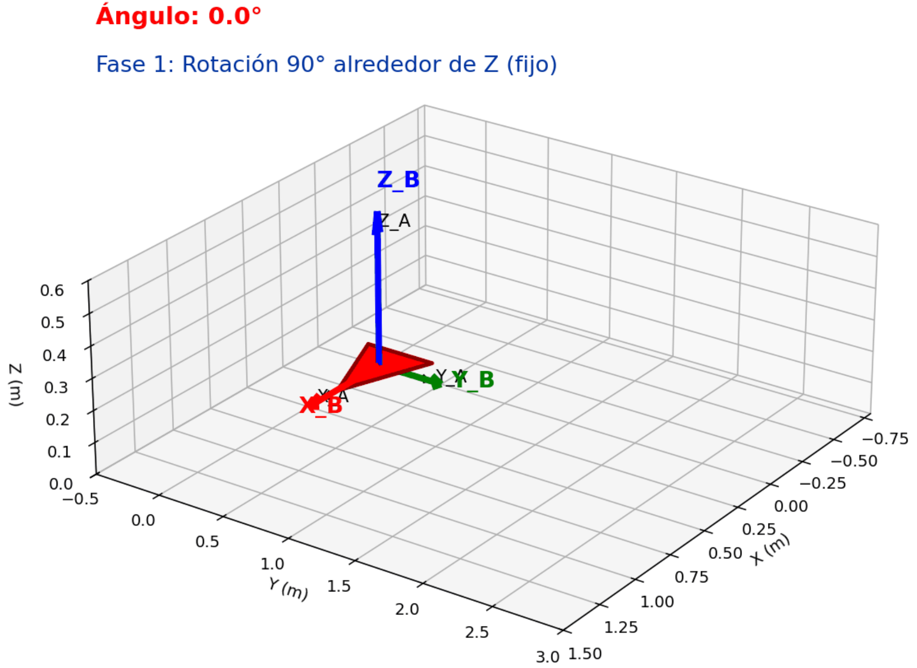
Transformación 2: Traslación 2m en su NUEVA dirección X

$$T_2 = Trasl_x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composición de transformaciones (sistema móvil - post-multiplicación)

$$T_{final} = T_1 \cdot T_2$$

$$T_{final} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



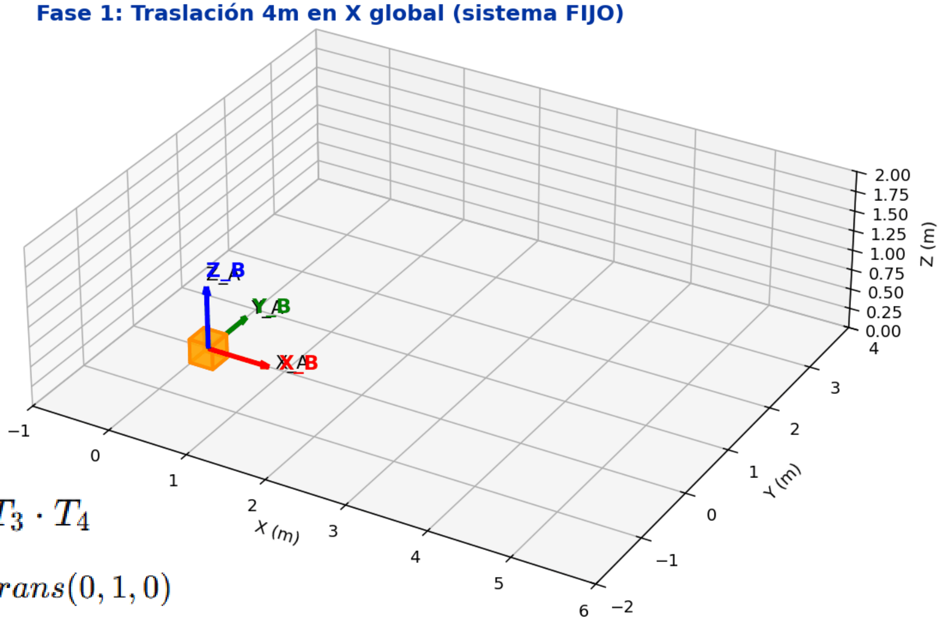
Transformaciones homogéneas – Composición

Ejemplo 3: Un robot móvil parte en el origen (0,0,0) con orientación alineada con el sistema global {A}. Realiza la siguiente secuencia de movimientos: avanza 4 metros en la dirección global X; gira 90° antihorario alrededor de su propio eje Z; Avanza 2 metros en su dirección actual X; Avanza 1 metro en su dirección actual Y; rota 30° alrededor del eje Z fijo del mundo. Hallar la posición y orientación final del robot.

Matrices individuales

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_5 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Composición de transformaciones (sistema combinado)

Sistemas fijos (global): T_1, T_5

Sistemas móvil (robot): T_2, T_3, T_4

$$^{A}T_B = T_5 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4$$

$$^{A}T_B = R_z(30^\circ) \cdot Trans(4,0,0) \cdot R_z(90^\circ) \cdot Trans(2,0,0) \cdot Trans(0,1,0)$$

Transformaciones homogéneas – Composición

- Las transformaciones homogéneas pueden descomponerse en transformaciones puras, es decir, en una parte de *traslación* y otra de *rotación*.
- Toda matriz homogénea puede interpretarse bajo dos enfoques equivalentes.

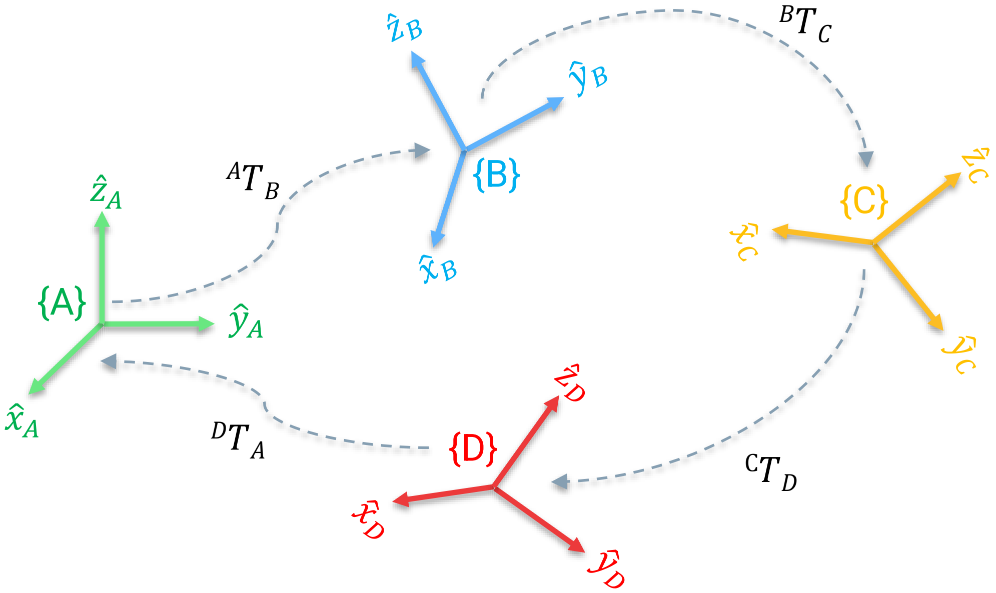
$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Traslación} \\ t}} \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\textit{Rotación} \\ R}}$$

- Interpretación 1:
  1. Primero se realiza una traslación de t unidades.
  2. Luego se aplica la rotación R respecto al nuevo sistema ya trasladado.

- Interpretación 2:
  1. Primero se efectúa la rotación R.
  2. Después se aplica la traslación t, pero esta vez entendida con respecto al sistema fijo original.

Transformaciones homogéneas – Composición

- Cuando se tiene diferentes sistemas de referencia:



$$^{A}T_{B}\,^{B}T_{C}\,^{C}T_{D}\,^{D}T_{A} = I$$

- Ejemplo:
  Sistema {B} con respecto al sistema {D}

$$^{B}T_{C}\,^{C}T_{D}\,^{D}T_{A} = (^{A}T_{B})^{-1}$$

$$^{B}T_{C}\,^{C}T_{D} = (^{A}T_{B})^{-1}(^{D}T_{A})^{-1}$$

$$^{B}T_{D} = (^{A}T_{B})^{-1}(^{D}T_{A})^{-1}$$

$$(^{B}T_{D})^{-1} = [(^{A}T_{B})^{-1}(^{D}T_{A})^{-1}]^{-1}$$

$$^{D}T_{B} = {^{D}T_{A}}\,^{A}T_{B}$$

Transformaciones homogéneas – Usos

1. *Describir poses completas*:
   Permiten representar simultáneamente la *posición* y la *orientación* de un sistema de referencia (o cuerpo rígido) respecto a otro.

2. *Cambiar el sistema de referencia de un punto*:
   Facilitan expresar un punto definido en el sistema $\{B\}$ dentro del sistema $\{A\}$ mediante la relación lineal.

$$^{A}\tilde{p} = {}^{A}T_{B}\ {}^{B}\tilde{p}$$

   Nota: es necesario usar coordenadas homogéneas, indicadas con la tilde (~)

3. *Aplicar movimientos rígidos a un punto*:
   Permiten transformar un punto dentro del mismo sistema, combinando en un solo operador tanto la rotación como la traslación

Transformaciones homogéneas – Propiedades

1. Inversa de una transformación homogénea.

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la ecuación original:

$${}^{A}p = {}^{A}t_B + {}^{A}R_B \, {}^{B}p$$

Al despejar ${}^{B}p$:

$${}^{A}p - {}^{A}t_B = {}^{A}R_B \cdot {}^{B}p$$

Aplicamos la inversa de la rotación (que es su transpuesta R^T):

$${}^{A}R_B^T \cdot ({}^{A}p - {}^{A}t_B) = {}^{B}p$$

Distribuyendo:

$${}^{B}p = {}^{A}R_B^T \cdot {}^{A}p - {}^{A}R_B^T \cdot {}^{A}t_B$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \neq T^T$$

2. Producto de transformaciones homogéneas

Si se tienen dos transformaciones:

$$T_1 = \begin{bmatrix} R_1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} R_2 & t_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

entonces su composición es:

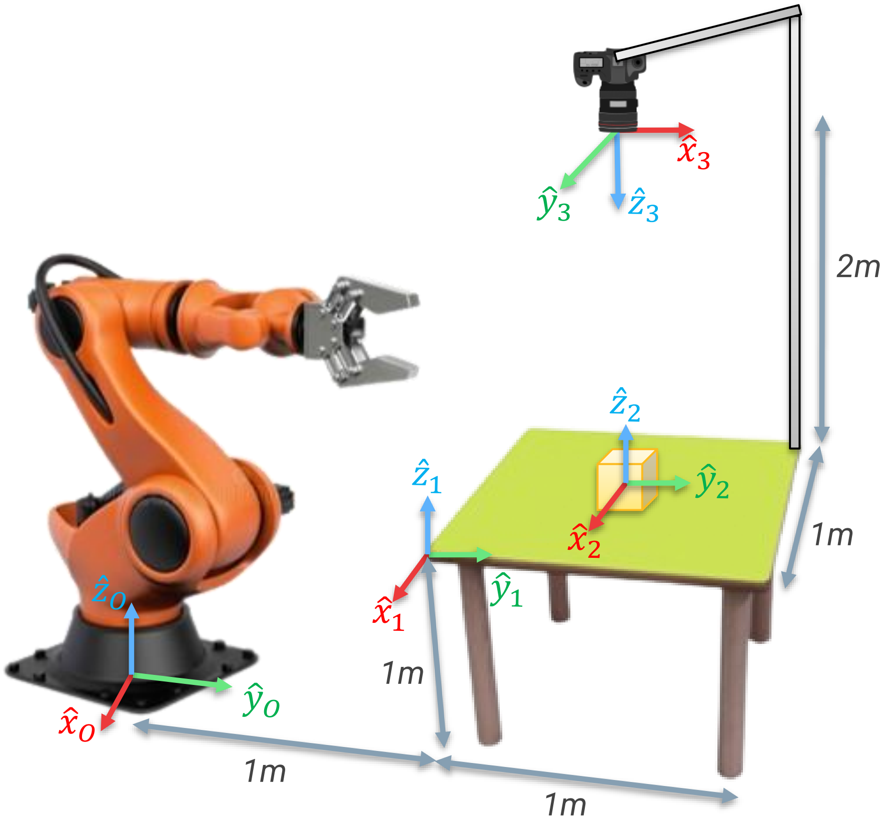
$$T_1 T_2 = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & R_1 t_2 + t_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 T_2 \neq T_2 T_1$$

Transformaciones homogéneas – Propiedades

Ejemplo: Se tiene un robot cuya base está ubicada a 1 m del borde de una mesa. La mesa mide 1 m de altura y su superficie es un cuadrado de 1 m por lado.
Un sistema de referencia {1} está fijado en uno de los bordes de la mesa. En el centro de la mesa se encuentra un cubo de 20 cm de arista, con un sistema de referencia {2} colocado en su base.
Una cámara está posicionada verticalmente sobre el centro del cubo, a 2 m por encima de la superficie de la mesa, y posee un sistema de referencia {3} asociado.

a) Determinar las transformaciones homogéneas que relacionan cada sistema ({1}, {2}, {3}) con el sistema base {0}.
b) Calcular la transformación homogénea que expresa el sistema {2} con respecto al sistema de la cámara {3}.



Contenido:

Parametrización de la Orientación

- La *orientación* (o *rotación*) en el espacio tiene *3 grados de libertad.*
- La *matriz de rotación* tiene *9 elementos*, lo que genera *redundancia* en la representación.
- Reducir la redundancia y representar la orientación utilizando *menos de 9 elementos*.
- Parametrizaciones comunes:
  - Representación eje/ángulo (3 parámetros)
  - Ángulos de Euler (3 parámetros)
  - Ángulos de Roll, Pitch, Yaw (3 parámetros)
  - Cuaterniones (4 parámetros)
- Parametrizaciones comunes:
  - Coordenadas exponenciales (3 parámetros)
  - Problema: Singularidades y casos mal condicionados (*Gimbal Lock* - bloqueo de cardán).

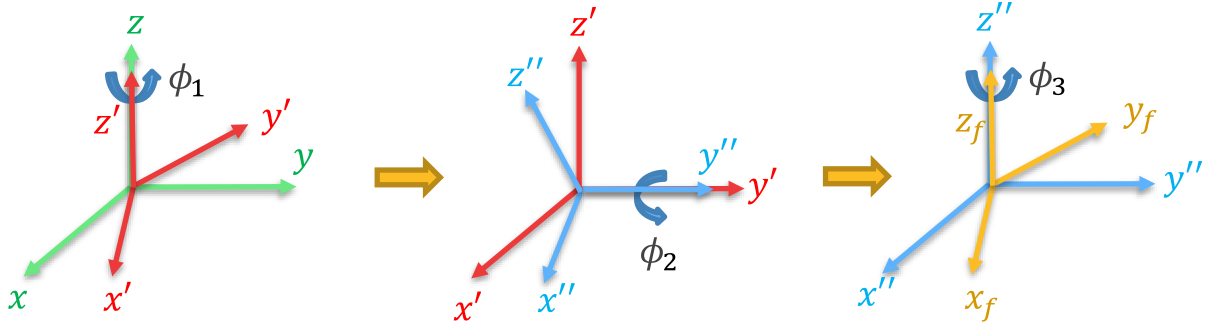
Ángulos de Euler

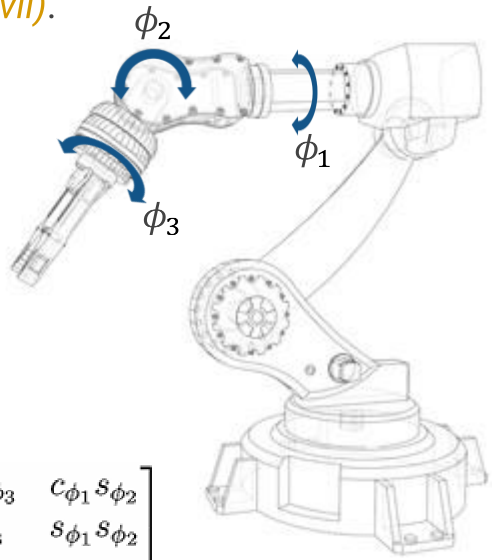
- Los *ángulos de Euler* se usan para describir la *orientación* (rotación) mediante *3 ángulos.*
- Estos ángulos provienen de *3 rotaciones consecutivas* alrededor de *ejes móviles* que varían en cada paso.
- Existen 12 combinaciones posibles de estas rotaciones, que se dividen en:
  - Ángulos de Euler clásicos: *XZX*, *XYX*, *YXY*, *YZY*, *ZYZ*, *ZXZ*
  - Ángulos de Tait-Bryan: *XYZ*, *XZY*, *YXZ*, *YZX*, *ZXY*, *ZYX*.
- Los ángulos de Euler más frecuentes incluyen:
  - *ZYZ*.
  - *ZXZ*.
  - *ZYX* (también llamados *ángulos de Fick* o los *ángulos roll, pitch, yaw*).
  - *YZX* (conocidos como los *ángulos de Helmholtz*).
  - *ZXY* (particularmente en *quadrotors*).
- *Nota:* No se pueden realizar *dos rotaciones consecutivas* sobre *ejes paralelos*.

Ángulos de Euler ZYZ

- Los *ángulos de Euler* **ZYZ** se derivan de la siguiente secuencia de *rotaciones*:

1. *Rotación* de un ángulo ϕ_1 alrededor del *eje z*.
2. *Rotación* del sistema resultante un ángulo ϕ_2 alrededor del *eje y' (eje móvil)*.
3. *Rotación* del sistema resultante un ángulo ϕ_3 alrededor del *eje z'' (eje móvil)*.





- Matriz de Rotación Equivalente:

$$R(\phi) = R_z(\phi_1)R'_y(\phi_2)R''_z(\phi_3)$$

$$\boldsymbol{R}(\phi) = \begin{bmatrix} c_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\phi_3} - s_{\phi_1}s_{\phi_3} & -s_{\phi_1}c_{\phi_3} - c_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\phi_3} & c_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ s_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\phi_3} + c_{\phi_1}s_{\phi_3} & c_{\phi_1}c_{\phi_3} - s_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\phi_3} & s_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ -s_{\phi_2}c_{\phi_3} & s_{\phi_2}s_{\phi_3} & c_{\phi_2} \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler ZYZ a partir de una matriz de rotación

- Dada una matriz de rotación R:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Los elementos clave que necesitamos son:

- r_{13}, r_{23}, r_{33}
- r_{31}, r_{32}

- La matriz que ya conocemos:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ -\sin(\phi_2)\cos(\phi_3) & \sin(\phi_2)\sin(\phi_3) & \cos(\phi_2) \end{bmatrix}$$

- Comparando las matrices y despejando los ángulos:

1. $\phi_2 = \operatorname{atan2}\left(\pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$

- Si $+$: ϕ_2 está en el rango de 0 a π.
- Si $-$: ϕ_2 está en el rango de $-\pi$ a 0.
- **Nota**: Se debe tener en cuenta que $\sin(\phi_2) \neq 0$.

2. $\phi_1 = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{23}}{\sin\phi_2}, \frac{r_{13}}{\sin\phi_2}\right)$

3. $\phi_3 = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\sin\phi_2}, -\frac{r_{31}}{\sin\phi_2}\right)$

Singularidades en Ángulos de Euler *ZYZ*

- Las *singularidades* son configuraciones especiales donde:
  - *Perdemos un grado de libertad* → no podemos controlar independientemente los 3 ángulos.
  - *El mapeo se vuelve no único* → infinitas combinaciones dan la misma orientación.
  - *Los cálculos numéricos se vuelven inestables* (división por cero).
- ¿Cuándo ocurren en Ángulos de Euler *ZYZ*?
  - Las singularidades aparecen cuando $sin(\varphi_2) = 0$, es decir, cuando $\varphi_2 = 0, \pi, 2\pi, \ldots, -\pi, \ldots$

- Caso 1: $\varphi_2 = 0$

  ¿Qué significa geométricamente?
  - *La segunda rotación (en Y') es de 0°*
  - *Los ejes Z inicial y Z final están alineados*
  - *Las rotaciones 1 y 3 son alrededor del mismo eje*

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_3) & -\sin(\phi_1 + \phi_3) & 0 \\ \sin(\phi_1 + \phi_3) & \cos(\phi_1 + \phi_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Solo aparece la suma $\varphi_1 + \varphi_3$

- Caso 2: $\varphi_2 = \pi$

  ¿Qué significa geométricamente?
  - *La segunda rotación es de 180°*
  - *El sistema da una "voltereta" intermedia*
  - *Los ejes Z inicial y final están alineados pero opuestos*

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} -\cos(\phi_3 - \phi_1) & \sin(\phi_3 - \phi_1) & 0 \\ \sin(\phi_3 - \phi_1) & \cos(\phi_3 - \phi_1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  Solo aparece la diferencia $\varphi_3 - \varphi_1$

Ángulos de Euler ZYZ

- Ejemplo 1: Obtener la matriz de rotación equivalente para los ángulos ZYZ (30°, 50°, 90°):

$$R = R_z(30^\circ)\cdot R_y(50^\circ)\cdot R_z(90^\circ)\quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{bmatrix} c_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\phi_3} - s_{\phi_1}s_{\phi_3} & -s_{\phi_1}c_{\phi_3} - c_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\phi_3} & c_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ s_{\phi_1}c_{\phi_2}c_{\phi_3} + c_{\phi_1}s_{\phi_3} & c_{\phi_1}c_{\phi_3} - s_{\phi_1}c_{\phi_2}s_{\phi_3} & s_{\phi_1}s_{\phi_2} \\ -s_{\phi_2}c_{\phi_3} & s_{\phi_2}s_{\phi_3} & c_{\phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.557 & 0.663 \\ 0.866 & -0.321 & 0.383 \\ 0 & 0.766 & 0.643 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo 2: Obtener la matriz de rotación para los ángulos ZYZ (-150°, -50°, -90°):

$$R = R_z(-150^\circ)\cdot R_y(-50^\circ)\cdot R_z(-90^\circ) \qquad R = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.557 & 0.663 \\ 0.866 & -0.321 & 0.383 \\ 0 & 0.766 & 0.643 \end{bmatrix}$$

- Ejemplo 3: Dada la matriz de rotación anterior, encontrar los dos conjuntos posibles de ángulos ZYZ:

$$R = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.557 & 0.663 \\ 0.866 & -0.321 & 0.383 \\ 0 & 0.766 & 0.643 \end{bmatrix}$$

Paso 1: φ_2

$\cos \varphi_2 = 0.643$

$\varphi_2 \approx 50°$

Paso 2: φ_1 (usando φ_2 positivo)

$$\phi_1 = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{23}}{\sin\phi_2}, \frac{r_{13}}{\sin\phi_2}\right)$$

$$\phi_1 = \operatorname{atan2}\left(\frac{0.383}{0.766}, \frac{0.663}{0.766}\right)$$

$$\phi_1 = \operatorname{atan2}(0.5, 0.866) \approx 30^\circ$$

Paso 2: φ_3 (usando φ_2 positivo)

$$\phi_3 = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\sin\phi_2}, -\frac{r_{31}}{\sin\phi_2}\right)$$

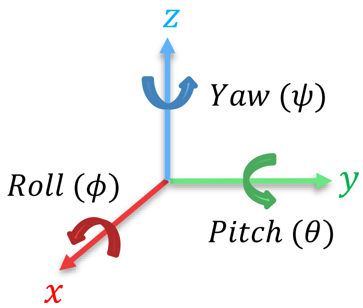
$$\phi_3 = \operatorname{atan2}\left(\frac{0.766}{0.766}, -\frac{0}{0.766}\right)$$

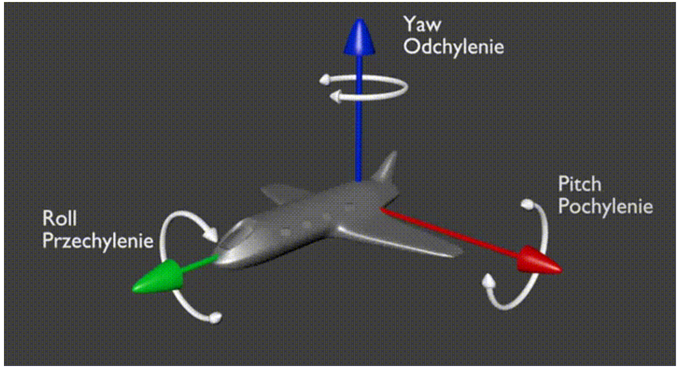
$$\phi_3 = \operatorname{atan2}(1, 0) \approx 90^\circ$$

Ángulos de Roll, Pitch y Yaw

- También llamados *ZYX Euler angles* (orden importante: primero Yaw, luego Pitch, luego Roll)

  1. Yaw (ψ): Rotación alrededor del eje *Z* (guiñada - dirección).
  2. Pitch (θ): Rotación alrededor del eje *Y* (cabeceo - inclinación adelante/atrás)
  3. Roll (ϕ): Rotación alrededor del eje *X* (alance - inclinación lateral)





- Matriz de Rotación Equivalente:

$$R = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\phi)$$

$$R = \begin{bmatrix} c_{\phi_y} c_{\phi_p} & c_{\phi_y} s_{\phi_p} s_{\phi_r} - s_{\phi_y} c_{\phi_r} & c_{\phi_y} s_{\phi_p} c_{\phi_r} + s_{\phi_y} s_{\phi_r} \\ s_{\phi_y} c_{\phi_p} & s_{\phi_y} s_{\phi_p} s_{\phi_r} + c_{\phi_y} c_{\phi_r} & s_{\phi_y} s_{\phi_p} c_{\phi_r} - c_{\phi_y} s_{\phi_r} \\ -s_{\phi_p} & c_{\phi_p} s_{\phi_r} & c_{\phi_p} c_{\phi_r} \end{bmatrix}$$

Ángulos de Roll, Pitch y Yaw a partir de una matriz de rotación

- Dada una matriz de rotación ***R***:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- La matriz que ya conocemos:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\phi_y} c_{\phi_p} & X & X \\ s_{\phi_y} c_{\phi_p} & X & X \\ -s_{\phi_p} & c_{\phi_p} s_{\phi_r} & c_{\phi_p} c_{\phi_r} \end{bmatrix}$$

- Comparando las matrices y despejando los ángulos:

1. *Encontrar Pitch (ϕ_p):*

$$r_{31} = -\sin\phi_p$$

$$\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2} = |\cos\phi_p|$$

$$\phi_p = \operatorname{atan2}\left(-r_{31},\ \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

- **Signo +:** $\phi_p \in [-\pi/2, \pi/2]$ (rango principal)
- **Signo -:** $\phi_p \in [\pi/2, 3\pi/2]$

Nota: Usamos el mismo $\cos\phi_p$ (con el signo elegido) en ambas fórmulas.

Cuando $\cos\phi_p \neq 0$

2. *Encontrar Roll (ϕ_r):*

$$\phi_r = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\phi_p}, \frac{r_{33}}{\cos\phi_p}\right)$$

3. *Encontrar Yaw (ϕ_y):*

$$\phi_y = \operatorname{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\phi_p}, \frac{r_{11}}{\cos\phi_p}\right)$$

Singularidades en Ángulos de Roll, Pitch y Yaw

- ¿Cuándo ocurren en Ángulos de Roll, Pitch y Yaw ?
  - Las singularidades aparecen cuando *cos* ϕ_p = 0, es decir, cuando ϕ_p = ± π/2, ± 3π/2,...
  - Pero principalmente nos interesan: π/2 (90°) y - π/2 (-90°)

- Caso 1: *cos* ϕ_p = 90°

  ¿Qué significa geométricamente?
  - *El vehículo apunta verticalmente hacia arriba*
  - *Los ejes X (Roll) y Z (Yaw) se alinean*
  - *¡Girar en Roll o en Yaw produce el mismo efecto!*

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi_r - \phi_y) & \cos(\phi_r - \phi_y) \\ 0 & \cos(\phi_r - \phi_y) & \sin(\phi_r - \phi_y) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solo aparece la diferencia ϕ_r - ϕ_y

- Caso 2 : *cos* ϕ_p = -90°

  ¿Qué significa geométricamente?
  - *El vehículo apunta verticalmente hacia abajo*
  - *Otra vez los ejes se alinean*
  - *Pérdida de un grado de libertad*

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi_r + \phi_y) & -\cos(\phi_r + \phi_y) \\ 0 & \cos(\phi_r + \phi_y) & -\sin(\phi_r + \phi_y) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solo aparece la suma ϕ_r + ϕ_y

Ángulos de Roll, Pitch y Yaw

- Ejemplo 1: De la matriz de rotación obtenida por los ángulos de Euler ZYZ anteriormente, se pide encontrar los dos posibles conjuntos de ángulos roll, pitch, yaw

$$R = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.557 & 0.663 \\ 0.866 & -0.321 & 0.383 \\ 0 & 0.766 & 0.643 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

a. *Encontrar Pitch (ϕ_p):* $\phi_p = \text{atan2}\left(-r_{31}, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$

- *Solución 1 (signo +):* $\phi_{p1} = \text{atan2}(0, 1.0001) = 0^\circ$

b.1. *Encontrar Roll (ϕ_r):*

$$\phi_r = \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos\phi_p}, \frac{r_{33}}{\cos\phi_p}\right) = \text{atan2}(0.766, 0.643) \approx 50^\circ$$

c.1. *Encontrar Yaw (ϕ_y):*

$$\phi_y = \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos\phi_p}, \frac{r_{11}}{\cos\phi_p}\right) = \text{atan2}(0.866, -0.5) \approx 120^\circ$$

$$(\phi_r, \phi_p, \phi_y) = (50^\circ, 0^\circ, 120^\circ)$$

- *Solución 2 (signo -):* $\phi_{p2} = \text{atan2}(0, -1.0001) = 180^\circ$

b.2. *Encontrar Roll (ϕ_r):*

$$\phi_r = \text{atan2}(-0.766, -0.643) \approx -130^\circ$$

c.2. *Encontrar Yaw (ϕ_y):*

$$\phi_y = \text{atan2}(-0.866, 0.5) = -60^\circ$$

$$(\phi_r, \phi_p, \phi_y) = (-130^\circ, 180^\circ, -60^\circ)$$

Cuaterniones Unitarios - Introducción

- Un *cuaternión* es un conjunto formado por *cuatro parámetros reales* (w, εx, εy, εz), junto con las operaciones de *suma* (+) y *multiplicación* ($\circ$).
- Su expresión general es: $Q = w + \varepsilon_x \mathbf{i} + \varepsilon_y \mathbf{j} + \varepsilon_z \mathbf{k}$

  w = parte escalar (un número normal)

  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ = parte vectorial

- Representaciones equivalentes: $Q = (w, \varepsilon)$ $Q = (w, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$
- Producto de cuaterniones:

  Dados dos cuaterniones: $Q_1 = (w_1, \varepsilon_1), Q_2 = (w_2, \varepsilon_2)$

  el producto cuaterniónico se define como:

$$Q_1 \circ Q_2 = \left(w_1 w_2 - \varepsilon_1^T \varepsilon_2,\ w_1 \varepsilon_2 + w_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \times \varepsilon_2\right)$$

  Este producto es asociativo, pero no conmutativo.

- Matriz asociada al cuaternión:

$$Q \circ Q_1 = \hat{Q} Q_1 \Rightarrow$$

como vector columna

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} w & -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \\ \varepsilon_x & w & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_y & \varepsilon_z & w & -\varepsilon_x \\ \varepsilon_z & -\varepsilon_y & \varepsilon_x & w \end{bmatrix}$$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} w & -\varepsilon^T \\ \varepsilon & wI + \hat{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Cuaterniones Unitarios

- Un *cuaternión unitario* es un cuaternión cuya *norma* es igual a 1: $\|Q\| = 1$

$$w^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 = 1$$

- Relación con la rotación en 3D:

Un cuaternión unitario representa la rotación de un ángulo θ alrededor de un eje unitario: $u = (u_x, u_y, u_z)$

$$Q = (w, \varepsilon) = \left(\cos\frac{\theta}{2},\ u\sin\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow Q = \left(\cos\frac{\theta}{2},\ u_x\sin\frac{\theta}{2},\ u_y\sin\frac{\theta}{2},\ u_z\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

- Propiedades de los cuaterniones unitarios:

Inversa:
La inversa de un cuaternión unitario es su conjugado:

$$Q^{-1} = Q^* = (w, -\varepsilon)$$

Preservación de la norma:

El producto de cuaterniones unitarios mantiene la norma:

$$\|Q_1 \circ Q_2\| = 1$$

Elemento identidad:

$$Q = (1, 0, 0, 0)$$

Ambigüedad en la representación:

Los pares (u,θ) y $(-u,-\theta)$ producen el mismo cuaternión

Cuaterniones Unitarios - Ejemplos

- Ejemplo 1: Hallar el cuaternión de una rotación de 60° alrededor de (2, 0, 0)

  Paso 1: Normalizar el eje:

  $$\|(2,0,0)\| = \sqrt{2^2+0^2+0^2} = 2$$

  $$u = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{0}{2}\right) = (1,0,0)$$

  Paso 2: Calcular el cuaternión:

  $$Q = (\cos(30^\circ), \sin(30^\circ)\cdot(1,0,0))$$

  $$Q = (0.866, 0.5, 0, 0)$$

- Ejemplo 2: Hallar el conjugado e inversa del cuaternión anterior *Q*: $Q^* = Q^{-1} = (0.866,\ -0.5,\ 0,\ 0)$
- Ejemplo 3: Qué cuaternión representa rotar 120° alrededor del eje (0, 1, 0): $Q = (0.5, 0, 0.866, 0)$
- Ejemplo 4: Hallar los cuaterniones que representan la rotación de un ángulo alrededor de los 3 ejes *(x, y, z)*

  Rotación alrededor del eje X:

  $$Q_x(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, 0, 0\right)$$

  Rotación alrededor del eje Y:

  $$Q_y(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, 0, \sin\frac{\theta}{2}, 0\right)$$

  Rotación alrededor del eje Z:

  $$Q_z(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, 0, 0, \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

Cuaterniones Unitarios

- Para combinar dos rotaciones se usa el producto de cuaterniones:

Si $^{a}Q_b$ y $^{b}Q_c$ representan rotaciones consecutivas: $^{a}Q_c = {}^{a}Q_b \circ {}^{b}Q_c$

- Eje y ángulo asociados a un cuaternión:

Dado un cuaternión: $Q = (w, \varepsilon)$

su equivalente en forma eje−ángulo se obtiene como:

- *Ángulo de rotación:* $\theta = 2\,\text{atan2}(\|\varepsilon\|,\, w)$
- *Eje unitario de rotación:* $u = \dfrac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}$

Si $\|\varepsilon\| = 0$ ⇨ $\theta = 0$

es decir, no existe rotación.

- Matriz de rotación a partir de un cuaternión:

La rotación equivalente al cuaternión $Q = (w, \varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z)$ está dada por:

$$R(w,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 2(w^2+\varepsilon_x^2)-1 & 2(\varepsilon_x\varepsilon_y - w\varepsilon_z) & 2(\varepsilon_x\varepsilon_z + w\varepsilon_y) \\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + w\varepsilon_z) & 2(w^2+\varepsilon_y^2)-1 & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z - w\varepsilon_x) \\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_z - w\varepsilon_y) & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z + w\varepsilon_x) & 2(w^2+\varepsilon_z^2)-1 \end{bmatrix}$$

Cuaterniones Unitarios a partir de una matriz de rotación

- Dada una matriz de rotación ***R***:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- El cuaternión asociado correspondiente: $Q = (w, \varepsilon)$ *puede obtenerse directamente de los elementos de* ***R****:*

Parte escalar: $w = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$

Parte vectorial: $\epsilon_x = \frac{r_{32} - r_{23}}{4w}, \quad \epsilon_y = \frac{r_{13} - r_{31}}{4w}, \quad \epsilon_z = \frac{r_{21} - r_{12}}{4w}$

- Observaciones importantes:
  - *Existen cuatro expresiones basadas en raíces cuadradas, una para cada componente del cuaternión.*
  - *El desafío principal es seleccionar el signo correcto en la raíz.*
  - *Para garantizar consistencia, se utilizan seis relaciones alternativas entre los elementos de* ***R*** *y los del cuaternión.*
  - *Las expresiones mostradas corresponden a una de las posibles soluciones consistentes*

Cuaterniones Unitarios - Ejemplos

- Ejemplo: Hallar el cuaternión unitario equivalente de la siguiente matriz de rotación arbitraria:

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.146 & 0.854 \\ 0.5 & 0.854 & -0.146 \\ -0.707 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 0.5 + 0.854 + 0.5 = 1.854$$

$$w = 0.5\sqrt{1 + 1.854} = 0.5\sqrt{2.854} \approx 0.5 \times 1.689 = 0.8445$$

$$\epsilon_x = (0.5 - (-0.146))/(4 \times 0.8445) = 0.646/3.378 \approx 0.191$$

$$\epsilon_y = (0.854 - (-0.707))/(3.378) = 1.561/3.378 \approx 0.462$$

$$\epsilon_z = (0.5 - (-0.146))/(3.378) = 0.646/3.378 \approx 0.191$$

$$Q \approx (0.8445, 0.191, 0.462, 0.191)$$

Capítulo III:
FIN

Introducción a la Robótica