db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2021 年 1 月 13 日

注: 本笔记有些部分来自于wikipedia

todos

1. 誊录纸质笔记 线性代数-线性无关,基和维数.
2. 隐函数存在定理,等幂求和-二项式系数-朱世杰恒等式-(复变函数)
3. 重写线性代数
4. 场论:p20,三个概念即两个公式的算子表示法
5. 补充多个section,计算机图形学,场论等
6. 整合冗余部分

目录

Chapter 1

数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

注：待整理.

1 基本概念

1.1 六大基本初等函数

常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数

1.2 介值定理

在数学分析中,介值定理(英语:intermediate value theorem,又称中间值定理)描述了连续函数在两点之间的连续性:

假设有一连续函数$f : [a,b] \to \mathbf{R}$, 且假设$f(a) < f(b)$, 若对任意数u满足$f(a) < u < f(b)$,则存在一点$c, a < c < b$,使得$f(c) = u$,当$f(a) > f(b)$时也有类似叙述

直观的比喻:这代表在$[a,b]$区间上可以画出一条连续曲线,而不让笔离开纸面.

定理:

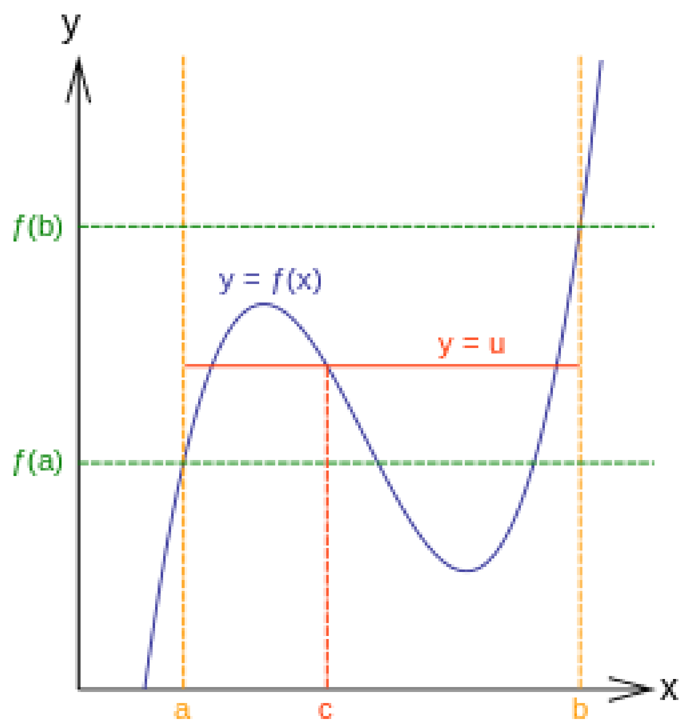
假设$I = [a,b]$是一个实数里的闭区间,而$f : I \to \mathbf{R}$是连续函数,那么其像集$f(I)$也是区间.他或者包含$[f(a), f(b)]$(如果$f(b) \le f(a)$).换言之:

$f(I) \supseteq [f(a), f(b)]$.

或:

$f(I) \supseteq [f(b), f(a)]$.

介值定理通常以下述等价的形式表述:假设$f: I \to \mathbf{R}$是连续函数,且实数u满足$f(a) < u < f(b)$或$f(a) > u > f(b)$,则存在$c \in (a, b)$使得$f(c) = u$

图示:

1.3 二项式定理

$(x+y)^n = x^n + C_{n-1}^n(x^{n-1}y) + C_{n-2}^n(x^{n-2}y^2) + \cdots + y^n$

1.3.1 二项式系数与帕斯卡三角形(杨辉三角)

二项式系数是二项式定理中各项的系数.一般而言,二项式系数由两个非负整数n和k作为参数来决定,写作$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$,定义为$(1+x)^n$的多项式展开式中$x^k$项的系数,因此一定是非负整数.

如果将二项式系数$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$写成一行,再依照$n = 0, 1, 2, 3, ...$顺序由上往下排列,则构成帕斯卡三角形(杨辉三角) :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

事实上,二项式系数就是排列组合中的组合：($C_m^n \Longleftrightarrow \binom{m}{n}$)

此外也有不同的表达方式：$C(n,k)$, ${}_nC_k$, ${}^nC_k, C_n^k, C_k^n \ldots$

1.4 排列组合

排列:$P_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

组合:$C_m^n = \dfrac{P_m^n}{m!} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

1.5 立方差公式

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^3)$

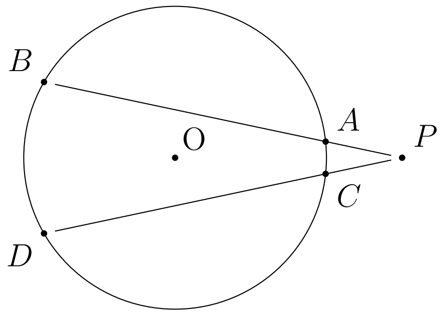
1.6 等幂求和公式

1.7 圆幂定理

给定一个圆r及一点p,由p引出两条割线,分别于r相交于A, B及C, D,则有$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

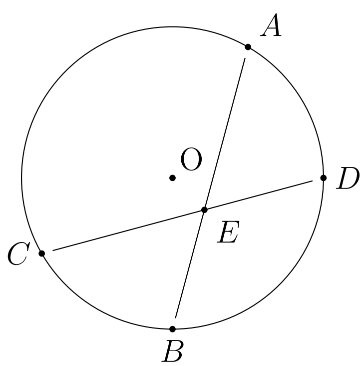
事实上此定理包含三条定理：

1.7.1 割线定理



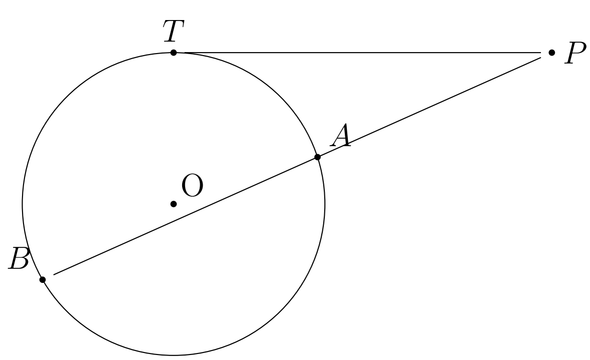
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

1.7.2 交弦定理



$$EA \cdot EB = EC \cdot ED$$

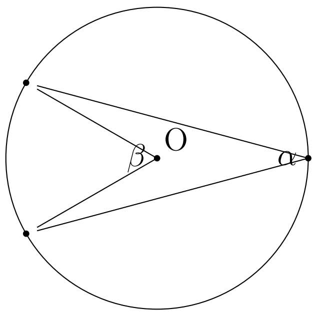
1.7.3 切割线定理



$$PT^2 = PA \cdot PB$$

1.8 圆周角定理

一条弧所对的圆周角α等于所对圆心角的一半.



1.9 韦达定理

1.9.1 韦达定理的普遍情况

设$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$是一个一元n次实(或复)系数多项式,首项系数$a_n \neq 0$,令P的n个根为$x_1, x_2, \ldots, x_n$,则根$\{x_i\}$和系数$\{a_j\}$之间满足关系式：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n) + (x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n) + \cdots + x_{n-1}x = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ \\ x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_n} \end{cases}$$

等价的说,对任何$k = 1, 2, \ldots, n$,系数比$\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$是所有任取k个根的乘积的和的$(-1)^k$倍，即：

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

其中$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$是要让所有根的组合都恰好出现一次.

(等号的左边被称作是初等对称多项式)

1.9.2 $n = 2$的情况(二次)

设x_1, x_2是一元二次多项式$ax^2 + bx + c$的两根,则由$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$有：

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

在这个情况下，韦达定理的逆定理同样成立：给定一个一元二次多项式ax^2+bx+c,如果有两个数x_1, x_2,满足$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$和$x_1x_2 = \frac{c}{a}$,则x_1, x_2就是多项式$ax^2 + bx + c$的两根.

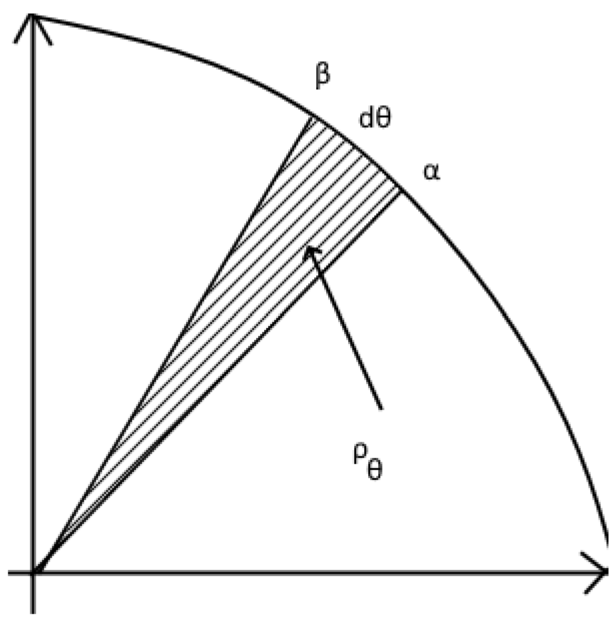
1.9.3 $n = 3$的情况(三次)

设x_1, x_2, x_3是一元三次多项式$ax^3 + bx^2 + cx + d$的三根，则
$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$

1.10 极坐标

极坐标是不同于笛卡尔坐标系(直角坐标系)的另一种函数图像平面.
极坐标不同于笛卡尔坐标系,他没有x和y轴,而是用基准轴和角度表示一个点.

1.10.1 极坐标系下的面积



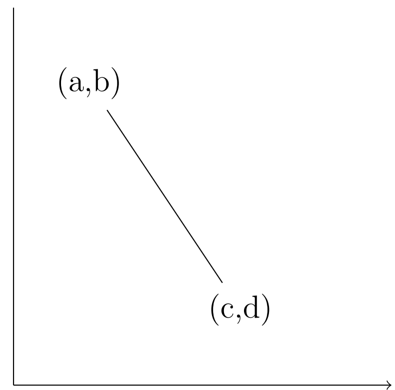
公式为$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(p(\theta))^2d\theta$
p是形成曲线的函数.

1.10.2 转换公式

从直角坐标系到极坐标有一套转换公式.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

1.10.3 极坐标表示线



由转换公式,可以将直线在直角坐标系下的解析式$y = kx + b$转换为在极坐标下的解析式：

$$\rho\sin\theta = k\rho\sin\theta + b$$

再变形得到：

$$\rho = \frac{b}{\sin\theta - k\cos\theta}$$

1.10.4 极坐标表示面

所谓"线动成面",想要用极坐标表示面,只需要加上ρ的取值条件就行(即：$a \leq \rho \leq b$,此处的a, b也可以是关于其他变量的公式).

1.10.5 柱面坐标

柱面坐标是一种将极坐标扩展到三维的方法,其实就是加了个z轴.因此转换公式为：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

1.10.6 球面坐标

球面坐标又是不同与柱面坐标的另一种形式,他引入了另一个表示角度的变量φ
球面坐标由三个变量组成,如果将某一个点用向量$\vec{v}$表示,那么三个变量分别是：

- r：表示$\vec{v}$的长度,可以理解成极坐标的ρ.取值范围为:$[0,+\infty)$
- θ：用过原点以z轴作为法向量的平面作为极坐标的平面,$\vec{v}$投影到此平面上时θ就是该投影在极坐标中的角度单位.取值范围为$[0,2\pi]$
- φ：以原点为顶点,z轴为旋转轴,$\vec{v}$作为母线的圆锥面的半顶角.也就是$\vec{v}$与z轴的夹角.取值范围为:$[0,\pi]$

从直角坐标系到球面坐标系的转换公式为：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

1.11 不等式

1.11.1 基本不等式

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
注:当且仅当$a=b$时取等号
其中$\dfrac{a+b}{2}$称为a,b的算数平均数,$\sqrt{ab}$称为a,b的几何平均数.
将其变形,可得:

1. $a+b \geq 2\sqrt{ab}$(当且仅当$a=b$时取等号)
2. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geq 2$($a,b$同号)
3. $ab \leq (\dfrac{a+b}{2})^2(a,b \in \mathbb{R})$
4. $(\dfrac{a+b}{2})^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}(a,b \in \mathbb{R})$

1.11.2 柯西不等式

柯西不等式有很多种形式:

- 二维形式:

  由$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$变形:$ac+bd\leq\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

  当且仅当$ab=cd$(即$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$)时.

  一般形式为$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\geq\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$

  当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$或$a_i,b_i,i=1,2,3,\ldots,n$中至少有一方全为0时等号成立.

  一般形式推广:$(x_1+y_1+\ldots)(x_2+y_2+\ldots)\ldots(x_n+y_n+\ldots)\geq\left[\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^{\dfrac{1}{n}}+\left(\prod\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^{\dfrac{1}{n}}+\ldots\right]^n$

  此推广形式又称卡尔松不等式,其表述是:在m×n矩阵中,各列元素之和的几何平均不小于各行元素的几何平均之和.二维形式是卡尔松不等式n=2时的特殊情况.

- 向量形式:

  对于内积空间中的向量$\vec{x}$和$\vec{y}$,有

  $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle^2|\leq\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\times\langle\vec{y},\vec{y}\rangle$

  其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示内积.等价地,将两边开方,等式右边即可以写为两向量范数乘积的形式.

  $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle|\leq||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||$.

  另外,当且仅当x和y线性相关时,等号成立(仅两个向量而言,线性相关等同于平行).

  若$x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{C}$和$y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{C}$有虚部,内积即为标注内积.如果用上划线标记共轭复数,这个不等式可以更明确的表述为:

  $|\vec{x_1}\bar{\vec{y_1}}+\cdots+\vec{x_n}\bar{\vec{y_n}}|^2\leq(|\vec{x_1}|^2+\cdots+|\vec{x_n}|^2)(|\vec{y_1}|^2+\cdots+|\vec{y_n}|^2)$.

- 三角形式:

  在三角形ABC中,这个式子可以写作:$||\vec{AB}||+||\vec{BC}||\geq||\vec{AC}||=\left|\left|\left\|\vec{AB}\right\|+\left\|\vec{BC}\right\|\right|\right|$

  也就是说:$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

等号成立的条件为:$ad = bc \wedge ac + bc \geq 0$(即$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$).

- 积分形式:

  $\left(\int f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx$

- 一般形式:

  设V是一线性空间,定义内积,记作$\langle\alpha,\beta\rangle$,则:

  $|\langle\alpha,\beta\rangle| \leq |\alpha||\beta|$.

  其中α,β为V中的向量.

1.11.3 三角不等式

叙述为：对于任意实数a,b,有：

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| - |b|$$

证明：首先有：

$$-|a| \cdot |b| \leq ab \leq |a| \cdot |b|$$

然后三侧都加上a^2+b^2,就变成了：

$$(|a| - |b|)^2 \leq (a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

再开根号,原式就出来了.

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

(三角不等式的向量形式其实也有出现在柯西不等式中,见1.1.11.2)

1.11.4 均值不等式

平均数不等式,或称平均值不等式、均值不等式,是数学上的一组不等式,也是基本不等式的推广.它是说:
如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$是正数,则:
$\mathbf{H}_n \leq \mathbf{G}_n \leq \mathbf{A}_n \leq \mathbf{Q}_n$
其中:

- 调和平均数： $\mathbf{H}_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$

- 几何平均数：$\mathbf{G}_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$

- 算术平均数：$\mathbf{A}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_n}{n}$

- 平方平均数：$\mathbf{Q}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$,等号成立.

当$n = 2$时:

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

即对这些正数:调和平均数≤几何平均数≤算数平均数≤平方平均数(方均根)

可简记为:**“算几调方”**

1.11.5 算术-几何均值不等式

算术-几何平均值不等式,简称算几不等式,是一个常见而基本的不等式,表现算术平均数和几何平均数之间恒定的不等关系.设$x_1, x_2, \ldots, x_n$为n个正实数,他们的算数平均数是$\mathbf{A}_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$,他们的几何平均数是$\mathbf{G}_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$.算术-几何平均值不等式表明,对任意的正实数$x_1, \cdots, x_n$,总有:

$$\mathbf{A}_n \geq \mathbf{G}_n$$

等号当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时成立.

证明：

当$n = 0, 1, 2$时情况是退化的,已知.当$n = 4$时：

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \frac{2\sqrt{x_1 x_2} + 2\sqrt{x_3 x_4}}{4} = \frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}}{2} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

$n = 8$时多进行一步.如此往复用归纳法,可得出当$n = 2^k$时成立.

如果$n \neq 2^k$,则一定存在$l \in N^+$,使得$2^{l-1} \leq n \leq 2^l$.

记$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \bar{x}$.

那么对$x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}$(此处一共有$2^l - n$个$\bar{x}$)求算术平均术,则：

$$\frac{\left[x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (2^l - n)\bar{x}\right]}{2^l} \geq \sqrt[2^l]{x_1 x_2 \ldots x_n \cdot \bar{x}^{2^l - n}} = \bar{x}$$

因此：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + (2^l - n)\bar{x} \geq 2^l \bar{x}$$

移项可得：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n\bar{x}$$

再将n除到左边,就证出来了.

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

1.11.6 常用不等式

- $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$
- $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$
- $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
- $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

1.12 可微,可导,连续的关系

1.12.1 一元情况下的关系

- 可微是可导的充要条件,即:可微$\Leftrightarrow$可导
- 可微和可导都是连续的充分条件,即:可微$\to$连续、可导$\to$连续

$$\begin{tikzcd}
\text{可微} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & \text{可导} \arrow[dl] \\
& \text{连续} &
\end{tikzcd}$$

1.12.2 多元情况下的关系

- 可微(全微分)是可导和连续的充分条件,即:可微$\Rightarrow$可导、可微$\Rightarrow$连续.
- 可导$\nRightarrow$连续.

一元：
$$\begin{tikzcd}
\text{可微} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{可导} \\
 & \text{连续}
\end{tikzcd}$$

1.13 零散的定义

1. 有界:$\exists\epsilon, f(x) < \epsilon \quad (-\infty < x < \infty)$
2. 什么时候函数能复合：内层值域$\in$外层定义域

1.14 零散的思想

1. 正变换是数学的重要工具,三角变换是只变其形不变其质的.三角变换常常先寻找式子所包含的各个角之间的联系,并以此为依据选择可以联系它们的适当公式,通过换元法把三角恒等变换问题转化为代数恒等变换问题.

2 数学分析

2.1 映射与函数

2.1.1 映射

映射指的是集合之间的一种对应关系.

定义：X, Y是两集合,按照某个规则f,对于任一的$x \in X$,有唯一的$y \in Y$与之对应,则称f是X到Y的一个映射.

记为：$f : X \to Y$,即：$x \mapsto y = f(x)$

称呼：

- y：在映射f下,x的像.

- x：在映射f下,y的一个逆像.
- X：f的定义域,记为$X=D_f$.
- Y：f的值域,记为$R_f\subset Y$,具体的来说,$R_f=\{y|y\in Y\wedge\exists x(y=f(x)\wedge x\in X)\}$

举例：设X是平面上三角形的全体,Y是平面上圆的全体,构造一个映射f,表示(y 是 x 的外接圆),记为：

$$f:X\underset{x\mapsto y}{\rightarrow}Y$$

2.1.2 映射的基本要素

- $X=D_f$,定义域.
- Y,限制值域的范围.
- f,需要保证像的唯一性.

这说明了两点：

1. 映射的像是唯一的,举例：

   设$X=\mathbb{R}^+=\{x|x\in R\wedge x>0\}$,假设存在映射$f:X\underset{x\mapsto y}{\rightarrow}Y(y^2=x)$,此时$Y=\mathbb{R}$,那么假设$x=4,y=\pm2$.这个映射就无法保证像的唯一性.换句话说,这个$f$并不是个映射.

   但是可以稍作改造:对$Y=\mathbb{R}$做限制,令$Y=R^-$,此时：

   $$f:\begin{array}{c}X\rightarrow Y\\x\mapsto y\end{array}\ (y^2=x)$$

   就构成了一个映射

2. 映射不要求逆向唯一.

2.1.3 映射的分类

- 单射：

  f是X到Y的一个映射,若逆像也具有唯一性,则称f是单射(injection)

  逻辑命题表述：$x_1\neq x_2\Rightarrow y_1\neq y_2(y_1=f(x_1),y_2=f(x_2))$

  注：单射的值域不一定完全等于Y,也可能包含于Y,即$R_f\subseteq Y$

- 满射：如果映射的值域完全等于Y,即$R_f = Y$,则称为满射(surjection).

  注：满射不一定是单射

- 双射：如果f又是单射,又是满射,则称f为双射(bijection)

  双射又称为一一对应.

2.1.4 逆映射

如果$f: X \to Y$是一个单射,即对任意的$y \in R_f$,有唯一的逆像$x \in X$与y对应.

如果$g: \begin{array}{l} R_f \to X \\ y \mapsto x \end{array}$ 是满射($f(x) = y$)

那么g就称为f的逆映射,又记为f^{-1}

举例：$y = \sin x: \begin{array}{l} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto y = \sin x \end{array}$,他的逆映射为：

$$x = \arcsin y: \begin{array}{l} [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y \mapsto x \end{array} \ (\sin x = y)$$

2.1.5 复合映射

$$g: \begin{array}{l} X \to U_1 \\ x \mapsto u = g(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{l} U_2 \to Y \\ u \mapsto y = f(u) \end{array}$$

这两个映射若是要复合在一起,那么就得满足：$R_g \subset U_2 = D_f$.即：g的值域在f的定义域中,才能构造出复合映射.

称为f与g的复合映射.

例：设$X = Y = U_1 = U_2 = \mathbb{R}$：

$$g: \begin{array}{l} x \to U_1 \\ x \mapsto u = \sin x \end{array}$$

$$f: \begin{array}{l} U_2 \to Y \\ u \mapsto y = \frac{u}{1+u^2} \end{array}$$

由于$R_g=[-1,1]\subset D_f$,所以：

$$f\cdot g:\begin{array}{l} X\to Y \\ x\mapsto y=\frac{\sin x}{1+\sin x}\end{array}$$

2.1.6 函数

函数是映射的特殊情况.

有映射：

$$f:\begin{array}{l} X\to Y \\ x\mapsto y=f(x)\end{array}$$

如果$X\subset\mathbb{R},Y=\mathbb{R}$,即如果两者都是实数构成的集合,那么就称$f$为一元实函数(简称函数).

如果X是卡氏积(笛卡尔乘积集合),那么就是多元实函数.

对函数来说,映射可以简写为：

$$y=f(x),x\in X\ (X=D_f)$$

其中x也称为自变量,y称为因变量,函数也反映了因变量与自变量变化的一种因果关系.

2.1.7 基本初等函数

以下几种函数被称为基本初等函数：

1. 常数函数：$y=\mathbb{C}$
2. 幂函数：$y=x^\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R})$
3. 指数函数：$y=a^x\ (a>0\wedge a\neq 1)$
4. 对数函数：$y=\log_a x\ (a>0\wedge a\neq 1)$
5. 三角函数：$y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x...$
6. 反三角函数：$y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x...$

2.1.8 初等函数

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数.

例如：

$$y=ax^2+bx+c$$

2.1.9 自然定义域

自然定义域是指函数中自变量的最大取值范围.

如果函数不注明定义域,则默认定义域为他的自然定义域.

例：求$y = x + \frac{1}{x}$的自然定义域：

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),\ R = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

方法不说了...难以描述.

2.1.10 函数的表示

- 显式表示：$y = f(x)$
- 分段表示：

  $A \cap B = \emptyset$,现有$\varphi(x)$定义于A上,$\psi(x)$定义于B上,构造函数$f(x)$：

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in A \\ \psi(x) & x \in B \end{cases}$$

  这样的表示称为函数的分段表示.

- 隐函数表示(函数的隐式表示)：$F(x, y) = 0$

  也就是说没有写成$y = F(x)$的形式,而是写成了方程的形式,式中y与x的变化关系并没有写出,而是写在方程中.

  例如：

$$x^2 + y^2 = R^2\text{或者}x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

  发现对任意的$x \in (-\mathbb{R}, +\mathbb{R})$,都有两个$y$与之对应.

  这并不意味着这个函数关系无法讨论,只需要对y做限制,比如要求$y \geq 0$,这样一来对于给定的y,就有唯一确定的x,由此就构成了函数关系.

  需要注意的是并不是所有的隐函数都可以写出显式表达的形式,比如Kepler方程：

$$y = x + \varepsilon \sin y$$

  这个方程描述了行星绕太阳运行的轨迹的规律,轨迹是个椭圆.其中ε是这个椭圆的离心,x与时间有关,y与行星的位置有关.

- 参数表示：

  当x与y的关系不方便表示的时候可以考虑引进参数t(t只是个字符),如果x和y可以表示成t的函数：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a,b]$$

  这样就间接的反映了变量y与x之间的参数表示,称为函数的参数表示.

  他是这么表示的：有两个集合：

$$X = \{x|x = x(t), t \in [a,b]\}, \ Y = \{y|y = y(t), t \in [a,b]\}$$

  那么函数关系f就是一个映射：

$$f: \begin{array}{l} X \to Y \\ x = x(t) \mapsto y = y(t) \end{array}$$

2.1.11 函数的简单性质

1. 有界性：对于$y = f(x), x \in D$：

   如果存在$m < M$,使得$m \leq f(x) \leq M, x \in D$,则称$f(x)$有界,$m$称为下界,$M$称为上界.

   等价定义：存在$X > 0$(此X不是集合),使得$|f(x)| \leq X, x \in D$

   需要注意的是：如果函数有界,那么上下界是不唯一的.

2. 单调性：对于$y = f(x), x \in D$：

   若对于任意的$x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,则称函数$f$在$D$单调增加.如果$\leq$可以换成$<$,则称为严格单调增加.

   记为：

$$f \uparrow (f\text{严格} \uparrow)$$

   类似的,将不等号的箭头方向改变,也有单调减少和严格单调减少,记为：

$$f \downarrow (f\text{严格} \downarrow)$$

3. 奇偶性：设函数的定义域D关于原点对称.即：

$$x \in D \Leftrightarrow -x \in D$$

   那么：

- 若在D上,$f(x)=f(-x)$,则称f是偶函数.
- 若在D上,$f(x)=-f(x)$,则称f是奇函数.

4. 周期性：设D是函数f的定义域,$x \pm T \in D$,并且$f(x)=f(x \pm T)$

   T称为函数的一个周期.

   在所有的周期中,如果有最小的T,则称他为最小周期.

2.1.12 一些特殊的函数

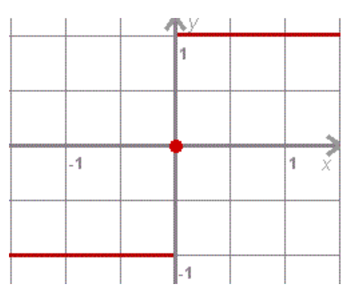
- 符号函数：

  符号函数(Sign function,简称sgn)是一个逻辑函数,用以判断实数的正负号.为避免和英文读音相似的正弦函数(sine)混淆,它亦称为Signum function.其定义为：

$$sgn(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

定义域	$D=(-\infty,+\infty)$
值域(到达域)	$R=sgn(x)=\{-1,0,1\}$
奇偶性	奇函数

  图像为：



- 整数部分函数(下取整函数)：

$$y=[x]$$

  在数学和计算机科学中,取整函数是一类将实数映射到相近的整数的函数.

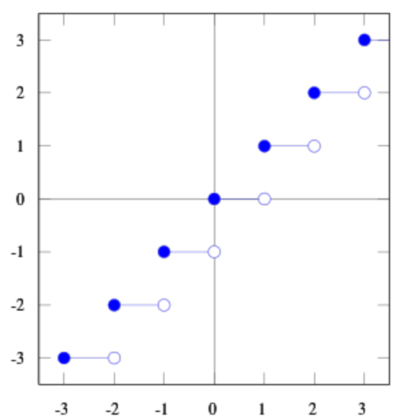
常用的取整函数有两个,分别是下取整函数和上取整函数.

下取整函数即为取底符号,在数学中一般记作$[x]$或者$E(x)$,在计算机科学中一般记作$floor(x)$,表示不超过x的整数中最大的一个：

$$[x] = \min\{n \in \mathbb{Z} \,|x \leq n\}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = [X] = \mathbb{Z}$
奇偶性	N/A

图像为：



下取整函数的符号用方括号$[x]$表示,称作高斯符号.

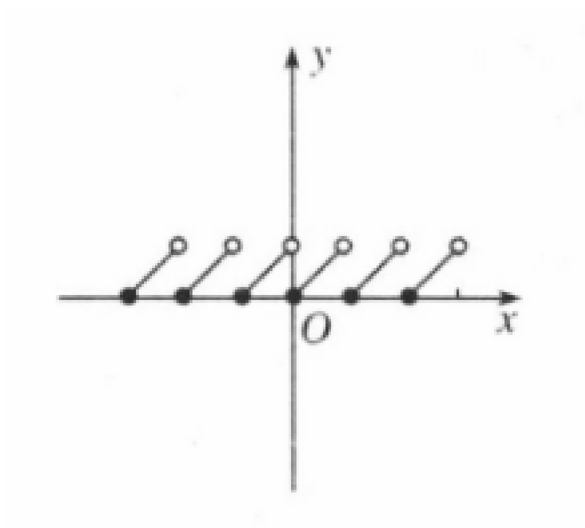
- 小数部分函数(分数部分函数)：

$$y = (x) = x - [x]$$

小数部分函数(decimal part function)亦称分数部分函数,是一种特殊的数论函数.x的小数部分记为x,读作x的小数部分(或分数部分).小数部分函数被定义为$x = x - [x]$,其中$[x]$是整数函数.$\{x\}$只能是0或正的纯小数,即$\{x\}$满足$0d\{x\} < 1$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = \{X\} = (0, 1)$
奇偶性	N/A

图像为：



- 狄利克雷函数：

  问：是否周期函数都有最小周期?

  答：不是.

  反例：狄利克雷函数(Dirichlet function)$D(x)$：

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x\text{无理数} \\ 1 & x\text{有理数} \end{cases}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = D(x) = (0, 1)$
奇偶性	偶函数

任何的有理数$r > 0$都是他的周期,没有最小周期.