db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2021 年 2 月 3 日

注: 本笔记有些部分来自于wikipedia

todos

1. 誊录纸质笔记 线性代数-线性无关,基和维数.
2. 隐函数存在定理,等幂求和,(复变函数),概率论与数理统计(及测度论).
3. 重写线性代数
4. 补充多个section,计算机图形学等
5. 整合冗余部分

目录

第一部分　数学 3

第一章　数学分析 7

1.1 映射与函数 . . . 7

1.1.1 映射 . . . 7

1.1.1.1 映射的基本要素 . . . 8

1.1.1.2 映射的分类 . . . 8

1.1.1.3 逆映射 . . . 9

1.1.1.4 复合映射 . . . 9

1.1.2 函数 . . . 9

1.1.2.1 基本初等函数 . . . 10

1.1.2.2 初等函数 . . . 10

1.1.2.3 自然定义域 . . . 10

1.1.2.4 函数的表示 . . . 11

1.1.2.5 函数的简单性质 . . . 12

1.1.2.6 一些特殊的函数 . . . 13

1.2 数列极限 . . . 15

1.2.1 实数系的连续性 . . . 15

1.2.1.1 引入 . . . 15

1.2.1.2 最大数与最小数 . . . 17

1.2.1.3 上确界与下确界 . . . 17

第一部分

数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

注：待整理.

Chapter 1

数学分析

1 映射与函数

1.1 映射

映射指的是集合之间的一种对应关系.

定义：X,Y是两集合,按照某个规则f,对于任一的$x \in X$,有唯一的$y \in Y$与之对应,则称f是X到Y的一个映射.

记为：$f : X \to Y$,即：$x \mapsto y = f(x)$

称呼：

- y：在映射f下,x的像.
- x：在映射f下,y的一个逆像.
- X：f的定义域,记为$X = D_f$.
- Y：f的值域,记为$R_f \subset Y$,具体的来说,$R_f = \{y|y \in Y \wedge \exists x(y = f(x) \wedge x \in X)\}$

举例：设X是平面上三角形的全体,Y是平面上圆的全体,构造一个映射f,表示(y 是 x 的外接圆),记为：

$$f : X \underset{x \mapsto y}{\to} Y$$

1.1.1 映射的基本要素

- $X = D_f$,定义域.
- Y,限制值域的范围.
- f,需要保证像的唯一性.

这说明了两点：

1. 映射的像是唯一的,举例：

   设$X = \mathbb{R}^+ = \{x|x \in R \wedge x > 0\}$,假设存在映射$f : X \underset{x \mapsto y}{\rightarrow} Y (y^2 = x)$,此时$Y = \mathbb{R}$,那么假设$x = 4, y = \pm 2$.这个映射就无法保证像的唯一性.换句话说,这个$f$并不是个映射.

   但是可以稍作改造:对$Y = \mathbb{R}$做限制,令$Y = R^-$,此时：

   $$f : \begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y \end{array} \ (y^2 = x)$$

   就构成了一个映射

2. 映射不要求逆向唯一.

1.1.2 映射的分类

- 单射：

  f是X到Y的一个映射,若逆像也具有唯一性,则称f是单射(injection)

  逻辑命题表述：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 (y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2))$

  注：单射的值域不一定完全等于Y,也可能包含于Y,即$R_f \subseteq Y$

- 满射：如果映射的值域完全等于Y,即$R_f = Y$,则称为满射(surjection).

  注：满射不一定是单射

- 双射：如果f又是单射,又是满射,则称f为双射(bijection)

  双射又称为一一对应.

1.1.3 逆映射

如果$f:X\to Y$是一个单射,即对任意的$y\in R_f$,有唯一的逆像$x\in X$与y对应.

如果$g:\begin{array}{l}R_f\to X\\ y\mapsto x\end{array}$ 是满射$(f(x)=y)$

那么g就称为f的逆映射,又记为f^{-1}

举例：$y=\sin x:\begin{array}{l}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]\\ x\mapsto y=\sin x\end{array}$,他的逆映射为：

$$x=\arcsin y:\begin{array}{l}[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ y\mapsto x\end{array}\ (\sin x=y)$$

1.1.4 复合映射

$$g:\begin{array}{l}X\to U_1\\ x\mapsto u=g(x)\end{array}$$

$$f:\begin{array}{l}U_2\to Y\\ u\mapsto y=f(u)\end{array}$$

这两个映射若是要复合在一起,那么就得满足：$R_g\subset U_2=D_f$.即：g的值域在f的定义域中,才能构造出复合映射.

称为f与g的复合映射.

例：设$X=Y=U_1=U_2=\mathbb{R}$：

$$g:\begin{array}{l}x\to U_1\\ x\mapsto u=\sin x\end{array}$$

$$f:\begin{array}{l}U_2\to Y\\ u\mapsto y=\frac{u}{1+u^2}\end{array}$$

由于$R_g=[-1,1]\subset D_f$,所以：

$$f\cdot g:\begin{array}{l}X\to Y\\ x\mapsto y=\frac{\sin x}{1+\sin x}\end{array}$$

1.2 函数

函数是映射的特殊情况.

有映射：

$$f: \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$$

如果$X \subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$,即如果两者都是实数构成的集合,那么就称$f$为一元实函数(简称函数).

如果X是卡氏积(笛卡尔乘积集合),那么就是多元实函数.

对函数来说,映射可以简写为：

$$y = f(x), x \in X \ (X = D_f)$$

其中x也称为自变量,y称为因变量,函数也反映了因变量与自变量变化的一种因果关系.

1.2.1 基本初等函数

以下几种函数被称为基本初等函数：

1. 常数函数：$y = \mathbb{C}$
2. 幂函数：$y = x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$
3. 指数函数：$y = a^x \ (a > 0 \wedge a \neq 1)$
4. 对数函数：$y = \log_a x \ (a > 0 \wedge a \neq 1)$
5. 三角函数：$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x ...$
6. 反三角函数：$y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x ...$

1.2.2 初等函数

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数.

例如：

$$y = ax^2 + bx + c$$

1.2.3 自然定义域

自然定义域是指函数中自变量的最大取值范围.

如果函数不注明定义域,则默认定义域为他的自然定义域.

例：求$y = x + \frac{1}{x}$的自然定义域：

$$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \ R = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

方法不说了...难以描述.

1.2.4 函数的表示

- 显式表示：$y = f(x)$
- 分段表示：

  $A \cap B = \emptyset$,现有$\varphi(x)$定义于A上,$\psi(x)$定义于B上,构造函数$f(x)$：

  $$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in A \\ \psi(x) & x \in B \end{cases}$$

  这样的表示称为函数的分段表示.

- 隐函数表示(函数的隐式表示)：$F(x, y) = 0$

  也就是说没有写成$y = F(x)$的形式,而是写成了方程的形式,式中y与x的变化关系并没有写出,而是写在方程中.

  例如：

  $$x^2 + y^2 = R^2 \text{或者} x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

  发现对任意的$x \in (-\mathbb{R}, +\mathbb{R})$,都有两个$y$与之对应.

  这并不意味着这个函数关系无法讨论,只需要对y做限制,比如要求$y \geq 0$,这样一来对于给定的y,就有唯一确定的x,由此就构成了函数关系.

  需要注意的是并不是所有的隐函数都可以写出显式表达的形式,比如Kepler方程：

  $$y = x + \varepsilon \sin y$$

  这个方程描述了行星绕太阳运行的轨迹的规律,轨迹是个椭圆.其中ε是这个椭圆的离心,x与时间有关,y与行星的位置有关.

- 参数表示：

  当x与y的关系不方便表示的时候可以考虑引进参数t(t只是个字符),如果x和y可以表示成t的函数：

  $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$$

  这样就间接的反映了变量y与x之间的参数表示,称为函数的参数表示.

他是这么表示的：有两个集合：

$$X=\{x|x=x(t),t\in[a,b]\},\ Y=\{y|y=y(t),t\in[a,b]\}$$

那么函数关系f就是一个映射：

$$f:\ \begin{aligned}&X\to Y\\&x=x(t)\mapsto y=y(t)\end{aligned}$$

1.2.5 函数的简单性质

1. 有界性：对于$y=f(x),x\in D$：

   如果存在$m<M$,使得$m\le f(x)\le M,x\in D$,则称$f(x)$有界,m称为下界,M称为上界.

   等价定义：存在$X>0$(此X不是集合),使得$|f(x)|\le X,x\in D$

   需要注意的是：如果函数有界,那么上下界是不唯一的.

2. 单调性：对于$y=f(x),x\in D$：

   若对于任意的$x_1,x_2\in D,x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$,则称函数$f$在$D$单调增加.如果$\le$可以换成$<$,则称为严格单调增加.

   记为：

   $$f\uparrow(f\text{严格}\uparrow)$$

   类似的,将不等号的箭头方向改变,也有单调减少和严格单调减少,记为：

   $$f\downarrow(f\text{严格}\downarrow)$$

3. 奇偶性：设函数的定义域D关于原点对称.即：

   $$x\in D\Leftrightarrow -x\in D$$

   那么：

   - 若在D上,$f(x)=f(-x)$,则称f是偶函数.
   - 若在D上,$f(x)=-f(x)$,则称f是奇函数.

4. 周期性：设D是函数f的定义域,$x\pm T\in D$,并且$f(x)=f(x\pm T)$

   T称为函数的一个周期.

   在所有的周期中,如果有最小的T,则称他为最小周期.

1.2.6 一些特殊的函数

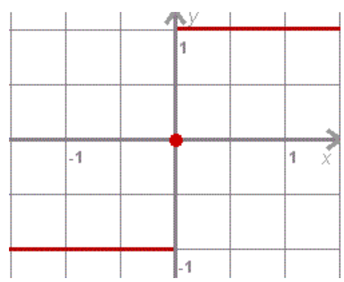
- 符号函数：

  符号函数(Sign function,简称sgn)是一个逻辑函数,用以判断实数的正负号.为避免和英文读音相似的正弦函数(sine)混淆,它亦称为Signum function.其定义为：

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = sgn(x) = \{-1, 0, 1\}$
奇偶性	奇函数

  图像为：



- 整数部分函数(下取整函数)：

$$y = [x]$$

  在数学和计算机科学中,取整函数是一类将实数映射到相近的整数的函数.

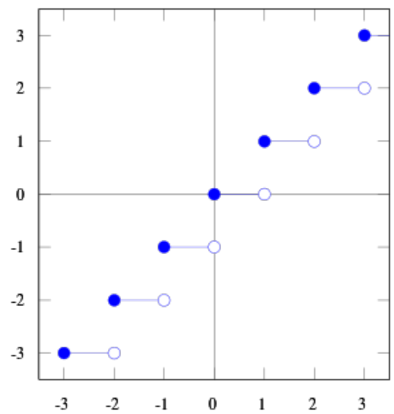
  常用的取整函数有两个,分别是下取整函数和上取整函数.

  下取整函数即为取底符号,在数学中一般记作$[x]$或者$E(x)$,在计算机科学中一般记作$floor(x)$,表示不超过x的整数中最大的一个：

$$[x] = \min\{n \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq n\}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = [X] = \mathbb{Z}$
奇偶性	N/A

图像为：



下取整函数的符号用方括号$[x]$表示,称作高斯符号.

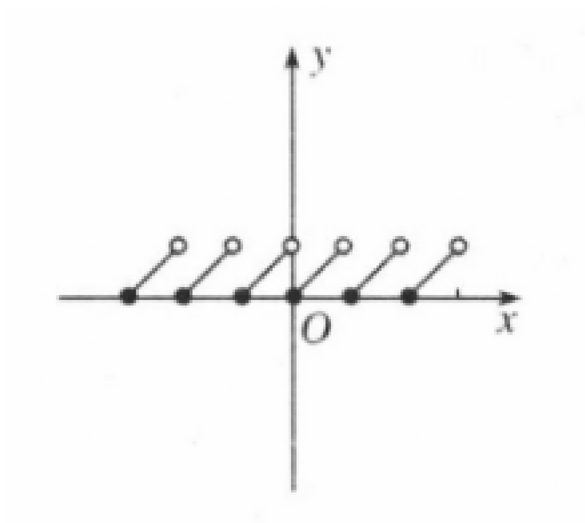
- 小数部分函数(分数部分函数)：

$$y = (x) = x - [x]$$

小数部分函数(decimal part function)亦称分数部分函数,是一种特殊的数论函数.x的小数部分记为x,读作x的小数部分(或分数部分).小数部分函数被定义为$x = x - [x]$,其中$[x]$是整数函数.$\{x\}$只能是0或正的纯小数,即$\{x\}$满足$0d\{x\} < 1$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = \{X\} = (0, 1)$
奇偶性	N/A

图像为：



- 狄利克雷函数：

  问：是否周期函数都有最小周期?

  答：不是.

  反例：狄利克雷函数(Dirichlet function)$D(x)$：

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\text{无理数}\\ 1 & x\text{有理数}\end{cases}$$

定义域	$D=(-\infty,+\infty)$
值域(到达域)	$R=D(x)=(0,1)$
奇偶性	偶函数

  任何的有理数$r>0$都是他的周期,没有最小周期.

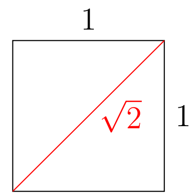
2 数列极限

2.1 实数系的连续性

2.1.1 引入

一切都得从实数系的诞生说起：

命题：$\sqrt{2}$不是有理数.



使用反证法

如果$\sqrt{2}$不是有理数,设其为有理数,即：

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

其中$n, m \in \mathbb{N}^+$且互质.

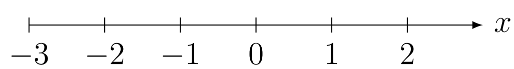
那么$2 = \dfrac{n^2}{m^2}$,即$n^2 = 2m^2$

则n是偶数.令$n = 2k$,则$m^2 = 2k^2$,因此m也是偶数,矛盾,得证.

$\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

换句话来说,在有理数上开根号不封闭,因此需要扩展数系.

从几何上看是这样的：



- $\mathbb{Z}$:

  整数集上每一个数都对应其上的一个点,每两个点之间总有距离,点与点之间距离至少为1.称这一性质为离散性.

  因此可以说：整数集合具有集散性.

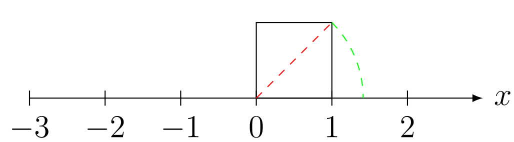
- $\mathbb{Q}$:

  有理数集合种每一个元素都可以在数轴上找到一个点与他对应,而且有理数很多,多到无法找到一个小区间,使得这个小区间内没有有理数.将这种性质称为稠密性.

  因此可以说：有理数集合具有稠密性.

- $\mathbb{R}$

  长期以来人们一直只认识有理数,直到公元200年前的古希腊：



就这样,人们发现了一个在数轴上的点,对应的不是有理数.

换句话说,尽管有理数集合在数轴上有稠密性,但是有空隙.

于是又扩展了数系,将无限不循环小数(即无理数)加进了有理数系,就这样出现了实数集合$\mathbb{R}$,自此运算又封闭了.

因此实数是有理数集合和有理数集合的并,即：

$$\mathbb{R} = \{x|x \in \mathbb{Q} \vee x\text{是无理数}\}$$

引入的无理数填满了数轴上的空隙,现在数轴上每一个点都与实数集合中的一个元素对应,换句话来说:实数集合布满了整个数轴,不留任何空隙.称这一性质为连续性.

即：实数的连续性.

实数集合有时候又被称为实数连续统.

2.1.2 最大数与最小数

首先提出以下概念：最大数与最小数.
$S \subset \mathbb{R},\ S \neq \emptyset$,如果$S$是有限集,则$S$必有最大数和最小数.
但是如果S是无限集,则S不一定有最大数与最小数.

- 如果$\exists \xi \in S$,使得$\forall x \in S$,有$x \leq \xi$,则称ξ是S中的最大数,记为$\xi = \max S$
- 如果$\exists \eta \in S$,使得$\forall x \in S$,有$x \geq \eta$,则称η是S中的最小数,记为$\eta = \min S$
- 显然,有限数集合一定有最大数和最小数.
- 但是无限数集合则不一定.

2.1.3 上确界与下确界

- 上界：
  - 设$S \subset \mathbb{R},\ S \neq \emptyset$,如果$\exists M \in \mathbb{R}$,使得$\forall x \in S$,有$x \leq M$,则称$M$是$S$的一个上界,或称$S$有上界.
  - 设U是S上界的集合,则U没有最大数,但U必定有最小数.
  - U中的最小数记为$\beta = supS$,称为S的上确界(supremum).

- $\beta:\begin{cases}\beta\text{是上界,即：}\forall x\in S(x\leq\beta)\\ \beta\text{是最小上界,即：}\forall\epsilon>0\exists x\in S(x>\beta-\epsilon)\end{cases}$

- 下界：
  - 设$S\subset\mathbb{R},\ S\neq\emptyset$,如果$\exists m\in\mathbb{R}$,使得$\forall x\in S$,有$x\geq m$,则称$m$是$S$的一个下界,或称$S$有上界.
  - 设L是S下界的集合,则L没有最小数,但L必定有最大数.
  - L中的最大数记为$\alpha=infS$,称为S的下确界(infimum).
  - $\alpha:\begin{cases}\alpha\text{是下界,即：}\forall x\in S(x\geq\alpha)\\ \alpha\text{是最大下界,即：}\forall\epsilon>0\exists x\in S(x<\alpha+\epsilon)\end{cases}$