Capítulo III:
Análisis en el Dominio de la Frecuencia

Procesamiento Digital de Imágenes

Contenido:

Contenido:

¿Qué es el Dominio de la Frecuencia?

Una señal (o imagen) puede representarse en dos dominios principales:

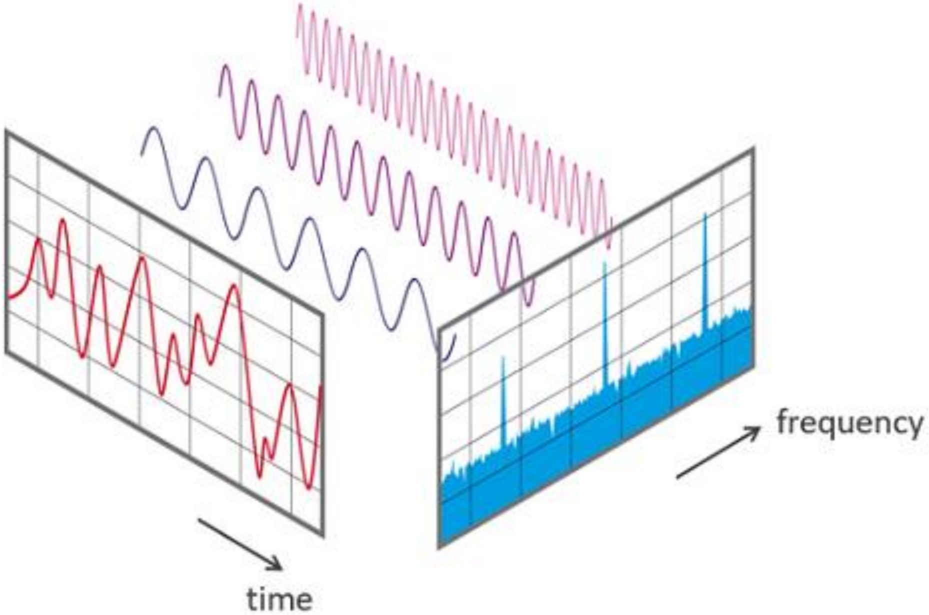
- Dominio Espacial (o Temporal): Representación tradicional (píxeles y sus valores, o muestras a lo largo del tiempo). Vemos "dónde" está la información.
- Dominio de la Frecuencia: Representa la señal como una suma de componentes sinusoidales (ondas senoidales y cosenoidales) de diferentes frecuencias, amplitudes y fases. Vemos "cuánto" de cada frecuencia contribuye a la señal total.

La frecuencia describe la tasa de cambio de la intensidad de los píxeles a lo largo de una dirección.

- Bajas frecuencias: Representan cambios lentos en la intensidad, como grandes áreas de color uniforme o transiciones suaves. Están relacionadas con las características globales de la imagen.
- Altas frecuencias: Representan cambios rápidos en la intensidad, como bordes, texturas finas, ruido o detalles pequeños.

Señales 1D y Componentes de Frecuencia

Cualquier señal compleja puede descomponerse en una suma de senoides y cosenoides de diferentes amplitudes y frecuencias.



¿Por qué analizar imágenes en el Dominio de la Frecuencia?

- Perspectiva Diferente: Nos permite analizar las imágenes basándonos en cómo varían sus valores de intensidad, es decir, sus frecuencias.
- Detección de Patrones Repetitivos: Facilita la identificación de estructuras periódicas, texturas y componentes de ruido.
- Diseño de Filtros Eficaces: Permite crear y aplicar filtros de manera más intuitiva y precisa para realzar o suprimir ciertas características.
- Compresión de Imágenes: Fundamento de técnicas de compresión como JPEG.

Transformada de Fourier 2D (TF2D)

La Transformada de Fourier 2D es una herramienta matemática que descompone una imagen (señal bidimensional) en sus componentes sinusoidales individuales.

Propósito: Transforma una imagen del dominio espacial (donde los píxeles están definidos por sus coordenadas x, y) al dominio de la frecuencia (donde los píxeles están definidos por sus componentes de frecuencia u, v).

Resultado: En el dominio de la frecuencia, cada punto representa una onda sinusoidal con una frecuencia y orientación específicas.

Definición Matemática de la TF2D

Para una imagen discreta $f(x,y)$ de tamaño MxN, la Transformada Discreta de Fourier 2D (DFT 2D) se define como:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Donde:

- $f(x,y)$: Valor de intensidad del píxel en la posición (x,y) en el dominio espacial.
- $F(u,v)$: Valor de la transformada en el dominio de la frecuencia, en la posición (u,v).
- u, v: Componentes de frecuencia horizontal y vertical.
- j: Unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$)
- M, N: Dimensiones de la imagen.

Transformada de Fourier 2D Inversa (IFT2D)

Para reconstruir la imagen del dominio de la frecuencia al dominio espacial, usamos la Transformada Discreta de Fourier Inversa 2D (IDFT 2D):

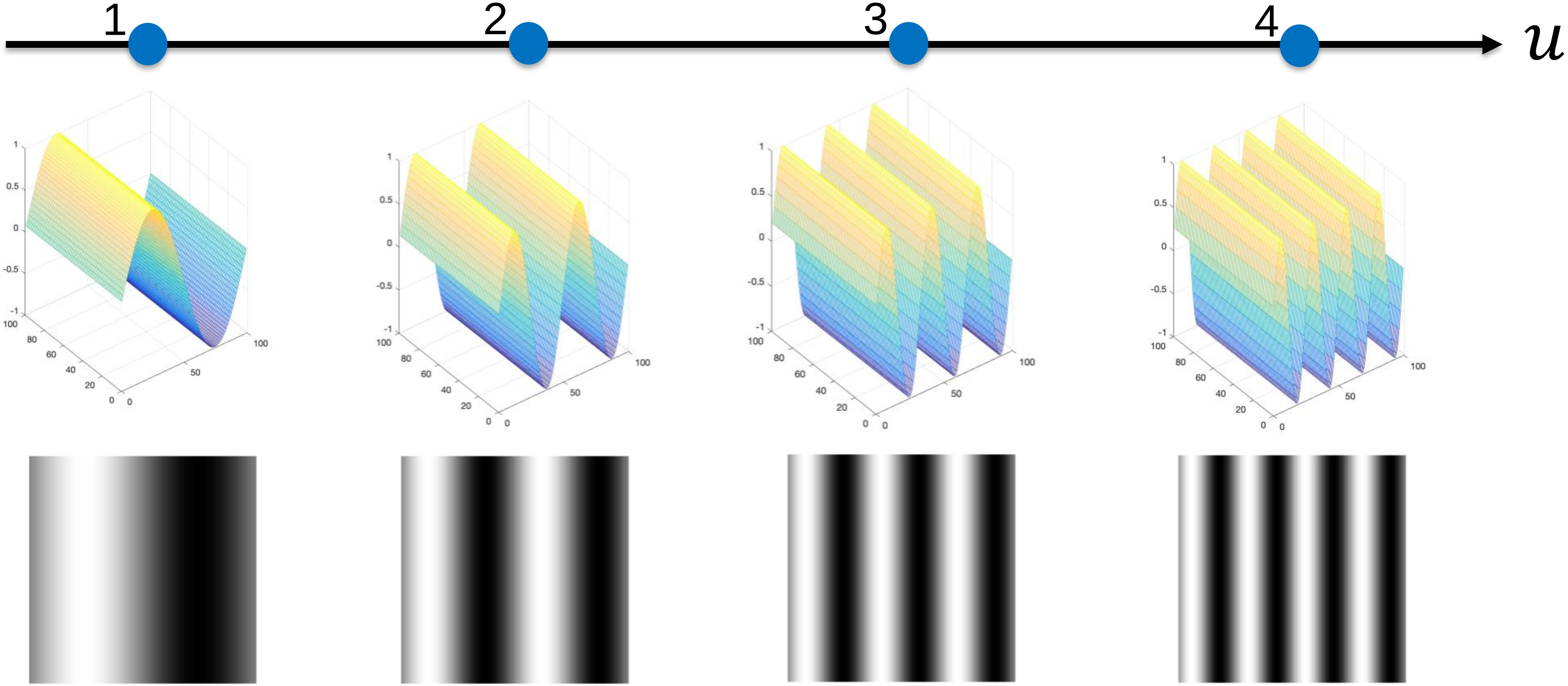
$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Esta nos permite volver a la imagen original una vez que hemos realizado operaciones en el dominio de la frecuencia.

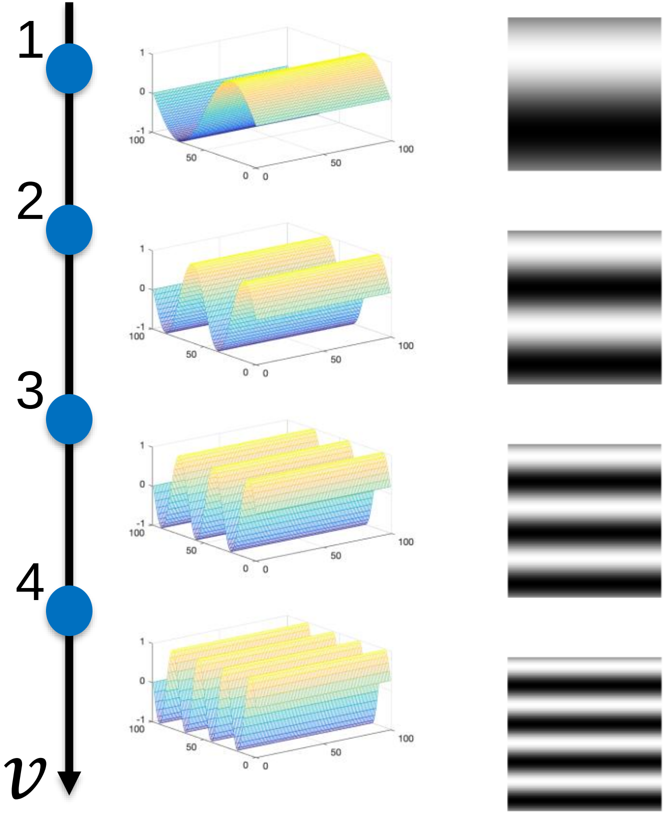
Interpretación de la TF2D: Origen y Ejes

- El origen (0,0) en el dominio de la frecuencia corresponde a la componente de DC (corriente continua), que representa el promedio de intensidad de la imagen.
- A medida que nos alejamos del origen, las frecuencias aumentan.
- Las frecuencias bajas se encuentran cerca del origen.
- Las frecuencias altas se encuentran en las esquinas del espectro.
- El eje u representa las frecuencias horizontales y el eje v las frecuencias verticales.

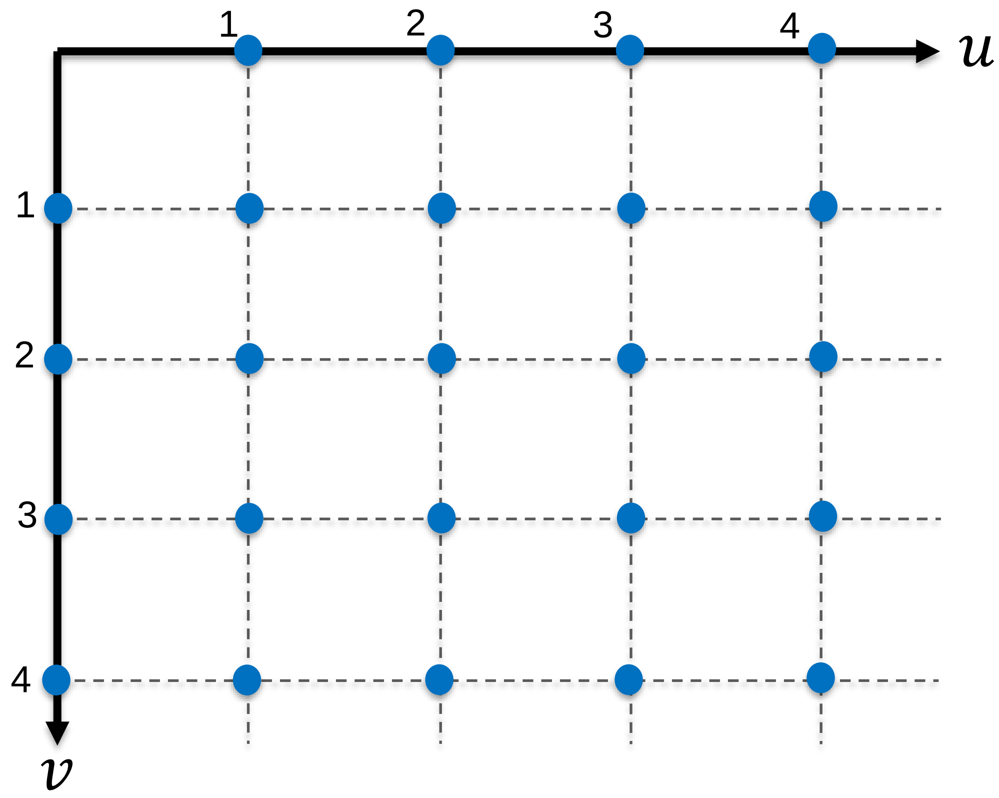
Interpretación de la TF2D - Se define una frecuencia horizontal



Interpretación de la TF2D - Se define una frecuencia vertical

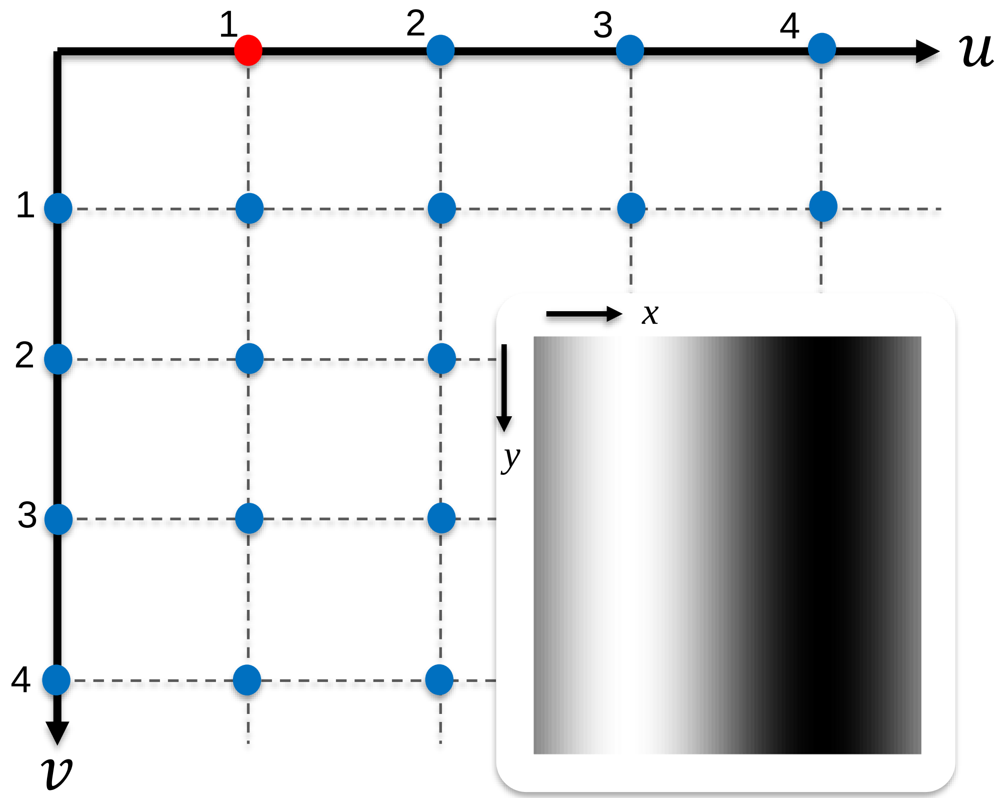


Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

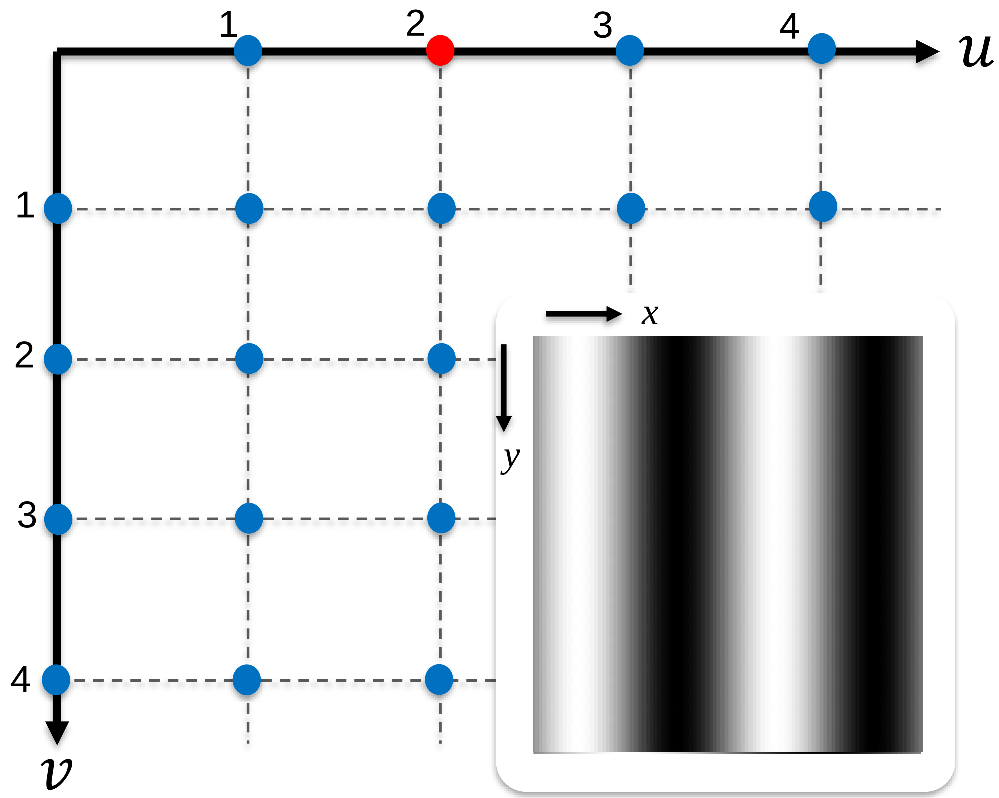
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

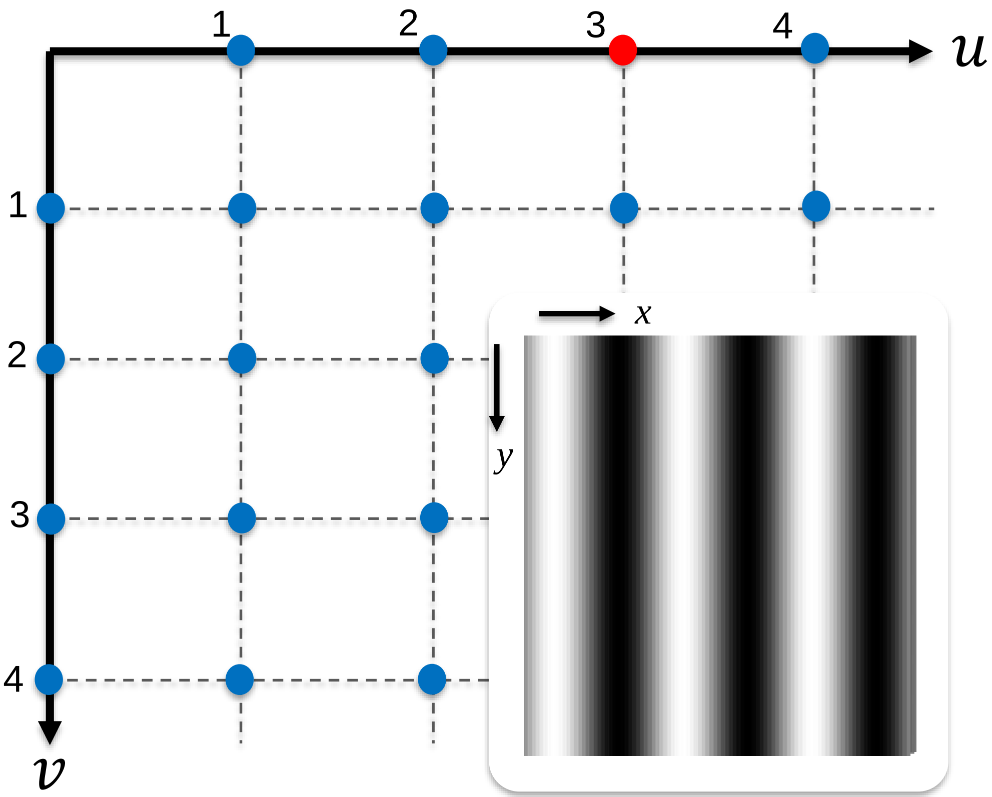
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

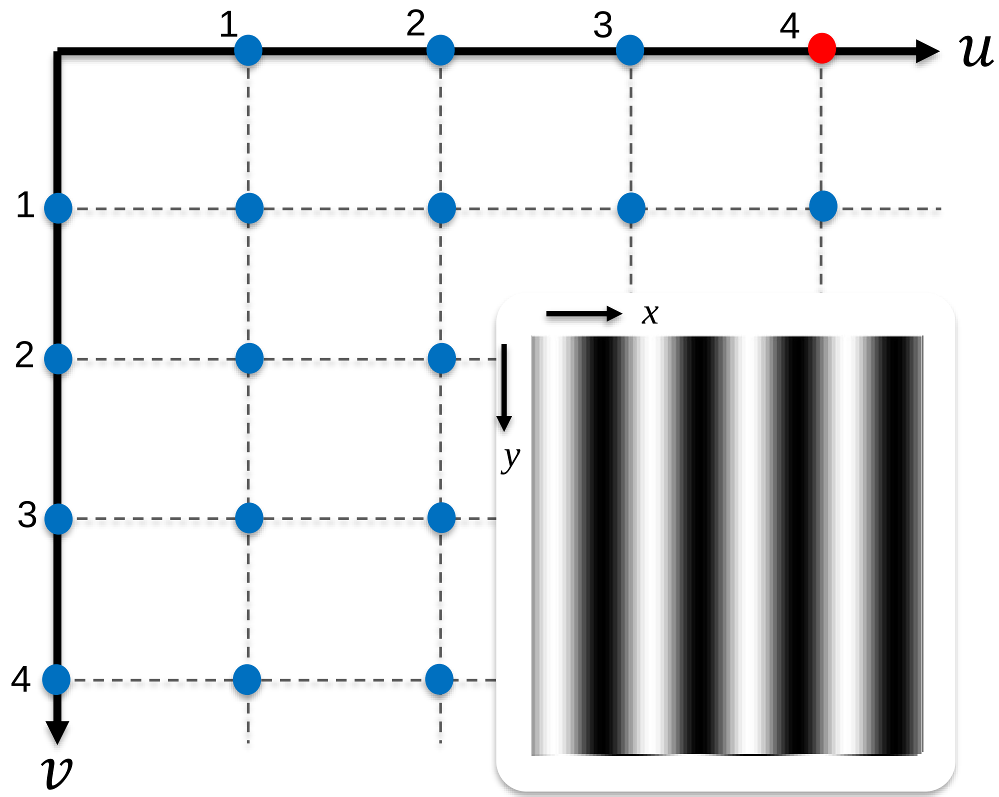
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

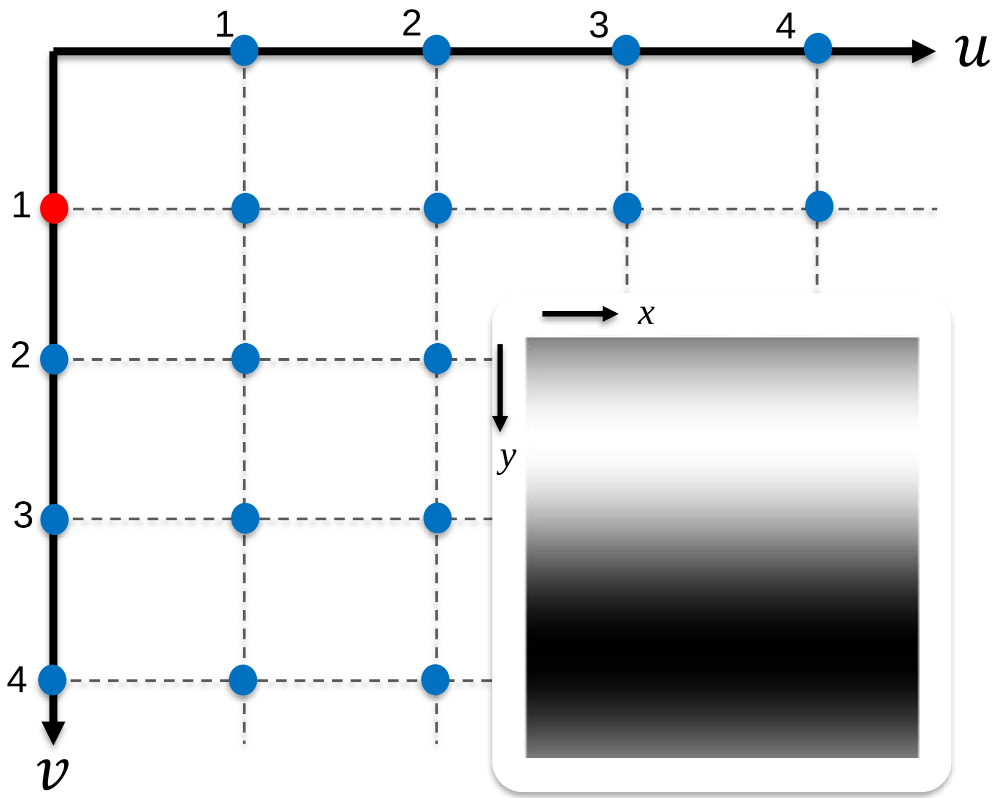
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

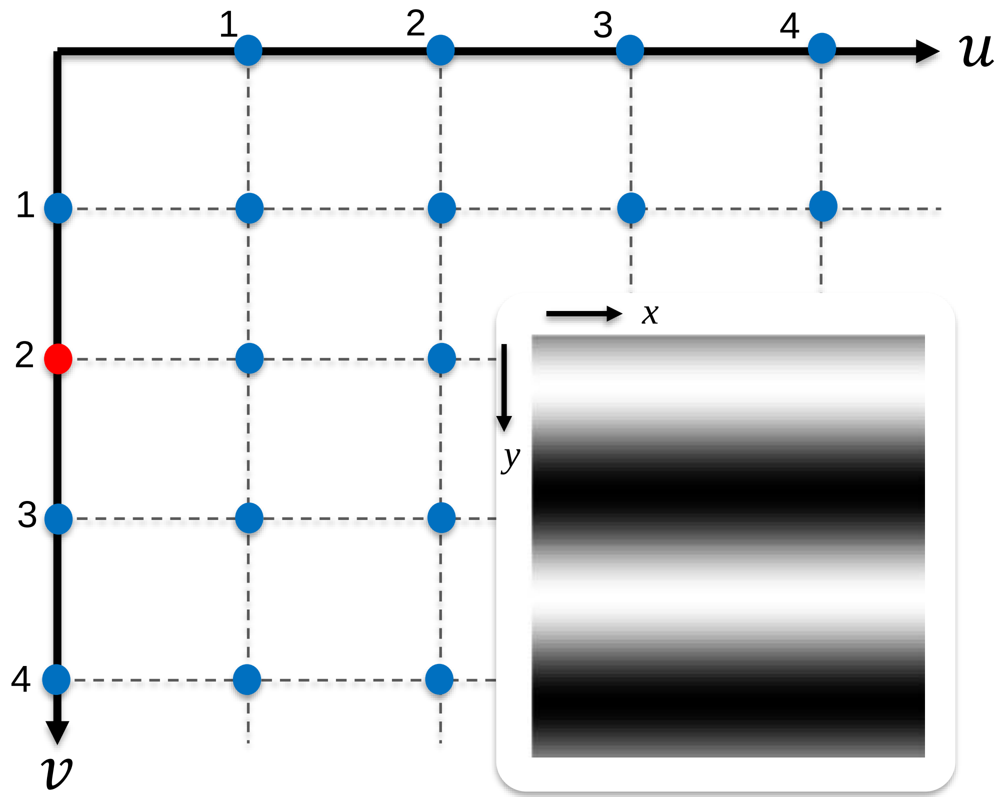
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

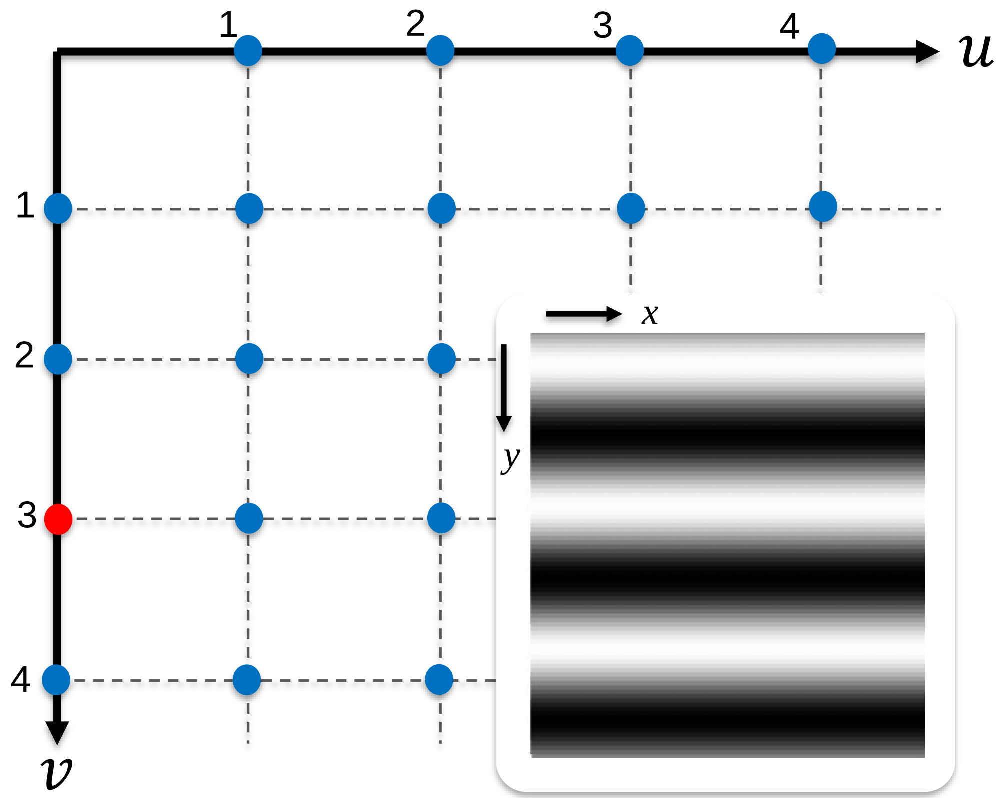
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

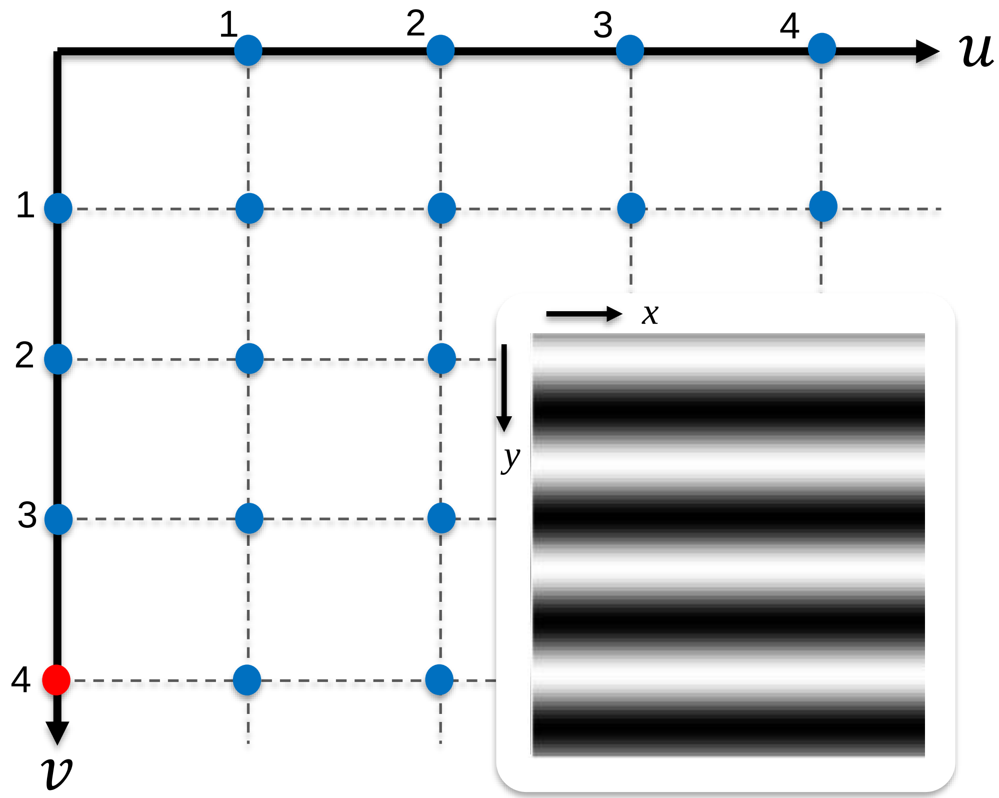
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

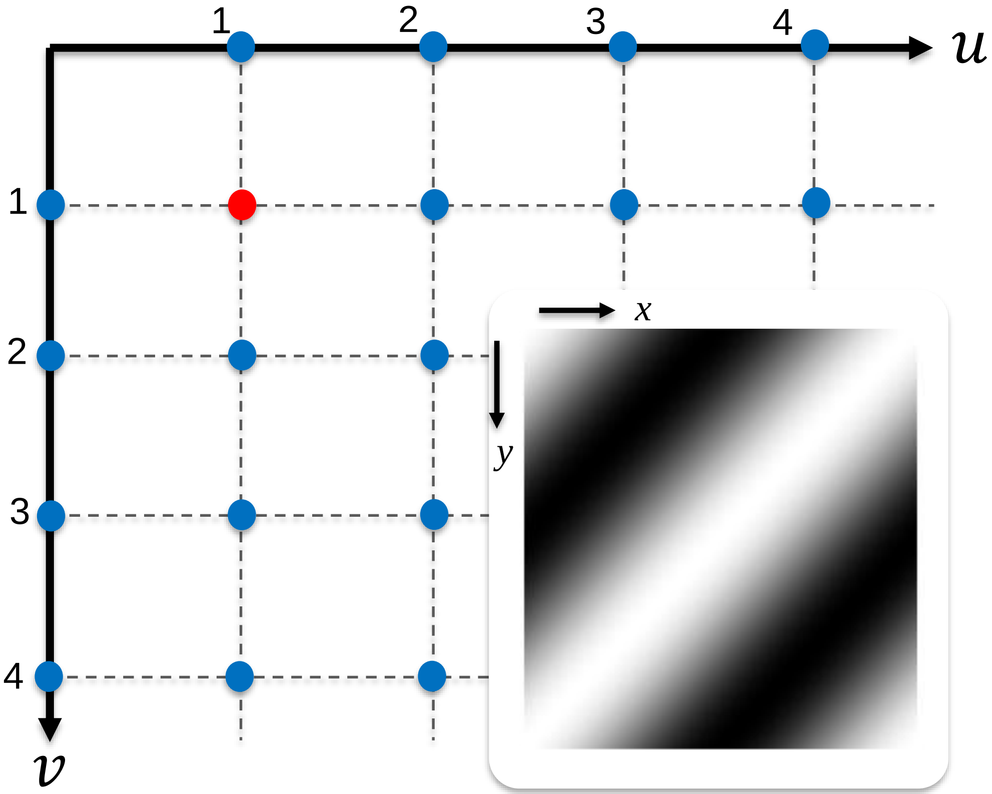
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

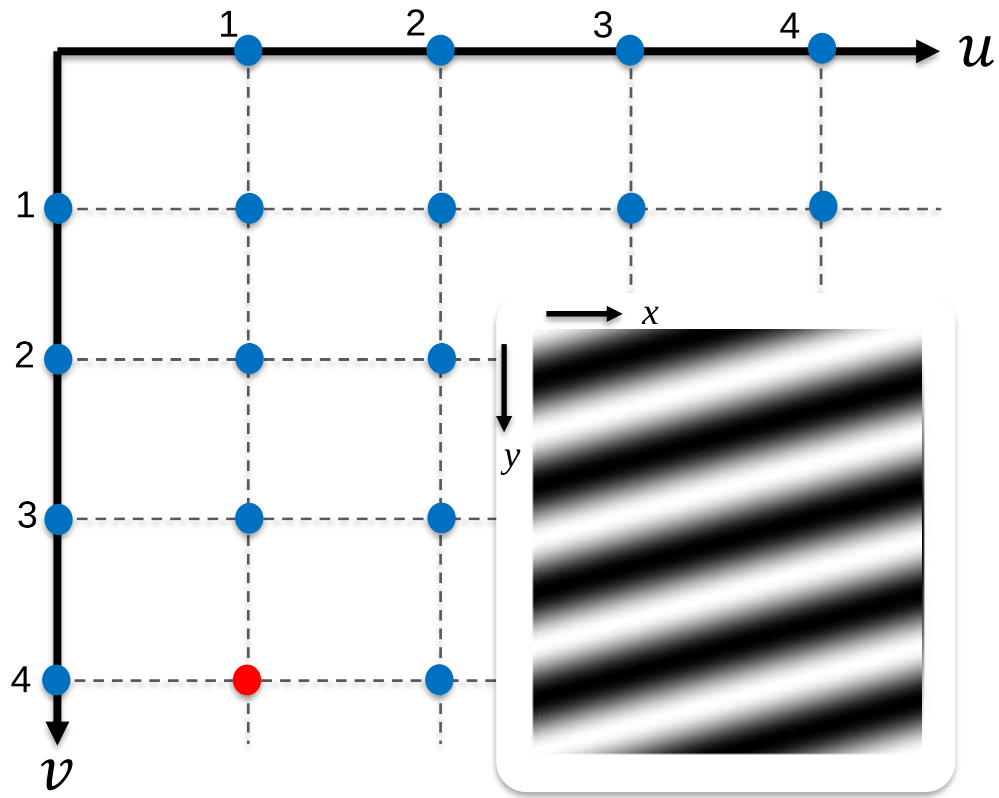
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

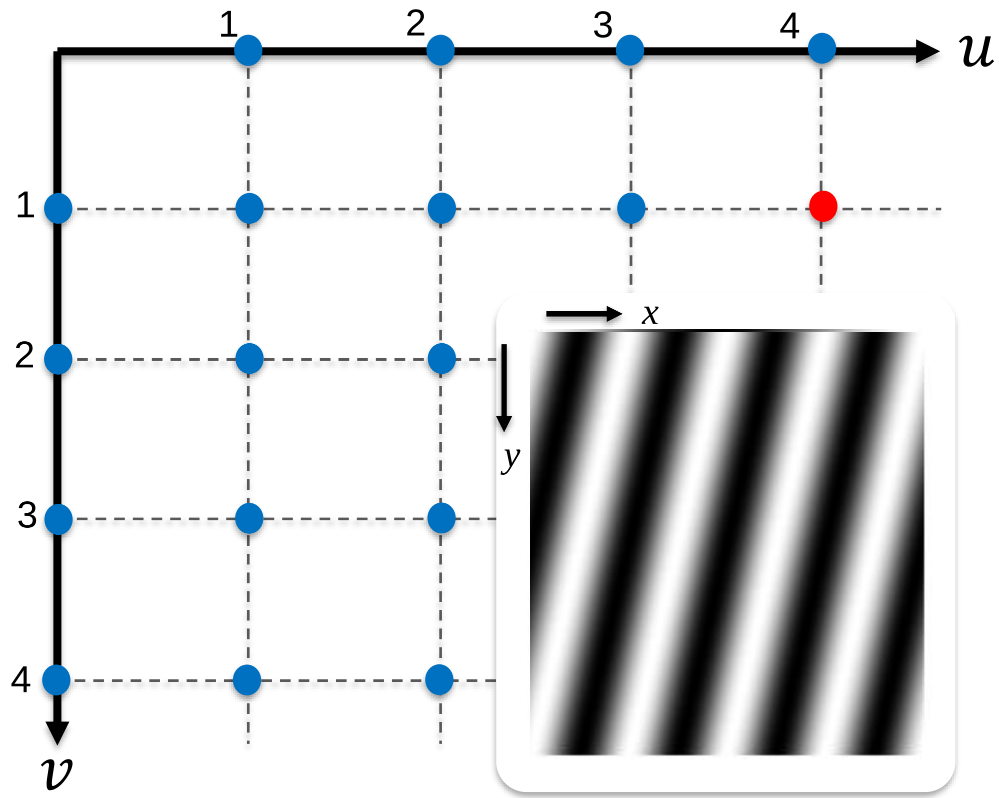
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

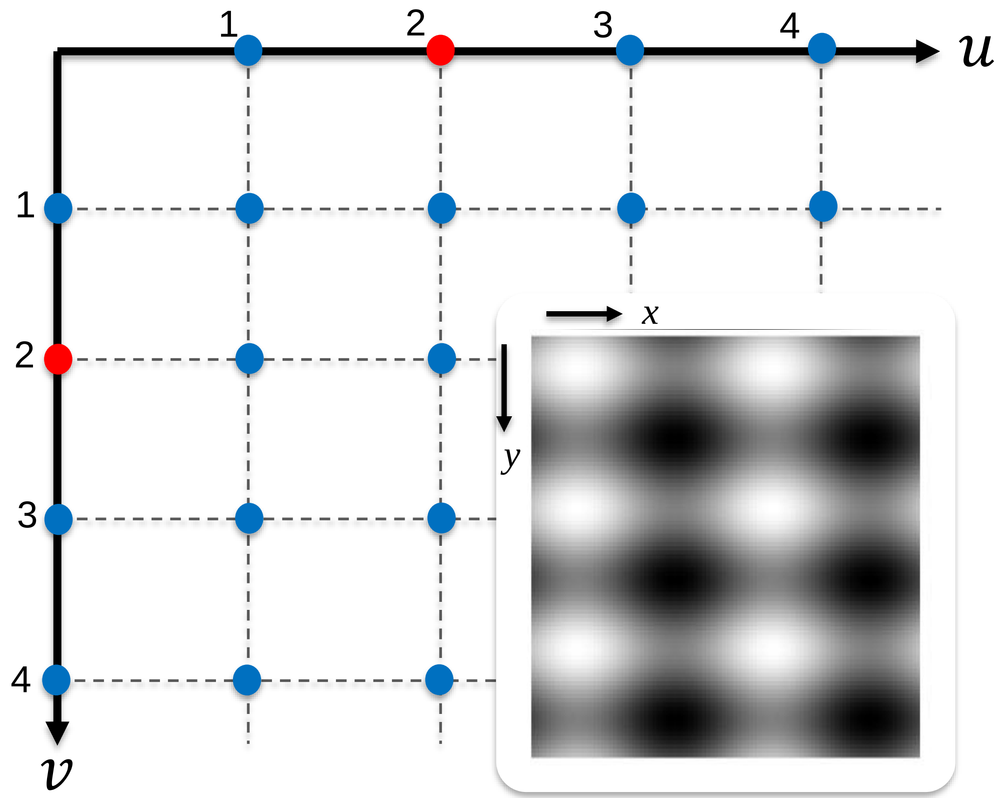
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

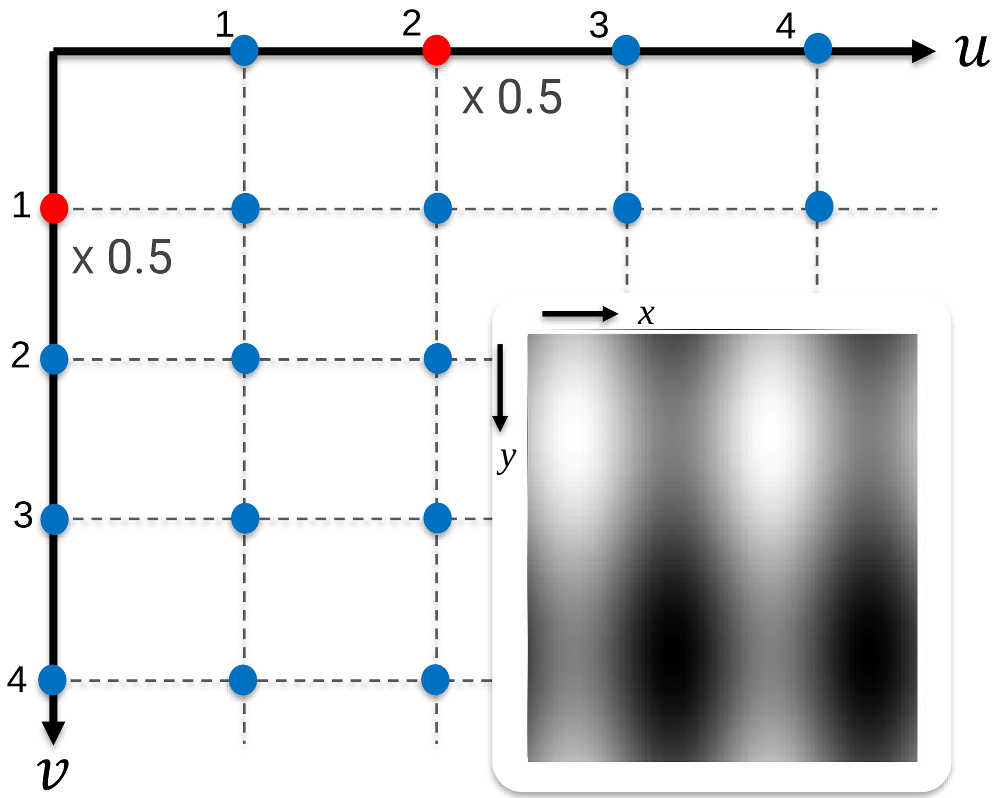
Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



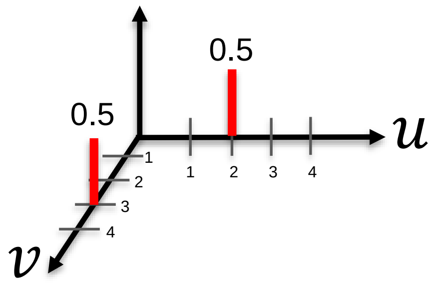
Dominio de la frecuencia

Dominio del espacio

Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias

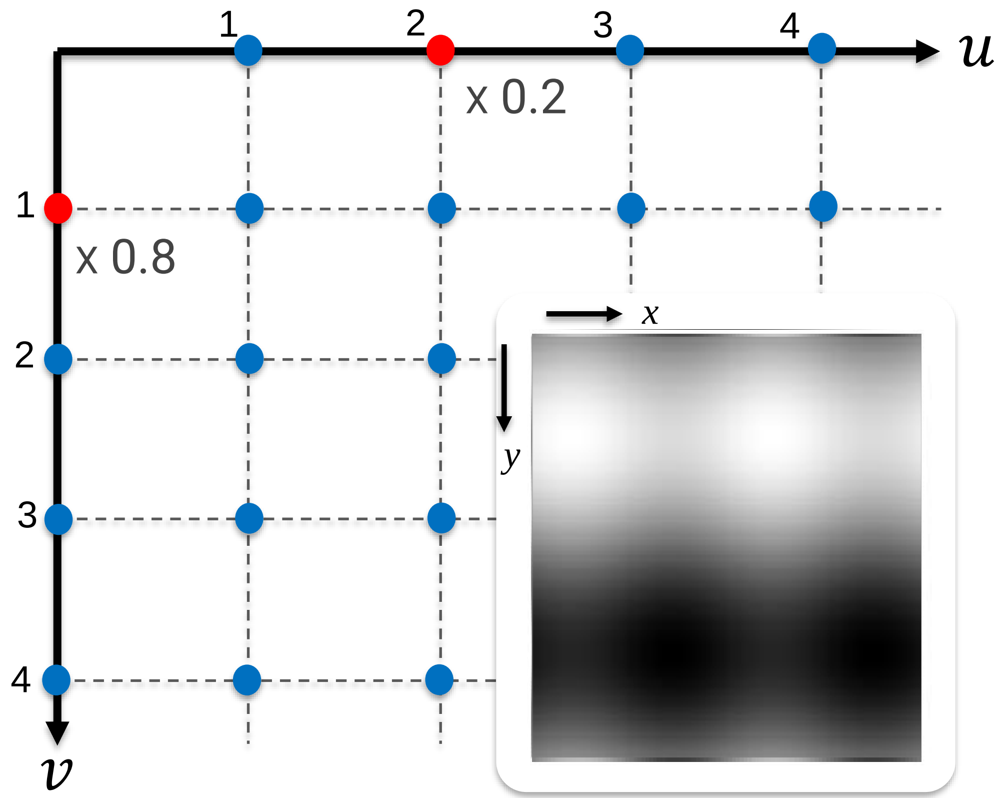


Dominio de la frecuencia

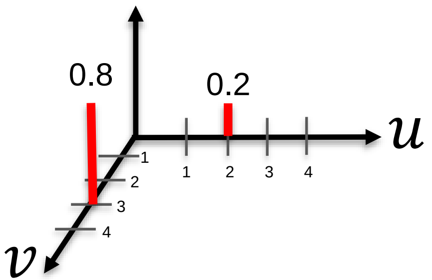


Dominio del espacio

Interpretación de la TF2D - Se define un espacio de dos frecuencias



Dominio de la frecuencia



Dominio del espacio

Contenido:

El Espectro de Frecuencia

La visualización de la Transformada de Fourier 2D se conoce como el espectro de frecuencia o espectro de Fourier.

Dado que $F(u, v)$ es un número complejo, no podemos visualizarlo directamente como una imagen en escala de grises. Se visualiza su magnitud y fase por separado.

El espectro nos muestra la distribución de las diferentes frecuencias presentes en la imagen.

Magnitud y Fase del Espectro

Magnitud ($\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$): Representa la cantidad de cada frecuencia presente en la imagen. Los puntos más brillantes en el espectro de magnitud indican frecuencias con mayor energía (componentes más dominantes).

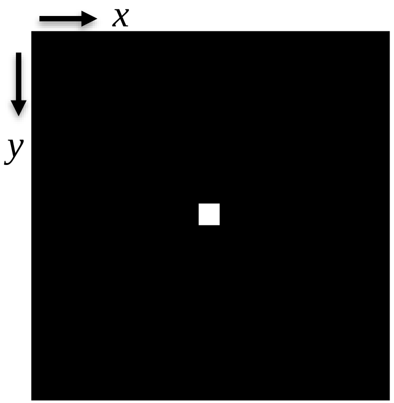
Fase ($\boldsymbol{phi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$): Contiene información sobre la posición y orientación de las características en la imagen. Es crucial para la reconstrucción de la imagen, ya que la magnitud por sí sola no es suficiente para preservar la información espacial.

Visualización del Espectro de Magnitud

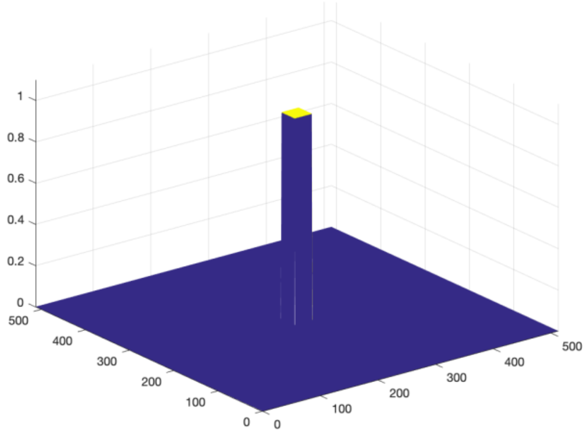
Debido al gran rango dinámico de los valores de magnitud (algunos valores pueden ser mucho mayores que otros), se suele aplicar una transformación logarítmica para su visualización:

$$Log_{espectro} = \log(1 + F(u, v))$$

Para centrar la componente DC en el centro del espectro (facilitando la interpretación), se aplica un desplazamiento antes de la visualización. Esto se logra multiplicando la imagen original por $(-1)^{x+y}$antes de calcular la TF2D.

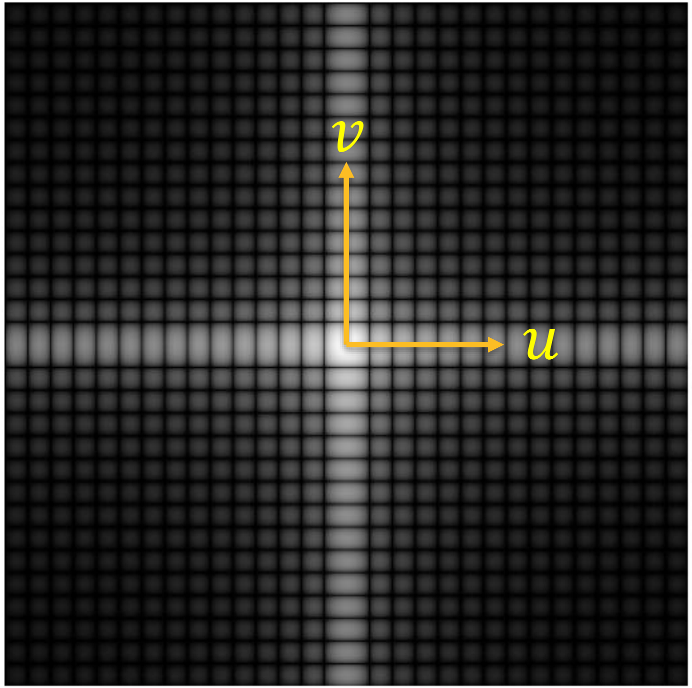


(escala de grises)

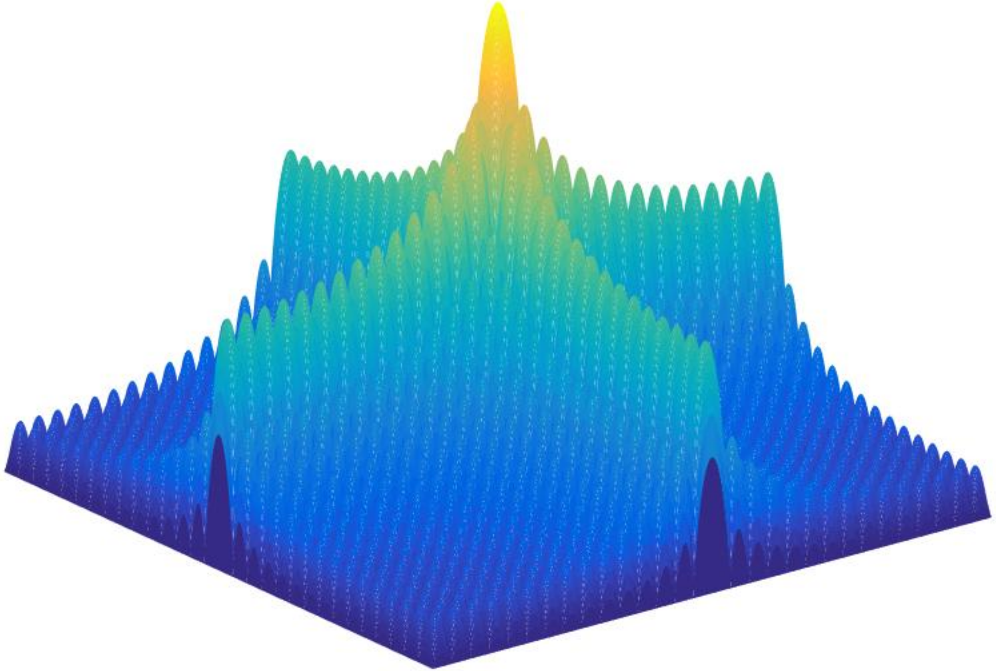


Dominio del espacio

Visualización del Espectro de Magnitud – Dominio de la Frecuencia



(escala de grises)

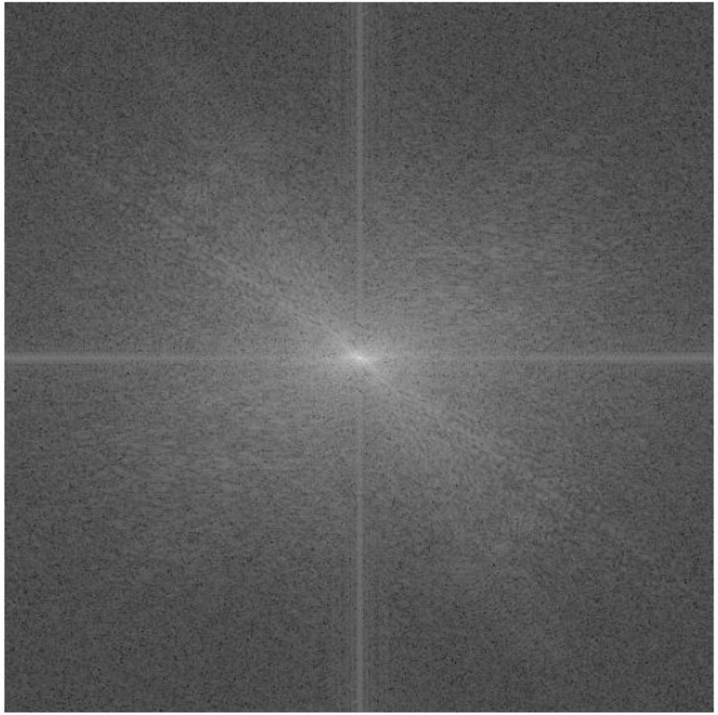


(representación 3D)

Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

Imagen Original

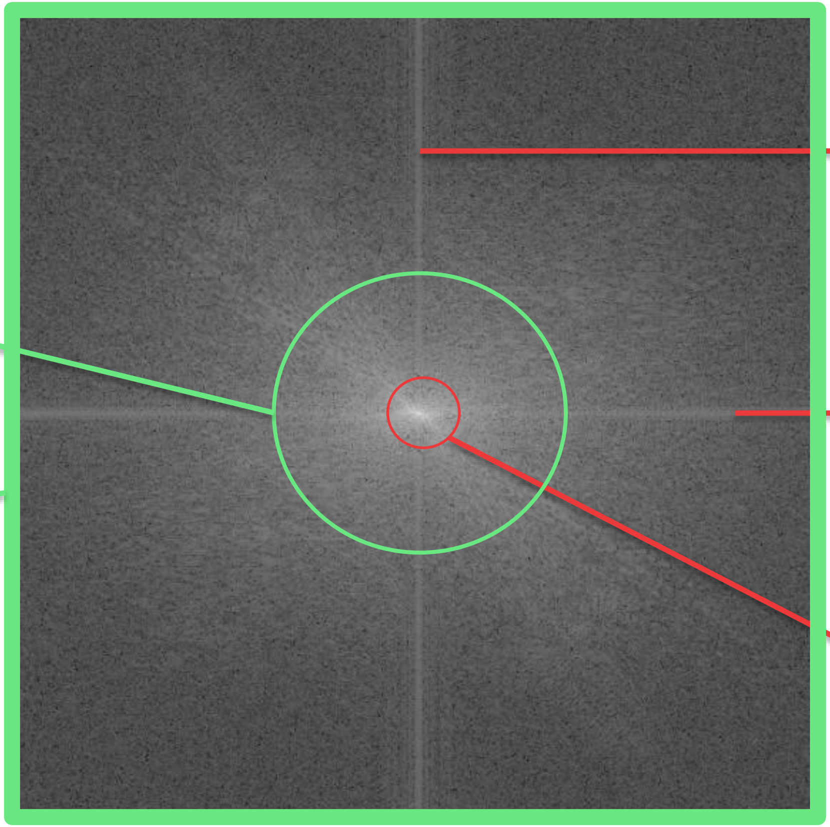
Espectro de Magnitud (Logarítmico)



Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

Las áreas cercanas al centro representan las bajas frecuencias. El brillo en estas áreas indica la energía asociada con las grandes áreas uniformes y las transiciones suaves.

Las áreas más alejadas del centro (hacia las esquinas) representan las altas frecuencias. La menor brillantez en estas zonas, en comparación con el centro, sugiere que las altas frecuencias (detalles finos, bordes) tienen menos energía total que las bajas frecuencias (áreas generales).

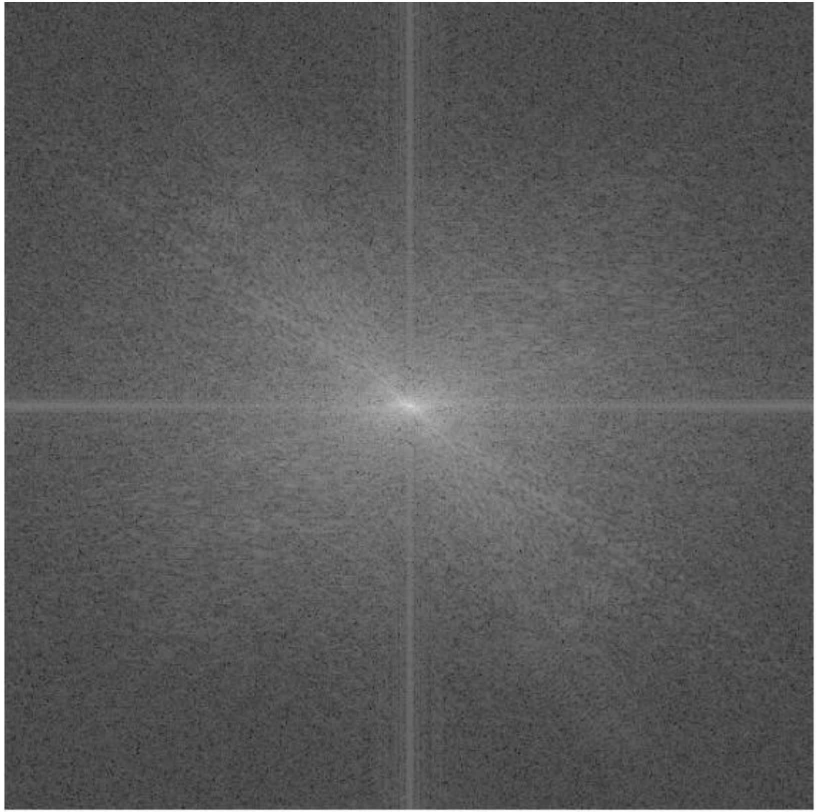


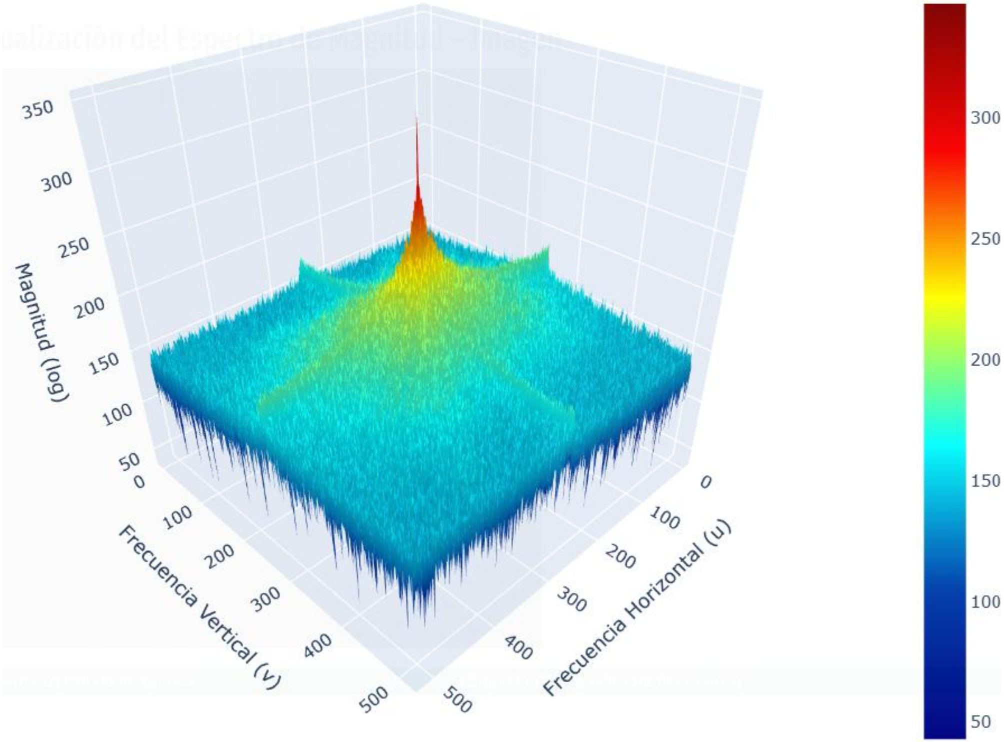
Ejes Brillantes (Horizontales y Verticales)

- La línea vertical brillante sugiere la presencia de muchas características horizontales (bordes horizontales).
- La línea horizontal brillante sugiere que hay muchas características verticales (bordes verticales).

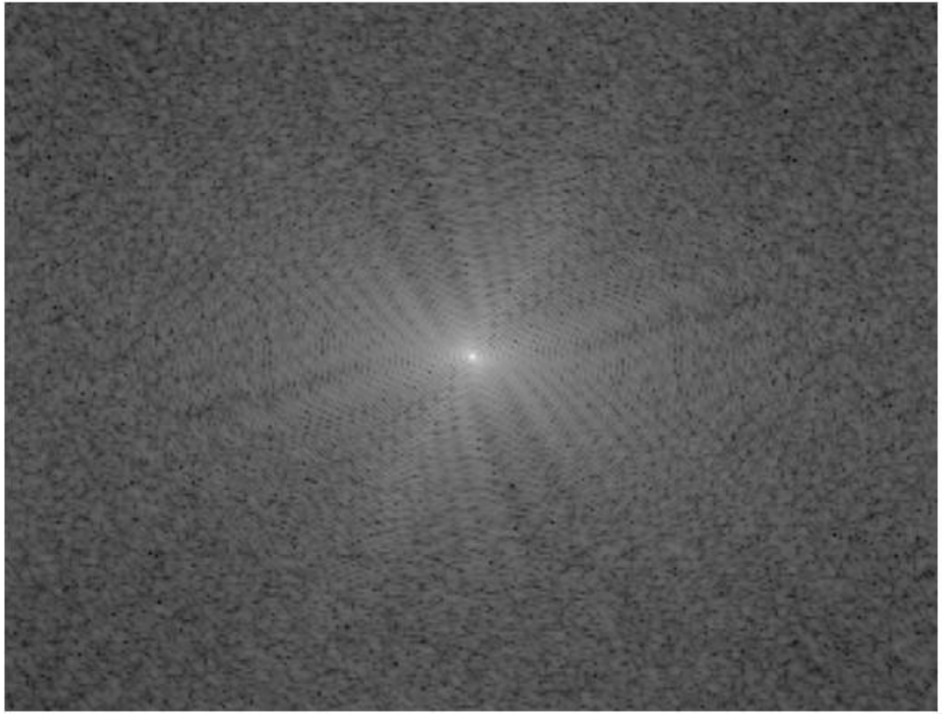
Punto Brillante Central (Componente DC) F(0,0). Este valor representa el promedio de intensidad de toda la imagen.

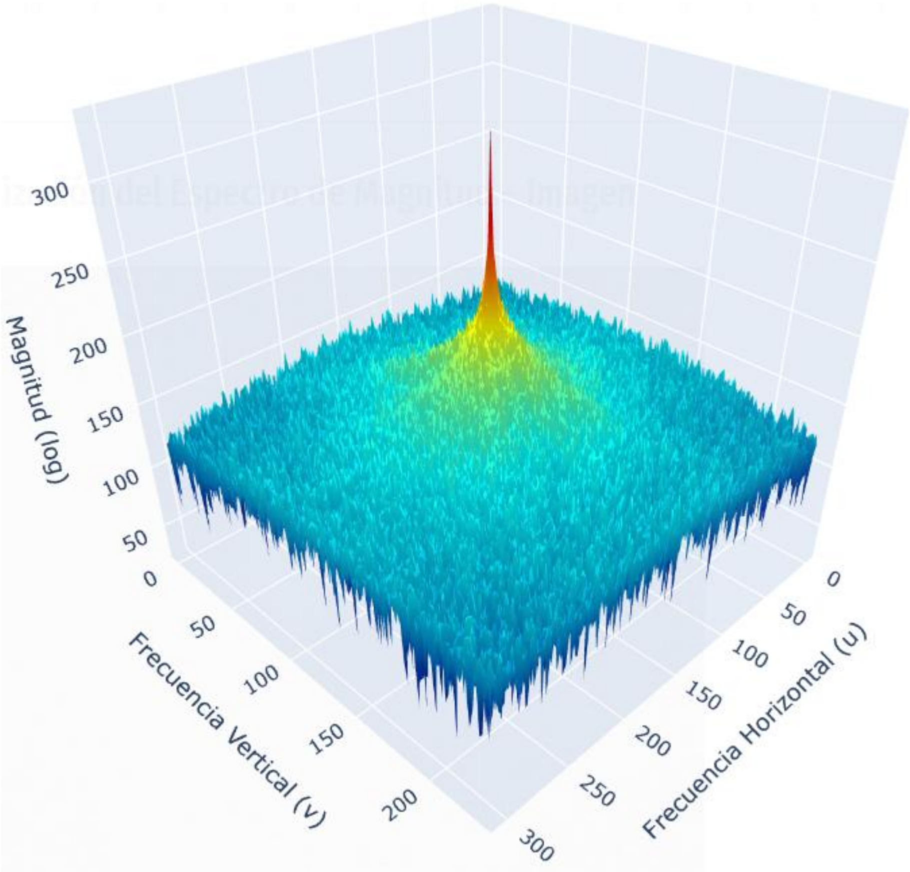
Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen





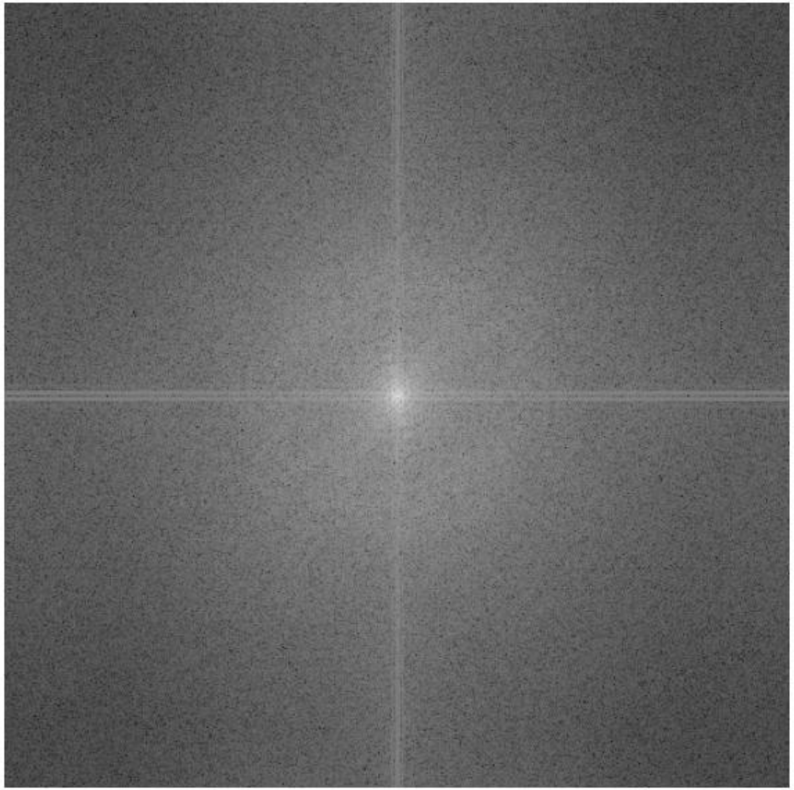
Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

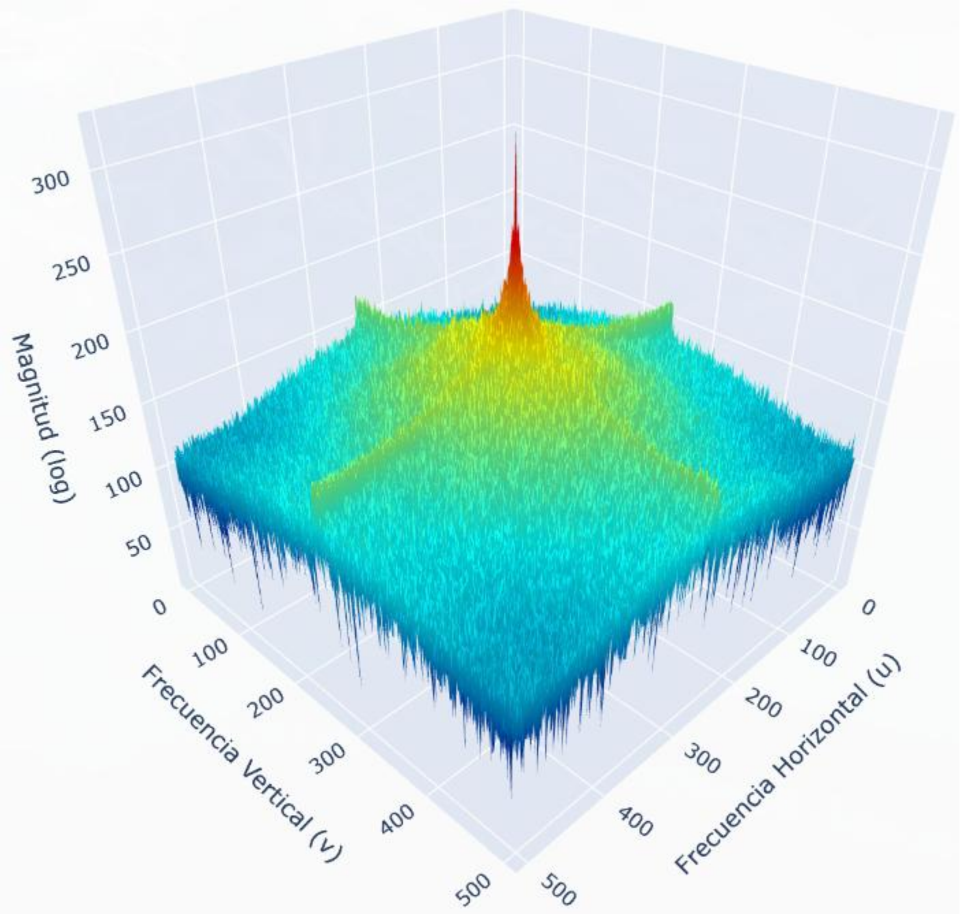




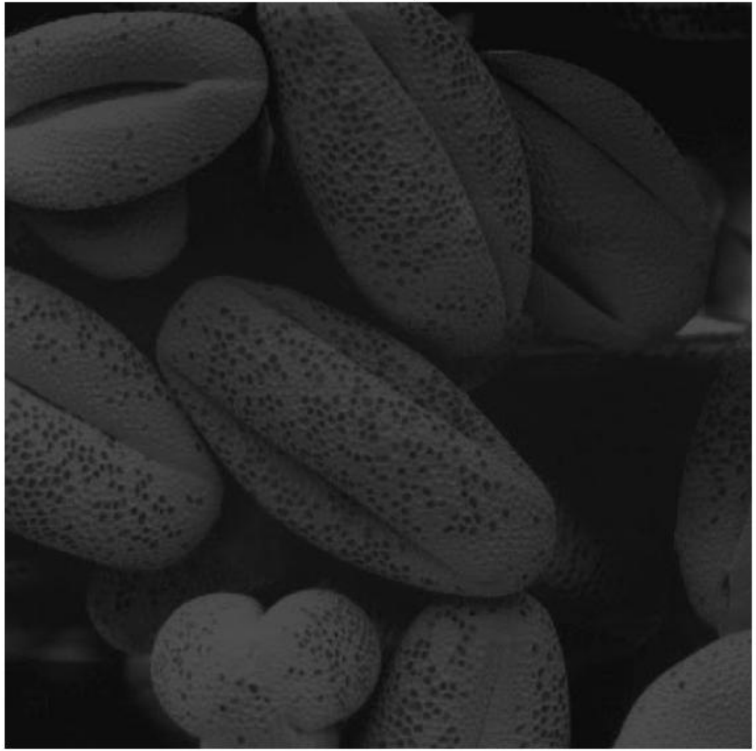
Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

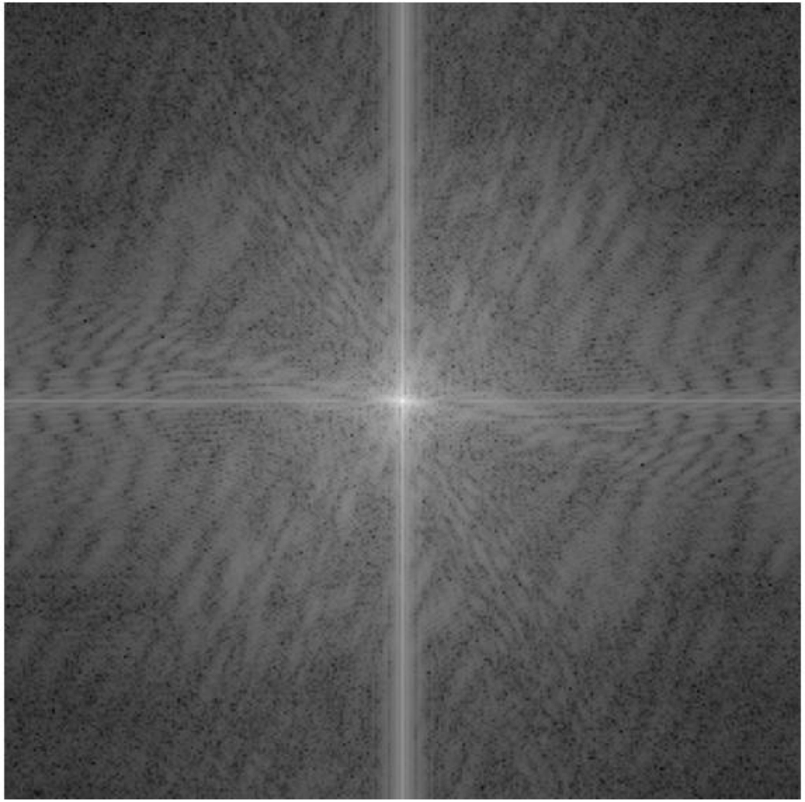


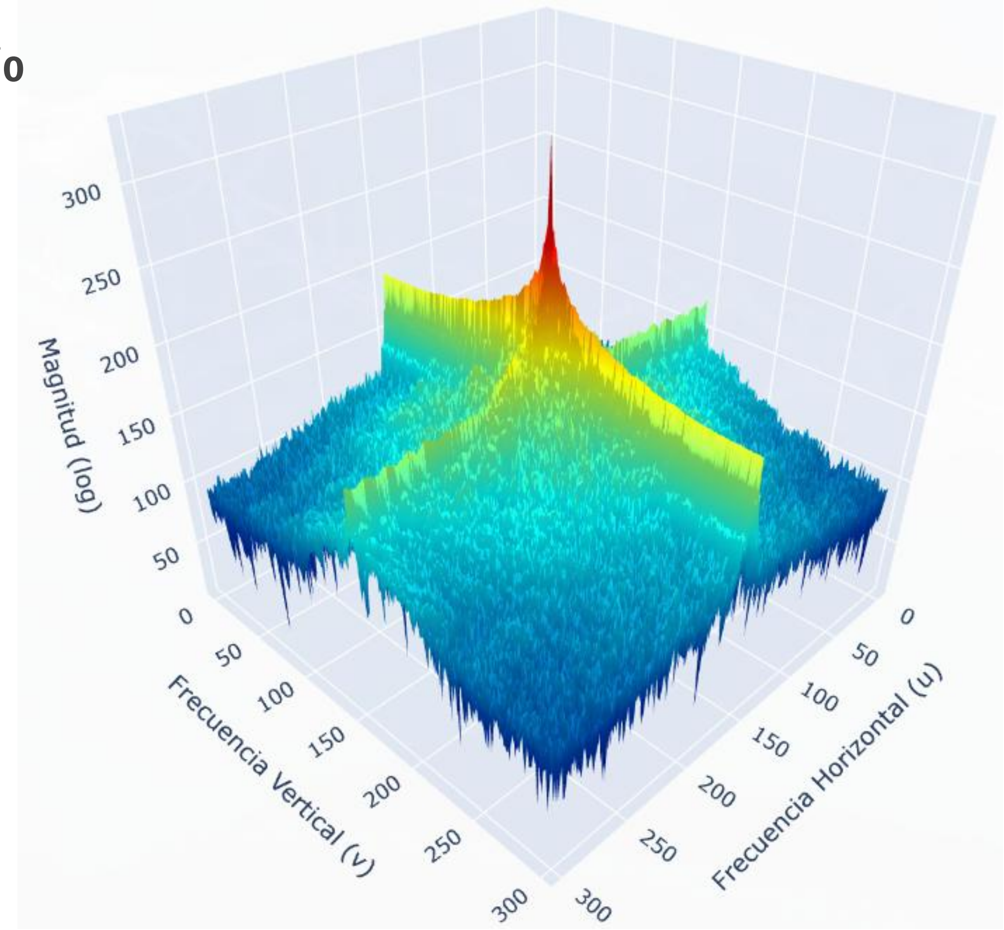


Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

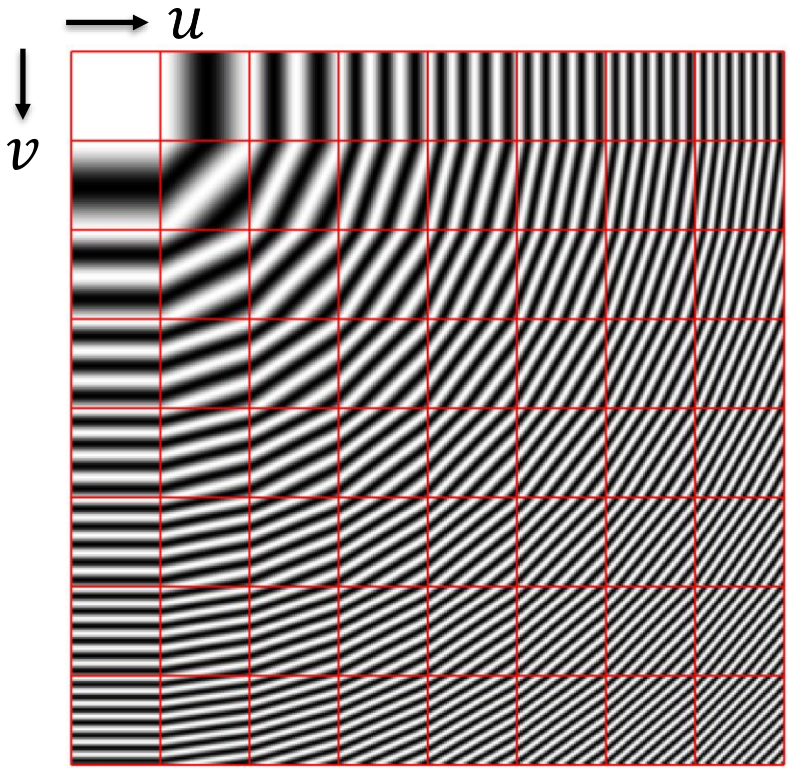


Visualización del Espectro de Magnitud – Ejercicio





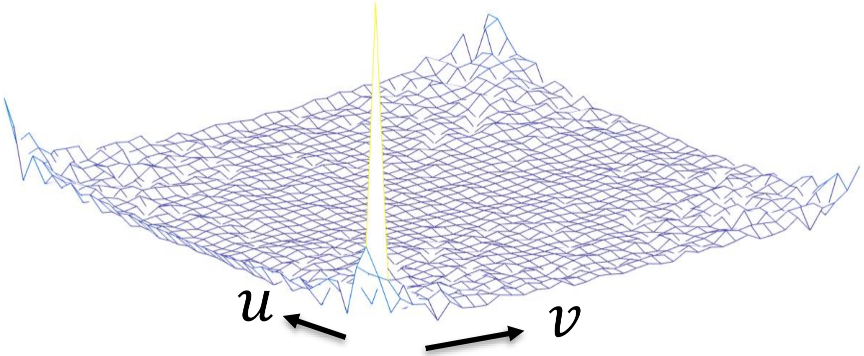
Visualización del Espectro de Magnitud



$$e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

Visualización del Espectro de Magnitud

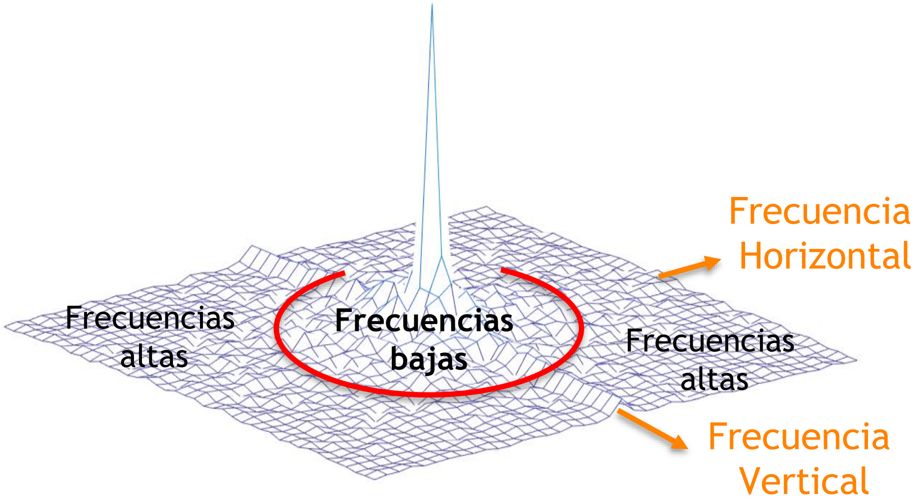
Imagen



Transformada Discreta de Fourier (DFT)
(original)

Visualización del Espectro de Magnitud – Imagen

Imagen



Transformada Discreta de Fourier (DFT)
(con FFTSHIFT)

Contenido:

Filtrado Básico en Frecuencia

Concepto: Modificar el espectro de frecuencia de una imagen para realzar o suprimir ciertas componentes de frecuencia.

Ventaja: Permite un control muy preciso sobre qué frecuencias se ven afectadas, algo que puede ser complicado en el dominio espacial.

Principio de Convolución: Gracias a la propiedad de la convolución, el filtrado en el dominio de la frecuencia se realiza mediante una simple multiplicación del espectro de la imagen con el espectro de un filtro.

Proceso General de Filtrado en Frecuencia

1. Transformada de Fourier 2D: Calcular la TF2D de la imagen de entrada f(x,y) para obtener F(u,v).

2. Creación del Filtro: Diseñar una función de filtro H(u,v) en el dominio de la frecuencia.

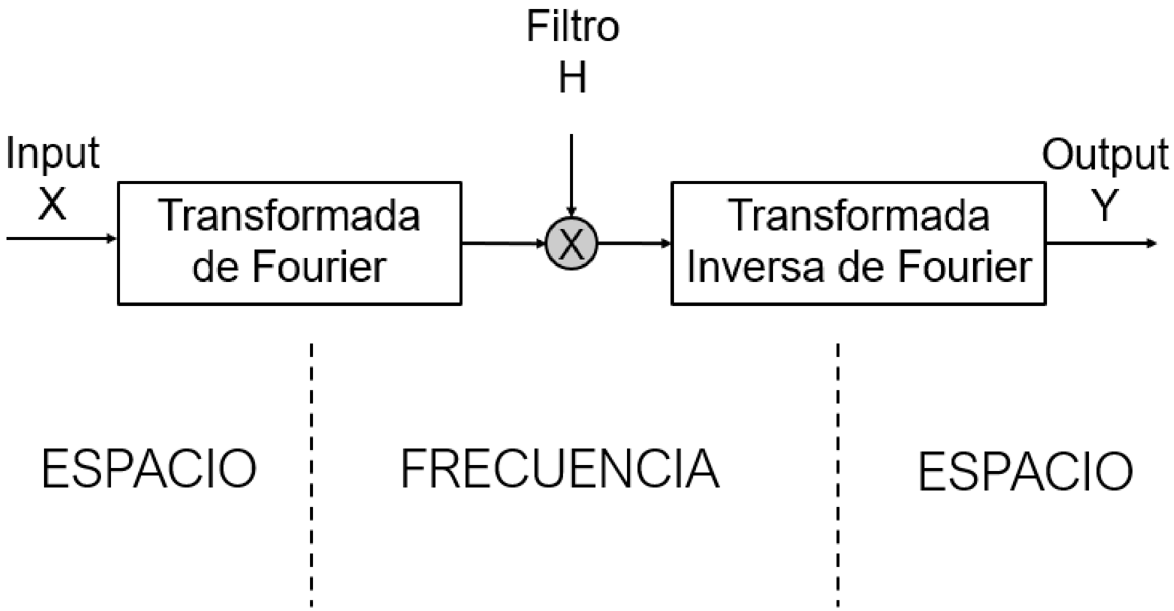
3. Multiplicación: Multiplicar el espectro de la imagen por el filtro: G(u,v)=F(u,v).H(u,v).

4. Transformada de Fourier Inversa 2D: Calcular la IFT2D de G(u,v) para obtener la imagen filtrada g(x,y) en el dominio espacial.

Proceso General de Filtrado en Frecuencia

f	F	F'	f'
Función en el dominio original	Función en el dominio de la frecuencia	Función procesada en el dominio de la frecuencia	Función procesada en el dominio original

Proceso General de Filtrado en Frecuencia



Tipos de Filtros en Frecuencia

- Filtros Pasa Bajo (Low-Pass Filters - LPF): Permiten el paso de las frecuencias bajas y atenúan las altas frecuencias.
  - Efecto: Suavizado de la imagen, reducción de ruido, eliminación de detalles finos.

- Filtros Pasa Alto (High-Pass Filters - HPF): Permiten el paso de las frecuencias altas y atenúan las bajas frecuencias.
  - Efecto: Realce de bordes, nitidez, detección de detalles.

- Filtros Pasa Banda (Band-Pass Filters - BPF): Permiten el paso de un rango específico de frecuencias.

- Filtros Rechaza Banda (Band-Reject Filters - BRF): Bloquean un rango específico de frecuencias (útiles para eliminar ruido periódico).

Filtros Pasa Bajo (LPF)

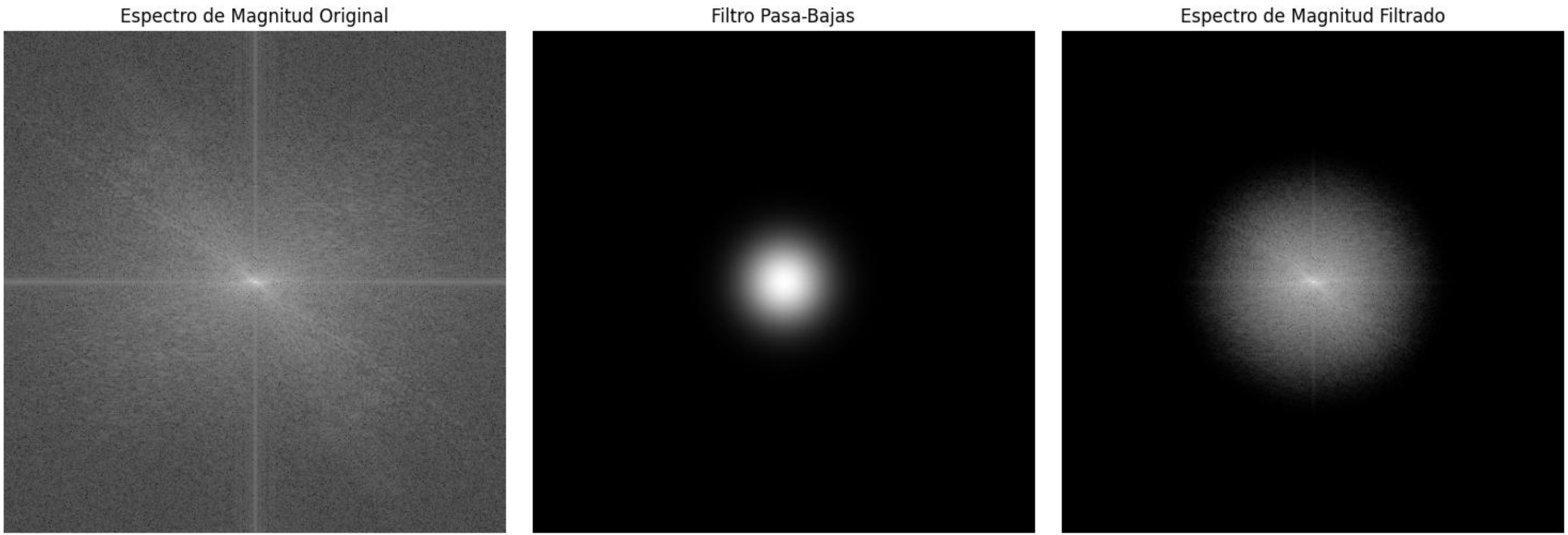
Función: Los LPF atenúan o eliminan las altas frecuencias, que corresponden a los cambios bruscos en la intensidad de la imagen (bordes, ruido).

Resultado: La imagen se vuelve más suave, los bordes se difuminan y el ruido de alta frecuencia se reduce.

Tipos Comunes:

- Ideal LPF: Forma rectangular, paso de banda perfecto y corte abrupto.
- Butterworth LPF: Transición más suave, sin "ringing" (artefactos de oscilación).
- Gaussiano LPF: Transición muy suave, no presenta "ringing", pero puede difuminar más los bordes.

Filtros Pasa Bajo (LPF)

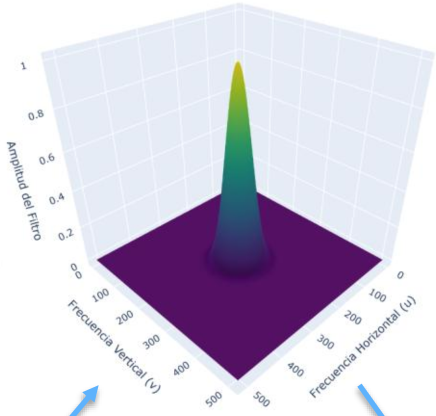


$$F \times H = F'$$

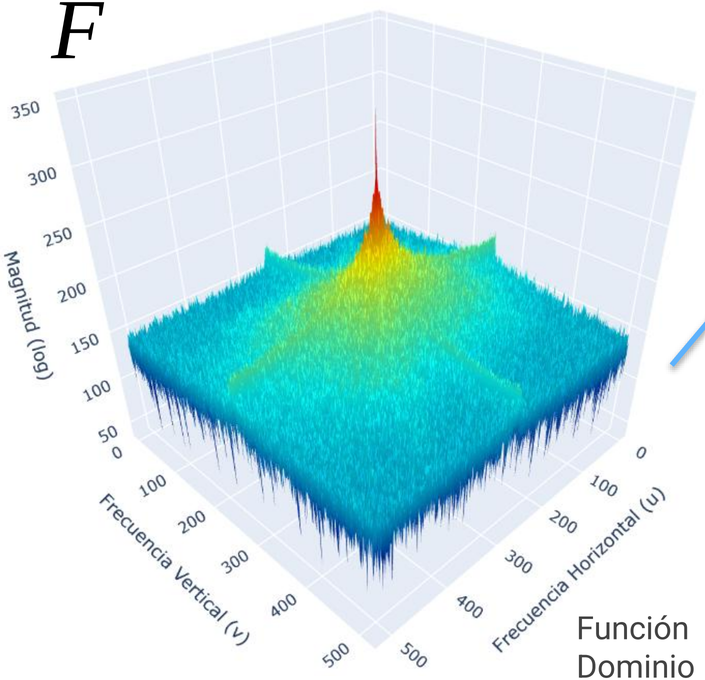
Filtros Pasa Bajo (LPF)

H

Filtro pasa bajo



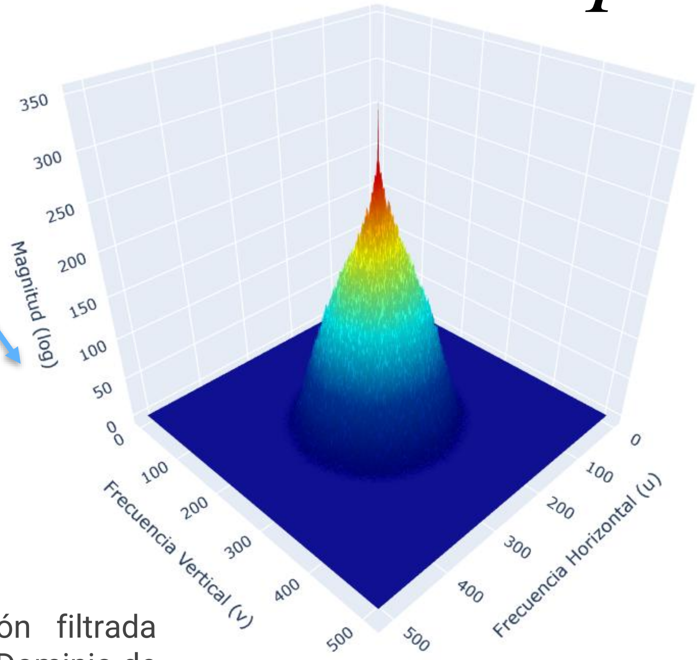
F



x

=

F'



Función en el Dominio de la frecuencia

Función filtrada en el Dominio de la frecuencia

Filtro Pasa Bajo Ideal (ILPF)

Definición:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

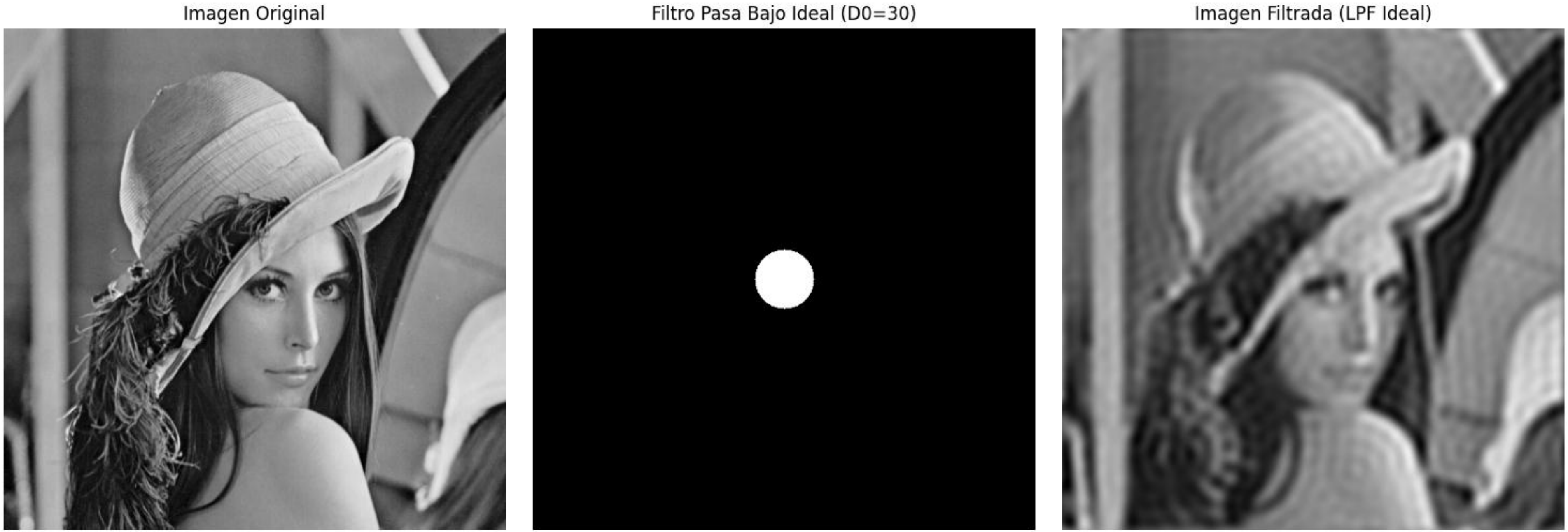
Donde:

$D(u,v) = \sqrt{(u-\frac{M}{2})^2+(v-\frac{N}{2})^2}$, es la distancia euclidiana desde el centro del espectro.

D_0 , es la frecuencia de corte (radio del círculo).

Problema: El corte abrupto en la frecuencia produce artefactos de "ringing" (oscilaciones) en la imagen filtrada, similares a ondas. Esto se debe a la naturaleza de la Transformada de Fourier inversa de una función rectangular.

Filtro Pasa Bajo Ideal (ILPF)



Filtro Butterworth Pasa Bajo (BLPF)

Definición:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\frac{D(u,v)}{D_0}]^{2n}}$$

Donde:

$D(u, v)$: es la distancia euclidiana desde el centro del espectro.

D_0: es la frecuencia de corte (radio del círculo).

n: Orden del filtro (controla la pendiente de la transición).

Ventajas: Ofrece una transición más suave entre las frecuencias pasadas y atenuadas, lo que reduce el efecto de "ringing" en comparación con el filtro ideal. A mayor *n*, más abrupta la transición.

Filtro Butterworth Pasa Bajo (BLPF)

Imagen Original

Filtro Butterworth LPF (D0=30, n=2)

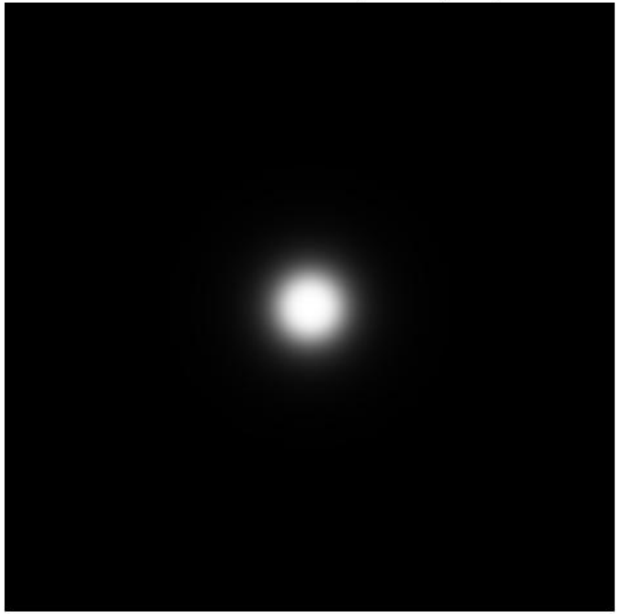


Imagen Filtrada (Butterworth LPF)

Filtro Gaussiano Pasa Bajo (GLPF)

Definición:

$$H(u,v) = e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

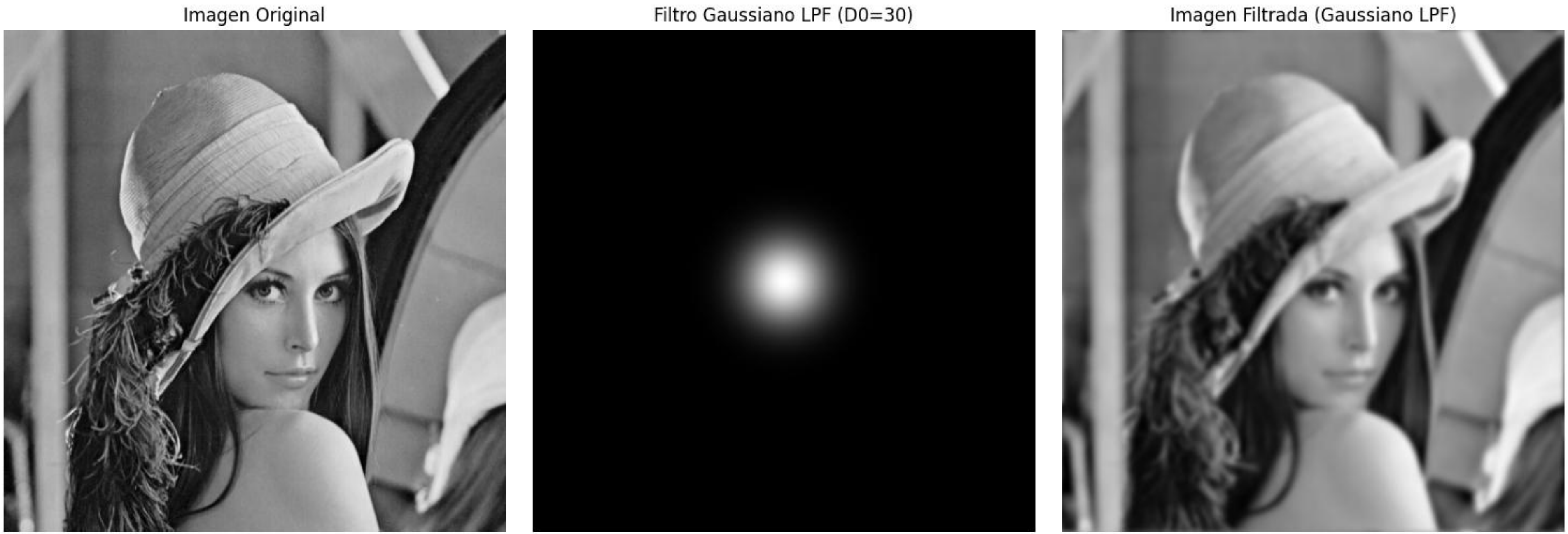
Donde:

$D(u,v)$: es la distancia euclidiana desde el centro del espectro.

D_0: Desviación estándar del Gaussiano (controla el ancho de banda del filtro).

Ventajas: Ofrece la transición más suave de todas, eliminando completamente el efecto de "ringing". La forma Gaussiana es la única función que es Gaussiana tanto en el dominio espacial como en el de la frecuencia.

Filtro Gaussiano Pasa Bajo (GLPF)



Filtros Pasa Alto (HPF)

Función: Los HPF atenúan o eliminan las bajas frecuencias y permiten el paso de las altas frecuencias.

Resultado: La imagen resultante realza los bordes y los detalles finos, haciendo que la imagen parezca más nítida. También puede acentuar el ruido.

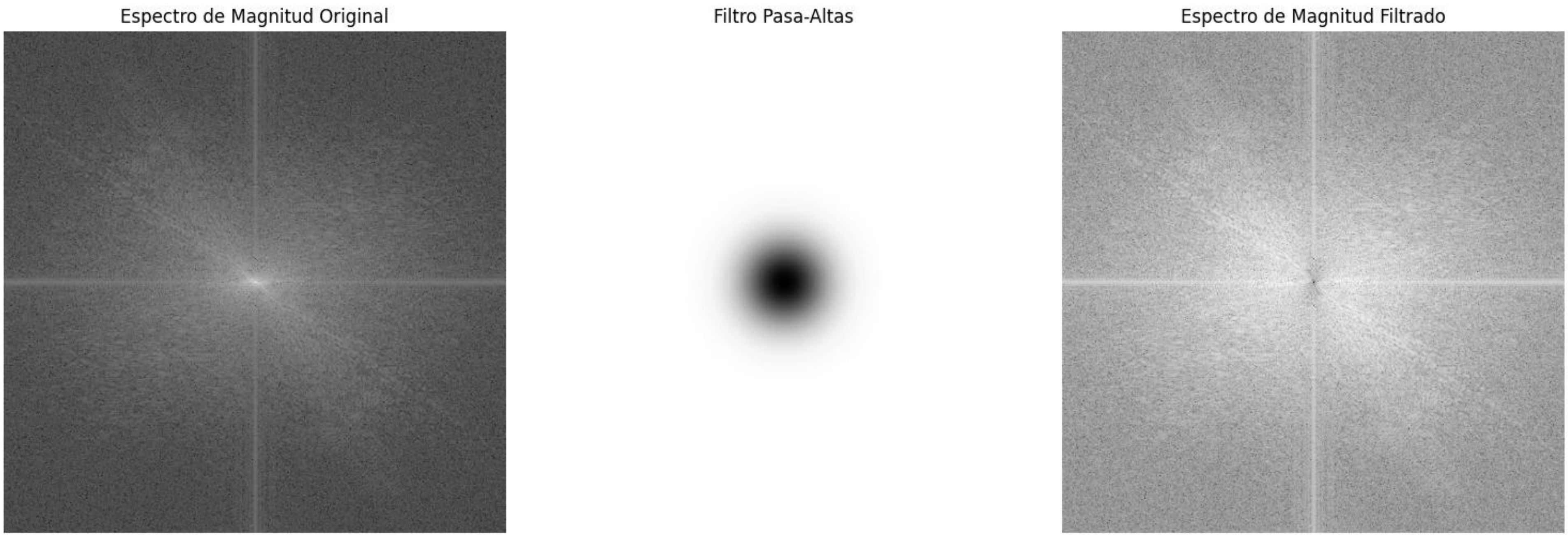
Tipos Comunes:

- Ideal LPF: Forma rectangular, paso de banda perfecto y corte abrupto.
- Butterworth LPF: Transición más suave, sin "ringing" (artefactos de oscilación).
- Gaussiano LPF: Transición muy suave, no presenta "ringing", pero puede difuminar más los bordes.

Construcción: Un HPF puede construirse fácilmente a partir de un LPF complementario:

$$H_{HPF}(u,v) = 1 - H_{LPF}(u,v)$$

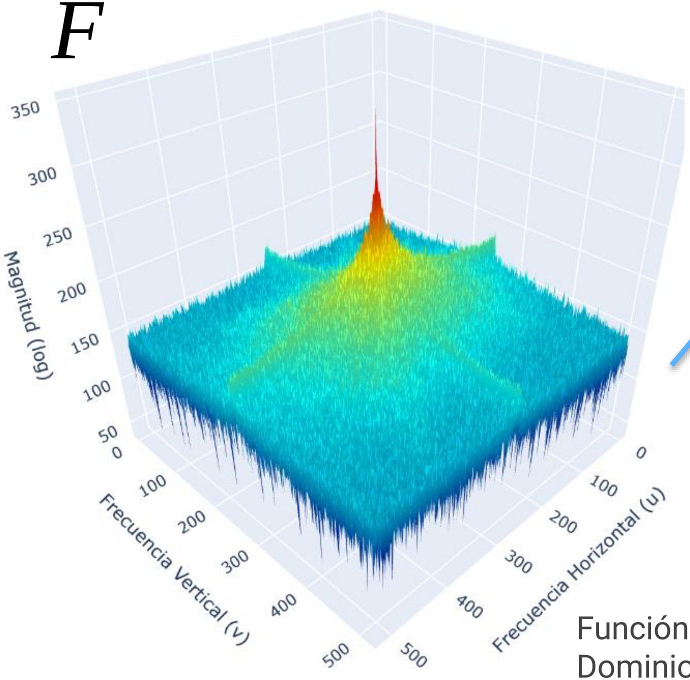
Filtros Pasa Alto (HPF)



$$F \times H = F'$$

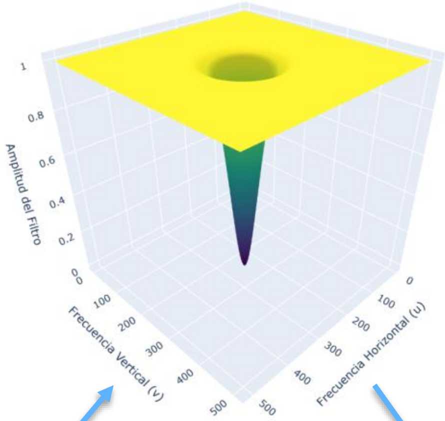
Filtros Pasa Alto (HPF)

F



x

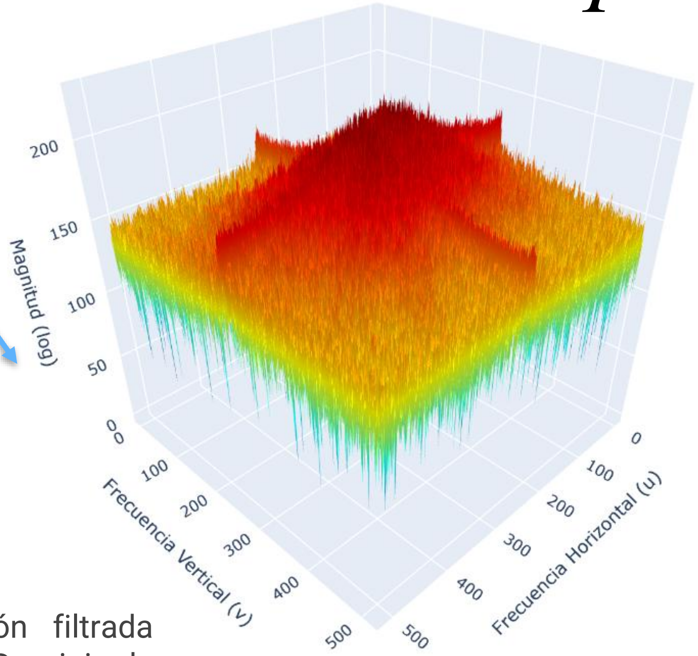
H



Filtro pasa alto

=

F'



Función en el Dominio de la frecuencia

Función filtrada en el Dominio de la frecuencia

Filtro Pasa Alto Ideal (IHPF)

Definición:

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

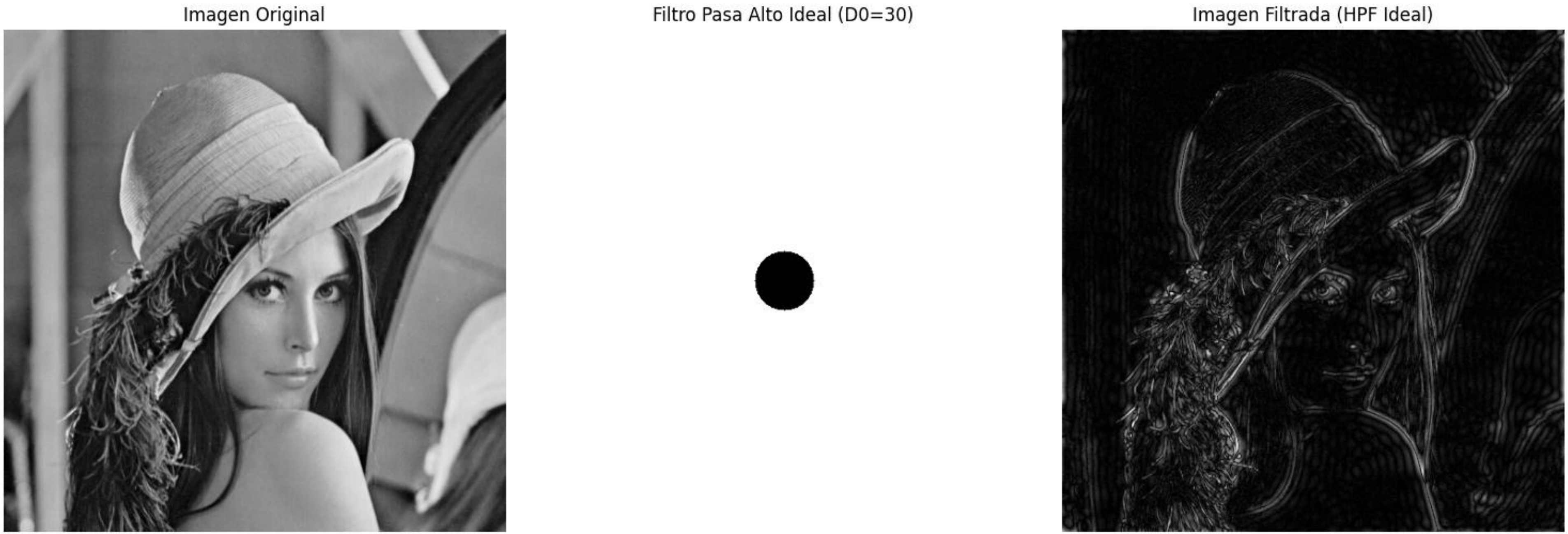
Donde:

$D(u,v) = \sqrt{(u - \frac{M}{2})^2 + (v - \frac{N}{2})^2}$, es la distancia euclidiana desde el centro del espectro.

D_0 , es la frecuencia de corte (radio del círculo).

Problema: Al igual que el ILPF, el corte abrupto produce artefactos de "ringing" significativos, especialmente notorios alrededor de los bordes.

Filtro Pasa Alto Ideal (IHPF)



Filtro Butterworth Pasa Alto (BHPF)

Definición:

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [\frac{D_0}{D(u,v)}]^{2n}}$$

Donde:

$D(u,v)$: es la distancia euclidiana desde el centro del espectro.

D_0: es la frecuencia de corte (radio del círculo).

n: Orden del filtro (controla la pendiente de la transición).

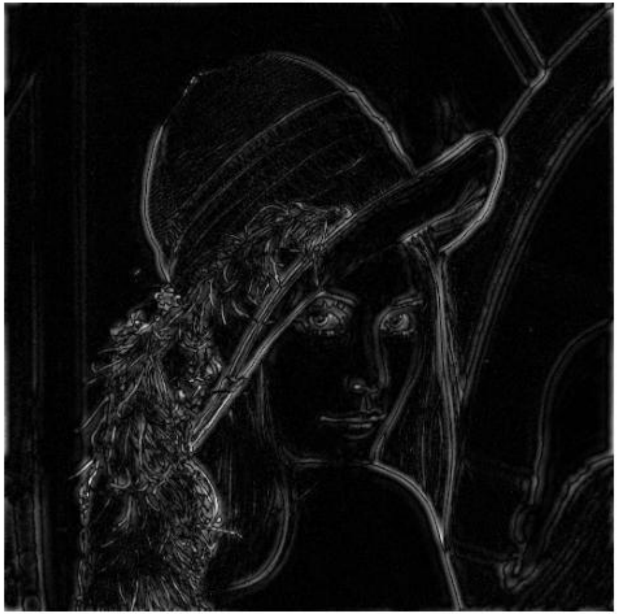
Ventajas: Transición suave, minimiza el "ringing" al realzar los bordes. A mayor *n*, más abrupta la transición.

Filtro Butterworth Pasa Alto (BHPF)

Imagen Original

Filtro Butterworth HPF (D0=30, n=2)

Imagen Filtrada (Butterworth HPF)



Filtro Gaussiano Pasa Alto (GHPF)

Definición:

$$H(u,v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

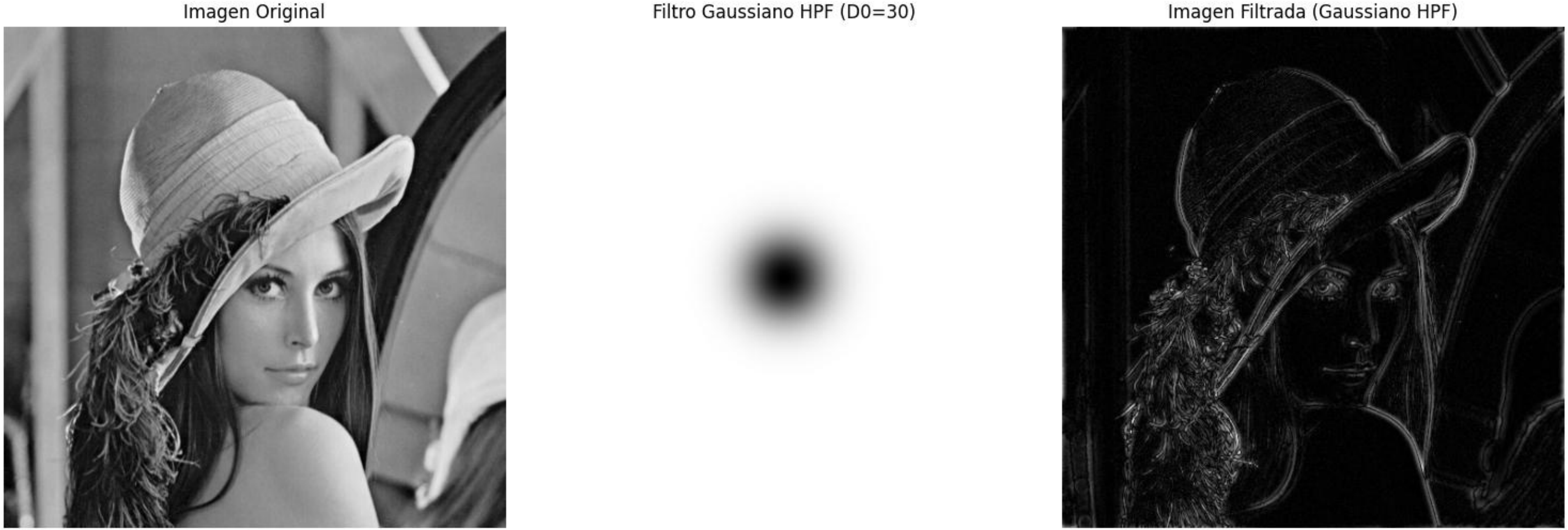
Donde:

$D(u,v)$: es la distancia euclidiana desde el centro del espectro.

D_0: Desviación estándar del Gaussiano (controla el ancho de banda del filtro).

Ventajas: Es el filtro pasa alto con la respuesta más suave, minimizando los artefactos de "ringing". Excelente para realzar bordes sin introducir artefactos.

Filtro Gaussiano Pasa Alto (GHPF)



Filtrado Pasa Banda (BPF) y Rechazo de Banda (BRF)

Filtro Pasa Banda (BPF): Permite el paso de un rango específico de frecuencias, bloqueando las frecuencias muy bajas y muy altas. Útil para aislar ciertas texturas o patrones. Se puede construir combinando un HPF y un LPF.

$$H_{BPF}(u,v) = H_{HPF}(u,v).H_{LPF}(u,v)$$

Filtro Rechazo de Banda (BRF): Bloquea un rango específico de frecuencias, permitiendo el paso de las frecuencias por debajo y por encima de ese rango. Muy útil para eliminar ruido periódico (por ejemplo, ruido de 60 Hz o 50 Hz).

$$H_{BRF}(u,v) = 1 - H_{BPF}(u,v)$$

Capítulo IV:
FIN

Procesamiento Digital de Imágenes