Capítulo II:
Análisis y Mejora de Intensidad

Procesamiento Digital de Imágenes

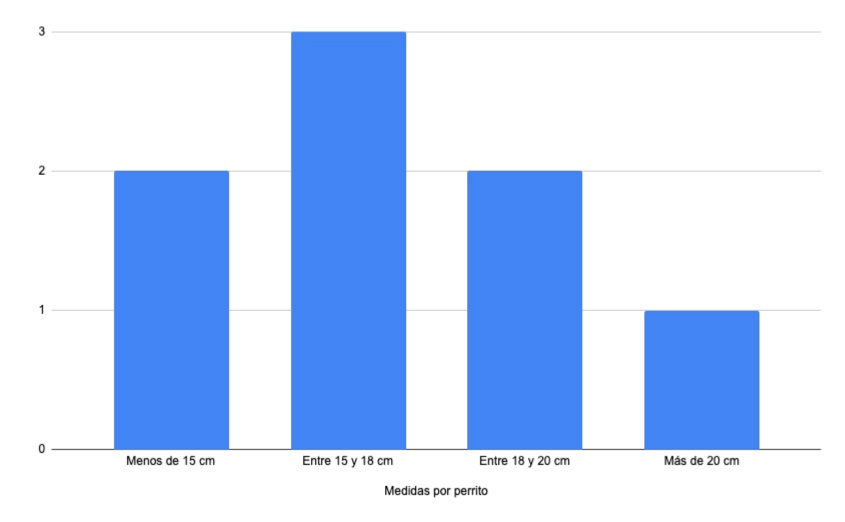
Contenido:

Contenido:

Definición de Histograma

Un histograma es un gráfico de barras que permite representar la frecuencia de un valor estadístico dentro de un grupo o población de estudio. Es decir, permite observar desde un plano general la distribución de una característica cuantitativa y continua, o comparar los resultados de un proceso específico.

Medidas del perrito (variable)	Cantidad de perritos (frecuencia)
Menos de 15 cm	2
Entre 15 y 18 cm	3
Entre 18 y 20 cm	2
Más de 20 cm	1



Definición de Histogramas

Un histograma en el contexto del procesamiento de imágenes es una representación gráfica que muestra la distribución de las intensidades de los píxeles en una imagen. Es una herramienta fundamental para analizar y mejorar la intensidad de una imagen, ya que proporciona información sobre el rango dinámico, el contraste y la distribución tonal.

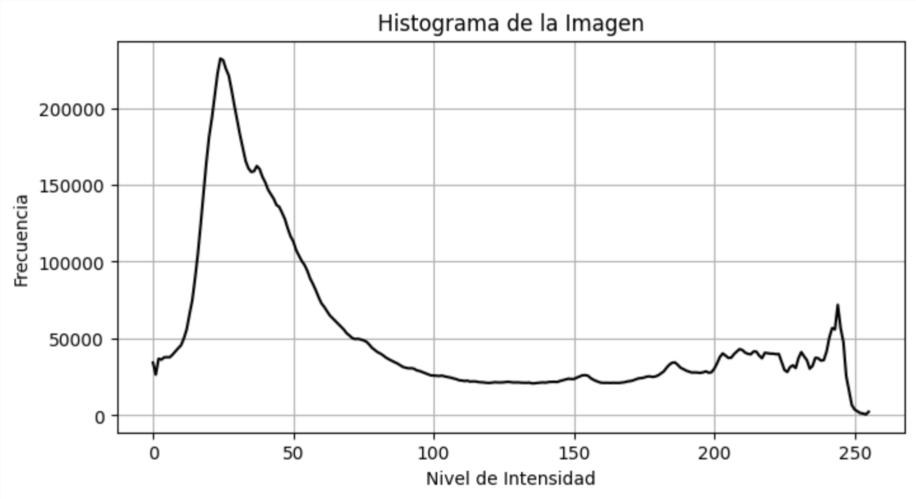
Generalmente: Para una imagen en escala de grises con intensidades en el rango $[0, L-1]$ (Ejm. $L = 256$ para 8 bits) , el histograma $h(r_k)$ cuenta el número de píxeles con intensidad r_k , donde $k = 0,1,2 \ldots, L-1$

$$h(r_k) = n_k$$

- r_k: Nivel de intensidad k.
- n_k: Número de píxeles con intensidad r_k.

Histogramas

Definición de Histogramas

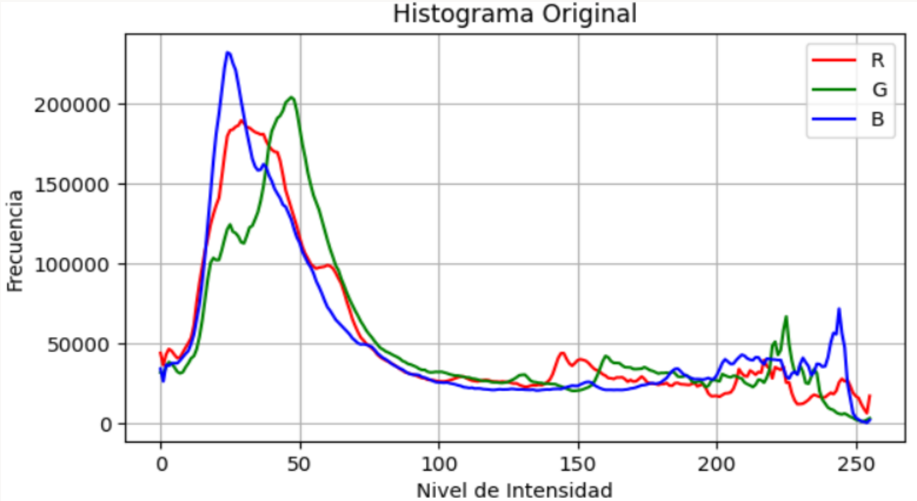


Interpretación Visual:

- El eje x representa los niveles de intensidad (e.g., 0 a 255).
- El eje y representa la frecuencia (número de píxeles) para cada nivel de intensidad.
- Ejemplo: En una imagen oscura, el histograma tendrá más valores hacia la izquierda (intensidades bajas); en una imagen clara, hacia la derecha (intensidades altas).

Histogramas

Definición de Histogramas



Escala de grises: Un solo histograma para las intensidades.

Color (RGB): Un histograma por canal (R, G, B), o un histograma combinado.

Cálculo del Histograma

El cálculo del histograma implica contar la frecuencia de cada nivel de intensidad en la imagen. Este proceso puede realizarse manualmente.

Pasos:

1) Inicializar un arreglo h de tamaño L (Ejm., 256) con ceros: $h = [0, 0, \ldots, 0]$
2) Recorrer cada píxel de la imagen.
3) Para cada píxel con intensidad r_k incrementar el contador: $h[r_k] = h[r_k] + 1$
4) Normalizar el histograma dividiendo por el número total de píxeles N:

$$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{N}$$

Donde $p(r_k)$ es la función de densidad de probabilidad (PDF) de las intensidades.

Cálculo del Histograma - Ejemplo Práctico:

Supongamos una imagen en escala de grises de 4x4 píxeles con intensidades en el rango [0,3] (2 bits, L=4):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Total de píxeles: $N = 16$.

Frecuencias:

- $h(0) = 1$ (un píxel con intensidad 0).
- $h(1) = 3$ (tres píxeles con intensidad 1).
- $h(2) = 5$ (cinco píxeles con intensidad 2).
- $h(3) = 7$ (siete píxeles con intensidad 3).

Histograma: $h = [1, 3, 5, 7]$.

PDF: $p(r_k) = [1/16, 3/16, 5/16, 7/16]$.

Propiedades Matemáticas del Histograma

El histograma tiene varias propiedades matemáticas que lo hacen útil para el análisis y mejora de imágenes:

1) **Suma Total:** La suma de todas las frecuencias en el histograma es igual al número total de píxeles N:

$$\sum_{k=0}^{L-1} h(r_k) = N$$

En el ejemplo anterior: 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

2) **Función de Densidad de Probabilidad (PDF):** La PDF normalizada $p(rk)$ satisface:

$$\sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = \sum_{k=0}^{L-1} \frac{h(r_k)}{N} = 1$$

Esto permite interpretar el histograma como una distribución de probabilidad de las intensidades.

Propiedades Matemáticas del Histograma

3) **Función de Distribución Acumulativa (CDF):** La CDF se calcula como la suma acumulada del histograma normalizado:

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} p(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{h(r_j)}{N}$$

Sk : Valor acumulado hasta el nivel k.
Propiedad: $s_0 = p(r_0)$, $s_{L-1} = 1$
Uso: La CDF es clave para la ecualización del histograma, una técnica de mejora de contraste.

4) **Momentos Estadísticos:** El histograma permite calcular momentos estadísticos de la distribución de intensidades:

a) Media (intensidad promedio):

$$\mu = \sum_{k=0}^{L-1} r_k \cdot p(r_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{L-1} r_k \cdot h(r_k)$$

En el ejemplo:
μ = (0*1 + 1*3 + 2*5 + 3*7)/16
= (0 + 3 + 10 + 21)/16
= 34/16 = 2.125

Propiedades Matemáticas del Histograma

b) Varianza (dispersión de intensidades):

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{L-1} (r_k - \mu)^2 \cdot p(r_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{L-1} (r_k - \mu)^2 \cdot h(r_k)$$

En el ejemplo:

$$\sigma^2 = \frac{1}{16} \left[(0 - 2.125)^2 \cdot 1 + (1 - 2.125)^2 \cdot 3 + (2 - 2.125)^2 \cdot 5 + (3 - 2.125)^2 \cdot 7\right]$$

$$= \frac{1}{16} \left[4.515625 \cdot 1 + 1.265625 \cdot 3 + 0.015625 \cdot 5 + 0.765625 \cdot 7\right]$$

$$= \frac{1}{16} \left[4.515625 + 3.796875 + 0.078125 + 5.359375\right] = \frac{13.75}{16} \approx 0.859$$

Interpretación: Una varianza alta indica mayor contraste; una varianza baja indica una imagen más uniforme.

Propiedades Matemáticas del Histograma

5) **Simetría y Sesgo:** El histograma puede ser simétrico (distribución uniforme), sesgado a la izquierda (imágenes oscuras), o sesgado a la derecha (imágenes claras).

   a) El sesgo (skewness) se calcula como:

$$\text{Skewness} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{L-1}\left(\frac{r_k-\mu}{\sigma}\right)^3 \cdot h(r_k)$$

Positivo: Sesgo a la derecha (más valores altos).

Negativo: Sesgo a la izquierda (más valores bajos).

Contenido:

Definición de Ecualización de Histogramas

La ecualización de histogramas es una técnica de mejora de imágenes que busca ***redistribuir las intensidades*** de los píxeles para mejorar el contraste global de la imagen. Se basa en el histograma de la imagen y utiliza la ***función de distribución acumulativa (CDF)*** para mapear los niveles de intensidad originales a nuevos valores, de modo que la distribución de intensidades sea más uniforme.

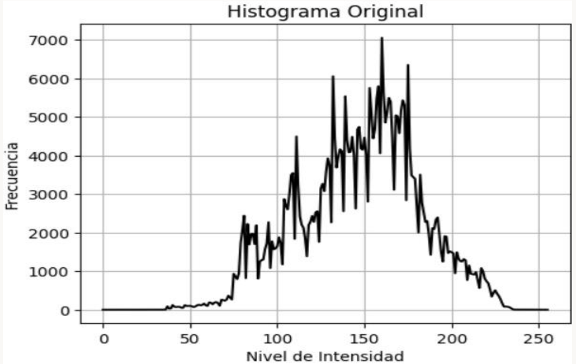
Objetivo:

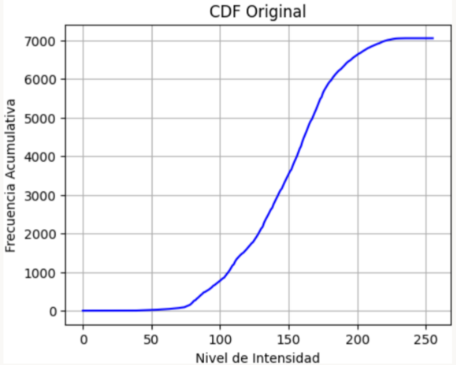
- Aumentar el contraste de la imagen, especialmente en imágenes con bajo contraste donde las intensidades están concentradas en un rango estrecho.
- Hacer que el histograma de la imagen resultante se aproxime a una distribución uniforme, utilizando todo el rango dinámico disponible (Ejm., 0 a 255 para 8 bits).

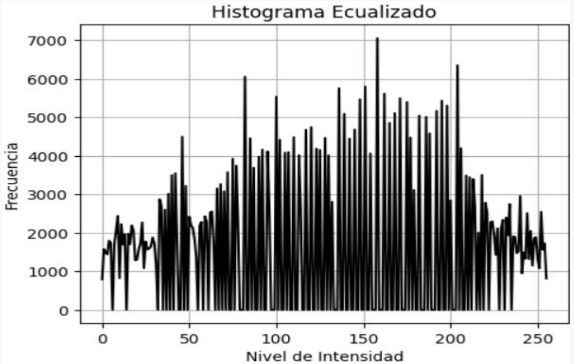
Aplicación:

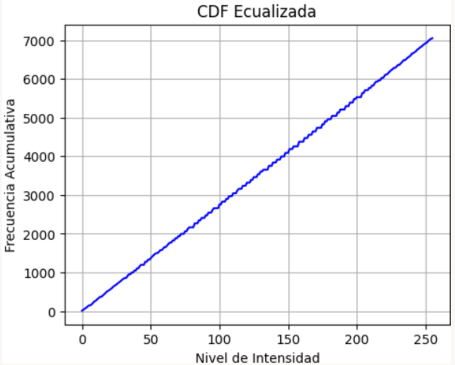
- Mejora visual de imágenes (Ejm., en fotografía, imágenes médicas).
- Preprocesamiento para algoritmos de visión por computadora (Ejm., detección de bordes).

Definición de Ecualización de Histogramas

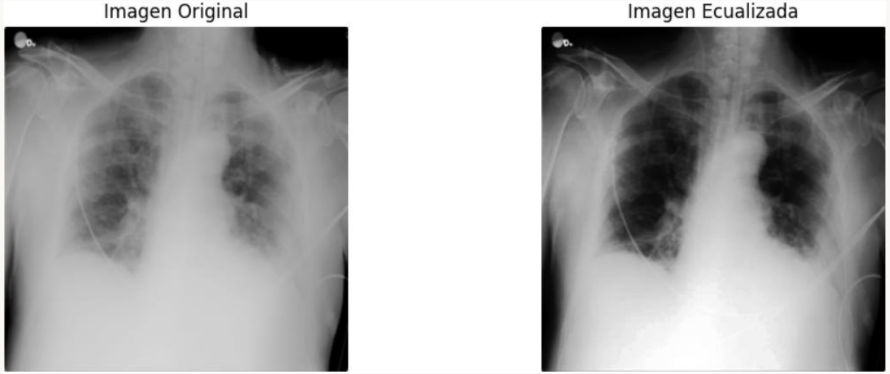


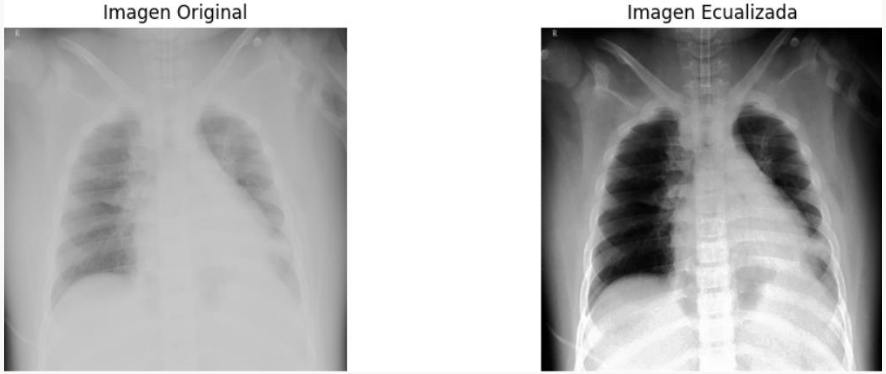


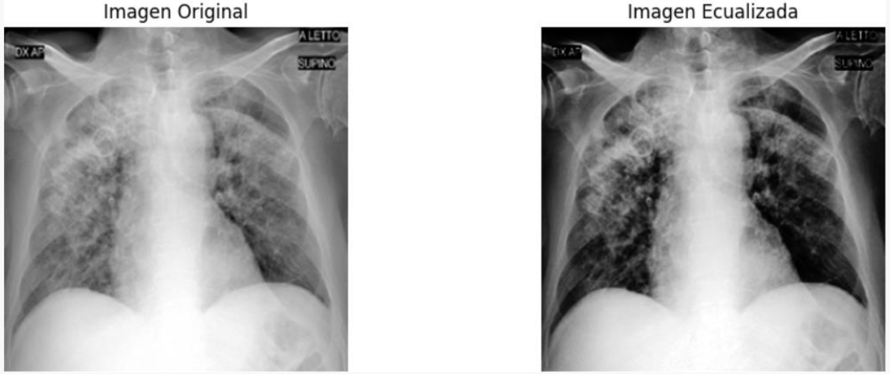


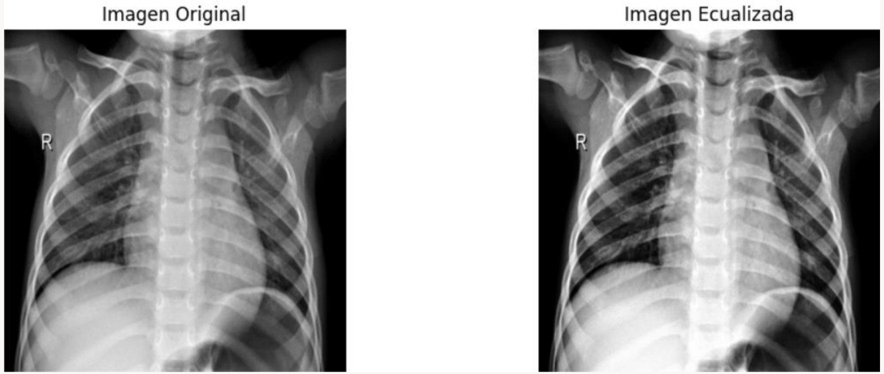


Definición de Ecualización de Histogramas









Fundamento Teórico

La ecualización de histogramas se basa en el concepto de transformar las intensidades de la imagen usando la CDF del histograma. Esto asegura que las intensidades se distribuyan de manera más uniforme.

1) **Histograma y PDF:** Para una imagen en escala de grises con intensidades en el rango $[0, L-1]$ (Ejm., L=256 para 8 bits), el histograma $h(rk)$ cuenta el número de píxeles con intensidad rk, donde k=0,1,…,$L-1$. La función de densidad de probabilidad (PDF) se define como:

$$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{N}$$

N: Número total de píxeles.

$\sum_{k=0}^{L-1} p(r_k) = 1.$

2) **Función de Distribución Acumulativa (CDF):** La CDF se calcula como la suma acumulada de la PDF:

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} p(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{h(r_j)}{N}$$

s_k: Valor acumulado hasta el nivel k.

Propiedades:

- $s_0 = p(r_0)$.
- $s_{L-1} = 1$.

Fundamento Teórico

3) **Transformación de Ecualización:** La ecualización mapea cada intensidad rk a una nueva intensidad $s'k$ en el rango $[0,L-1]$:

$$s'_k = (L-1) \cdot s_k = (L-1) \cdot \sum_{j=0}^{k} p(r_j)$$

s'_k: Nueva intensidad después de la ecualización.

El factor $(L-1)$ escala la CDF al rango de intensidades de salida (e.g., 0 a 255).

4) **Propiedad Fundamental:** La transformación $s'k=(L-1)\cdot\mathrm{CDF}(rk)$ produce una distribución de intensidades que tiende a ser uniforme, maximizando el contraste.:

Proceso de Ecualización

El proceso de ecualización de histogramas sigue estos pasos:

1) **Calcular el Histograma:** Contar la frecuencia $h(rk)$ de cada nivel de intensidad rk.

2) **Calcular la PDF:** Normalizar el histograma: $p(r_k) = \frac{h(r_k)}{N}$

3) **Calcular la CDF:** Sumar acumulativamente la PDF: $s_k = \sum_{j=0}^{k} p(r_j)$

4) **Mapear Intensidades:** transformar cada píxel de intensidad rk a la nueva intensidad:

$$s'_k = (L-1) \cdot s_k$$

   Redondear $s'k$ al entero más cercano.

5) **Aplicar la Transformación:** Crear una nueva imagen donde cada píxel con intensidad rk se reemplaza por $s'k$.

Proceso de Ecualización - Ejemplo Práctico

Se tiene una imagen en escala de grises de 4x4 píxeles con intensidades en el rango [0,3] (2 bits, L=4):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Calcular el Histograma:

- Total de píxeles: $N = 16$.
- $h(0) = 1$, $h(1) = 3$, $h(2) = 5$, $h(3) = 7$.
- Histograma: $h = [1, 3, 5, 7]$.

Paso 2: Calcular la PDF: $p(r_k) = \dfrac{h(r_k)}{N}$

- $p(0) = 1/16$, $p(1) = 3/16$, $p(2) = 5/16$, $p(3) = 7/16$.

Proceso de Ecualización - Ejemplo Práctico

Paso 3: Calcular la CDF: $s_k = \sum_{j=0}^{k} p(r_j)$

- $s_0 = p(0) = 1/16.$
- $s_1 = p(0) + p(1) = 1/16 + 3/16 = 4/16 = 1/4.$
- $s_2 = p(0) + p(1) + p(2) = 1/16 + 3/16 + 5/16 = 9/16.$
- $s_3 = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1/16 + 3/16 + 5/16 + 7/16 = 16/16 = 1.$
- CDF: $s = [1/16, 4/16, 9/16, 16/16].$

Paso 4: Mapear Intensidades: $s'_k = (L-1) \cdot s_k = 3 \cdot s_k$

- $s'_0 = 3 \cdot 1/16 = 3/16 \approx 0.1875 \to 0.$
- $s'_1 = 3 \cdot 4/16 = 3/4 = 0.75 \to 1.$
- $s'_2 = 3 \cdot 9/16 = 27/16 \approx 1.6875 \to 2.$
- $s'_3 = 3 \cdot 16/16 = 3 \to 3.$
- Mapeo: $0 \to 0, 1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3.$

Paso 5: Aplicar la Transformación:

Nueva imagen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedades y Limitaciones

Propiedades:

- Aumento de Contraste: La ecualización extiende el rango dinámico, haciendo que las intensidades se distribuyan más uniformemente.
- Invariante al Brillo: La ecualización no cambia el brillo promedio, solo redistribuye las intensidades.
- Monotonicidad: La transformación $sk'=(L-1)\cdot \mathrm{CDF}(rk)$ es monótona creciente, preservando el orden de las intensidades (los píxeles más oscuros siguen siendo más oscuros que los más claros).

Limitaciones:

- Ruido: La ecualización puede amplificar el ruido en imágenes con bajo contraste.
- Pérdida de Detalle: En áreas con intensidades similares, la ecualización puede causar pérdida de detalle al "estirar" demasiado el histograma.
- No Selectiva: La ecualización es global; no considera regiones específicas de la imagen (para eso se usa la ecualización adaptativa, como CLAHE).

Contenido:

Operaciones puntuales

Definición de Operaciones Puntuales

Las operaciones puntuales son transformaciones en las que el valor de intensidad de cada píxel de la imagen de salida depende únicamente del valor de intensidad del píxel correspondiente en la imagen de entrada, sin considerar los píxeles vecinos. Estas operaciones se aplican de manera independiente a cada píxel y son fundamentales para el análisis y mejora de la intensidad en imágenes.

Generalmente: Para una imagen de entrada $f(x,y)$, una operación puntual genera una imagen de salida $g(x,y)$ mediante una función de transformación T:

$$g(x,y) = T(f(x,y))$$

$f(x,y)$: Intensidad del píxel en la posición (x,y).

$g(x,y)$: Nueva intensidad después de la transformación.

T: Función de transformación (lineal o no lineal).

Características:

- Independencia Espacial: No se consideran los píxeles vecinos, a diferencia de las operaciones espaciales (filtros).
- Simplicidad: Fáciles de implementar y computacionalmente eficientes.
- Aplicaciones: Ajuste de brillo, contraste, corrección gamma, umbralización, etc.

Operaciones puntuales

Transformaciones Lineales

Las transformaciones lineales son operaciones puntuales donde la función T es una función lineal de la forma:

$$g(x, y) = a \cdot f(x, y) + b$$

a: Ganancia (controla el contraste).

b: Sesgo (controla el brillo).

$f(x, y)$, $g(x, y)$: Intensidades normalizadas en $[0, 1]$ o en $[0, 255]$ (ajustar según el rango).

1) **Ajuste de Brillo:** El ajuste de brillo suma o resta una constante bb a todas las intensidades de la imagen, desplazando el histograma hacia la derecha (más claro) o hacia la izquierda (más oscuro).

$$g(x, y) = f(x, y) + b$$

$b > 0$: Aumenta el brillo.

$b < 0$: Disminuye el brillo.

Saturación: Si $g(x, y)$ sale del rango permitido (e.g., $[0, 255]$), se trunca:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x, y) < 0 \\ 255 & \text{si } g(x, y) > 255 \\ g(x, y) & \text{si no} \end{cases}$$

Transformaciones Lineales

Ejemplo: Para una imagen con intensidades $f(x,y) \in [0,255]$, aumentar el brillo en b=50:

Píxel con $f(x,y) = 100$: $g(x,y) = 100 + 50 = 150$.

Píxel con $f(x,y) = 220$: $g(x,y) = 220 + 50 = 270 \rightarrow 255$ (saturación).

2) **Ajuste de Contraste:** El ajuste de contraste multiplica las intensidades por una constante a, "estirando" o "comprimiendo" el histograma.

$$g(x,y) = a \cdot f(x,y)$$

$a > 1$: Aumenta el contraste (estira el histograma).

$0 < a < 1$: Disminuye el contraste (comprime el histograma).

Normalización: Para evitar saturación, a menudo se centra la imagen restando la media μ:

$$g(x,y) = a \cdot (f(x,y) - \mu) + \mu$$

Saturación: Aplicar truncamiento si $g(x,y)$ sale del rango $[0,255]$.

Operaciones puntuales

Transformaciones Lineales

Ejemplo: Para una imagen con $f(x,y) \in [0,255]$, aumentar el contraste con a=1.5, μ=128:

Píxel con $f(x,y) = 100$:

$$g(x,y) = 1.5 \cdot (100 - 128) + 128 = 1.5 \cdot (-28) + 128 = -42 + 128 = 86$$

Píxel con $f(x,y) = 200$:

$$g(x,y) = 1.5 \cdot (200 - 128) + 128 = 1.5 \cdot 72 + 128 = 108 + 128 = 236$$

Operaciones puntuales

Transformaciones No Lineales: Corrección Gamma

Las transformaciones no lineales aplican funciones no lineales a las intensidades. Una de las más comunes es la corrección gamma, que ajusta las intensidades de manera no lineal para compensar la percepción humana o las características de los dispositivos.

Definición: La corrección gamma aplica una función de potencia:

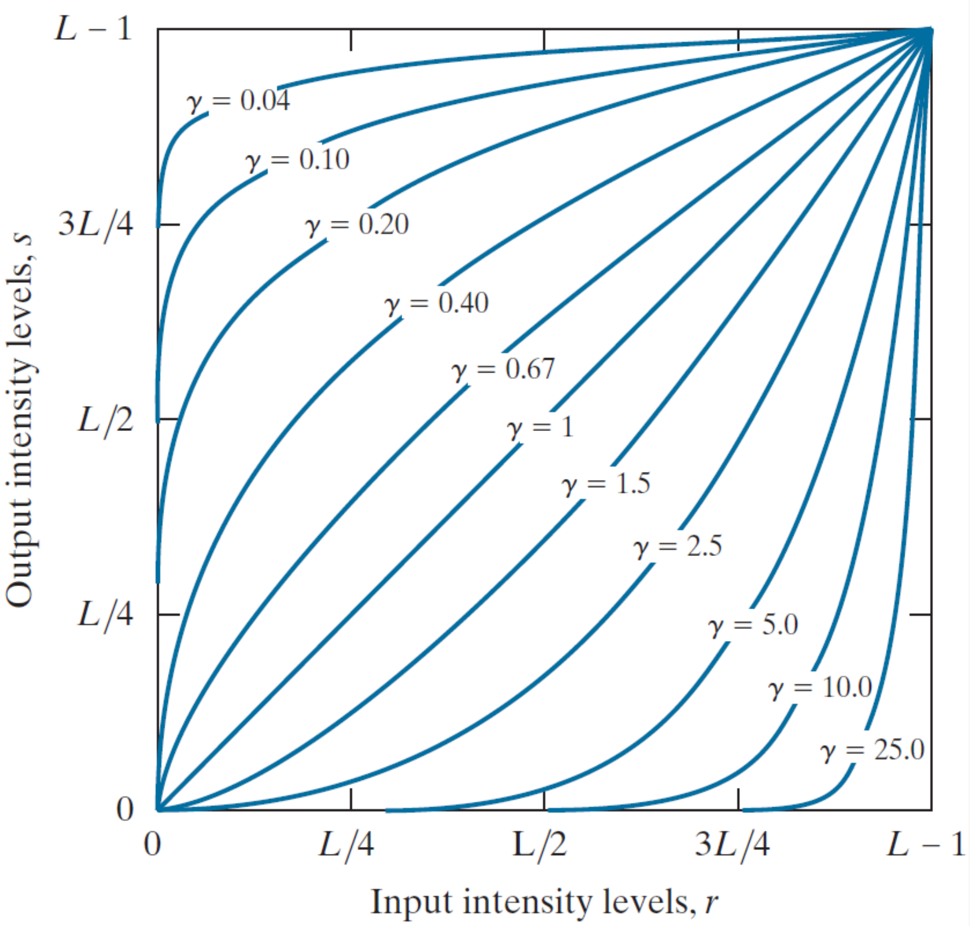
$$g(x,y) = c \cdot f(x,y)^{\gamma}$$

f(x,y): Intensidad normalizada en [0,1] (dividir por 255 si está en [0,255].

c: Constante de escala (usualmente c=1).

γ: Factor gamma.

- γ<1: Aumenta las intensidades bajas (hace la imagen más clara).
- γ>1: Disminuye las intensidades bajas (hace la imagen más oscura).



Transformaciones No Lineales: Corrección Gamma

Reconstrucción: Si $f(x,y)$ estaba en [0,255], escalar de vuelta.

$$g(x,y) = 255 \cdot \left(\frac{f(x,y)}{255}\right)^{\gamma}$$

Propósito:

Percepción Humana: El ojo humano percibe la luz de manera no lineal (ley de Weber-Fechner). La corrección gamma ajusta las intensidades para que los cambios sean más perceptivamente uniformes.

Dispositivos: Las pantallas y cámaras tienen respuestas no lineales (Ejm., gamma de 2.2). La corrección gamma compensa estas distorsiones.

Transformaciones No Lineales: Corrección Gamma

Ejemplo: Para una imagen con $f(x,y) \in [0,255]$, aplicar γ=0.5:

Normalizar: $f'(x,y) = f(x,y)/255$.

Píxel con $f(x,y) = 128$:

$$f'(x,y) = 128/255 \approx 0.502, \quad g'(x,y) = (0.502)^{0.5} \approx 0.709, \quad g(x,y) = 255 \cdot 0.709 \approx 181$$

Píxel con $f(x,y) = 64$:

$$f'(x,y) = 64/255 \approx 0.251, \quad g'(x,y) = (0.251)^{0.5} \approx 0.501, \quad g(x,y) = 255 \cdot 0.501 \approx 128$$

Operaciones puntuales

Comparación y Efectos

Brillo (Lineal):

- Desplaza el histograma sin cambiar su forma.
- Efecto: Toda la imagen se aclara u oscurece uniformemente.

Contraste (Lineal):

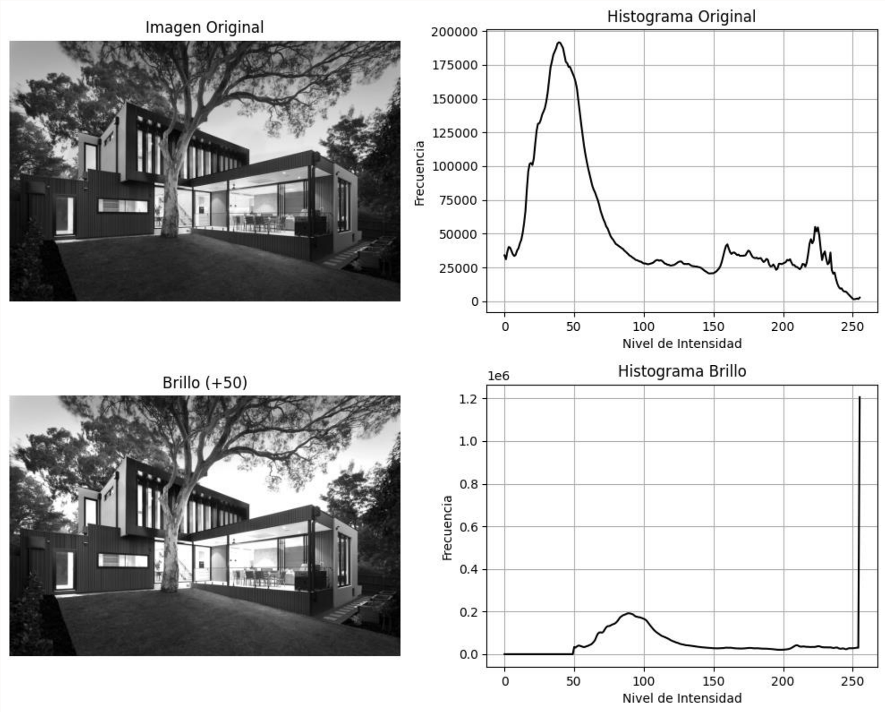
- Estira o comprime el histograma.
- Efecto: Aumenta o reduce la diferencia entre tonos claros y oscuros.

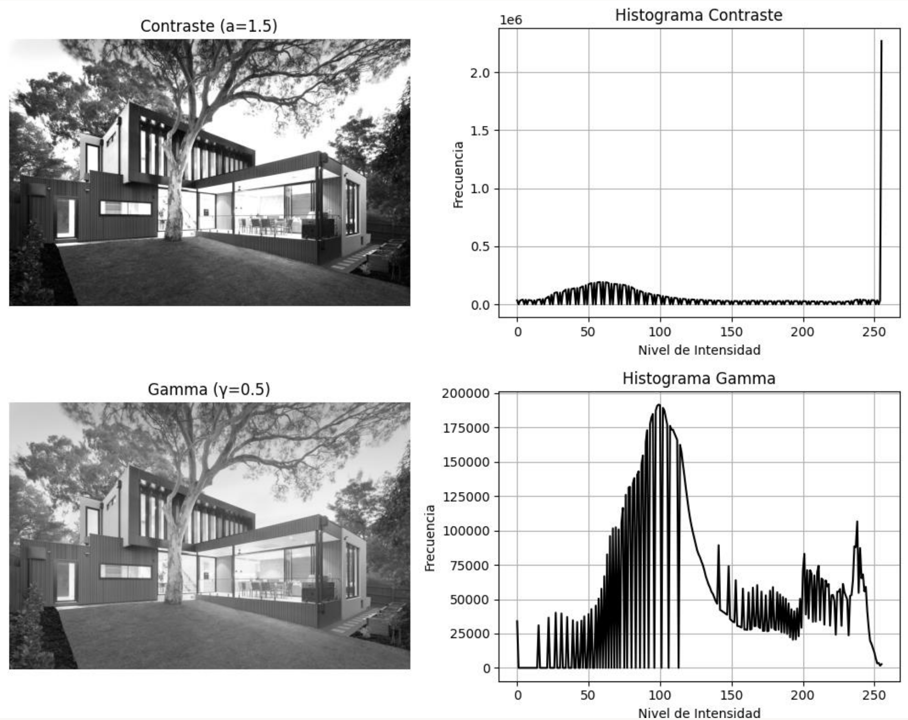
Gamma (No Lineal):

- Modifica el histograma de manera no lineal, afectando más a las intensidades bajas o altas según γ.
- Efecto: Ajusta la percepción del brillo, útil para corrección de dispositivos o mejora visual.

Operaciones puntuales

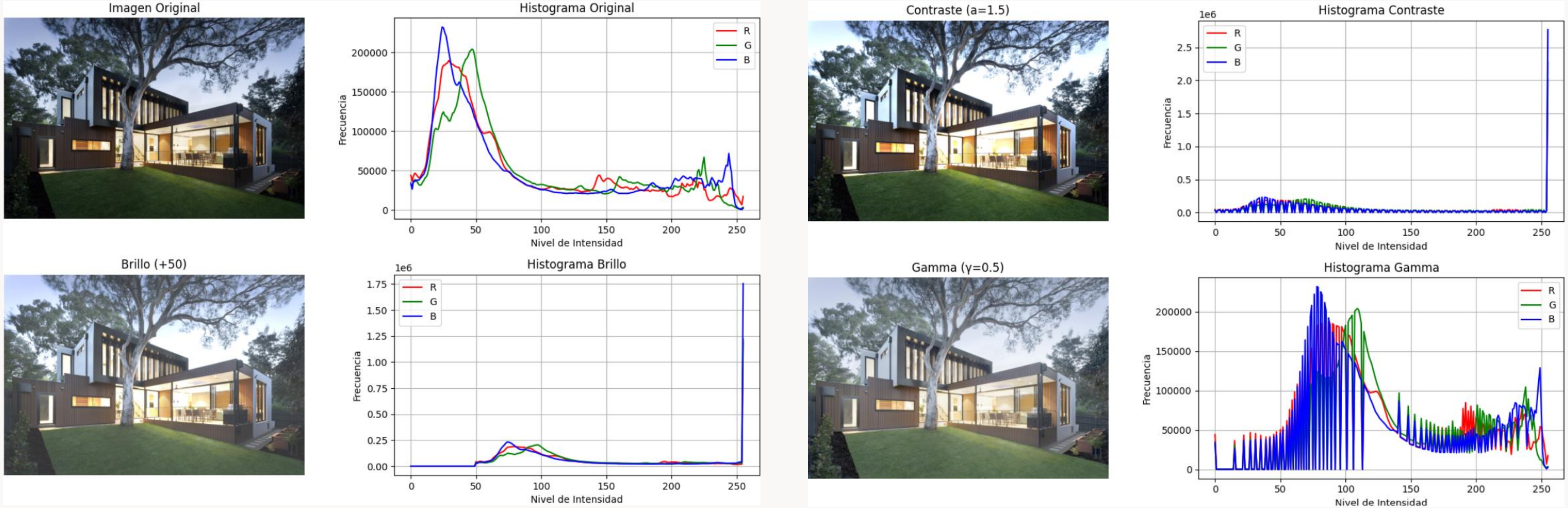
Ejemplos





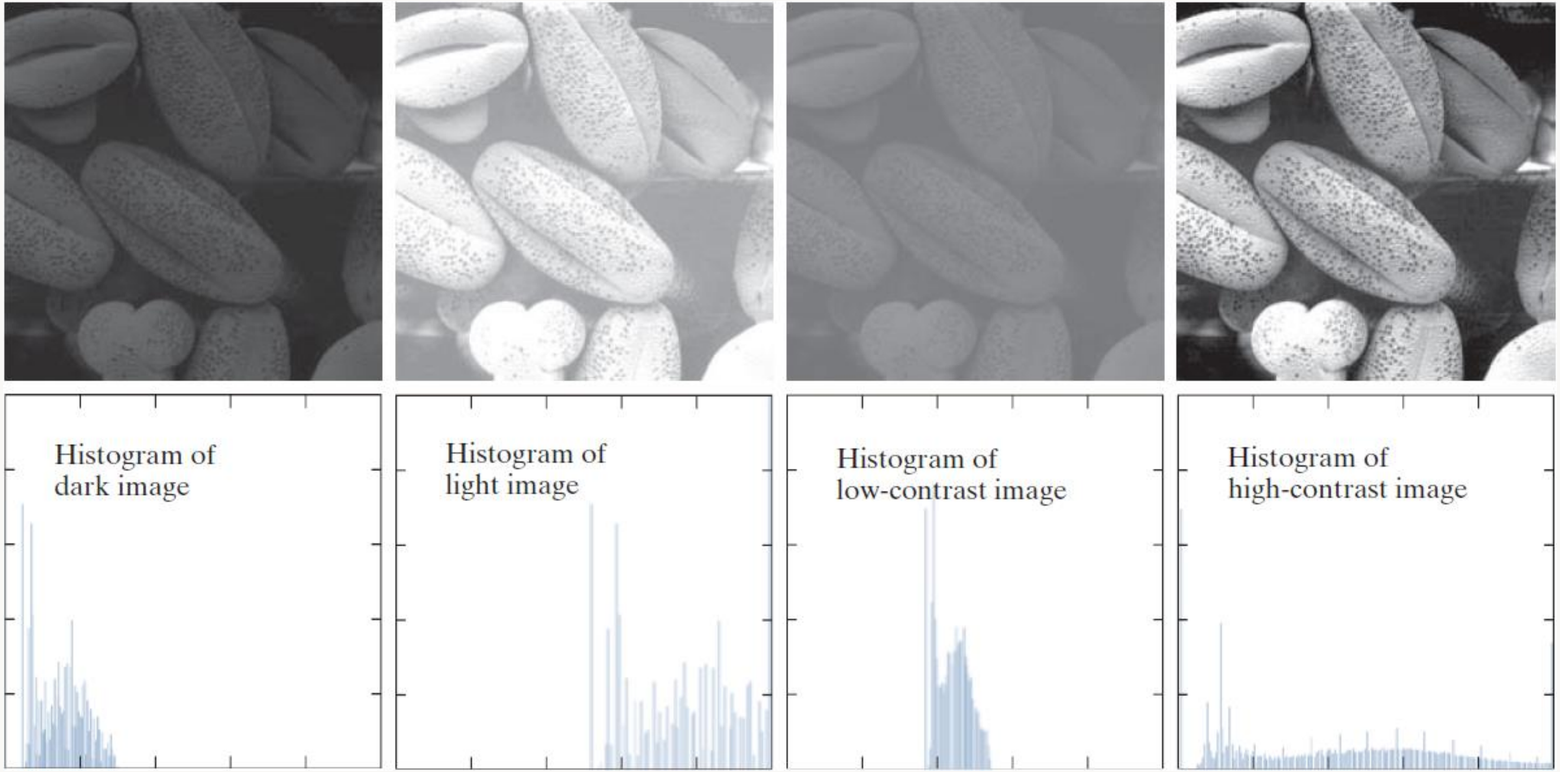
Operaciones puntuales

Ejemplos



Operaciones puntuales

Ejemplos



Capítulo II:
FIN

Procesamiento Digital de Imágenes