

# db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2021 年 1 月 20 日

注: 本笔记有些部分来自于wikipedia

## **todos**

1. 誊录纸质笔记 线性代数-线性无关,基和维数.
2. 隐函数存在定理,等幂求和-二项式系数-朱世杰恒等式-(复变函数)
3. 重写线性代数
4. 场论:p20,三个概念即两个公式的算子表示法
5. 补充多个section,计算机图形学,场论等
6. 整合冗余部分

# 目录

第一章 数学	3
1.1 微积分	3
1.1.1 极限	3
1.1.1.1 定理	3
1.1.1.2 重要极限	4
1.1.1.3 等价无穷小	4
1.1.2 数列极限相关	4
1.1.2.1 数列	5
1.1.2.2 数列极限	5
1.1.2.3 O'Stolz(stolz)定理	5
1.1.3 渐进线	6
1.1.4 导数	6
1.1.4.1 求导法则	6
1.1.4.2 复合函数求导	7
1.1.4.3 求导公式表	7
1.1.4.4 线性近似/牛顿法近似函数/求方程解	8
1.1.5 偏导数	8
1.1.5.1 全微分	8
1.1.6 微分	9
1.1.6.1 微分公式	9
1.1.6.2 复合微分	9
1.1.6.3 罗尔中值定理	9
1.1.6.4 拉格朗日中值定理	10
1.1.6.5 柯西中值定理	11

1.1.6.6	达布中值定理	11
1.1.6.7	弧微分	11
1.1.6.8	曲线曲率	12
1.1.6.9	曲率半径	14
1.1.7	不定积分	14
1.1.7.1	不定积分公式	14
1.1.7.2	不定积分第一类换元积分法	15
1.1.7.3	不定积分第二类换元积分法	15
1.1.7.4	分部积分法	16
1.1.8	定积分	16
1.1.8.1	定义	16
1.1.8.2	性质	16
1.1.8.3	定积分第一类换元积分法	16
1.1.8.4	定积分第二类换元积分法	16
1.1.8.5	积分上限函数(定积分求导公式)	17
1.1.8.6	牛顿-莱布尼兹公式/微积分基本定理	17
1.1.8.7	积分介值定理	17
1.1.8.8	区间再现公式	17
1.1.8.9	华里士公式(点火公式)	18
1.1.8.10	积分第一中值定理	18
1.1.8.11	积分第二中值定理	19
1.1.8.12	定积分求平面函数曲线弧长	20
1.1.9	反常积分	20
1.1.9.1	无穷限反常积分	21
1.1.9.2	无界函数反常积分	21
1.1.9.3	gamma函数	22
1.1.10	无穷级数	22
1.1.10.1	泰勒公式/泰勒级数/展开	22
1.1.11	微分方程	23
1.1.11.1	一阶线性微分方程	23
1.1.11.2	伯努利方程	24
1.1.11.3	可降阶高阶微分方程	24
1.1.11.4	常系数齐次线性微分方程	25

1.1.11.5	关于运动的微分方程/线性常系数微分方程	25
1.1.11.6	关于增长的微分方程/非线性微分方程/偏微分方程剧透	27
1.2	多元微积分	29
1.2.1	多元函数的极值与最值	29
1.2.1.1	多元函数的极值	29
1.2.1.2	多元函数的最值	30
1.2.1.3	条件极值与拉格朗日乘数法	30
1.2.2	隐函数	32
1.2.2.1	隐函数存在定理/隐函数定理(二元)	32
1.2.3	重积分	32
1.2.3.1	二重积分	32
1.2.3.2	二重积分的性质	32
1.2.3.3	直角坐标系下的二重积分计算	33
1.2.3.4	直角坐标系下二重积分的特殊情况	34
1.2.3.5	极坐标下的二重积分计算	34
1.2.3.6	极坐标下的特殊情况	35
1.2.3.7	二重积分换元法	35
1.2.3.8	三重积分	36
1.2.3.9	三重积分(柱面坐标)	37
1.2.3.10	三重积分(球面坐标)	37
1.2.3.11	重积分应用(求曲面面积)	37
1.2.4	曲线积分与曲面积分	38
1.2.4.1	第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)	38
1.2.4.2	第一类曲线积分的计算	39
1.2.4.3	第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)	40
1.2.4.4	第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)计算	41
1.2.4.5	第二类曲线积分计算例题	42
1.2.4.6	两类曲线积分之间的联系	43
1.2.4.7	格林公式	44
1.2.4.8	当 $D$ 为一个简单区域时格林公式的证明	44
1.2.4.9	格林公式的计算	45
1.2.5	雅可比矩阵与雅可比行列式	47
1.2.5.1	雅可比矩阵	47

1.2.5.2	雅可比行列式	48
1.2.5.3	举例	48
1.3	无穷级数	49
1.3.1	无穷级数的性质	50
1.3.2	常数项无穷级数审敛法	50
1.3.2.1	正项级数	51
1.3.2.2	交错级数	53
1.3.2.3	任意项级数	53
1.3.2.4	常见常数项无穷级数	54
1.3.3	函数项无穷级数审敛法	55
1.3.3.1	一些定义(收敛点,收敛域,发散点,发散域,和函数与部分和还有余项)	55
1.3.3.2	阿贝尔定理	56
1.3.3.3	求幂级数的收敛域	56
1.3.3.4	幂级数的比值审敛法	56
1.3.3.5	幂级数的运算	57
1.3.3.6	幂级数和函数的性质	58
1.3.4	函数的幂级数展开(泰勒级数)	59
1.3.4.1	泰勒展开式与马克劳林展开式	60
1.3.4.2	基础函数展开公式表推导	60
1.3.4.3	基础函数展开公式表	62
1.3.4.4	运算示例	63
1.4	场论(含有多元微积分向量分析部分)	65
1.4.1	场论基本内容	65
1.4.1.1	矢量函数/向量函数	65
1.4.1.2	矢量向量函数的极限	65
1.4.1.3	矢量函数的连续	66
1.4.1.4	矢量函数的导数	66
1.4.1.5	矢量函数的微分	67
1.4.1.6	矢量函数的不定积分	67
1.4.1.7	矢量函数的定积分	67
1.4.2	场的分类与表示法	68
1.4.2.1	场的概念	68
1.4.2.2	场的分类与表示	68

1.4.2.3	场的直观表示	69
1.4.3	方向导数与梯度	70
1.4.3.1	方向导数的定义	70
1.4.3.2	方向导数的计算公式	71
1.4.3.3	梯度	71
1.4.3.4	梯度的运算公式	72
1.4.4	通量与散度,高斯公式	72
1.4.4.1	通量	72
1.4.4.2	散度	73
1.4.4.3	散度在常见坐标系中的计算公式	74
1.4.4.4	高斯散度定理/高斯公式/高斯-奥斯特洛格拉茨基公式	75
1.4.4.5	散度的运算性质	75
1.4.5	环量,旋度,斯托克斯公式	76
1.4.5.1	环量	76
1.4.5.2	环量面密度	76
1.4.5.3	旋度	77
1.4.5.4	旋度在直角坐标系中的运算公式	77
1.4.5.5	旋度的运算性质	78
1.4.5.6	斯托克斯公式	78
1.4.6	几个特殊的向量场	79
1.4.6.1	管形场	79
1.4.6.2	有势场	79
1.4.6.3	调和场	80
1.4.7	nabla算子(哈密尔顿算子)	80
1.4.7.1	定义	80
1.4.7.2	运算规则	81
1.4.7.3	梯度散度旋度以及高斯公式和斯托克斯公式的算子表示法	81
1.4.7.4	常用公式	82
1.5	离散数学	83
1.5.1	前置知识	83
1.5.2	集合论	83
1.5.2.1	集合论的主要内容	83
1.5.2.2	集合论中的问题	83

1.5.2.3	集合的表示	83
1.5.2.4	描述集合的注意事项	84
1.5.2.5	常用的集合	84
1.5.2.6	子集	84
1.5.2.7	有限集和无限集	85
1.5.2.8	可列集	85
1.5.2.9	相等	85
1.5.2.10	集合之间包含关系的性质	85
1.5.2.11	真子集	85
1.5.2.12	空集	86
1.5.2.13	全集	86
1.5.2.14	集合的元素个数/集合的基数/集合的势	86
1.5.2.15	幂集	87
1.5.2.16	求幂集的步骤	87
1.5.2.17	集族	87
1.5.2.18	多重集	87
1.5.2.19	并集	88
1.5.2.20	交集	88
1.5.2.21	不相交	88
1.5.2.22	相对补集	89
1.5.2.23	对称差	89
1.5.2.24	绝对补集	89
1.5.2.25	广义并集	89
1.5.2.26	广义交	90
1.5.2.27	集合运算的优先级	90
1.5.2.28	文氏图	90
1.5.2.29	容斥原理(排斥原理)	90
1.5.2.30	基本集合恒等式	91
1.5.2.31	集合恒等式推广到集族的情况	91
1.5.2.32	集合幂集运算的性质	92
1.5.2.33	有序对(有序二元组)	92
1.5.2.34	有序对性质的证明	92
1.5.2.35	有序n元组	94



1.5.2.36	笛卡尔乘积集合(卡氏积)	94
1.5.2.37	卡氏积的性质	94
1.5.2.38	卡氏积的图示	95
1.5.2.39	$n$ 维卡氏积	96
1.5.2.40	$n$ 维卡氏积的性质	96
1.5.2.41	$n$ 元关系	97
1.5.2.42	二元关系	97
1.5.2.43	二元关系的记号	97
1.5.2.44	A到B的二元关系	97
1.5.2.45	A到B的二元关系举例	97
1.5.2.46	A上的二元关系	98
1.5.2.47	一些特殊关系	98
1.5.2.48	与二元关系有关的概念	99
1.5.3	图论	101
1.5.3.1	图论的主要内容	101
1.5.3.2	图论中的问题	101



# Chapter 1

## 数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

注:待整理.

### 1 微积分

#### 1.1 极限

##### 1.1.1 定理

1. 函数在一点极限存在的条件是左右极限存在且相等

2. 洛必达法则:当极限为 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 时可上下同时求导,求导后极限不变,每一步都需要重新判断是否依然符合类型

3. 归结原则(海涅定理#狭义):

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 存在的充要条件是:

取 $f(x)$ 定义域内的任意数列 $a_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且 $a_n$ 不等于 $a$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ .

海涅定理表明了函数极限与数列极限的关系. 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在,  $x_n$ 为函数 $f(x)$ 定义域内任一收敛于 $x_0$ 的数列, 且满足:  $x_n \neq x_0, n \in \mathbb{N}^+$ , 那么相应的函数值数列 $f(x_n)$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

### 1.1.2 重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \rightarrow x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

### 1.1.3 等价无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x - 1 \approx x \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(a)x \approx \sin(a)x \approx (a)x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(a)x \approx \tan(a)x \approx (a)x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln 1 + x \approx x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x \approx 1 + x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \approx x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \approx x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^b - 1 \approx abx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \ln(1+x) \approx \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x - x \approx \frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \arctan x \approx \frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6}$$

以上等价无穷小都可以由泰勒公式推出

## 1.2 数列极限相关

注:本章内容可用于级数.

注:数列不是级数,级数要求和数列不用.

### 1.2.1 数列

若函数 $f$ 的定义域为全体正整数集合 $\mathbb{N}^+$ ,则称

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(n) \ (n \in \mathbb{N}^+)$$

为数列.因正整数集 $\mathbb{N}^+$ 的元素可按由小到大的顺序排列,所以数列 $f(n)$ 也可以写作:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots,$$

或者可以简记为 $a_n$ ,其中 $a_n$ 称为该数列的通项.

### 1.2.2 数列极限

设数列 $a_n$ ,存在 $a_0$ ,若对于任意给定的正数 $\epsilon$ ,总存在正整数 $N$ ,使得当 $n > N$ 时由

$$|a_n - a| < \epsilon$$

则称数列 $a_n$ 收敛于 $a$ , $a$ 称为数列 $a_n$ 的极限,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

若数列 $a_n$ 没有极限,则称 $a_n$ 不收敛,或者称 $a_n$ 发散.

此定义等价于:任给 $\epsilon > 0$ ,若在 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 之外数列 $a_n$ 中的项至多只有有限个,则称数列 $a_n$ 收敛域极限 $a$ .

### 1.2.3 O'Stolz(stolz)定理

设 $(a_n)_{n>1}$ 和 $(b_n)_{n>1}$ 为两个实数数列.若 $b_n$ 为从某项开始严格单调的无界正数数列,且有穷极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$$

存在,则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

其中 $L$ 可以为有限实数或正/负无穷.

该定理虽然主要被用于处理数列不定型极限,但该定理再没有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 这一条件时也是成立的.虽然该定理通常是以分布 $b_n$ 为正数数列的情形加以叙述的,但注意到该定理对分子 $a_n$ 的正负没有限制,所以原则上把对数列 $b_n$ 的限制条件按替换为"严格单调递减且趋于负无穷大"也是没问题的.

与洛必达的迭代用法类似,在尝试使用此定理考察数列极限时,如果发现两个数列差分的商任然是不定型,那么可以继续用.

注意:与洛必达类似,判定条件不存在不能认定极限本身不存在.

## 1.3 渐进线

渐近线分为三种：

- 水平渐近线：当 $x \rightarrow x_0$ 时,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$ , 则 $y = y_0$ 是水平渐近线.
- 垂直渐近线：当 $x \rightarrow x_0$ 时,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow \infty$ , 且 $x_0$ 为一般间断点, 则 $x = x_0$ 是垂直渐近线.
- 斜渐近线：

当 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ) 存在, 则 $y = ax + b$ 是斜渐近线.

即：如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$  存在, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$  也存在, 则 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = ax + b$

## 1.4 导数

导数是什么?教科书上普遍给出的定义是指:函数图像的斜率变化率曲线,事实上某些观点表示导数也可以理解成是函数对于输入值的敏感程度,即:输入值的变化对应的输出值的变化剧烈程度.

导数在一元情况下的定义是指 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  或者  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

值得注意的是:求导是一种线性运算.

### 1.4.1 求导法则

以下为求导的基本法则:

1.  $(u + v)' = u' + v'$
2.  $(u - v)' = u' - v'$
3.  $(uv)' = u'v + uv'$
4.  $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
5.  $(\mathbf{c}v)' = \mathbf{c}(v)'$
6.  $\frac{u}{v}' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

注:反函数的导数等于函数导数的倒数,即——互为倒数的导数相乘依然为1

### 1.4.2 复合函数求导

对于复合函数求导,有以下方法:

$$y = f(u), u = g(x); \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

### 1.4.3 求导公式表

以下为基本函数的求导公式表,类似线性组合,大多数函数的导数可以由以下公式组合得到.

$$f(x) = C, f'(x) = 0$$

$$f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = x, f'(x) = 1$$

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x, f'(x) = \sec^2 x$$

$$f(x) = \sec x, f'(x) = \sec x \tan x$$

$$f(x) = \cot x, f'(x) = -\csc^2 x$$

$$f(x) = \csc x, f'(x) = -\csc x \cot x$$

$$f(x) = \arcsin x, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x, f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot} x, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = a^x, f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \log_a x, f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x$$

值得注意的是:

1. 在一维的情况下,可导  $\Leftrightarrow$  左右导数存在且相等

2. 可导  $\Rightarrow$  连续

3. 连续则不一定可导

#### 1.4.4 线性近似/牛顿法近似函数/求方程解

由导数的另一种定义:  $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

当不再取极限的时候等号变成约等于, 即:  $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , 两边移项, 可得

$$f(x) \approx f(a) + (x - a) f'(a) \text{ 或者 } x - a \approx -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

前者被称为线性近似, 后者就是牛顿法, 其实本质上是同一个公式的不同变形.

当  $x$  和  $a$  取值越接近, 近似也就越精确, 这种方法本质上是取级数展开形式的前两位.

### 1.5 偏导数

设  $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$

$$f'_x(x, y, z) = a$$

$$f'_y(x, y, z) = b$$

$$f'_z(x, y, z) = c$$

换言之, 偏导就是只把要求偏导的变量看作变量, 其他变量看作常量再求导.

#### 1.5.1 全微分

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$   $\Delta z$ : 近似求得

定义:  $f(x, y)$  在定义域内有定义, 产生  $\Delta x$  和  $\Delta y$ ,  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + O(\rho)$

其中  $A = f'_x$ ,  $B = f'_y$ ,  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

并且  $A, B$  是  $x$  和  $y$  的函数 (此处  $x, y$  为常量), 与  $\Delta x$  和  $\Delta y$  (此处  $\Delta x, \Delta y$  是变量) 无关.

如果能写成此形式, 则称此函数在这点可微, 且  $A\Delta x + B\Delta y$  叫做他的全微分.

记作:  $dz$  (近似值)  $= A\Delta x + B\Delta y \approx \Delta z$  (精确值)

注意:

- 可微的必要条件: 如果  $z = f(x, y)$  可微, 可以推出偏导存在, 且  $dz = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$
- 可微的充分条件: 在定义域内有连续偏导数.



## 1.6 微分

那么微分(differential)又是什么?微分是一个函数在自变量做无穷小变化时函数值的变化.在形式上确实与导数类似,但不应该与导数混淆.

可以形象化理解,微分就是曲线的切线.给定一个横坐标,可以在切线上找到纵坐标.就是这样一个映射.而导数就是这条切线的斜率.

### 1.6.1 微分公式

给出以下微分公式,与导数确实类似,但微分和导数是两个不同的映射.他们的定义域都是可微函数,微分的值域是1-form,导数的值域是函数.

$$1. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$2. d(Cu) = cdu$$

$$3. d(uv) = vdu + u dv$$

$$4. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu + u dv}{v^2}$$

### 1.6.2 复合微分

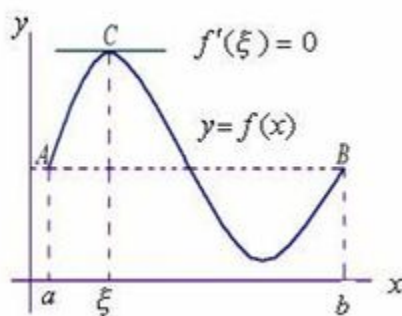
与复合求导类似:

$$y = f(u), u = g(x);$$

$$dy = y' dx = f'(u) du = f' u g'(x) dx$$

$$\text{即: } du = dg(x)$$

### 1.6.3 罗尔中值定理

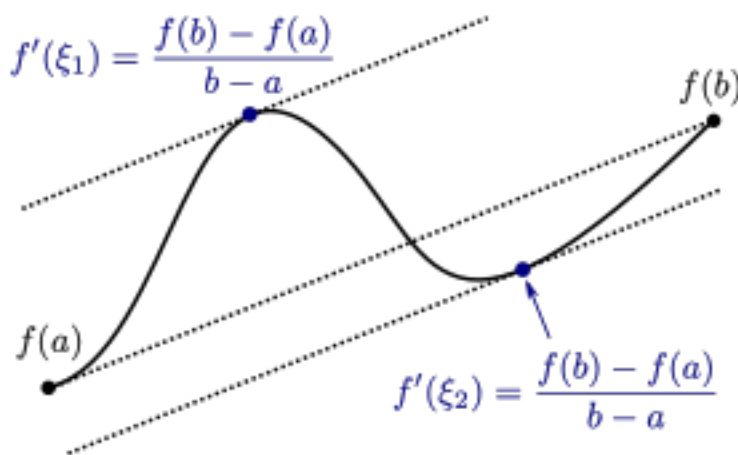


如果函数 $f(x)$ 满足:

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;
2. 在开区间 $(a, b)$ 上可导;
3. 在区间端点处的函数值相等,即 $f(a) = f(b)$ ,

那么在 $(a, b)$ 内至少有一点 $\xi$ , ( $a < \xi < b$ ),使得 $f'(\xi) = 0$ .这个定理称为罗尔定理

#### 1.6.4 拉格朗日中值定理



令 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的一个函数,且在开区间 $(a, b)$ 内对任意一点 $x$ ,极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 存在,为一个有限数字或者等于 $+\infty$ 或 $-\infty$ .如果有限,则极限等于 $f'(x)$ .

此定理称为**拉格朗日中值定理**,也简称中值定理,是罗尔中值定理的更一般的形式,同时也是柯西中值定理的特殊情形

这个定理再可以稍微推广一点.只需假设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 在 $[a, b]$ 连续,且在开区间 $(a, b)$ 内对任意一点 $x$ ,极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{b-a}$ 存在,为一个有限数字或者等于 $+\infty$ 或者 $-\infty$ .如果有限,则极限等于 $f'(x)$ . 这版本定理

应用的一个例子是函数 $x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}$ ,实值三次方根函数,其导数在原点趋于无穷.

注意若一个可微函数的值域是复数而不是实数,则上面这定理就未必正确.例如,对实数 $x$ 定义 $f(x) = e^{ix}$ .那么

$$f(2\pi) - f(0) = 0 \neq f'(c)(2\pi - 0)$$

因 $|f'(x)| = 1 \neq 0$ 时, $c$ 为开区间 $(0, 2\pi)$ 中任意一点.

### 1.6.5 柯西中值定理

柯西中值定理,也叫拓展中值定理,是中值定理的一般形式.它叙述为:如果函数 $f$ 和 $g$ 都在闭区间 $[a, b]$ 上连续,且在开区间 $(a, b)$ 上可微,那么存在某个 $c \in (a, b)$ ,使得 $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

当然,如果 $g(a) \neq g(b)$ 且 $g'(c) \neq 0$ ,则可表示成:
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

在几何上,这表示曲线

$$\begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ t \mapsto (f(t), g(t)) \end{cases}$$

上存在一点其切线平行于由两点 $(f(a), g(a))$ 和 $(f(b), g(b))$ 所连接的直线.但柯西定理不能表明在任何情况下这种切线都存在,因为可能存在一些 $c$ 值使 $f(c) = g(c) = 0$ ,所以在这些点曲线根本没有切线.下面是这种情况的一个例子

$$t \mapsto (t^3, 1 - t^2)$$

在区间 $[-1, 1]$ 上,曲线由 $(-1, 0)$ 到 $(1, 0)$ ,却并无一个水平切线,然而他在 $t = 0$ 出有一个驻点(实际上是一个尖点).

柯西中值定理可以用来证明洛必达法则.拉格朗日中值定理是柯西中值定理当 $g(t) = t$ 时的特殊情况.

### 1.6.6 达布中值定理

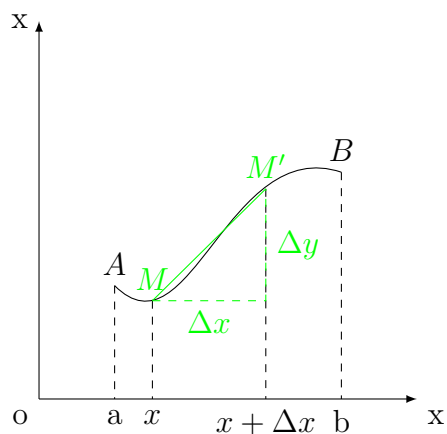
设 $f(x)$ 在 $(A, B)$ 区间中可导,且 $[a, b] \in (A, B)$ ,  $f'(a) < f'(b)$ ,则对于任意给定的 $\eta : f'(a) < \eta < f'(b)$ ,都存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = \eta$

即: 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为一个 $[a, b]$ 上的实值可导函数,并在 $[a, b]$ 上可导,那么 $f'$ 满足: 对任意介于 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 之间的 $t$ ,存在 $x \in (a, b)$ 使得 $f'(x) = t$ .

等价于: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微,若在 $[a, b]$ 上对于任意的 $x$ ,  $f'(x)$ 不等于0,则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上保持定号(恒正或恒负).

### 1.6.7 弧微分

设 $y = f(x)$ 在 $(a, b)$ 内有连续导数,其图形为 $\widehat{AB}$ ,弧长 $s = \widehat{AM} = s(x)$ ,



$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\widehat{AM'}}{|MM'|} \cdot \frac{|MM'|}{\Delta x} = \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \pm \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\widehat{MM'}}{|MM'|} = \pm 1$$

因此对弧长的微分  $s'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + (y')^2}$

或者,考虑到参数方程,更通用的公式为:

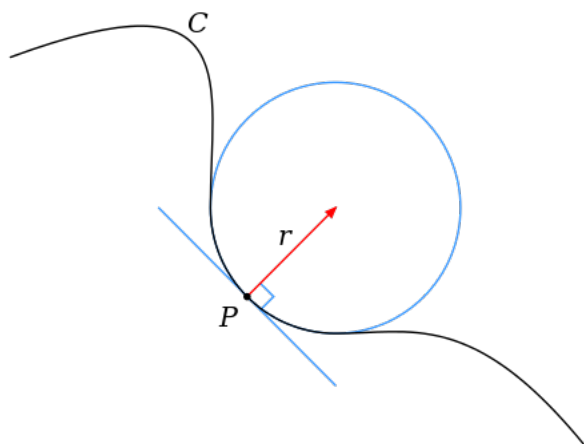
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

当  $x$  是自变量时这个公式和上面的公式完全等价.

### 1.6.8 曲线曲率

曲线的曲率通常是标量,但也可以定义曲率向量.对于更复杂的对象(例如曲面,或者一般的  $n$  维空间),曲率要用更复杂的线性代数来描述,例如一般的黎曼曲率张量.

首先要有密切圆的概念:



曲率有多种等价定义：

- (曲率半径?)圆上每一点的弯曲程度都相同,半径越小弯曲的越厉害,所以可以用半径的倒数来定量描述圆的弯曲程度.直线可以看作半径无限大的圆,所以直线的曲率为0.对于任意形状的曲线,每一点处的弯曲程度通常是不同的.对曲线 $C$ 上任意一点 $P$ ,在其附近再找 $C$ 上的两个点 $P_1, P_2$ ,这三点总能确定一个圆(三点共线时确定一条直线,但可以把直线看作半径无限大的圆).当 $P_1, P_2$ 无限接近于点 $P$ 时,相应的圆也有一个极限,这个极限圆就是在点 $P$ 处最接近曲线 $C$ 的圆,称为密切圆.密切圆的曲率就是曲线 $C$ 在点 $P$ 处的曲率.
- (曲率半径?)柯西这样定义密切圆和曲率:对于曲线 $C$ 上任意一点 $P$ ,在其附近再找 $C$ 上的两个点 $P_1, P_2$ ,分别过 $P_1, P_2$ 作出曲线 $C$ 的法线,两条法线会有一个交点.当 $P_1, P_2$ 无限接近于点 $P$ 时,交点的位置也有一个极限,以这个极限点为圆心,过点 $P$ 作圆,就是曲线 $C$ 在点 $P$ 处的密切圆,密切圆的半径的倒数就是曲率.
- (本节所讲)当曲线上一点沿着曲线以单位速率运动时,过这一点处的切线的方向在转动.曲线弯曲程度越高,切线旋转得越快.设曲线 $C$ 的参数方程为 $r = r(s)$ ,其中 $s$ 是弧长参数,则 $\alpha(s) = \dot{r}(s)$ 是单位切向量.设切向量 $\alpha(s)$ 与 $\alpha(s + \Delta s)$ 的夹角为 $\Delta\theta$ ,记曲率为 $k$ ,则：

$$k = |\dot{\alpha}(s)| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

计算公式如下：

- 一般形式—函数图像的曲率：

若曲线 $y = f(x)$ ,其曲率为：

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$$

对于极坐标方程给出的曲线 $r = r(\theta)$ ,其曲率为 :

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- 参数方程的曲率(局部表达式) :

对于一个以参数化形式给出的平面曲线(参数为 $t$ ) :

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$$

- 隐函数曲线的曲率 :

对于隐函数给出的平面曲线 $F(x, y) = 0$ ,其曲率为 :

$$k(x, y) = \frac{1}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{-F_y^2 F_{xx} + 2F_x F_y F_{xy} - F_x^2 F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

此处的行列式只是个助记写法,并没有其他意义.

### 1.6.9 曲率半径

曲线上 $M$ 处的曲率的倒数,称作曲线在这点处的曲率半径,记作 $\rho$  :

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

密切圆也可以翻译成曲率圆,圆心 $D$ 乘坐曲线在 $M$ 点处的曲率中心.

曲率圆有以下性质 :

- 曲率圆与曲线在点 $M$ 处有共同的切线和曲率
- 在点 $M$ 邻近与曲线有相同的凹向

因此, 在实际工程设计问题中, 常用曲率圆在点 $M$ 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧, 以使问题简化。

## 1.7 不定积分

在微积分中,函数 $f$ 的不定积分(或称反导函数或原函数)是一个可微函数 $F$ 且其导数等于原来的函数 $f$ ,即 $F' = f$ .不定积分和定积分的关系由微积分基本定理联系起来.透过微积分基本定理,函数的定积分的计算就可以简单的通过求不定积分来进行.

### 1.7.1 不定积分公式

下面给出不定积分公式:

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \mathbb{C}$$

$$2. \int k dx = kx + \mathbb{C}$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + \mathbb{C}$$

$$4. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + \mathbb{C}$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + \mathbb{C}$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + \mathbb{C}$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + \mathbb{C}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + \mathbb{C}$$

$$9. \int \sec x \tan x dx = \sec x + \mathbb{C}$$

$$10. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + \mathbb{C}$$

$$11. \int e^x dx = e^x + \mathbb{C}$$

$$12. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathbb{C}$$

### 1.7.2 不定积分第一类换元积分法

设 $f(x)$ 为可积函数, $g = g(x)$ 是连续可导函数,则有:

$$\int f(g)g'dx = \int f(g)dg$$

第一类换元积分法基本就是配凑的思想.

### 1.7.3 不定积分第二类换元积分法

设 $f(x)$ 为可积函数, $x = x(g)$ 为连续可导函数,则有:

$$\int f(x)dx = \int f(x(g))x'dx$$

### 1.7.4 分部积分法

分部积分的公式为:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

推荐按以下顺序考虑优先代入:

指数函数,三角函数,幂函数,对数函数,反函数

## 1.8 定积分

### 1.8.1 定义

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

以上为定义,实际中写法为 $\int_a^b f(x)dx$ .

其中 $a$ 为积分区域上限, $b$ 为积分区域下限.

### 1.8.2 性质

定积分有以下性质:

1.  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ 即:交换上下限积分结果正负改变.
2.  $a < b < c$ ;  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ , 且  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
3.  $f(x) \leq g(x)$ ;  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$



$$4. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

### 1.8.3 定积分第一类换元积分法

设 $f(x)$ 为可积函数, $g = g(x)$ 是连续可导函数,则有:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g)g'dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(g)dg$$

### 1.8.4 定积分第二类换元积分法

设 $f(x)$ 为可积函数, $x = x(g)$ 为连续可导函数,则有:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{x^{-1}(\alpha)}^{x^{-1}(\beta)} f(x)x'dx$$

简而言之:定积分的第二类换元积分法有两个要点

1. 引入换元函数
2. 上下限也要变(将原函数上下限代入换元函数)

### 1.8.5 积分上限函数(定积分求导公式)

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

如果 $f(x), I(x)$ 可导,则 $I'(x) = \frac{d \int_a^x f(t)dt}{dx} = f(x)$   
 $f(x)$ 连续, $I(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

有以下几种变体:

1.  $(\int_x^a f(t)dt)' = -f(x)$
2.  $(\int_a^{\Phi(x)} f(t)dt)' = f(\Phi(x))\Phi'(x)$
3.  $[\int_{\Phi}^{\varphi} f(t)dt]' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\Phi(x))\Phi'(x)$

### 1.8.6 牛顿-莱布尼兹公式/微积分基本定理

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

### 1.8.7 积分介值定理

在区间 $[a, b]$ 上 $m$ 和 $M$ 分别是 $f(x)$ 的最小值和最大值.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

### 1.8.8 区间再现公式

设 $f(x) = \int_b^a g(x)dx$ , 令 $x = a + b - t$ , 当 $x = a$ 时,  $t = b$ , 当 $x = b$ 时,  $t = a$ ,  $dx$ 变成 $-dt$ . 即:

$$f(x) = \int_b^a g(x)dx = -\int_a^b g(a + b - t)dt = \int_b^a g(a + b - t)dt$$

由于定积分与被积变量无关, 所以将上式结果中的 $t$ 换成 $x$ , 与原函数相加, 得:

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_b^a [g(x) + g(a + b - x)]dx$$

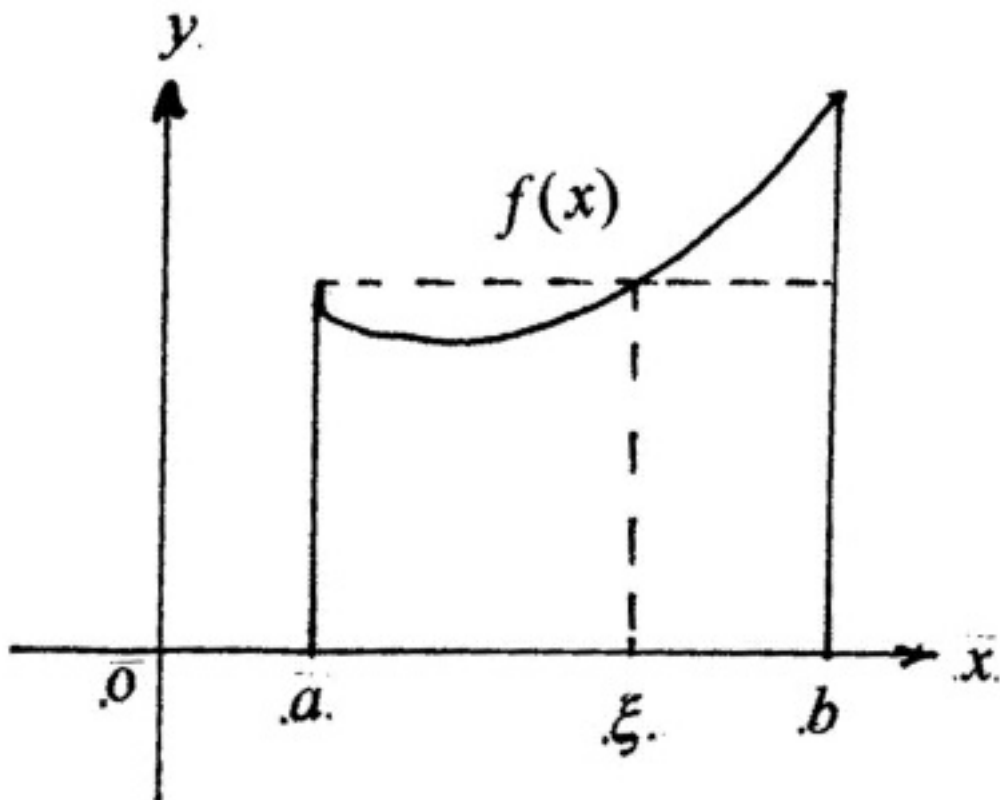
### 1.8.9 华里士公式(点火公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} & (n \text{ 为大于1的奇数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数}) \end{cases}$$

### 1.8.10 积分第一中值定理

设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 为一连续函数,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 要求 $g(x)$ 是可积函数且在积分区间不变号, 那么存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad \text{他的几何意义为:}$$



以下为证明:

在不失去一般性的条件下,设对所有的 $x$ ,有 $g(x) \geq 0$ ;因为 $f$ 是闭区间上的连续函数, $f$ 取得最大值 $M$ 和最小值 $m$ .于是得出不等式:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

对不等式求积分,得出:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$ ,则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ . $\xi$ 可以取 $[a, b]$ 上任意一点.

如果不等于0,那么 $\int_a^b g(x)dx > 0$ ,对不等式变形可得:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

因为 $f(x)$ 是连续函数,所以上面这玩意是个连续函数,所以必定存在一点 $\xi \in [a, b]$ ,使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

( $g < 0$ 时也可以按这个步骤推出)

推论:拉格朗日中值定理的积分形式

在上式中令 $g(x) = 1$ ,则可得出:

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 为一连续函数,则 $\exists \xi \in [a, b]$ ,使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

也可以由拉格朗日中值定理推出:

设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(x) = F'(x)$ ,则 $\exists \xi \in [a, b]$ ,使

$$f(\xi) = F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

### 1.8.11 积分第二中值定理

积分第二中值定理与积分第一中值定理相互独立,却又是更精细的积分中值定理.

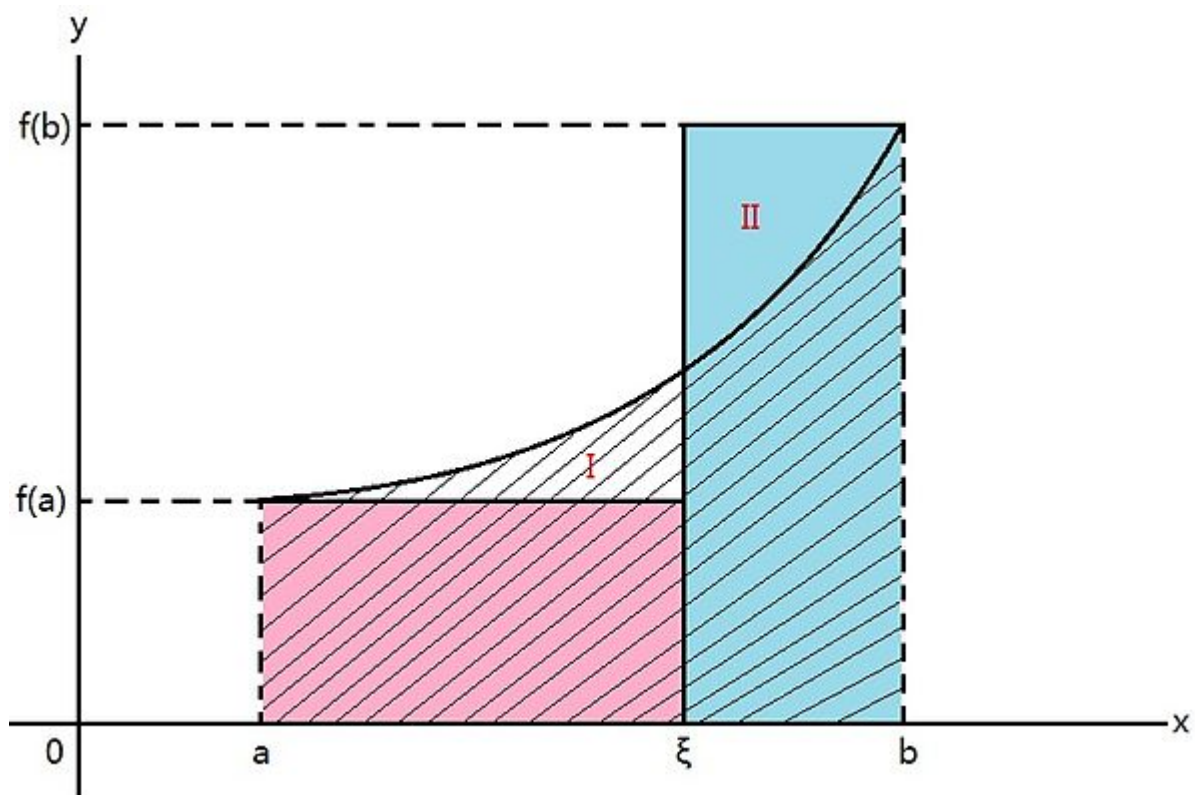
若 $f, g$ 在 $[a, b]$ 上可积且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调,则存在 $[a, b]$ 上的点 $\xi$ 使

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$$

进而导出:

$$\int_a^\xi f(x)dx - f(a)(\xi - a) = f(b)(b - \xi) - \int_\xi^b f(x)dx$$

他的几何意义很明显为:能找到 $\xi \in [a, b]$ ,使得红色区域的面积和蓝色区域的面积相加等于阴影区域的面积,即 $S[\text{I}] = S[\text{II}]$



### 1.8.12 定积分求平面函数曲线弧长

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Phi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \Phi'^2(t)} dt$$

极坐标的情况:

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta \quad (\text{注意求导符号})$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

## 1.9 反常积分

通常来说只需要极限存在,则此反常积分收敛.

### 1.9.1 无穷限反常积分

有以下几种情况:

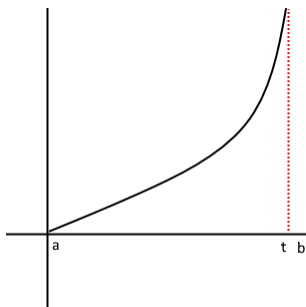
$$1. \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$2. \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

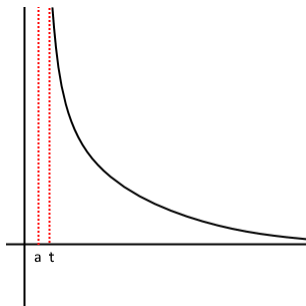
### 1.9.2 无界函数反常积分

设b为瑕点:



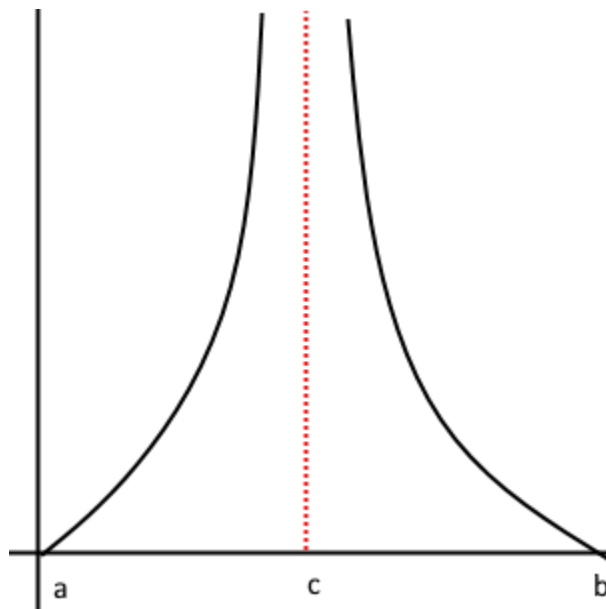
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

或者是设a为瑕点:



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

或者以上两者情况合一,设c为瑕点将其拆分:



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

然后按照上方两个情况分别求解.

依然可以使用牛-莱公式.

瑕积分换元需要为单调函数,不论增减性.

### 1.9.3 gamma函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, (s > 0)$$

gamma函数的特点就是:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1$$

因此:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

## 1.10 无穷级数

### 1.10.1 泰勒公式/泰勒级数/展开

泰勒级数表示:当知道某点 $x = a$ 的情况时,就能知道 $a$ 点附近的函数是怎样的.

$x$ 在 $a$ 点附近,最为粗略的估计就是 $f(x) \approx f(a)$

然后才是修正项: $f'(a)(x-a)$ ,这是斜率乘以距离,最终得到的就是高度.相当于沿切线前进.

还有一项表示弯曲: $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ ,他是斜率的斜率,变化率的变化率.

但后面还有更多项,直接写出通项公式如何?

泰勒级数通项公式: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n-1)}(x-a)^{n-1}$ , 0阶导指的是原函数,  $a$  是  $x$  附近的点.

还有泰勒公式:表示的不是一个函数的幂级数形式而是对于某个函数的近似,形式与泰勒级数通项公式类似.

泰勒公式: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-a)^n + R_n(x)$ .

$R_n(x)$  是余项,表示误差,是  $(x-a)^n$  的高阶无穷小  $O((x-a)^n)$ . 根据中值定理可得  $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ , 其中  $a \leq \xi \leq x$ , 意思是  $\xi$  介于  $a$  和  $x$  之间.

当泰勒公式在  $a = 0$  处展开时就称为麦克劳林公式.

麦克劳林公式:当  $a = 0$ ,  $f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$ , 其中  $0 < \theta < 1$

## 1.11 微分方程

微分方程是一种描述世界的好手段,当描述某个东西随时间的微小变化比起描述这个物体整体的变化更方便的时候就会使用微分方程.

### 1.11.1 一阶线性微分方程

形式  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$

有以下几种情况:

1.  $Q(x) = 0 \rightarrow$  齐次方程, 则  $\frac{dy}{dx} = -p(x)y \rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$ , 然后两边求积分, 从而得出:  $y = e^{-\int p(x)dx} e^{C_1} = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$

2.  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ ,  $Q(x) \neq 0$ , 也就是非齐次方程. 设  $y = ue^{-\int p(x)dx}$ ,  $u$  是未知量. 然后把  $y$  代入:

$$u'e^{-\int p(x)dx} - ue^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)ue^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

从而推出:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

因此  $u' = Q(x)e^{\int p(x)dx}$ , 从而推出:

$$u = \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$



将以上带入,得出: $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot (\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \mathbb{C})$  (通用公式)

注:一个非齐次线性微分方程的通解等于对应的齐次微分方程的通解与非齐次微分方程的一个特解之和.

### 1.11.2 伯努利方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$$

当 $n = 0$ 时,此式为齐次方程,当 $n = 1$ ,为一阶线性微分方程.

当 $n$ 即不等于0也不等于1时,用 $y^n$ 除以两边,得到:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x)$$

设 $y^{1-n} = z$ ,则:

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

代入原方程,则原式等于:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = Q(x)$$

再两侧同乘 $\frac{dz}{dx}$ :

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$$

再套用非齐次线性微分方程的公式,再把 $y$ 求出来就行.

### 1.11.3 可降阶高阶微分方程

有以下几种情况:

1.  $y^{(n)} = f(x)$ ,于是两边不断求积分进行降阶: $y^{n-1} = \int f(x)dx + \mathbb{C}$

2.  $y'' = f(x, y')$ ,设 $y' = p$ ,  $y'' = p'$ ,则 $p' = f(x, p)$ .然后再进行回代.

3.  $y'' = f(y, y')$ ,同样的,令 $y' = p$ ,  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ ,于是 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

### 1.11.4 常系数齐次线性微分方程

例: $y'' + py' + qy = 0$

先找出特征方程: $r^2 + pr + q = 0$ , 即: 设  $r = p', r^2 = ''$ .

有以下三种情况:

$$1. \Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q > 0, r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$2. \Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q = 0, r_1 = r_2 = \frac{-p}{2}$$

$$3. \Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q < 0, r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i, \text{可扩写成以下三种形式:}$$

$$(a) y = \mathbb{C}_1 e^{r_1 x} + \mathbb{C}_2 e^{r_2 x} (\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2 \text{为任意常数})$$

$$(b) y = (\mathbb{C}_1 + \mathbb{C}_2) e^{r_1 x}$$

$$(c) y = e^{\alpha x} (\mathbb{C}_1 \cos \beta + \mathbb{C}_2 \sin \beta)$$

### 1.11.5 关于运动的微分方程/线性常系数微分方程

开门见山,先提出此公式再进行分析.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + 2r \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

很明显,这是个二阶常系数线性微分方程,二阶指的是它最多求了2次导.线性,这意味着他可以是抽象的向量,他可以被线性代数的方式所表示(见4.1.2-关于抽象向量空间).至于“常系数”,这意味着它的系数都是常数.

先分析这个方程的退化形式.

$$1, \text{设 } m = 0, r = 1/2, \frac{dy}{dt} = ay$$

很明显:这意味着函数求导后是它自身的倍数,这暗示着原函数是个指数函数.不难猜到:原函数可以为  $y = e^{at}$ . 但这样还不够.仔细想想:如果e的前面有系数,求导后也依然还是原函数的倍数,所以通解应该是  $y = ce^{at}$ .

$$2, \text{设 } r = 0, \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y, \text{其中 } \omega \text{ 是 } \frac{k}{m}.$$

这又意味着什么?这意味着:原函数求二次导后是负数倍的他自己,在实数范围内(毕竟一涉及*i*事情就麻烦了起来,不过如果包含虚数的范围倒也是一件合理的事情,设  $y = e^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$ , 如果要使这个二阶导符合条件很明显  $k$  应该是  $i$ , 而欧拉公式的完整写法是:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ) 符合这个条件的就这两个函数:  $\sin \omega t$  和  $\cos \omega t$ , 那么这两个函数就是解集的“基向量/基础解系”, 通过这两个函数的线性组合就可以得出所有符合条件的原函数, 因此通解写作  $y = C \cos \omega t + D \sin \omega t$

3, 设  $m = 0, r = 0, \frac{dy}{dt} = 0$

这更明显,  $y = C + Dt$ . ( $y$  是个函数, 表示位置)

那么回到那个方程: 这个方程在很多领域都是很常见的. 这个方程能表示一切振动. (比如弹簧, 钟表, 摆动...) 通过选择不同的系数, 可以建立各种最简洁的基础模型.

那么以弹簧为例来讲解. 例子中  $t$  表示时间 (这就是为什么不用  $x$ ):

实际上, 在这种模型中, 常有  $r = 0$ . 那么取  $r = 0$  的情况.

有牛顿定律:  $F = ma$ ,  $m$  就是质量,  $a$  则是加速度, 也就是二阶导, 因此改写成二阶导形式:  $F = m \frac{d^2 y}{dt^2}$  (不考虑质量损失)

弹簧是悬空拉着一个小滑块的.  $y$  的正方向是向下, 他表示弹簧的位移, 当  $y$  是正的时候, 弹簧有向上拉的力, 而弹簧的力与  $y$  成正比, 比例则是常数  $k$ . 当  $y$  很大的时候弹簧被拉的很长, 向上拉的力在往上拉, 写作  $F = -ky = m \frac{d^2 y}{dt^2}$  其中  $F$  表示拉力, 负号是因为力的方向与  $y$  相反 (胡克定理). 经过变形得到:  $m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0$ . 非常眼熟.

$r = 0$ ,  $r$  表示的是阻力, 可以是空气阻力也可以是磁力等等, 他就是没法制作永动机的原因, 不过现在是假想环境, 所以设他为 0, 那么弹簧就会是一根永不停息的, 上下振动的弹簧. 就如同上面分析的结果, 他沿着 **正弦和余弦** 振动. 而常数  $C$  与  $D$  则取决于初始状态.

回想一下,  $-ky = m \frac{d^2 y}{dt^2}$ , 将两边同除以  $m$ , 负号移走, 于是得到  $\omega^2$  而  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

这种情况很简单, 只有  $\sin, \cos$ . 接下来, 来一点阻力.

$$my'' + 2ry' + ky = 0$$

现在, 对于任意  $m, r, k$ . 想要求解此方程, 很棒的是指数函数可以求出正确答案.

核心思想是尝试指数函数  $y = e^{\lambda t}$ ,  $\lambda$  指的是特征函数. (用  $\lambda$  而不用  $C$  的原因可以看 4.1.1-什么是线性变换.) 将这个代入方程, 并求出合适的  $\lambda$ . 何不先从常数项开始?

很容易看出常数项是  $ke^{\lambda t}$

而一阶导呢? 有  $2r$  乘以  $y = e^{\lambda t}$  的导数, 只需要将导数代入方程.

一阶项是  $2r\lambda e^{\lambda t}$

到二阶导, 同理.

二阶项就是  $m\lambda^2 e^{\lambda t}$

写出完整的形态:  $m\lambda^2 e^{\lambda t} + 2r\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$

消掉公因式  $e^{\lambda t}$ , 他显然不是 0, 可以消掉. 结果就是  $m\lambda^2 + \lambda + k = 0$

这个方程只不过是普通的二次方程, 随随便便就能解出来. 二次方程理应有两个解. 因此  $e^{\lambda_1 t}$  和  $e^{\lambda_2 t}$  都是方程的解

回忆一下公式,  $\lambda = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - km}}{m}$

引入一些数字,  $1y'' + 6y' + 8y = 0$ . 计算  $\lambda$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4$$

解是多少呢? $y(t) = Ce^{-2t} + De^{-4t}$

两个 $\lambda$ 都在指数中,然后得解

注意: $\lambda$ 可能解出复数,可以照样用,但也可以写成另一种形式——利用欧拉公式的美妙性质.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

(欧拉第二天意识到 $-i$ 也有公式)

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

直接跳到结果:

$$e^{(x \pm ki)t} = e^{xt} \cdot (\cos(t \cdot n) \pm i \sin(t \cdot n))$$

另外,当两个 $\lambda$ 相同(出现重根)的时候,方程的解一个是 $e^{\lambda t}$ 另一个是 $te^{\lambda t}$ ,经过验算会发现最后消掉了一部分,得到的是正常的结果.

所以结论就是:线性常系数微分方程只要通过 $e^{\lambda t}$ 就能解决.

### 1.11.6 关于增长的微分方程/非线性微分方程/偏微分方程剧透

从线性的开始.

最简单的: $\frac{dy}{dt} = cy$ , 给予了初始条件 $y(0)$

即增长率与自身成正比.很明显的这是呈指数形式的增长,解应该是 $y(t) = y(0)e^{ct}$

看下一个方程,依然是线性的: $\frac{dy}{dt} = cy + s$ ,  $s$ 表示source,可以用银行存钱来描述:前一项是每天的利息,后一

项的每天存入的金额. 这就是右侧带有常数项的线性微分方程了.事实上甚至能拿现有的知识来解决它: $\frac{dy}{dt} =$

$$cy + s = c(y + \frac{s}{c}) = \frac{d(y + \frac{s}{c})}{dt}, \text{ 其中 } \frac{s}{c} \text{ 是常数,所以可以任意加减而不影响求导结果.随后观察整体,会发现与第}$$

一个例子几乎相同,唯一不同的就是多了个 $\frac{s}{c}$ 函数依然以增长率 $c$ 增长.从0处的 $y$ 值加上 $\frac{s}{c}$ 开始.

所以,结论是: $y(t) + \frac{s}{c} = (y(0) + \frac{s}{c})e^{ct}$ .这就是该微分方程的快速版解答了.将常数丢到右边,就是一个标准的形式.

所以线性方程(不只是线性微分方程)的解 $y(t) = y_{\text{particular}}(t) + y_{\text{another solution with a right side 0}}(t)$ .用人话说就是:线性方程的解总是自身的某个特解加上另一个右侧等于0的方程的解.

也就是说如果要求 $\frac{dy}{dt} = cy + s$ 的解,那么首先求一个特解(也就是任一个满足方程的函数),能找到的最简单的函数就是常函数.想要常数满足方程,常熟的常数必然为0,而且 $c$ 乘以此常数加 $s$ 也应该为0.也就是 $cy + s =$

0,  $cy = -s$ ,  $y = -\frac{s}{c}$ . 这就是一个特解了.

那么”一个右侧为0的方程的解”是什么意思?将s擦去,使得 $\frac{dy}{dt} = cy$ ,保留含有y的,去掉常数项,使得右侧为0.也就是 $y' - cy = 0$ .书本上喜欢称之为:齐次方程.也就是第一个例子.

那么齐次方程的解是什么呢? $\frac{dy}{dt} = cy$ 的解含有 $e^{ct}$ 以及任意常数A,也就是 $Ae^{ct}$ ,任意 $Ae^{ct}$ 都能满足这个简单的方程.

所以整个方程的解就是 $-\frac{s}{c} + Ae^{ct}$  A是任意常数.不过当然,如果有初始条件就能特定一个.只需要设 $t = 0$ ,就能解出A,在这里 $A = y(0) + \frac{s}{c}$ .在上面也算出来了.

不过线性的已经没啥意思了,来点线性的.非线性的微分方程很有趣,也可以表示很多东西,比如:人口的增长.

关于人口增长函数 $P(t)$ ,用什么微分方程描述比较合理?

$\frac{dP}{dt} = cP - sP^2$ .其中c表示增长率.同样的,有出生也会有死亡,所以需要有一个减速项,因为人口增长不可能这么快.也就是s.这在一定程度上反映了人口之间的相互作用.(事实上这种公式在其他领域也有很多用途)

在这个公式中 $p^2$ 表示人口之间的相互拥挤造成的影响,因此s是个很小的数,比如十亿分之一.

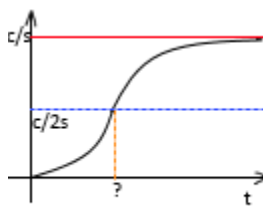
下面要解这个方程了.

不过对于非线性方程,目前(正在阅读的你,或者是我自己复习?)暂时没有现成的工具,需要更多的微积分知识.但是只要方法正确,就能解出来的.

先展示解吧:首先,如果一开始一个人都没有,那么就始终为0. $P = 0$ ,常数解,很无趣.还有一种情况,很重要的情况,这种情况下导数也为0.

假设导数为0,将会得到一个特殊的特解,他不会变化.也就是当导数为0时,那么 $cP = sP^2$ .可以约掉一个P,也就是 $P = \frac{c}{s}$ .此时,增长和减少将会相互抵消,成为无法逾越的上限.

那么来看看真实情况下的解,不过为何不先看看图呢?:



其中 $\frac{c}{s}$ 称为稳态,到了这里就会保持稳定,不会改变了.不过其实到不了哪里,只会一直接近而已.这就是这个式子所代表的人口曲线了.

那么就是解方程的环节了.有很多方法,先试试一个好使的:尝试 $y = \frac{1}{P}$ .然后尝试把整个方程写成 $y$ 的形式.这是解这个方程的技巧,而解非线性方程常常需要一些技巧.

看看这个方程长啥样子: $\frac{dy}{dt} = -\frac{dP}{P^2}$ 而 $\frac{dP}{dt}$ 是已知的,所以将他代进来,得到 $-\frac{cP - sP^2}{P^2}$ .将负号写进去,得到一个 $s: s - \frac{c}{P}$ .查看前面的推导能发现: $\frac{1}{p} = y$ .所以得到 $s - cy$ .于是 $\frac{dy}{dt}$ 变成了线性的,它还含有资源项 $s$ ,而增长率项还含有一个 $-c$ .也许仔细想想为什么

那么写出 $y$ 的解: $y(t) - \frac{s}{c} = (y(0) - \frac{s}{c})e^{-ct}$ 这就是 $y$ 的解. $y = \frac{1}{P}$ ,接下来就是要回代了:

$\frac{1}{P(t)} - \frac{s}{c} = (\frac{1}{P(0)} - \frac{s}{c})e^{-ct}$ ,接下来的一堆化简就不写了.

这种模型称为logistic方程(只是为了提一下)

接下来再来一个有意思的方程:捕食者与猎物的方程:

这里有两个未知数:猎物——记作 $v$ ,捕食者——记作 $u$ ,表示的都是两者的总数.如果猎物不够,捕食者就会减少.捕食者减少,猎物就会增加.因此这里有正的 $u \cdot v$

这是公式:

前面有个 $-cu$ ,表示没有食物的情况,捕食者将会慢慢灭绝.

但如果猎物存在,那么资源项就会正比于 $uv$ .

所以 $\frac{du}{dt} = -cu + suv$

那么 $\frac{dv}{dt}$ 呢?情况大不相同.他们被捕食,因此有 $-Suv$ ,同时也有正的增长率 $Cv$

那么这就是一个模型了.剧透一下:这玩意叫偏微分方程(Partial Differential Equation),简称PDE,他比常微分方程(Ordinary Differential Equation, ODE)包含了更多的信息.也更难解.

## 2 多元微积分

注:如果忘了什么是偏导数就去上一章回顾.

### 2.1 多元函数的极值与最值

#### 2.1.1 多元函数的极值

- 极值存在的必要条件:

如果 $z = f(x, y)$ 有偏导且在 $(x_0, y_0)$ 存在极值,则 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$

驻点此时指偏导等于0的点,即 $f'_x = f'_y = 0$ (需要同时成立).

有偏导数的函数极值点必是驻点.但是函数的驻点不一定是极值点.

- 极值存在的充分条件 :

依然是拿 $z = f(x, y)$ 举例:

首先求出驻点 $(x_0, y_0), A = f''_{xx}, B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$

- 当 $AC - B^2 > 0$ 时,存在极值点.其中 :

- \*  $A < 0$ ,极值点为极大值.

- \*  $A > 0$ ,极值点为极小值.

- 当 $AC - B^2 > 0$ 时,无极值.

- 当 $AC - B^2 = 0$ 时,无法判断.

### 2.1.2 多元函数的最值

多元函数的最值一般出现在三种情况中 :

1. 驻点

2. 偏导不存在的点

3. 端点

### 2.1.3 条件极值与拉格朗日乘数法

设目标函数为 $z = f(x, y)$ ,条件为 $\varphi(x, y) = 0$

假设 $y$ 也是 $x$ 的函数 $\psi$ ,则 :

$$z = f(x, \psi(x))$$

如果对 $x$ 的导数存在且有极值,那么求导应该为0,因此对 $z$ 求导 :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

那么：

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$$

由此结论,把 $y$ 看作 $x$ 的隐函数,则由隐函数存在定理： $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)}$

将其代入,从而得到：

$$f'_x(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} = 0$$

设后一项中的 $-\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} = \lambda$

代入替换,得：

$$f'_x + \lambda \varphi'_x = 0$$

并且对 $\lambda$ 作变形：

$$f'_y(x_0, y_0) - \frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)} \varphi'_y(x_0, y_0) = f'_y + \lambda \varphi'_y = 0$$

联立方程组：

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

作辅助函数 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \end{cases} \quad \text{即：} \quad \begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

当有两个以上的约束条件时：

$$u = f(x, y, z, t), \varphi(x, y, z, t) = 0, \psi(x, y, z, t) = 0$$

$$L = f(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) + \mu \psi(x, y, z, t)$$



$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_t = 0 \\ \varphi(x, y, z, t) = 0 \\ \psi(x, y, z, t) = 0 \end{cases}$$

## 2.2 隐函数

### 2.2.1 隐函数存在定理/隐函数定理(二元)

## 2.3 重积分

### 2.3.1 二重积分

定义： $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i f(\xi_i, \eta_i) = \iint_D f(x, y) d\sigma$

解释： $f(x, y)$ 是区域 $D$ 上的有界函数,将区域 $D$ 任意分成 $n$ 个区域 $\Delta\sigma_1 \dots \Delta\sigma_n$ ,在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点, $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$ ,当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,如果上述极限存在,则称为 $f(x, y)$ 的二重积分.其中 $d\sigma$ 称为面积元素,可写作 $dx dy$

设被积函数 $f(x, y)$ ,从几何上来说：

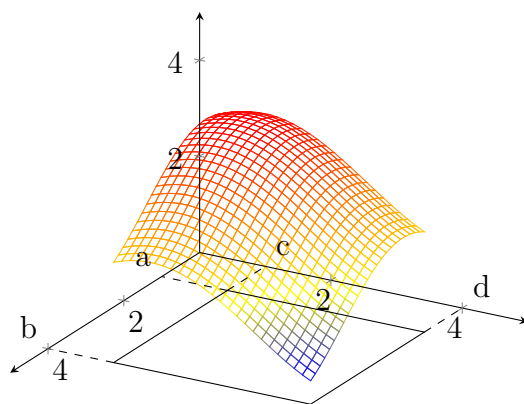
- 当 $f(x, y) \geq 0$ 时,二重积分结果为体积.
- 当 $f(x, y) < 0$ 时,二重积分结果为体积的相反数.
- 当 $f(x, y)$ 有正有负时,二重积分结果为 $XOY$ 平面上半部分的体积减去下半部分的体积.

### 2.3.2 二重积分的性质

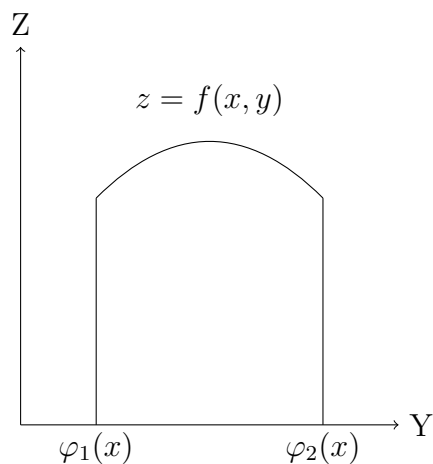
- $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma$
- $D$ 分为 $D_1, D_2$ ,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$
- $f(x, y) = 1$ ,  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \sigma$

- $f(x, y) \leq g(x, y), \iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$
- $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$
- $M, m$  分别是函数的最高和最低点,  $m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$
- $m \leq \frac{\iint_D f(x, y) d\sigma}{\sigma} \leq M$ , 即:  $f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$

### 2.3.3 直角坐标系下的二重积分计算



思路是将立体对象切成一个个面再进行积分,如下:



此图像的面积  $S = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$

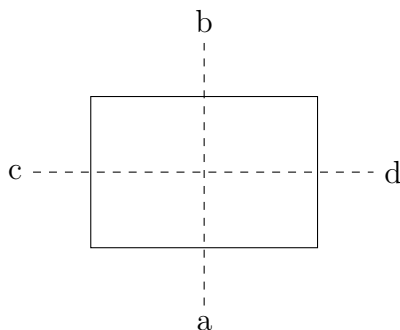
再对面积进行积分： $V = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d \int_{\phi_2(y)}^{\phi_1(y)} f(x, y) dx dy$   
 在直角坐标系下有两种积分顺序：

- X型：内层积分时上方函数是上限,下方函数是下限,即: $\int_{xx}^{xx} \int_{\text{下}}^{\text{上}} f(x, y) dy dx$
- Y型：内层积分时左侧函数是下限,右侧函数是上限,即: $\int_{xx}^{xx} \int_{\text{右}}^{\text{左}} f(x, y) dx dy$

### 2.3.4 直角坐标系下二重积分的特殊情况

有两种特殊情况可以简化二重积分的运算：

1. 积分区域为长方形：

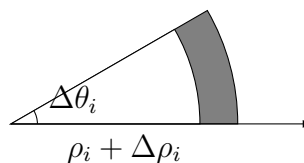
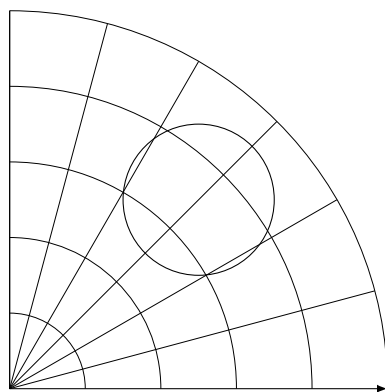


$$\text{则} \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

2. 在情况 1 下,如果  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ , 则：

$$\int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy$$

### 2.3.5 极坐标下的二重积分计算



公式的定义为：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i) \cdot \bar{\rho}_i \Delta \rho_i \Delta \theta_i$$

简而言之,将直角坐标系下的二重积分转换为极坐标下的二重积分的公式为：

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

注意：

- 后面多出来了的一个 $\rho$ 要记得加上,这个 $\rho$ 并不是凭空冒出来的,它来自面积元素 $d\sigma$ ：

$$\Delta \sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \theta_i = \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta \rho_i)}{2} \Delta \rho_i \cdot \Delta \theta_i = \bar{\rho}_i \cdot \Delta \rho_i \cdot \Delta \theta_i$$

- 极坐标的积分顺序不能互换
- 何时使用极坐标：

1. 积分区域为圆,圆环,扇形

2. 被积表达式为 $x^2 + y^2, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$

### 2.3.6 极坐标下的特殊情况

- $-x^2 - y^2 = -(\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) = -\rho^2$
- $\frac{x}{y} = \tan \theta$
- $\frac{y}{x} = \cot \theta$

### 2.3.7 二重积分换元法

设 $f(x, y)$ 在 $B$ 区域连续, $x = x(u, v), y = y(u, v)$ ,且 $x, y$ 积分区域为 $D$ ,用 $u, v$ 换元后为 $D'$

当：

1.  $x(u, v), y(u, v)$ 有一阶连续偏导.

$$2. \quad J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

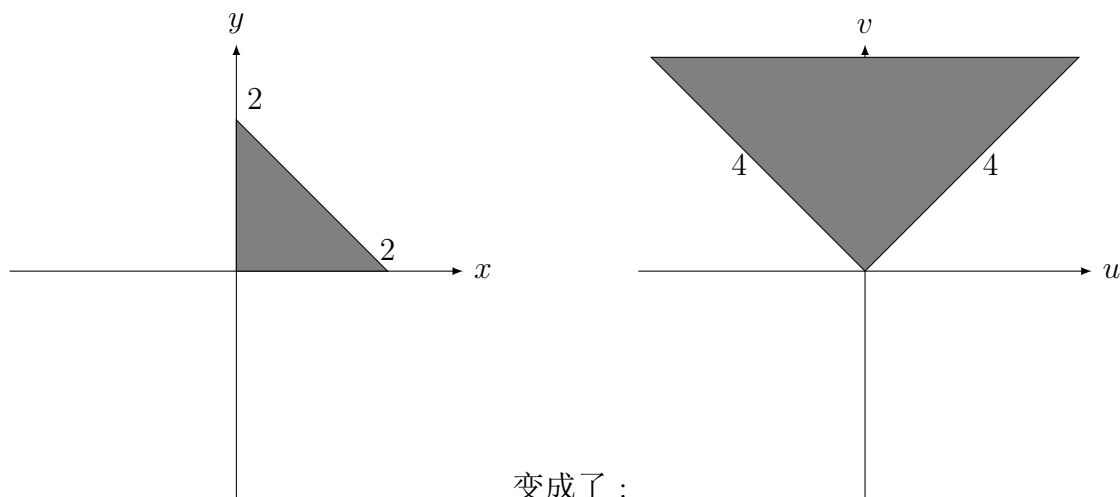
3.  $|J(u, v)| \neq 0$  (不全为0, 如果指事字一个点或一条线上为0也成立)

4.  $D'$ 到 $D$ 点是一一对应的

此时：

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \|J(u, v)\| du dv$$

从几何直观上看：



变成了：

其中  $\|J(u, v)\| = \frac{1}{2}$ , 因此缩放了两倍.

一般来说在以下情况下会使用换元:

- 被积函数不好积
- 积分区域不好表示

### 2.3.8 三重积分

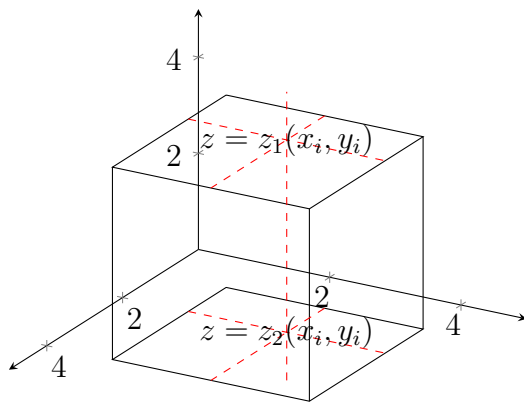
设  $v = f(x, y, z)$ , 从空间中任取一点  $\Delta V_i: f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

定义为：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

$\Omega$ 表示积分空间区域.

与二重积分类似,具体积分思路为：



$$\iint_{D(x,y)} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

值得注意的是在二重积分情况下的特殊情况(5.3.4)在三重积分下也适用.

### 2.3.9 三重积分(柱面坐标)

由于柱面坐标只是单纯的加了个 $z$ 轴,因此只是单纯的在外面套了一层对 $z$ 轴的积分而已.

即： $dv = \rho d\rho d\theta dz$

### 2.3.10 三重积分(球面坐标)

公式为：

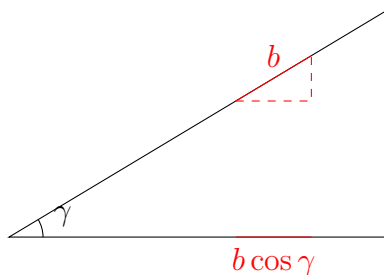
$$dv = dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

多出来的 $r^2 \sin \varphi$ 也可以由雅可比行列式推出.

### 2.3.11 重积分应用(求曲面面积)

设 $z = f(x, y)$ ;将曲面划分称一个个长为 $a$ 宽为 $b$ 的小方格:

图示如下：



设投影后的区域为 $d\sigma$ ,投影前为 $dA$ .投影后长边的长度 $a$ 不变,因此 $dA = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}$

$$\text{其中} \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$$

所以 $dA = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} d\sigma$ ,即 :

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} d\sigma$$

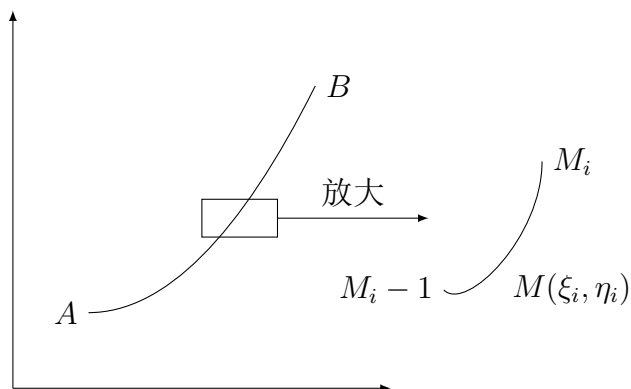
## 2.4 曲线积分与曲面积分

在数学中,曲线积分或路径积分(或contour integral[留数定理])是积分的一种.积分函数的取值沿的不是区间,而是特定的曲线,称为积分路径.曲线积分有很多种类,当积分路径为闭合曲线时,称为环路积分或围道积分.

在曲线积分中,被积的函数可以是标量函数或向量函数.当被积函数是标量函数时,积分的值是积分路径各点上的函数值乘上该点切向量的长度.在被积函数是向量函数时,积分值是积分向量函数与曲线切向量的内积.在函数是标量函数的情形下,可以把切向量的绝对值(长度)看成此曲线在该点附近定义域的极小区间,在到达域内拉长了切向量绝对值的长度,这也是曲线积分与一般区间上的积分的主要不同点.

### 2.4.1 第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)

设曲线的密度为 $M(x, y)$ ,求质量 $m$ :



第一类曲线积分的定义为：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = m = \int_L f(x, y) ds$$

其中 $ds$ 称为曲线元素,也有三维的形式 $\int_L f(x, y, z) ds$ .

第一类曲线积分有以下运算性质：

- $\int_{L_1+L_2} f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$
- $\int_L (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) ds = \alpha \int_L f(x, y) ds + \beta \int_L g(x, y) ds$
- $\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds \quad (L = L_1 + L_2)$
- $f(x, y) \leq g(x, y), \int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds$
- $|\int_L f(x, y) ds| \leq \int_L |f(x, y)| ds$

## 2.4.2 第一类曲线积分的计算

定理：设曲线 $L$ ：

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), (\alpha \leq t \leq \beta) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

这两个参数方程都有一阶连续导数,且 $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ .

$$\text{则 } \int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (\alpha < \beta)$$

即：



$$1. y = \varphi(x), (x_1 \leq x \leq x_2)$$

则设曲线 $L$ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases} \quad x_1 \leq t \leq x_2$$

$$\text{则积分为：} \int_{x_1}^{x_2} f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + (\varphi'(t))^2} dt = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad (x_1 < x_2)$$

$$2. x = \varphi(y), (y_1 \leq y \leq y_2)$$

则设参数方程：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = t \end{cases} \quad y_1 \leq t \leq y_2$$

$$\text{则积分为：} \int_{y_1}^{y_2} f(\varphi(t), t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + 1} dt = \int_{y_1}^{y_2} f(\varphi(y), y) \sqrt{(\varphi'(y))^2 + 1} dy \quad (x_1 < x_2)$$

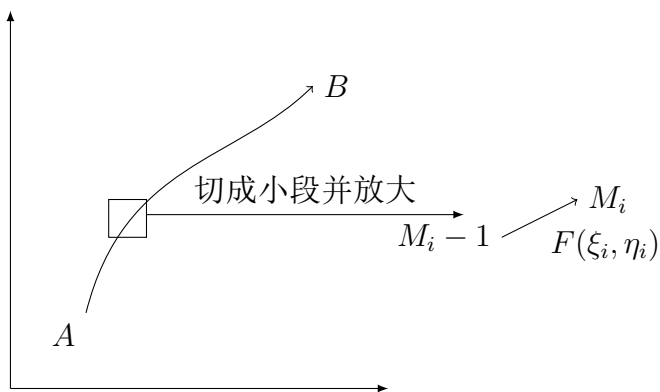
$$3. x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$$

：

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\omega'(t))^2} dt \quad (\alpha < \beta), (\alpha \leq t \leq \beta)$$

### 2.4.3 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)

引出：设 $F$ 是一变力,求他沿着曲线做的功 $\omega$ ：



$$\Delta \omega_i = F(\xi_i, \eta_i) \cdot (\vec{M_{i-1}M_i})$$

定义为：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i) \cdot \vec{M_{i-1}M_i}$$

其中 $F(\xi_i, \eta_i)$ 可以分解为 $P(\xi_i, \eta_i)\vec{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\vec{j}$ ,  $\vec{M_{i-1}M_i}$ 可以分解为 $\Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ . ( $\vec{i}, \vec{j}$ 为基向量)

因此对定义作变形,可以获得另一个形式:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i)$$

需要注意的是: 求和与求极限需要单独对第一,第二项求(即对各个正交方向的基向量分别求).

- 如果第一项极限存在,则  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i = \int_L P(x, y) dx$

- 如果第二项极限存在,则  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i = \int_L Q(x, y) dy$

$$\text{最后 } \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy = \int_L F(x, y) \cdot d\vec{r}$$

其中  $d\vec{r}$  是一个向量,可以分解为  $dx\vec{i} + dy\vec{j}$ ,因此实际上第二类曲线积分求的是积分向量函数各点与该点切向量的内积之和.

第二类曲线积分有以下运算性质:

- $\int_L (\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y)) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_L F_1(x, y) \cdot d\vec{r} + \beta \int_L F_2(x, y) \cdot d\vec{r}$

- $\int_L F(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} F(x, y) \cdot d\vec{r} + \int_{L_2} F(x, y) \cdot d\vec{r}$

- 如果  $L^-$  是  $L$  的反向曲线弧,则  $\int_{L^-} F(x, y) \cdot d\vec{r} = - \int_L F(x, y) \cdot d\vec{r}$

#### 2.4.4 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)计算

设参数方程:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

从起点  $A$  到终点  $B$  时,  $t$  从  $\alpha$  到  $\beta$ .

$$\text{则 } \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt$$

注意: 第二类曲线积分中  $\alpha$  不一定比  $\beta$  小,只是一个对应起点一个对应终点.

有以下特殊情况:

- $y = \psi(x)$ :

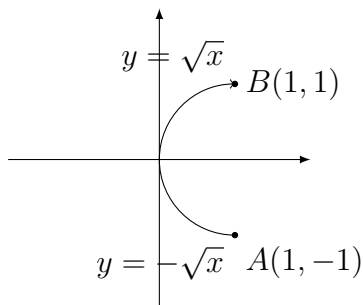
令  $x = x, y = \psi(x)$ , 则积分公式为  $\int_{\alpha}^{\beta} [P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x)) \psi'(x)] dx$

- $x = \varphi(y)$ :

令  $x = \varphi(y), y = y$ , 则积分公式为  $\int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(y), y) \varphi'(y) + Q(\varphi(y), y)] dy$

### 2.4.5 第二类曲线积分计算例题

1. 设  $F(x, y) = xy$ , 从  $A$  到  $B$  沿  $y^2 = x$  积分:



有两种方法：

(a) 将  $AB$  分成两段,  $A \rightarrow 0$  和  $0 \rightarrow B$  :

$$\int_L xy dx = \int_{A0} xy dx + \int_{0B} xy dx.$$

因为在  $A0$  上  $y = -\sqrt{x}$ , 在  $0B$  上  $y = \sqrt{x}$ , 所以  $x$  的取值在  $A0$  上是  $1 \rightarrow 0$ , 在  $0B$  上是  $0 \rightarrow 1$ . 所以上式等于 :

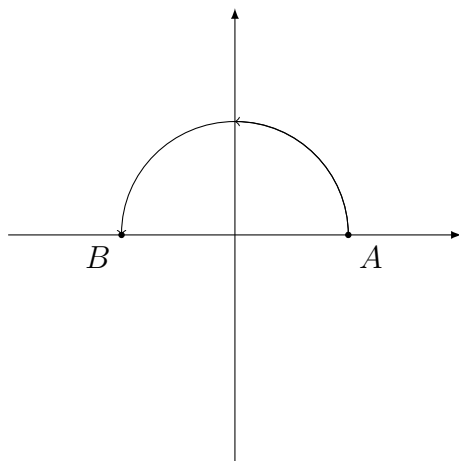
$$\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx + \int_0^1 x(\sqrt{x})dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}$$

这可以形象的称为”按照  $x$  型区域积分”

(b) 将公式变形成  $x = y^2$  :

$$\int_L y^2 dx = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y dx = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y \cdot 2y dy = \frac{4}{5}$$

2.  $\int_L y^2 dx$ , 求沿着上半圆周  $L$  和从  $A(a, 0)$  到  $B(-a, 0)$  的直线  $AB$  的积分 :



(a) 第一题：极坐标：

$$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi (\text{注意旋转方向})$$

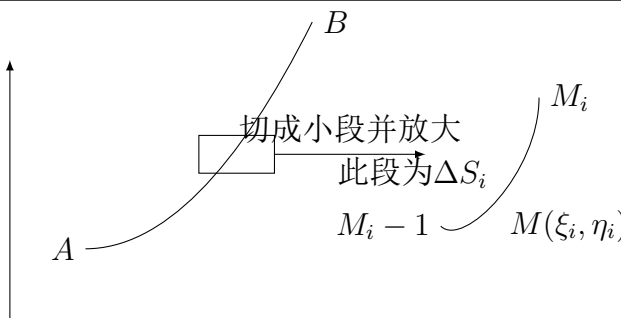
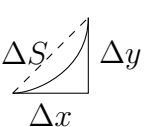
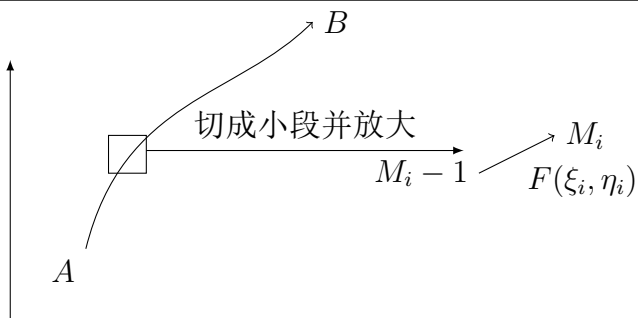
$$\int_0^\pi a^2 \sin^2 \theta (-a \sin \theta) d\theta = a^3 \int_0^\pi 1 - \cos^2 \theta d \cos \theta = -\frac{4}{3} a^3$$

(b) 第二题：沿着x轴,y始终等于0. x从a到-a：

$$\int_a^{-a} 0^2 dx = 0$$

## 2.4.6 两类曲线积分之间的联系

先列出两类曲线积分的定义：

第一类：	第二类
 <p><math>f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i</math> (简称为 <math>f \Delta S</math>)</p> <p>↓</p>  <p>放大的积分弧段可以近似的看作一个三角形：</p> <p>因此 <math>f \Delta S = f \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}</math></p>	 <p><math>P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i</math> (简称为 <math>P \Delta x + Q \Delta y</math>)</p> <p>↓</p> <p>将 <math>P \Delta x + Q \Delta y</math> 除以 <math>\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}</math></p> <p>结果为 <math>(P(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}) + Q(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}))</math></p>

$$\text{即：} f = P\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right) + Q\left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right) = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

设  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ , 由此得出：

$$\begin{aligned} & \int_\alpha^\beta (P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \left( P\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}} + Q\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \frac{\psi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}} \right) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t)) \cos \alpha + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cos \beta) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \\
&= \int_L [P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta] ds
\end{aligned}$$

### 2.4.7 格林公式

在物理学与数学中,格林公式给出了沿封闭曲线 $C$ 的线积分与以 $C$ 为边界的平面区域 $D$ 上的双重积分的联系.格林公式是斯托克斯公式的二维特例:

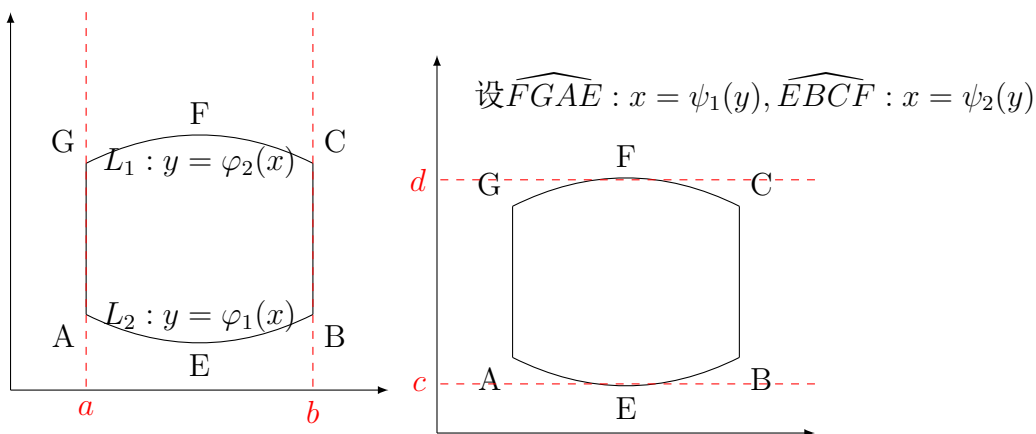
设闭区域 $D$ 由分段光滑的简单曲线 $L$ 围成,函数 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 在 $D$ 上有一阶连续偏导数(即:没有洞的区域),则有:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^+} (P dx + Q dy)$$

其中 $L^+$ 是 $D$ 的取正向的边界曲线, $\oint$ 表示闭合路线上的曲线积分.

### 2.4.8 当 $D$ 为一个简单区域时格林公式的证明

设一个比较简单的区域 $D$ ,无论是沿着 $Y$ 还是 $X$ 都最多只有两个垂边,即:



左:x型区域,右:y型区域

那么,区域 $D$ 就可以写作: $D: \{(x, y) | \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$

1. 先证明后半部分:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx :$$

$$\begin{aligned}
& \oint_L Pdx \\
&= \int_{L_1} Pdx + \int_{BC} Pdx + \int_{L_2} Pdx + \int_{GA} Pdx \\
&= \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx \\
&= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x))dx \\
&= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))]dx \\
&= - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy
\end{aligned}$$

2. 然后是前半部分：

$$\begin{aligned}
& \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy \\
&= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \\
&= \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy \\
&= \int_{L_2} Qdy + \int_{L_1} Qdy \\
&= \oint_L Qdy
\end{aligned}$$

#### 2.4.9 格林公式的计算

$$\iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

有两种情况：

1. 已经得知了以上公式的右侧,求左侧 (计算区域面积): 使用格林公式,可以用线积分计算区域的面积.因为区域 $D$ 的面积 $A = \iint_D 1dA$ ,所以只要选取适当的 $P$ 与 $Q$ 使得 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,就可以通过 $A = \oint_L (Pdx + Qdy)$ 来计算面积.

$$\text{还有一种可能的取值是 } A = \oint_L xdy = - \oint_L ydx = \frac{1}{2} \oint_L (-ydx + xdy)$$

$$\text{即: 设 } P = -y, Q = x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

$$\text{那么 } 2 \iint_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$$

$$\text{所以 } A = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$$

A:积分区域面积

2. 已经得知了左侧,求右侧:

有以下例子:

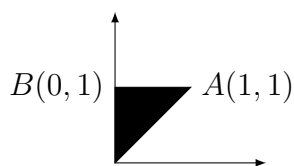
(a)

$$\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$$

L: 正向圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$$P = x^2 y, Q = -xy^2, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -y^2 - x^2$$

$$\text{原式} = \iint_D (-y^2 - x^2) dx dy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 \rho d\rho = -\frac{\pi}{2} a^4$$



(b)  $\iint_D e^{-y^2} dx dy$ , 积分区域D:

设  $P = 0, Q = xe^{-y^2}$

$$\text{原式} = \oint_{OA+AB+BO} xe^{-y^2} dy$$

$$= \int_{OA} xe^{-y^2} dy$$

$$= \int_0^1 xe^{-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

注: OA直线是  $y = x$

(c)

$x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$ , 求面积

用之前得出的  $A = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta \cdot a \cos \theta + a \sin \theta \cdot a \sin \theta) d\theta \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

(d)

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, L: \text{无重点, 分段光滑, 且不过原点的连续闭曲线, 方向逆时针.}$$

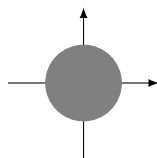
$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial y^2 - x^2}{\partial (x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

分两种情况：

i. 不包含原点,一阶偏导数存在且连续,  $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$  :



ii. 包括原点,取适当小的 $r > 0$ ,在原点附近作圆,圆周 $C : x^2 + y^2 = r^2$ ,称为复联通区域,方向逆时针,用于代换原区域.



$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \cdot r \cos \theta + r \sin \theta \cdot r \sin \theta}{r^2} d\theta = 2\pi$$

## 2.5 雅可比矩阵与雅可比行列式

在向量分析(多元微积分)中,雅可比矩阵是函数的一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵.

其重要性在于,如果函数  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  在点 $x$ 可微的话,在点 $x$ 的雅可比矩阵即为该函数在该点的最佳线性逼近,也代表雅可比矩阵是单变数实数函数的微分在向量值多变数函数的推广,在这种情况下,雅可比矩阵也被称作函数 $f$ 在点 $x$ 的微分或者导数.

### 2.5.1 雅可比矩阵

假设某函数从 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,从 $x \in \mathbb{R}^n$ 映射到 $f(x) \in \mathbb{R}^m$ ,其雅可比矩阵就是一个 $m \times n$ 的矩阵.换句话说讲也就是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射,其重要意义在于它表现了一个多变量向量函数的最佳线性逼近.因此,雅可比矩阵类似于单变数函数的导数.

此函数 $f$ 的雅可比矩阵 $J$ 为 $m \times n$ 的矩阵,一般由以下方式定义：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



矩阵的分量可表示成：

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

雅可比矩阵的其他常用符号还有：

$$Df, J_f(x_1, \dots, x_n) \text{ 或者 } \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

此矩阵的第 $i$ 行是由函数 $f_i$ 的梯度函数所表示的,  $1 \leq i \leq m$ .

如果 $p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一点, $f$ 在 $p$ 点可微,根据数学分析, $J_f(p)$ 时在这点的导数.在此情况下, $J_f(p)$ 这个线性映射即 $f$ 在点 $p$ 附近的最佳线性逼近,也就是说当 $x$ 足够靠近点 $p$ 时,有：

$$f(x) \approx f(p) + J_f(p) \cdot (x - p)$$

讲更详细点也就是：

$$f(x) = f(p) + J_f(p)(x - p) + o(\|x - p\|)$$

其中, $o$ 表示高阶无穷小, $\|x - p\|$ 为 $x$ 与 $p$ 之间的距离

## 2.5.2 雅可比行列式

当雅可比矩阵为方阵时,其行列式称为雅可比行列式.

如果 $m = n$ ,那么 $f$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{R}^m$ 的函数,且他的雅可比矩阵是一个方阵.因此可以取他的行列式,称为雅可比行列式.

在某个给定点的雅可比行列式提供了 $f$ 在接近该点时的表现的重要资讯.例如:如果连续可微函数 $f$ 在 $p$ 点的雅可比行列式不等于0,那么他在该点附近有 $f$ 的反函数,这成为反函数定理.更进一步,如果 $p$ 点的雅可比行列式是正数,则 $f$ 在 $p$ 点保持定向.如果是负数,则逆转定向.而从雅可比行列式的绝对值,就可以知道函数 $f$ 在 $p$ 点附近时放大或缩小体积;这就是他出现在换元积分法中的原因.

## 2.5.3 举例

1. 球坐标系到直角坐标系的转化由 $F: R^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \rightarrow R^3$ 给出,其分量为：

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

此坐标变换的雅可比矩阵是：

$$J_F(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

其雅可比行列式为 $r^2 \sin \theta$ ,由于 $dV = dxdydz$ ,如果左变数变换的画其体积元 $dV$ 会变成： $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ .

2. 设有函数 $F: R^3 \rightarrow R^3$ ,其分量为：

$$y_1 = 5x_2$$

$$y_2 = 4x_1^2 - 2 \sin(x_2 x_3)$$

$$y_3 = x_2 x_3$$

则他的雅可比行列式为：

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8x_1 & -2x_3 \cos(x_2 x_3) & -2x_2 \cos(x_2 x_3) \\ 0 & x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -8x_1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -40x_1 x_2$$

可以得出:当 $x_1$ 与 $x_2$ 同号时, $F$ 逆转定向;改函数处处具有反函数,除了在 $x_1 = 0$ 或者 $x_2 = 0$ 的点.

### 3 无穷级数

在数学中,一个有穷或无穷的序列 $u_1, u_2, u_3, u_4 \dots$ 的和 $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ 称为级数.如果序列是有穷序列,其和称为有穷级数;反之,称为无穷级数(一般简称为级数).序列 $u_0, u_1, u_2, \dots$ 中的项称作级数的通项(或一般项).级数的通项可以是实数,矩阵或向量等常量,也可以是关于其他变量的函数,不一定是一个数.一般的,如果级数的通项是常量,则称之为常数项级数,如果级数的通项是函数,则称之为函数项级数.

有穷数列的级数一般通过初等代数的方法就可以求得.无穷级数有发散和收敛的区别,称为无穷级数的敛散性.判断无穷级数的敛散性是无穷级数研究中的主要工作.无穷级数在收敛时才会有一个和;发散的无穷级数在一般意义上没有和,但可以用一些别的方式来定义.

$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

其中 $u_n$ 称为一般项,前 $n$ 项之和 $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ 称为部分和,比如:

$$S_1 = u_1 \quad S_2 = u_1 + u_2 \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \dots$$

当  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ , 即趋于某个常数, 就称此级数是收敛的. 否则就是发散的.

设 $S$ 是所有项的和, $S_n$ 是前 $n$ 项的和,那么 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$ 就被称为余项.

### 3.1 无穷级数的性质

无穷级数有以下性质:

- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛于  $s$  则  $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$  收敛于  $ks$  (即: 级数的每一项乘以  $k$  不会改变敛散性. 和也会乘以  $k$ )
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  分别收敛于  $s_1$  和  $s_2$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  也收敛, 且和等于  $s_1 \pm s_2$ . 即:
  - 两个收敛的级数, 相加减后仍收敛.
  - 相加减后收敛的两个级数, 本身未必收敛.
  - 若两个级数都是绝对收敛, 则合在一起也是绝对收敛.
  - 若两个级数都是条件收敛, 则合在一起可能是条件收敛, 也可能是绝对收敛.
  - 若两个级数一个是绝对收敛, 一个是条件收敛, 则合在一起是条件收敛.
- 去掉, 加上或改变有限项, 敛散性不变
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 任意加括号后得到的级数也收敛, 并且和不变. (加括号后收敛, 原级数不一定收敛)
- 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的必要条件是  $u_n$  (即通项趋于 0). (注意, 是必要条件而非充分条件, 即:  $u_n$  趋于 0, 级数未必收敛,  $u_n$  不趋于 0, 级数一定发散)

### 3.2 常数项无穷级数审敛法

常数项级数, 即每一项都是常数的级数.

### 3.2.1 正项级数

若通项为实数的无穷级数 $\sum u_n$ 每一项 $u_n$ 都大于等于零,则称 $\sum u_n$ 是一正项级数.

正项级数的部分和 $S_n$ 是一个单调递增数列.由数列极限的判别准则:单调有界数列必有极限.因此,要么部分和数列 $S_n$ 有界,这时 $\sum u_n$ 收敛, $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = s$ ,要么部分和数列趋于正无穷,这时级数发散.

- 比较判别法:

设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是正项级数. 如果存在正实数 $M$ ,使得从若干项开始, $u_n \leq Mv_n$ (也就是说 $u_n$ 是 $v_n$ 的高阶无穷小),则:

- 当 $\sum v_n$ 收敛时,可推出 $\sum u_n$ 也收敛.
- 当 $\sum u_n$ 发散时,可推出 $\sum v_n$ 也发散.

使用此方法常常是对所要判别的级数的通项进行放缩.

比较判别法的特点是要已知若干级数的敛散性.一般来说,可以选择比较简单的级数: $P$ 级数 $U_p = \sum \frac{1}{n^p}$ 作为“标准级数”,依此判断其他函数的敛散性.需要知道的是当 $p \leq 1$ 时, $P$ 级数发散.当 $p \geq 1$ 时, $P$ 级数收敛.

比如:已知级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛,则级数 $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ 也收敛,因为对任意的 $n$ , $\sin n \leq 1$

- 比较判别法的极限形式:

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ 或其他有限数,即同阶无穷小时,两者敛散性一致

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ ,则:

- 当 $\sum v_n$ 收敛时,可推出 $\sum u_n$ 也收敛.
- 当 $\sum u_n$ 发散时,可推出 $\sum v_n$ 也发散.

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$ ,则:

- 当 $\sum u_n$ 收敛时,可推出 $\sum v_n$ 也收敛.
- 当 $\sum v_n$ 发散时,可推出 $\sum u_n$ 也发散.

注:使用此方法常常是采用等价无穷小替换或与 $p$ 级数作比较,寻找同阶无穷小来判别原级数的敛散性.

- 达朗贝尔判别法：

在比较判别法中,如果取几何级数为比较的标准级数,可得：

设 $\sum u_n$ 是通项大于零的正项级数.且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$ ,则：

- 当 $p < 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛.
- 当 $p > 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散.
- 当 $p = 1$ 时,无法判断.级数 $\sum u_n$ 可能收敛也可能发散

这个判别法也被称为比值判别法或者比值审敛法.

对于多个式子连乘的,适合用此方法.

- 柯西收敛准则：

设 $\sum u_n$ 是正项级数.并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = p$ ,则：

- 当 $p < 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛.
- 当 $p > 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散.
- 当 $p = 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 可能收敛也可能发散.

这个判别法也称为根值判别法或根值审敛法.

对于通项中含有以 $n$ 为指数幂的,适合用此方法.

- 对数判别法：

- 若存在 $\alpha > 0$ ,使当 $n \geq n_0$ 时, $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ ,则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

- 若 $n \geq n_0$ 时, $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1$ ,则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

- 积分判别法：

若函数 $f(x)$ 是区间 $[a, +\infty]$ 上非负且单调递减的连续函数,则 $\sum_{n=a}^{\infty} a_n = \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_{+\infty}^a f(x)dx$ 的敛散性一致.

注意:只是敛散性一致.

### 3.2.2 交错级数

具有以下形式的级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (a_n \geq 0)$$

被称为交错级数.

- 莱布尼茨判别法：

在上述的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  中, 如果当  $n$  趋于无穷时, 数列  $a_n$  的极限存在且等于 0, 并且每个  $a_n$  小于  $a_{n-1}$  (即: 数列  $a_n$  是单调递减的), 那么级数收敛.

即：交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  满足：

- $u_{n-1} > u_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
- 注: 此处所指的  $u_n, u_{n+1}$  不包括负号

- 利用级数的敛散性定义：

研究交错级数的部分和数列是否收敛, 若部分和数列收敛, 则级数收敛, 反之发散.

- 利用加括号级数判断：

- 若加括号的级数发散, 则原级数必发散
- 若加括号的级数收敛, 且原级数的通项的极限为 0, 则原级数收敛.

- 拆通项判别

- 交换奇偶项判别:

常常是交换奇偶项配合莱布尼兹判别法判别.

### 3.2.3 任意项级数

- 比较判别法(只能判定收敛)：

对于通项为任意实数的无穷级数  $\sum u_n$ , 将级数  $\sum |u_n|$  称为他的绝对值级数. 可以证明, 如果  $\sum |u_n|$  收敛, 那么  $\sum u_n$  也收敛, 这时称  $\sum u_n$  为绝对收敛. 如果  $\sum u_n$  收敛, 但是  $\sum |u_n|$  发散, 则称  $\sum u_n$  为条件收敛.

比如说,级数 $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ 绝对收敛,因为 $\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$ 是收敛的,而级数 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 是条件收敛的.它自身收敛到 $\ln \frac{1}{2}$ ,但是他的绝对值函数 $\sum \frac{1}{n}$ 是发散的.

- 比值判别法,根值判别法 :

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$  或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ , 则  $\rho < 1$  时收敛且为绝对收敛,  $\rho > 1$  时发散.

黎曼级数定理说明,如果一个无穷级数 $\sum u_n$ 条件收敛,那么对于任意的实数 $x$ ,存在一个正整数到正整数的双射 $\sigma$ ,使得级数 $\sum u_{\sigma(n)}$ 收敛到 $x$ ,对于正负无穷大,上述双射也存在.

### 3.2.4 常见常数项无穷级数

- 几何级数 :

几何级数(或等比级数)是指通向为等比数列的级数,比如 :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

一般来说,几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 收敛当且仅当 $|z| < 1$ .

- 调和级数 :

调和级数是指通向为 $\frac{1}{n}$ 的级数 :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

他是发散的.

- $p$ 级数 :

指通项为 $\frac{1}{n^p}$ 的级数 :

$$U_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

对于实数值 $p$ ,当 $p > 1$ 时收敛, $p \leq 1$ 时发散, $p = 1$ 时为调和级数.

- 列项级数 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$$

收敛当且仅当数列 $b_n$ 收敛到某个极限 $L$ ,这时级数的和是 $b_1 - L$ .

- 交错级数 :

具有以下形式的级数 :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

其中所有的 $a_n$ 非负,就被称为交错级数.

### 3.3 函数项无穷级数审敛法

设 $(u_n(x))_{n \geq 0}$ 为定义在区间 $I$ 上的函数列,则表达式 $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \dots$ 称为函数项级数,记为 $\sum u_n(x)$ .对函数项级数的主要研究是 :

1. 确定对哪些 $x$ ,  $\sum u_n(x)$ 收敛
2.  $\sum u_n(x)$ 收敛的话,其和是什么,有什么性质?

#### 3.3.1 一些定义(收敛点,收敛域,发散点,发散域,和函数与部分和还有余项)

对于区间 $I$ 上的每个点 $x_0$ ,级数 $\sum u_n(x_0)$ 是常数项级数.

- 收敛点 : 若 $\sum u_n(x_0)$ 收敛,则称 $x_0$ 是 $\sum u_n(x)$ 的一个收敛点.
- 收敛域 :  $\sum u_n(x)$ 全体收敛点的集合称为他的收敛域.
- 发散点 : 若 $\sum u_n(x_0)$ 发散,则称 $x_0$ 是 $\sum u_n(x)$ 的一个发散点.
- 发散域 :  $\sum u_n(x)$ 全体发散点的集合称为他的发散域.
- $\sum u_n(x)$ 在其收敛域的每一点上都有定义,因此定义了一个函数,称为 $\sum u_n(x)$ 的和函数,记为 $S(x)$ .
- $S(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$ ,其中 $S_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0)$ 为函数项级数在 $x_0$ 点上的部分和.
- 余项为和函数减去部分和 :  $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ ,显然 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$



### 3.3.2 阿贝尔定理

设  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  为一幂级数, 其收敛半径为  $R$ , 若对于收敛圆(模长为  $R$  的复数的集合)上的某个复数  $z_0$ , 级数  $\sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$  收敛, 则有:  $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(tx_0) = \sum_{n \geq 0} a_n x_0^n$ .

用人话来说就是:  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , 如果  $x = x_0$  时此幂级数收敛, 对于所有满足  $|x| \leq |x_0|$  的  $x$ , 此幂级数绝对收敛. 反之, 如果  $x = x_0$  时发散, 则对于所有满足  $|x| > |x_0|$  的  $x$ , 此幂级数发散.

收敛半径是指收敛圆的半径, 在数轴上是指收敛域的半径.

推论: 收敛的情况有三种:

- $x = 0$  时收敛
- $x \in (-\infty, +\infty)$  时收敛.
- $|x| < R$  时绝对收敛(在端点处可能发散也可能收敛).

在判断端点(是否收敛)之前  $(-R, R)$  称为收敛区间, 经过判断决定了是否保留端点后才称为收敛域.

### 3.3.3 求幂级数的收敛域

设幂级数  $\sum a_n x^n$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ , 则:

- $\rho$  是正实数时,  $R = \frac{1}{\rho}$ .
- $\rho = 0$  时,  $R = \infty$
- $\rho = \infty$  时,  $R = 0$

如果模糊一下概念, 可以概括为:  $R = \frac{1}{\rho}$ .

注: 如果只有偶数项则不能用此方法.

### 3.3.4 幂级数的比值审敛法

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L$$

求当 $x$ 为何值时 $L < 1$

例：求 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径：

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} x^{2n+2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}} \right| = 4|x|^2 < 1, \quad |x| < \frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{2}$$

### 3.3.5 幂级数的运算

- 幂级数的加法与减法：将相应系数进行加减.  $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) \pm (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots$

- 幂级数的乘积：基于柯西乘积

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j (x-c)^{i+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) (x-c)^n \end{aligned}$$

举例：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots$$

- 幂级数的除法：

两个幂级数相除的结果仍然是幂级数. 假设 $b_0 \neq 0$ 时：

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots$$

系数 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 由以下等式逐一确立：

$$a_0 = b_0 c_0$$

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$

$$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$$

...

$$a_n = b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_0 c_n$$

相除所得的幂级数的收敛域可能比原来两个幂级数的收敛域都小得多.

在各种运算后得到的幂级数的收敛半径为较小者.

### 3.3.6 幂级数和函数的性质

- 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛域  $I$  上连续.

- 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛域上  $I$  可积, 并有逐项积分公式:

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, (x \in I)$$

逐项积分后所得的幂级数和原函数有相同的收敛半径. 收敛域端点要重新考察.

推论: 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛域内可逐项积分任意次.

- 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛区间  $(-R, R)$  内可导, 并有逐项求导公式:

$$/'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_0^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^{n-1}, (|x| < R)$$

逐项求导后所得的幂级数和原级数有相同的收敛半径. 收敛域端点要重新考察.

推论: 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的和函数  $s(x)$  在其收敛区间  $(-R, R)$  内有任意阶导数.

实际应用举例: 求  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$  的收敛域, 和函数, 并求  $\frac{n}{2^n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 = \rho, R = \frac{1}{\rho} = 1$$

因此  $(-1, 1)$  为收敛区间, 在端点处判断后可得出结论: 收敛域为  $(-1, 1)$ .

设  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\int_0^x s(x)dx &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1}dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Big|_0^x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\
&= \frac{x}{1-x} \quad (|x| < 1)
\end{aligned}$$

$$S(x) = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1, 1), (\int_0^x S(x)dx)' = S(x) \text{ (变上限积分)}.$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = S(x) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

关于这些性质的用法有以下五条建议：

- 要先求导时,  $n$  最好在分母上, 即  $\frac{1}{n}$ .
- 要先求积分时,  $n$  最好在分子上.
- 注意提出可以抵消的  $x$  的幂次方.
- 求几次积分就要求几次导, 相反也一样.
- 可以适当的拆项.

### 3.4 函数的幂级数展开(泰勒级数)

假设有函数  $f(x)$ , 想要展开成  $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$  的形式, 其中  $x$  是  $x_0$  的极限, 即：

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^1 + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 0 + 0 + 2a_2 + 2 \times 3a_3(x - x_0) + 3 \times 4a_4(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 2 \times 3a_3 + 3 \times 4a_4(x - x_0) + \dots$$

将  $x$  取值成  $x_0$ , 即  $x = x_0$ , 代入：

$$f(x_0) = a_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$f'(x_0) = 0 + a_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \rightarrow a_1 = f'(x_0)$$

$$f''(x_0) = 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x_0) = 0 + 0 + 0 + 2 \times 3a_3 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

⋮

最后可以总结出公式：

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n$$

这种级数展开泰勒级数,此通项公式称为泰勒展开式.

函数 $f(x)$ 能展开成幂级数的充要条件就是：泰勒展开式成立,且收敛到 $f(x)$ .

更确切的来说：

### 3.4.1 泰勒展开式与马克劳林展开式

泰勒展开式：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \quad x \in U(x_0), \text{此公式在 } x_0 \text{ 的邻域内成立}$$

当 $x_0$ 取0,在0处展开,就称为马克劳林公式：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \quad x \in I_f, \text{麦克劳林的定义更加清晰:此公式在收敛域内成立.}$$

### 3.4.2 基础函数展开公式表推导

注：此处全部使用马克劳林展开

1.  $f(x) = e^x$ ：

由于 $f^{(n)}(0) = 1$ ,而且 $f' = e$ ,因此展开项为：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2.  $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$ ：

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= \cos(x) & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

总结规律,可知: 展开式只有奇数次项,并且正负会交替出现:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

由 $f'(x) = g(x)$ ,对上式求导就会得到 $\cos$ 的展开式:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

特点是只有偶次项.

3.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ :

很容易看出这是等比(几何)级数的通项公式:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

将 $x$ 换成 $-x$ :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

上述两个公式在 $|x| < 1$ 时成立

4. 公式3从0到 $x$ 求定积分:  $\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = \ln(1-x)$ ,  $\int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)$ :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

上述两个公式对于在区间 $(-1, 1]$ 内的所有 $x$ 都成立.

5. 将公式1中的 $x$ 换成 $x \ln a$  :  $e^{x \ln a} = a^x$  :

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\ln a)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n (\ln a)^n}{n!} + \cdots$$

6. 将公式3中 $\frac{1}{1+x}$ 中的 $x$ 换成 $x^2$  :  $\frac{1}{1+x^2}$  :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

同样的,对于在区间 $(-1, 1]$ 中的所有 $x$ 成立.

7. 对公式7在0到 $x$ 求定积分 :  $\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)$  :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

对于所有 $|x| < 1$ 成立.

### 3.4.3 基础函数展开公式表

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, (-\infty < x < +\infty)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, (-1 < x < 1)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, (-1 < x < 1)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, (-1 < x \leq 1)$

- $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \dots, (-1 < x \leq 1)$
- $a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!} + \dots, (-\infty < x < +\infty)$
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \dots, (-1 < x \leq 1)$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, (-1 < x < 1)$

### 3.4.4 运算示例

1. 将  $e^{\frac{x}{2}}$  展开：

将  $x$  换成  $\frac{x}{2}$ , 即：

$$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^3}{3!3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n!n^2}$$

2. 将  $f(x) = (1-x)\ln(1+x)$  展成  $x$  的幂级数：

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\begin{aligned} & (1-x)\ln(1+x) \\ &= (1-x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) \\ &= x + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)x^4 + \dots \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)x^n}{n(n-1)} \quad (-1 < x \leq 1) \end{aligned}$$

3. 将  $\sin x$  展成  $x - \frac{\pi}{4}$  的幂级数.

(泰勒级数在  $\frac{\pi}{4}$  处展开, 也可以用马克劳林), 使用马克劳林：



$$\begin{aligned}
\sin x &\xrightarrow{x \rightarrow x - \frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

4. 将  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  展成  $x - 1$  的幂级数 :

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x} \right)$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \right) \quad (\text{先凑出形式})$$

$$\text{令 } \frac{x-1}{2} = t, \text{ 对 } \frac{1}{2(1+t)} \text{ 展开 : } \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots \right)$$

同理,  $\frac{1}{3+x}$  经过变形 :

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} \right) = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{4^2} - \frac{(x-1)^3}{4^3} + \dots \right)$$

$$\text{因此, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right) (x-1)^n$$

还要求出收敛域 :

$$-1 < \frac{x-1}{4} < 1 \rightarrow -3 < x < 5, \text{ 收敛域为 } (-3 < x < 5)$$

$$-1 < \frac{x-1}{2} < 1 \rightarrow -1 < x < 3, \text{ 收敛域为 } (-1 < x < 3)$$

两者相加减,收敛域取交集:  $(-3 < x < 5) \cap (-1 < x < 3) = (-1 < x < 3)$

即:  $f(x)$ 收敛域为  $(-1 < x < 3)$

## 4 场论(含有多元微积分向量分析部分)

### 4.1 场论基本内容

注:矢量 = 向量,有时候会混着用,一般是那个顺口用哪个.

#### 4.1.1 矢量函数/向量函数

向量值函数,有时也称为向量函数,是一个单变量或多变量的,值域是多维向量或者无穷维向量的集合的函数.向量值函数的输入可以是一个标量或者一个向量(定义域的维度可以是1或大于1);定义域的维度不取决于值域的维度.

即:设有数性变量 $t$ 和变矢量 $\vec{A}$ .若对于 $t$ 在某个范围内的每一个数值, $\vec{A}$ 都有一个确定的矢量和它对应,则称 $\vec{A}$ 为数性变量 $t$ 的矢量函数.记为: $\vec{A} = A(t)$ ,也可以写作 $\vec{A} = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$

矢量函数 $A(t)$ 的起点取在坐标原点,其终点随变量 $t$ 变化描绘出了一条曲线,该曲线叫做 $A(t)$ 的矢端曲线.也就是 $A(t)$ 的图像.

#### 4.1.2 矢量向量函数的极限

用 $\delta - \epsilon$ 语言来说:

设矢量函数 $A(t)$ 在点 $t_0$ 的某个邻域内有定义(在 $t_0$ 点可以没有), $\vec{A}_0$ 为常矢量.若对于任意给定 $\epsilon > 0$ ,都存在一个 $\delta > 0$ ,当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时,就有 $|A(t) - \vec{A}_0| < \epsilon$ 成立,则称当 $t \rightarrow t_0$ 时, $A(t)$ 有极限 $\vec{A}_0$ ,记作:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = \vec{A}_0$$

注:在直角坐标系中有:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} A_x(t) &= A_{0x} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_y(t) &= A_{0y} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_z(t) &= A_{0z}\end{aligned}$$

其中 $\vec{A}_0 = A_{0x}\vec{i} + A_{0y}\vec{j} + A_{0z}\vec{k}$

### 4.1.3 矢量函数的连续

设 $A(t)$ 在 $t_0$ 的某领域内有定义,且:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A(t_0)$$

即:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_0} A_x(t) &= A_x(t_0) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_y(t) &= A_y(t_0) \\ \lim_{t \rightarrow t_0} A_z(t) &= A_z(t_0)\end{aligned}$$

就称 $A(t)$ 在 $t_0$ 点连续.

### 4.1.4 矢量函数的导数

设矢量函数 $A(t)$ 在点 $t$ 处有增量 $\Delta \vec{A} = A(t + \Delta t) - A(t)$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时,  $\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$ 的极限存在,则称此极限值为 $A(t)$ 在点 $t$ 处的导向量/导矢.即:

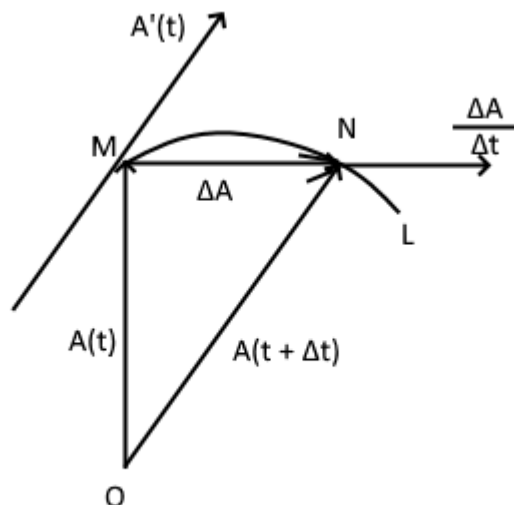
$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

以下为导数公式:

- $\frac{d}{dt}(\vec{C}) = 0$  ( $\vec{C}$ 为常矢量)
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d}{dt}\vec{A} \pm \frac{d}{dt}\vec{B}$
- $\frac{d}{dt}(u\vec{A}) = \frac{du}{dt}\vec{A} + u\frac{d\vec{A}}{dt}$  当 $u$ 是常数 $k$ 时,  $\frac{d}{dt}(k\vec{A}) = k\frac{d\vec{A}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$
- $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \times \frac{d\vec{A}}{dt}$
- 若 $\vec{A} = A(u)$ ,  $u = u(t)$ , 则  $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \frac{du}{dt}$

这些公式与函数的导数公式类似.只是在乘法上向量有点乘和叉乘两种乘法,而且没有除法,所以没有除法法则.

向量导数在几何上的直观图像为:



即：矢径长度随时间的变化率

#### 4.1.5 矢量函数的微分

称  $dA(t) = A'(t)dt$  ( $\Delta t = dt$ ) 为  $A(t)$  在  $t$  处的微分.在直角坐标系中有:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = A'_x(t)\vec{i} + A'_y(t)\vec{j} + A'_z(t)\vec{k}$$

即：

$$d\vec{A} = dA_x(t)\vec{i} + dA_y(t)\vec{j} + dA_z(t)\vec{k} = (A'_x(t)\vec{i} + A'_y(t)\vec{j} + A'_z(t)\vec{k})dt$$

#### 4.1.6 矢量函数的不定积分

若  $A'(t) = a(t)$ , 则称  $A(t)$  是  $a(t)$  的原函数.  $a(t)$  的原函数的一般形式叫做  $a(t)$  的不定积分, 记作：

$$\int a(t)dt$$

若  $A'(t)$  是  $a(t)$  的一个原函数, 则有：

$$\int a(t)dt = A(t) + \vec{C} \quad (\vec{C} \text{ 为任意常矢})$$

#### 4.1.7 矢量函数的定积分

类似于数性函数,  $a(t)$  在  $[t_1, t_2]$  上的定积分的定义为 ( $A(t)$  是  $a(t)$  的原函数)：

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n a(\xi_i) \Delta t_i$$

若 $A(t)$ 是 $a(t)$ 的一个原函数,则有 :

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = A(t_2) - A(t_1) \quad (\text{微积分基本定理})$$

在直角坐标系中可分解为 :

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt\vec{i} + \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt\vec{j} + \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt\vec{k}$$

- 从上述内容看出,矢量函数的微积分与数学分析(高等数学)中的微积分相类似,不过矢量函数要复杂些,他在直角坐标系中分解成三个数性函数,即他的三个分量.对矢量函数进行某一种运算,也就等于对他的各个分量进行这种运算.
- 矢量分解与坐标选取有关.在不同的坐标系中,有不同的表现形式,有的可能复杂的多.这里主要讨论直角坐标系的分解问题,多数问题还是会用分量表示.

## 4.2 场的分类与表示法

### 4.2.1 场的概念

某一物理量在空间的分布就称为”场”.在这个空间发生了物理现象,也就有物理量在这个空间分布.

### 4.2.2 场的分类与表示

场中每一点 $M : (x, y, z)$ 都对应着一个物理量,即某个函数 $f(M)$ ,如果这个函数是数量值函数,这种场就叫做数量场.如果是向量值函数,那么这种场就叫做矢量场.

场中的物理量往往与点的位置有关,而且还将随时间变化.会随时间变化的场就叫做不稳定场(或不定常场),表示为 :

$$u = f(M, t), \vec{A} = A(M, t)$$

在三维直角坐标系(可推广至任意维)下也可分解为 :

$$u = f(x, y, z, t)$$

$$\vec{A} = A(x, y, z, t) = A_x(x, y, z, t)\vec{i} + A_y(x, y, z, t)\vec{j} + A_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

如果场中物理量不随时间变换,这种场叫做稳定场(定常场),表示为 :

$$u = f(M) \quad \vec{A} = A(M)$$

在三维直角坐标系(可推广)下也可以分解为 :

$$u = f(x, y, z)$$

$$\vec{A} = A(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

在不稳定场中,我们以固定时刻也就是稳定场.在场论中,讨论稳定场是基础.对于不稳定场,可以在讨论不稳定场的基础上再讨论对时间的变化.因此接下来一大段着重讨论稳定场的规律.

### 4.2.3 场的直观表示

在数量场中,物理量是点的坐标 $(x, y, z)$ 的函数 :

$$u = f(x, y, z)$$

当 $u$ 为某常数 $C$ 时,所有满足 $f(x, y, z) = C$ 的点就组成一个曲面.这个曲面的特点是在其上的点 $(x, y, z)$ 处的函数值 $u$ 相等,即

$$f(x, y, z) = C$$

此曲面称为等值面,在平面中也被称为等值线.

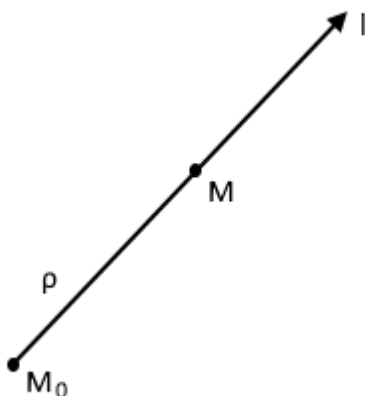
在矢量场中用矢量线表示.场中的曲线 $L$ ,若他每点的切线方向与场在该点的矢量方向平行,则 $L$ 称为该矢量场的矢量线.矢量线满足微分方程 :

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

- 矢量线 $L$ 不止有一个,而是一族曲线.矢量线 $L$ 存在于场中, $L$ 上每一点都有一个矢量 $\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$
- 矢量线 $L$ 只反映矢量场在 $L$ 上每点的方向,并没有大小数量关系.
- 等值面(线)是满足等函数值的自变量全体.因为 $C$ 为任意常数,所以 $f(x, y, z) = C$ 表示等值面族.

## 4.3 方向导数与梯度

### 4.3.1 方向导数的定义



从数量场  $u = u(M)$  中任一点  $M_0$  出发引一条有向射线  $\vec{l}$ , 在  $\vec{l}$  上任取一点  $M$ , 记  $M_0\vec{M} = \rho$ , 当沿  $\vec{l}$ ,  $M \rightarrow M_0$  时, 此式的极限存在:

$$\frac{\Delta u}{\vec{\rho}} = \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0\vec{M}}$$

称此极限值为函数  $u(M)$  在点  $M_0$  处沿方向  $\vec{l}$  的方向导数, 记为  $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$ , 即:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0\vec{M}}$$

- 方向导数是一个数量, 他与点  $M_0$  有关, 也与方向  $\vec{l}$  有关.
- 以平面数量场为例说明方向导数的意义:

设数量场

$$u = f(x, y)$$

不难看出:

$$\frac{\Delta u}{\rho} = \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0\vec{M}} = \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0\vec{M}}$$

正是沿着 $\vec{l}$ 方向,函数 $f(x, y)$ 从点 $M_0$ 到点 $M$ 的平均升高,即平均变化率.而极限:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Delta u}{\vec{\rho}} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 \vec{M}} (\text{沿着}) \vec{l}$$

是 $u = f(x, y)$ 在点 $M_0$ 沿 $\vec{l}$ 的变化率.所以方向导数是变化率,它反映了函数 $u = f(x, y)$ 在 $\vec{l}$ 方向上的增减情况.当 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} > 0$ ,表示函数 $u = f(x, y)$ 在点 $M_0$ 沿方向 $\vec{l}$ 是增加的,越大表示增加的越快,反之亦然.

- 偏导数是方向导数的特例.比如当 $\vec{l}$ 指向 $x$ 轴正向时, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,当 $\vec{l}$ 指向 $y$ 轴正向时, $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial y}$ .
- 有时候要考虑函数沿某曲线 $C$ 的导数.函数沿曲线 $C$ 的每一点的切线方向的方向导数叫做函数沿曲线 $C$ 的导数.

### 4.3.2 方向导数的计算公式

设 $u = u(x, y, z)$ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, $\vec{l}$ 的方向余弦是 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ,则 $u$ 在点 $M_0$ 沿 $\vec{l}$ 的方向导数为:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \cos \alpha + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \cos \beta + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \cos \gamma$$

或者:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

### 4.3.3 梯度

设数量场 $u = u(M)$ ,如果在场中任一点 $M$ 处,存在非零矢量 $\vec{G}$ ,其方向为函数 $u(M)$ 在 $M$ 点处方向导数的最大的方向,其模 $|\vec{G}|$ 这个最大的方向导数值,则称矢量 $\vec{G}$ 为数量场 $u$ 在点 $M$ 处的梯度,记为:

$$\mathbf{grad} \ u = \vec{G}$$

在直角坐标系中有:

$$\mathbf{grad} \ u = \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

引入 $\mathbf{grad} \ u = \nabla u$



- 梯度是刻画数量场的概念.数量场的梯度是一个矢量.
- 任一点的梯度垂直于过该点的等值面(线),并且指向 $u(M)$ 增大的一方.因而梯度方向平行于等值面(线)的法线方向.
- 数量场的每一点都有一个梯度,他是矢量,数量场的梯度场是矢量场,称为 $u(M)$ 的梯度场.
- $\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot l_0$ ,其中 $l_0 = \frac{l}{|l|}$
- $\nabla$ 称为nabla算子

#### 4.3.4 梯度的运算公式

- $\text{grad } \mathbb{C} = 0$
- $\text{grad } (\mathbb{C}u) = \mathbb{C}\nabla u$
- $\text{grad } (u \pm v) = \nabla u + \nabla v$
- $\text{grad } (uv) = v\nabla u + u\nabla v$
- $\text{grad } \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2} \quad (v \neq 0)$ (注意:与导数的顺序不同)
- $\text{grad } f(u) = f'(u)\nabla u$
- 以上的公式都可以改写成用 $\nabla$ 算子的形式

### 4.4 通量与散度,高斯公式

对于一个矢量场,主要讨论他的两个基本性质: 其一是有没有源,其二是有没有旋

#### 4.4.1 通量

定义: 设矢量场 $A(M)$ ,将沿着场中某一有向曲面 $S$ 的曲面积分:

$$\Phi = \iint_S A_n dS = \iint_s A \cdot d\mathbf{S}$$

称为矢量场 $A(M)$ 向正侧穿过曲面 $S$ 的通量.其中 $d\mathbf{S} = \vec{n}dS$ , $\vec{n}$ 是 $dS$ 的法线方向, $A_n = A \cdot \vec{n}$

说明:

- 通量 $\Phi$ 是一个数量.(顾名思义,通量就是矢量 $\vec{A}$ 通过 $S$ 的量, $A$ 可以表示流速,电场,磁场的强度等.相应的 $\Phi$ 就是流量,电通量,磁通量等.)因为 $d\mathbf{S} = \vec{n}dS, \vec{A} \cdot d\mathbf{S}$ 有正负之分

$$- (\widehat{\vec{A} \vec{n}}) < \frac{\pi}{2}, \Phi > 0$$

$$- (\widehat{\vec{A} \vec{n}}) > \frac{\pi}{2}, \Phi < 0$$

$$- \vec{A} \perp \vec{n}, \Phi = 0.$$

在一个矢量场中,每点上的 $\vec{A}$ 是确定对 $\Phi$ 的正负与 $\vec{n}$ 的制定有关.

- 若 $S$ 是闭曲面,一般去向外法线方向为正向.因此 :
  - $\Phi > 0$ ,表示 $S$ 内部有源.这意味着穿过 $S$ 流入的量小于流出的量,而 $\Phi$ 正是流出量与流入量的差,因此 $S$ 内部有源. $\Phi$ 就是由 $S$ 散发出去的量.
  - $\Phi < 0$ ,表示 $S$ 内部有洞.流出的量小于流入的量, $\Phi$ 就是流入的多余部分,这些量在 $S$ 所包围的区域内被吸收或者渗掉,所以有洞. $\Phi$ 是吸收入 $S$ 内部的量.
  - $\Phi = 0$ ,说明流入等于流出.

- 由定义得 :

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\mathbf{S}$$

表示流过面积元 $dS$ 的正向的通量.

#### 4.4.2 散度

通量描述了一固定区域上向量场的流通倾向,而散度在某点的值则是这个性质在这点的局部描述,也就是说,从散度在一点的值,就可以看出向量场在这点附近到底是倾向于发散还是收敛.

设向量场 $A(M)$ ,在场中作包围点 $M$ 的闭曲面 $S$ , $S$ 包围的趋于称为 $\Omega$ , $\Omega$ 的体积为 $\Delta V$ .当 $\Omega$ 收缩到极限 $M$ 时,如果极限 :

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

存在,则称此极限值为向量场 $A$ 在点 $M$ 处的散度.记为 $\text{div } A$ ,即 :

$$\text{div } A = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\oiint_S \vec{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

说明 :

- 散度是刻画矢量场的基本性质的量,是数量. $\text{div } A$ 形成一个数量场,称为矢量场 $A$ 的散度场.
- 散度,顾名思义就是向量场一点处发散量的大小.在 $M$ 点 :
  - $\text{div } A > 0$ ,表示 $M$ 点有源.值越大,表示源 $M$ 的发散量越大.
  - $\text{div } A < 0$ ,表示 $M$ 点有洞.绝对值越大,表示这个洞吸收量越大(或渗的越快).
  - $\text{div } A = 0$ ,表示 $M$ 点无源无洞.
- 由定义可知, $\text{div } A$ 就是单位体积的通量的极限,也就是通量的密度.
- 散度算子为 $\nabla \cdot$ ,表示点乘结果为数.
- 还有一种理解方法 : 散度表示当 $x, y, z$ 有微小增加时,向量场分量增加量的总和.散度在各个方向是一样的,不随坐标系旋转而改变.

#### 4.4.3 散度在常见坐标系中的计算公式

在不同的坐标系下,向量场的散度有不同的表达方. :

- 直角坐标系 :

在三维直角坐标系 $xyz$ 中,设向量场 $A$ 的表示为 :

$$A(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别是 $x, y, z$ 轴上的单位向量,场的分量 $A_x, A_y, A_z$ 具有一阶连续偏导数,那么向量场 $A$ 的散度就是 :

$$\text{div } A = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 圆柱坐标系 :

圆柱坐标系中,假设物体的位置为 $(\rho, \varphi, z)$ ,定义其径向单位矢量,横向单位的矢量和纵向单位的矢量为 $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ ,那么向量场 $A$ 可以表示为 :

$$A = A_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z$$

向量场 $A$ 的散度就是 :

$$\text{div } A = \nabla \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 球坐标系：

球坐标系中,假设物体的位置用球坐标系表示为 $(r, \theta, \varphi)$ ,定义它的基向量： $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ,则向量场 $A$ 可以表示为：

$$A = A_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{e}_\varphi$$

向量场 $A$ 的散度就是：

$$\mathbf{div} A = \nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

#### 4.4.4 高斯散度定理/高斯公式/高斯-奥斯特洛格拉茨基公式

既然向量场某一处的散度是向量场在该处附近通量的体密度,那么对某一个体积内的散度进行积分,就应该得到这个体积内的总通量.事实上可以证明这个推论是正确的,称为高斯散度定理.高斯定理说明,如果在体积 $V$ 内的向量场 $A$ 拥有散度,那么散度的体积分等于向量场在 $V$ 的表面 $S$ 的面积分

设矢量场 $A = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 的各分量 $P, Q, R$ 再闭曲面所围区域 $\Omega$ 内有一阶连续偏导数,则有：

$$\oiint_S A \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \mathbf{div} A dx dy dz$$

或者：

$$\oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

说明：

- 高斯公式是重要公式,它的意义是曲面积分与体积分互化.因为曲面积分不易计算,所以将曲面积分化作了三重积分
- 高斯公式的物理意义是：矢量场通过任意闭曲面 $S$ 的通量等于他所包围的体积 $V$ 内散度的总和.

#### 4.4.5 散度的运算性质

- 由于散度是线性算符,所以：

$$\nabla \cdot (aF \pm bG) = a \nabla \cdot F \pm b \nabla \cdot G$$

其中 $F, G$ 是向量场, $a, b$ 是实数.

- $\nabla \cdot (\varphi A) = \text{grad} \varphi \cdot A + \varphi \nabla \cdot A$

其中 $\varphi$ 是数性函数.

- $\nabla \cdot (\vec{C}\varphi) = \vec{C} \cdot \text{grad}\varphi$

注意：

- 散度是对矢量场而言的,所以对一个标量函数求散度无意义.
- 散度运算与通常的微分运算相似：

$$d(uv) = vdu + u dv$$

若是直接仿照应当有 $\nabla \cdot (\varphi A) = \varphi \nabla \cdot A + A \nabla \cdot \varphi$ ,但是由于 $\varphi$ 是数性函数,求散度无意义,只有写成 $\text{grad}\varphi$ 才有意义.于是就能满足散度是一个”数量”的要求.

## 4.5 环量,旋度,斯托克斯公式

### 4.5.1 环量

设矢量场 $A(M)$ ,将沿着场中某一有向封闭曲线 $l$ 的曲线积分：

$$\Gamma = \oint_l A \cdot dl$$

称为矢量场 $A$ 按照所取方向沿着曲线 $l$ 的环量.

说明：

- 环量与通量一样,是一个刻画矢量场的特征量.
- 环量是一个数量,他的数值除了与场 $A$ 有关外,还和回路 $l$ 的形状和取向有关,说明 $\Gamma$ 并不只是表示向量场本身内在属性的量,为了只表示场 $A$ 本身的性质,就需要让 $l$ 收缩到一点,为此引入环量面密度.

### 4.5.2 环量面密度

设 $M$ 是矢量场中的一点,在 $M$ 点取一矢量 $\vec{n}$ ,并且在 $M$ 点附近取回路 $l$ ,作以 $l$ 为边界, $\vec{n}$ 为法线且过 $M$ 的曲面 $\Delta S$ ,并取 $l$ 的正向与 $\vec{n}$ 构成右手系.令 $l$ 沿着 $\Delta S$ 以任意方式收缩到 $M$ 点,如果极限

$$\lim_{l \rightarrow M(\text{沿着 } \Delta S)} \frac{\oint_l A \cdot dl}{\Delta S}$$

存在,则称此极限值为向量场 $A$ 在点 $M$ 处沿方向 $\vec{n}$ 的环量面密度.记为 $L_n$

说明：

- $L_n$ 是单位面积的环量的极限.在物理上,单位面积的某个两被称为面密度. $\frac{\oint_l A \cdot dl}{\Delta S}$ 是平均单位面积的环量,即 $\Delta S$ 上的平均面密度.用微分方法处理,取极限得到了在 $M$ 点的环量密度,与 $l$ 的形状无关.
- $L_n$ 的大小反映了在点 $M$ 沿着 $\vec{n}$ 方向的旋转强弱情况.
- $L_n$ 的大小与取定的方向 $\vec{n}$ 有关.在空间中一点,方向 $L_n$ 可以任取,于是又无穷多个 $L_n$ ,这些 $L_n$ 中有一个最大者,沿着最大者的方向,场在该点旋转最强,于是引入旋度概念.

### 4.5.3 旋度

若在向量场 $A$ 中的一点 $M$ 处存在矢量 $\vec{R}$ ,他的方向是 $A$ 在该点环量面密度最大的方向,他的模就是这个最大的环量面密度.矢量 $\vec{R}$ 称为向量场 $A$ 在点 $M$ 的旋度,记为 $\mathbf{rot} A$ 或者 $\mathbf{curl} A$

说明:

- 旋度是刻画向量场的一个特征量.说明一个矢量场是否有旋以及旋转强弱.
- 旋度与环量中 $l$ 的形状,取向都无关,只与场在 $M$ 点的量 $A(M)$ 本身有关,他是代表矢量场本身内在属性的量.
- 旋度是一个向量算子,表示在三维欧几里得空间中的向量场的无穷小量旋转.在向量场的每个点上,点的旋度表示为一个向量,称为旋度向量.这个向量的模和方向刻画了在这个点上的强度和旋转方向.
- 由定义知旋度与环量面密度的关系:  $L_n = \mathbf{rot} A \cdot \vec{n}$
- 旋转的方向是旋转的轴,它由右手定则来确定,而旋度的大小是旋转的量.如果向量场表示一个移动的流形的流速,则旋度是这个流形的环量面密度.旋度为0的向量场叫做无旋向量场.旋度是向量的一种微分形式.微积分基本定理的对应形式是开尔文-斯托克斯定理(斯托克斯公式),他将向量场旋度的曲面积分关联到这个向量场环绕的边界曲线的曲线积分.
- 不同于梯度和散度,旋度不能简单的推广到其他维度;某些推广是可能的,但是只有在三位中,在几何上定义的向量场旋度还是向量场.这个现象类似于三维叉积,此联系反映在了旋度的符号 $\nabla \times$ 上.
- 矢量场每点都对应一个旋度,这些旋度就形成了一个新的矢量场,称为原矢量场 $A$ 的旋度场 $\mathbf{rot} A$ .

### 4.5.4 旋度在直角坐标系中的运算公式

设向量场 $A$ :

$$A = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

且 $P, Q, R$ 具有一阶连续偏导数,则 :

$$\mathbf{rot} A = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

可以写成便于记忆的行列式(只是便于记忆,只有形式上的意义,无实际意义) :

$$\mathbf{rot} A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

#### 4.5.5 旋度的运算性质

- $\mathbf{rot} (\vec{A} \pm \vec{B}) = \mathbf{rot} \vec{A} \pm \mathbf{rot} \vec{B}$
- $\mathbf{rot} (\varphi \vec{A}) = \varphi \mathbf{rot} \vec{A} + \mathbf{grad} \varphi \times \vec{A}$  ( $\varphi$ 是数性函数)
- $\mathbf{rot} \mathbb{C} \vec{A} = \mathbb{C} \mathbf{rot} \vec{A}$
- $\mathbf{rot} (\varphi \vec{a}) = \mathbf{grad} \varphi \times \vec{a}$  ( $\vec{a}$ 为常向量)

#### 4.5.6 斯托克斯公式

设矢量场 $A = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 的分量 $P, Q, R$ 在包围曲面 $S$ 的空间区域中有一阶连续偏导数, $l$ 为曲面 $S$ 的边界,则 :

$$\oint_l A \cdot dl = \iint_S \mathbf{rot} A \cdot dS$$

或者写成 :

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right]$$

说明 :

- 斯托克斯公式也是重要公式之一,利用它可以把曲线积分转换为曲面积分,或者相反.
- 由于计算曲面积分困难,而曲线积分可以直接计算,若用斯托克斯公式化为曲面积分,除了特殊情况外可能会更难计算,因此斯托克斯公式没有高斯公式用的多.

- 此公式的意义就是向量场在任意闭回路 $l$ 上的环量等于以 $l$ 为边界的曲面 $S$ 上的旋度的总和.
- 注意：高斯公式把闭曲面的曲面积分化为三重积分,斯托克斯则把曲线积分化为以 $l$ 为边界的曲面积分,如果不能化为闭曲面的曲面积分,也就不能化成三重积分.

当 $A$ 为平面向量场是,斯托克斯公式会变成格林公式,斯托克斯公式可以看作是格林公式的推广.

## 4.6 几个特殊的向量场

### 4.6.1 管形场

在向量场 $A$ 中,如果 $\text{div } A = 0$ ,则称 $A$ 为管形场,又称无源场.

管形场的判别法： $A$ 为管形场 $\Leftrightarrow \text{div } A = 0$ .

管形场的一条重要性质就是：场中任一矢量管(由矢量线所组成的管型曲面)的所有横截面的通量都相等.

### 4.6.2 有势场

在矢量场 $A(M)$ 中,如果存在函数 $u(M)$ 使得 $A = \text{grad } u$ ,则称 $A$ 为有势场.称 $v = -u$ 为矢量场 $A$ 的势函数.有以下等价定义：

- $A = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 为有势场
- $\text{rot } A = 0$
- $\oint_l A \cdot dl = 0$  ( $l$ 为任意闭曲线)
- $\int_{M_0}^M A \cdot dl$ 与路径无关.
- 存在函数 $u$ 使得 $du(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz$

以上五条定义都互相等价

有势场的判别方法：如果 $\text{rot } A = 0$ ,则 $A$ 为有势场.

使用这一判别方法比较方便,当然等价定义也可以用于判别.

求势函数的方法：



### 1. 公式法：

任取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz$$

则势函数  $v(x, y, z) = -u(x, y, z)$

### 2. 凑全微分法：

找一个函数  $u(x, y, z)$ , 使得

$$du = Pdx + Qdy + Rdz$$

则势函数  $v(x, y, z) = -u(x, y, z)$

### 3. 积分法:微分法换一种思路,解微分方程.

## 4.6.3 调和场

矢量场  $A$  中, 若  $\text{div } A = 0$  且  $\text{rot } A = 0$ , 则称  $A$  是调和场. 也叫做无源无旋场.

说明：

- 调和场  $\Leftrightarrow$  有势场且管形场
- 调和场是有势场, 必有  $u$  存在, 使

$$\text{grad } u = A$$

又因为是管形场, 所以  $\text{div } A = \text{div grad } u = 0$ , 即  $\Delta u = 0$  (参考公式表)

$u$  称为调和场的调和函数.

## 4.7 nabla算子(哈密尔顿算子)

### 4.7.1 定义

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

称为哈密尔顿算子(nabla算子). 它是一个向量形式的微分算子, 兼有微分运算和向量运算的双重作用. 它本身既不是一个函数也不是某个物理量. 他表示的是一种运算, 以一定方式作用于函数式向量后才能表示一个量.

### 4.7.2 运算规则

$$\bullet \nabla u = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \nabla \cdot A = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\bullet \nabla \times A = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{i}P + \vec{j}Q + \vec{k}R) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

说明：

- $\nabla$ 算子可以作用到数性函数,也可以作用到向量函数,有三种形式：

$$\nabla u \quad \nabla \cdot A \quad \nabla \times A$$

- $\nabla$ 不是向量,所以  $A \cdot \nabla \neq \nabla \cdot A$ ：

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

$$A \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

### 4.7.3 梯度散度旋度以及高斯公式和斯托克斯公式的算子表示法

梯度： $\nabla u = \mathbf{grad} \ u$

散度： $\nabla \cdot A = \mathbf{div} \ A$

旋度： $\nabla \times A = \mathbf{rot} \ A$

高斯公式： $\oint\oint_S A \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot A d\Omega$

斯托克斯公式： $\oint_l A \cdot dl = \iint_S \nabla \times A \cdot ds$

#### 4.7.4 常用公式

- $\nabla(\mathbb{C}u) = \mathbb{C}\nabla u$
- $\nabla \cdot (\mathbb{C}\vec{A}) = \mathbb{C}\nabla \cdot \vec{A}$
- $\nabla \times (\mathbb{C}\vec{A}) = \mathbb{C}\nabla \times \vec{A}$
- $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$
- $\nabla \cdot (\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} \pm \nabla \cdot \vec{B}$
- $\nabla \times (\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} \pm \nabla \times \vec{B}$
- $\nabla \cdot (u\vec{C}) = \nabla u \cdot \vec{C}$
- $\nabla \times (u\vec{C}) = \nabla u \times \vec{C}$
- $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
- $\nabla \cdot (u\vec{A}) = \nabla u \cdot \vec{A} + u\nabla \cdot \vec{A}$
- $\nabla \times (u\vec{A}) = \nabla u \times \vec{A} + u\nabla \times \vec{A}$
- $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$
- $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$
- $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B}$
- $\nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$  ( $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  为拉普拉斯算符,  $\Delta u$  称为调和量)
- $\nabla \times (\nabla u) = 0$  (数量场的梯度场是无旋场)
- $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  (向量场的旋度场是无源场)
- $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

$$\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{i} + \Delta A_y \vec{j} + \Delta A_z \vec{k}$$

## 5 离散数学

### 5.1 前置知识

### 5.2 集合论

#### 5.2.1 集合论的主要内容

- 研究对象：集合,关系,函数,自然数,基数
- 研究思想：以逻辑为基础,以集合为工具,表示和构造各种数学对象
- 研究内容：
  - 集合的基本概念：集合之间的关系,运算,恒等式
  - 二元关系：表示,性质,函数,等价关系,序关系
  - 自然数：皮亚诺系统,自然数的运算,性质
  - 基数：有序集于无穷集,基数的比较
  - 良序,超限归纳法

#### 5.2.2 集合论中的问题

- 如何给集合下定义?
- 如何用集合去定义关系,函数,自然数?
- 如何比较集合的大小?
- 能否把每个集合的元素依次列举出来?
- 有没有最大的集合?

#### 5.2.3 集合的表示

- 列举法：

列出集合中的全体元素,元素之间用逗号分开,然后用花括号括起来,比如： $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ .

- 描述法：

用谓词 $P(x)$ 表示 $x$ 具有性质 $P$ ,用 $\{x|P(x)\}$ 表示具有性质 $P$ 的集合.例如： $P_1(x)$ 表示 $x$ 是英文字母, $P_2(x)$ 表示 $x$ 是十进制数字, $C = \{x|P_1(x)\}$ 表示26个英文字母的集合, $D = \{x|P_2(x)\}$ 表示10个十进制数字的集合.

#### 5.2.4 描述集合的注意事项

1. 集合中的元素是各不相同的.
2. 集合中的元素不规定顺序.
3. 集合的两种表示法可以互相转化,例如, $B = 2, 4, 6, \dots$ 可用描述法表示为 $B = \{x|x > 0 \text{ 且 } x \text{ 是偶数}\}$ 或 $B = \{x|x = 2(k+1), k \text{ 为非负整数}\}$ .

#### 5.2.5 常用的集合

- $\mathbb{N}$ : 自然数集合  $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$ : 整数集合  $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Q}$ : 有理数集合
- $\mathbb{R}$ : 实数集合
- $\mathbb{C}$ : 复数集合

#### 5.2.6 子集

设 $A, B$ 为二集合,若 $B$ 中的元素都是 $A$ 中的元素,则称 $B$ 是 $A$ 的子集,也称 $A$ 包含 $B$ ,或者 $B$ 包含于 $A$ ,记作 $B \subseteq A$ ,其符号化形式为：

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

若 $B$ 不是 $A$ 的子集,则记作 $B \not\subseteq A$ ,其符号化形式为：

$$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

### 5.2.7 有限集和无限集

- 有限集,即元素数量有限的集合,定义叙述为 :  $S$ 是由 $n$ 个元素组成的集合( $n$ 是非负正整数,包含0),则称 $S$ 为有限集.
- 无限集:不是有限集的集合都是无限集.

### 5.2.8 可列集

可列集是无限集的一种,如果某无限集 $S$ 中的元素可以按某种规则排成一列,并且无重复,无遗漏,则称该 $S$ 为可列集.

此时 $S$ 可以被用列举法或者描述法表示.

任何无限集都包含可列集,但是无限集本身不一定是可列集.

另外,可列个可列集的并也是可列集.

### 5.2.9 相等

设 $A, B$ 为二集合,若 $A$ 包含 $B$ 且 $B$ 包含 $A$ ,则称 $A$ 与 $B$ 相等,记作 $A = B$ ,符号化形式为 :

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A)$$

### 5.2.10 集合之间包含关系的性质

设 $A, B, C$ 为三个集合,则以下三命题为真 :

1.  $A \subseteq A$ ;
2. 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ,则 $B \subsetneq A$ ;
3. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ ,则 $A \subseteq C$

### 5.2.11 真子集

设 $A, B$ 为二集合,若 $A$ 为 $B$ 的子集且 $A \neq B$ ,则称 $A$ 为 $B$ 的真子集,或者又称 $B$ 真包含 $A$ ,记作 $A \subset B$ ,符号化形式为 :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

若 $A$ 不是 $B$ 的真子集,则记作 $A \not\subset B$ ,其符号化形式为:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge A \neq B$$

设 $A, B, C$ 为三个集合,则以下命题为真:

1.  $A \not\subset A$ ;
2. 若 $A \subset B$ ,则 $B \not\subset A$ ;
3. 若 $A \subset B$ ,且 $B \subset C$ ,则 $A \subset C$

### 5.2.12 空集

不拥有任何元素的集合称为空集合,简称空集,记作 $\emptyset$ (读作ugh)

比如 $\{x|x^2 + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{(x, y)|x^2 + y^2 < 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$ 都是空集.

注意:

- 空集是一切集合的子集,
- 空集是唯一的
- 空集是最小的集合.

### 5.2.13 全集

如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集,则称该集合为全集,记作 $\mathbb{E}$ .

从定义可以看出,全集是相对的,视具体情况而定,因此不唯一.

比如:讨论区间 $(a, b)$ 上的实数的性质时,可以取 $(a, b)$ 为全集,也可以取 $[a, b], (a, b], (a, +\infty), \mathbb{R}$ 等为全集.

给定若干个集合之后,都可以找到包含它们的全集.在今后讨论中,所涉及的集合都可以看成是某个全集 $\mathbb{E}$ 的子集.

### 5.2.14 集合的元素个数/集合的基数/集合的势

$\emptyset$ 为0元集,含1个元素的集合为单元集或1元集,含两个元素的集合为2元集,依次类推,含 $n$ 个元素的集合称为 $n$ 元集( $n \geq 1$ ).

一个集合 $A$ 所包含的元素数目称为该集合的基数或势(cardinality).记作 $|A|$ 或者 $\#A$ 或 $card(A)$

当 $A$ 中的元素个数为有限数时( $|A| < \infty$ ), $A$ 称为有穷集或有限集,否则称为无限集或者无穷集.

### 5.2.15 幂集

设 $A$ 为一个集合,称由 $A$ 的全体子集组成的集合为 $A$ 的幂集,记作 $\mathcal{P}(A)$ .

用描述法可以表示为  $\mathcal{P}(A) = \{x|x \subseteq A\}$

注意 :

- 在概率论中也会用 $\mathcal{P}(A)$ 来表示事件 $A$ 的概率,两者虽然不相同但是定义是一样的.
- 为了避免混淆,也可以用 $2^A$ 表示 $A$ 的幂集.
- 这并不是没有道理,设集合 $A$ 的元素个数 $|A| = n$ ,则 $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

### 5.2.16 求幂集的步骤

为了求出给定集合 $A$ 的幂集,先求 $A$ 的由低到高的所有子集,再将它们组成集合.

设 $A = \{a, b, c\}$ ,求 $\mathcal{P}(A)$ 的步骤如下 :

0元子集为 $\emptyset$ ;1元子集为 $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ ;2元子集为 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ ;3元子集为 $\{a, b, c\} = A$ ;

所以, $A$ 的幂集为 :

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

### 5.2.17 集族

除了幂集 $\mathcal{P}(A)$ 以外,还有其他形式的由集合构成的集合,统称为集族.若集族中的集合都赋予记号,则可得带指标集的集族.

设 $\mathcal{A}$ 为一个集族, $S$ 为一个集合,若对于任意的 $\alpha \in S$ ,存在唯一的 $A_\alpha \in \mathcal{A}$ 与之对应,而且 $\mathcal{A}$ 中的任意集合都对应 $S$ 中的某一元素,则称 $\mathcal{A}$ 是以 $S$ 为指标集的集族, $S$ 称为 $\mathcal{A}$ 的指标集.记为 $\mathcal{A} = \{A_\alpha|\alpha \in S\}$ ,或 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$

如果把 $\emptyset$ 看作集族,则称 $\emptyset$ 为空集族.

### 5.2.18 多重集

设全集为 $\mathbb{E}$ , $\mathbb{E}$ 中元素可以不止一次在 $A$ 中出现的集合 $A$ 称为多重集.若 $\mathbb{E}$ 中元素 $a$ 在 $A$ 中出现 $k$ 次( $k \geq 0$ ),则称 $a$ 在 $A$ 中重复度为 $k$ .

例如 : 设全集 $E = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $A = \{a, a, b, b, c\}$ 为多重集,其中 $a, b$ 的重复度为2, $c$ 的重复度为1,而 $d, e$ 的重复度为0.

集合可以看作重复度均 $\leq 1$ 的多重集.



### 5.2.19 并集

设 $A, B$ 为二集合,称由 $A$ 和 $B$ 的所有元素组成的集合为 $A$ 与 $B$ 的并集,记作 $A \cup B$ ,称 $\cup$ 为并元算符.  
 $A \cup B$ 得到的集合,用描述法可以表示为:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合(初级并).

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个集合, $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数个集合,则:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x | \exists i (1 \leq i \leq n \wedge x \in A_i)\}$$

并集也可以写作类似求和的形式:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

### 5.2.20 交集

设 $A, B$ 为二集合,称由 $A$ 和 $B$ 的公共元素组成的集合为 $A$ 与 $B$ 的交集,记作 $A \cap B$ ,称 $\cap$ 为并元算符.  
 $A \cap B$ 的描述法表示为

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合(初级交).

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数个集合,则:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x | \forall i (1 \leq i \leq n \rightarrow x \in A_i)\}$$

同样的,也有这种简化形式:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

### 5.2.21 不相交

设 $A, B$ 为二集合,若 $A \cap B = \emptyset$ ,则称 $A$ 和 $B$ 是不交的.设 $A_1, A_2, \dots$ 是可数个集合秒如果对于任意的 $i \neq j$ ,都有 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,则称 $A_1, A_2, \dots$ 是互不相交的.

设 $A_n = \{x \in R | n-1 < x < n\}, n = 1, 2, \dots$ ,则 $A_1, A_2, \dots$ 是互不相交的.

### 5.2.22 相对补集

设 $A, B$ 为二集合,称属于 $A$ 而不属于 $B$ 的全体元素组成的集合为 $B$ 对 $A$ 的相对补集,记作 $A - B$ 或 $\complement_A B$ . $A - B$ 的描述法表示为:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

### 5.2.23 对称差

设 $A, B$ 为二集合,称属于 $A$ 而不属于 $B$ ,或属于 $B$ 而不属于 $A$ 的全体元素组成的集合为 $A$ 与 $B$ 的对称差,记作 $A \oplus B$ .

$A \oplus B$ 的描述法表示为:

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

容易看出:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

### 5.2.24 绝对补集

设 $\mathbb{E}$ 为全集, $A \subseteq \mathbb{E}$ ,称 $A$ 对 $\mathbb{E}$ 的相对补集为 $A$ 的绝对补集,记作 $A^c$ 或 $\sim A$ 或 $\complement_{\mathbb{E}} A$ .

$A^c$ 的描述法表示为:

$$A^c = \{x | x \in \mathbb{E} \wedge x \notin A\}$$

因为 $\mathbb{E}$ 是全集,所以 $x \in \mathbb{E}$ 是真命题,于是:

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

### 5.2.25 广义并集

设 $\mathcal{A}$ 为一个集族,称由 $\mathcal{A}$ 中全体元素的元素组成的集合为 $\mathcal{A}$ 的广义并,记作 $\bigcup \mathcal{A}$ (“大并 $\mathcal{A}$ ”).

$\bigcup \mathcal{A}$ 的描述法表示为:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x | \exists z (x \in z \wedge z \in \mathcal{A})\}$$

设 $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{d, e, f\}\}$ ,则 $\bigcup \mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

当 $\mathcal{A}$ 是以 $S$ 为指标集的集族时:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_\alpha | \alpha \in S\} = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$$

### 5.2.26 广义交

设 $\mathcal{A}$ 为一个集族,称由 $\mathcal{A}$ 中全体元素的元素组成的集合为 $\mathcal{A}$ 的广义并,记作 $\bigcup \mathcal{A}$ (“大并 $\mathcal{A}$ ”).

$\bigcap \mathcal{A}$ 的描述法表示为:

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x | \exists z (x \in z \wedge z \in \mathcal{A})\}$$

设 $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, a, b\}, \{1, 6, 7\}\}$ ,则 $\bigcap \mathcal{A} = \{1\}$ .

当 $\mathcal{A}$ 是以 $S$ 为指标集的集族时:

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_\alpha | \alpha \in S\} = \bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha$$

注意: 当 $\mathcal{A} = \emptyset$ 时, $\bigcap \emptyset$ 无意义.

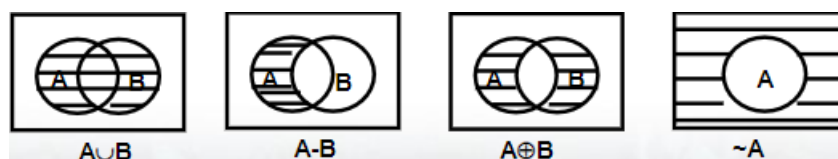
### 5.2.27 集合运算的优先级

有以下几类:

- 第一类运算(此类运算按照从左向右的顺序进行): 绝对补,幂集,广义交,广义并等.
- 第二类运算(此类运算按照括号决定的顺序运算,多个括号并排或没有括号的部分按照从左向右的顺序运算): 初级并,初级交,相对补,对称差等.

### 5.2.28 文氏图

文氏图就是将集合与集合之间的关系以及一些运算的结果用图像进行表示.在文氏图中,用矩形代表全集,用元或者其他闭曲线的内部代表 $\mathbb{E}$ 的子集,并将运算结果得到的集合用阴影部分表示.



### 5.2.29 容斥原理(排斥原理)

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个集合,则:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

### 5.2.30 基本集合恒等式

设 $\mathbb{E}, A, B, C$ 为 $\mathbb{E}$ 的任意子集:

1. 幂等律 :  $A \cap A = A, A \cup A = A$
2. 交换律 :  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
3. 结合律 :  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. 分配律 :  $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. 德·摩根律 :
  - 绝对形式 :  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
  - 相对形式 :  $\mathbb{E} - (A \cup B) = (\mathbb{E} - A) \cap (\mathbb{E} - B), \mathbb{E} - (A \cap B) = (\mathbb{E} - A) \cup (\mathbb{E} - B)$
6. 吸收律 :  $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
7. 零律 :  $A \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}, A \cap \emptyset = \emptyset$
8. 同一律 :  $A \cup \emptyset = A, A \cap \mathbb{E} = A$
9. 排中律 :  $A \cup A^c = \mathbb{E}$
10. 矛盾律 :  $A \cap A^c = \emptyset$
11. 余补律 :  $\emptyset^c = \mathbb{E}, \mathbb{E}^c = \emptyset$
12. 双重否定律 :  $(A^c)^c = A$
13. 补交转换律 :  $A - B = A \cap B^c$

### 5.2.31 集合恒等式推广到集族的情况

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ 为集族, $B$ 为一集合 :

- 分配律 :  $B \cup (\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in S} (B \cup A_\alpha), B \cap (\bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in S} (B \cap A_\alpha)$
- 德·摩根律 :
  - 绝对形式:

$$* (\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha \in S})^c = \bigcap_{\alpha \in S} (A_\alpha^c)$$

$$* (\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha \in S})^c = \bigcup_{\alpha \in S} (A_\alpha^c)$$

– 相对形式：

$$* B - (\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcap_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$

$$* B - (\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}) = \bigcup_{\alpha \in S} (B - A_\alpha)$$

### 5.2.32 集合幂集运算的性质

$$1. A \subseteq B \text{ 当且仅当 } \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

$$2. \mathcal{P}(A - B) \subseteq (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$$

### 5.2.33 有序对(有序二元组)

有序对又称有序二元组：

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

其中 $a$ 是第一元素, $b$ 是第二元素.

$\langle a, b \rangle$ 也记作 $(a, b)$ .

由于集合没有顺序,因此 $a, b$ 和 $b, a$ 是一样的.又称无序对,在公理集合论中有一条定义无序对的公理,称为无序对公理：

如果 $a, b$ 是集合,则 $\{a, b\}$ 依然是集合

而在 $\langle a, b \rangle$ 中, $a$ 在每一个子集合中,而 $b$ 只出现在其中一个子集合中,因此他们的地位不相等,所以在有序对中 $a$ 是第一元素, $b$ 是第二元素.

实际上是定义了一个数组,用这种方法来保证元素的顺序.

接下来一章严格证明有序对的性质.

### 5.2.34 有序对性质的证明

$$\bullet \text{ 引理1: } \{x, a\} = \{x, b\} \Leftrightarrow a = b$$

叙述为：当集合 $\{x, a\}$ 等于 $\{x, b\}$ 当且仅当 $a = b$ .

证明：

– 充分性( $\Leftarrow$ ) 是显然的,因此不证.

– 必要性( $\Rightarrow$ ) 分两种情况 :

$$1. x = a. \{x, a\} = \{x, b\} \Rightarrow \{a, a\} = \{a, b\} \Rightarrow \{a\} = \{a, b\} \Rightarrow a = b$$

$$2. x \neq a. a \in \{x, a\} = \{x, b\} \Rightarrow a = b.$$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

● 引理2 : 若  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \neq \emptyset$ . 则 :

$$1. \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{B}$$

$$2. \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B}$$

证明 :

$$1. \forall x, x \in \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{A} \wedge x \in z) \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{B} \wedge x \in z) \Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{B}$$

$$2. \forall x, x \in \bigcap \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall z(z \in \mathcal{A} \wedge x \in z) \Leftrightarrow \forall z(z \in \mathcal{B} \wedge x \in z) \Leftrightarrow x \in \bigcap \mathcal{B}$$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

● 定理(性质1)–两个有序对相对,当且仅当他们的第一个元素和第二个元素分别相等 :  $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

证明 :

– ( $\Leftarrow$ ) 显然,不证.

– ( $\Rightarrow$ ) :

$$\text{由引理2, } \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \bigcap \{\{a\}, \{a, b\}\} = \bigcap \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a\} = \{c\} \Leftrightarrow a = c$$

$$\text{又因为 } \langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \bigcup \{\{a\}, \{a, b\}\} = \bigcup \{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a, b\} = \{c, d\}$$

再由引理1,得出  $b = d$ .

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

● 推论 :  $a \neq b \Rightarrow \langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$

证明(反证) :

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \Leftrightarrow a = b$$

与 $a \neq b$ 矛盾.

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

### 5.2.35 有序 $n$ 元组

- 有序三元组 :

$$\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$$

- 有序 $n$ ( $n > 2$ )元组 :

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

有以下定理 :

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \Leftrightarrow a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

### 5.2.36 笛卡尔乘积集合(卡氏积)

设 $A, B$ 为两个集合,取 $x \in A, y \in B$ ,构造有序对集合 $\{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$ (属于 $A$ 的 $x$ 在前面,属于 $B$ 的 $y$ 在后面),将这样的集合记为笛卡尔乘积集合(又称为卡氏积) :

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in B \}$$

这种集合可以用来表示两个集合中元素的排列组合.

举例,设 $A = \{\emptyset, a\}, B = \{1, 2, 3\}$ ,则 :

- $A \times B = \{ \langle \emptyset, 1 \rangle, \langle \emptyset, 2 \rangle, \langle \emptyset, 3 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle \}$
- $B \times A = \{ \langle 1, \emptyset \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 2, \emptyset \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, \emptyset \rangle, \langle 3, a \rangle \}$
- $A \times A = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, a \rangle, \langle a, \emptyset \rangle, \langle a, a \rangle \}$
- ...

### 5.2.37 卡氏积的性质

- 卡氏积非交换性 :  $A \times B \neq B \times A$ (除非 $A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$ )

反证法反例 : 设 $A = \{1\}, B = \{2\}$  :

$$A \times B = \{ \langle 1, 2 \rangle \} \neq \{ \langle 2, 1 \rangle \} = B \times A$$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 卡氏积非结合性： $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$  (除非  $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$ )

反证法反例： $A = B = C = \{1\}$ ：

$$(A \times B) \times C = \{ \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle \} \neq \{ \langle 1, \langle 1, 1 \rangle \rangle \} = A \times (B \times C)$$

□-Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 卡氏积分配律：

$$1. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$2. A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$3. (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$4. (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

其中选一个证明： $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ .

证明： $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in A \times (B \cup C)$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$$

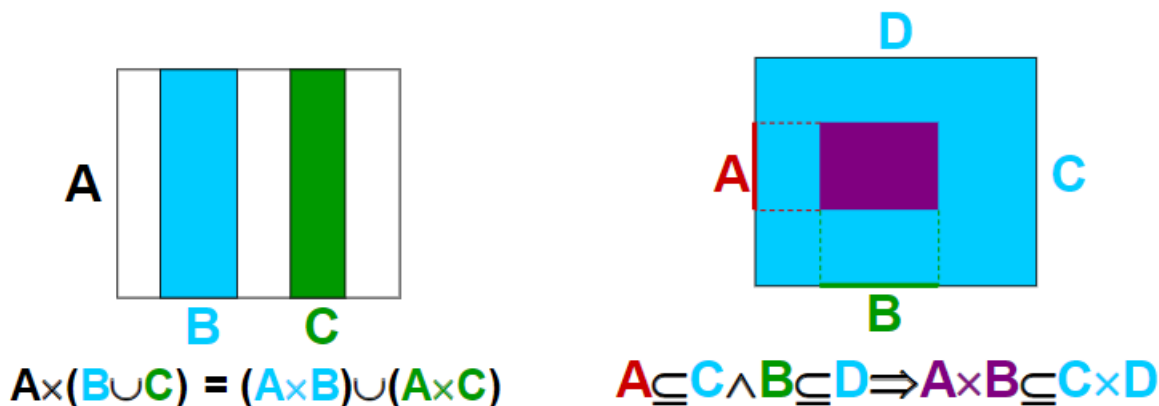
$$\Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in A \times B) \vee (\langle x, y \rangle \in A \times C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

□-Q.E.D. (Quod Erat Demonstrandum/证毕)

### 5.2.38 卡氏积的图示

放张图就一目了然了：





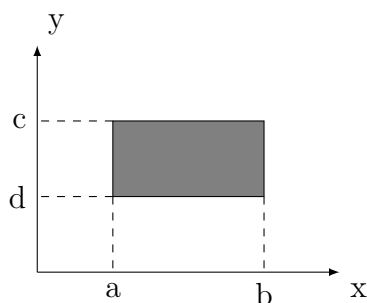
特别的： $A = B = \mathbb{R}$ , 则  $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ , 也就是笛卡尔平面直角坐标系.  
同样的, 也有  $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$$

$$B = \{y | y \in \mathbb{R} \wedge c \leq y \leq d\}$$

$$C = \{z | z \in \mathbb{R} \wedge e \leq z \leq f\}$$

那么  $A \times B$  的图像表示就是：



同样的,  $A \times B \times C$  表示的是空间中的一个立方体, 这里就不画了(邪恶的tikz).

### 5.2.39 $n$ 维卡氏积

- $n$ 维卡氏积：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n \}$$

- $A^n = A \times A \times \cdots \times A$
- $|A_i| = n_i, i = 1, 2, \dots, n \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_n.$
- $n$ 维卡氏积性质于2维卡氏积类似.

### 5.2.40 $n$ 维卡氏积的性质

- 非交换： $A \times B \times C \neq B \times C \times A$  (要求  $A, B, C$  均非空, 且互不相等)
- 非结合：(非二元运算)
- 分配律：例如： $A \times B \times (C \cup D) = (A \times B \times C) \cup (A \times B \times D)$
- 其他：比如  $A \times B \times C = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset.$

### 5.2.41 $n$ 元关系

- $n$ 元关系：其元素全是有序 $n$ 元组的集合.
- 例1： $F_1 = \{ \langle a, b, c, d \rangle, \langle 1, 2, 3, 4 \rangle, \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle \}$ — $F_1$ 是3元关系.
- 例2： $F_2 = \{ \langle a, b, c \rangle, \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle, \langle A, B, C \rangle \}$ — $F_2$ 是3元关系

### 5.2.42 二元关系

- 2元关系(关系)：元素全是有序对的集合.
- 比如 $A = \{ \langle A, B \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle, a, \alpha, 1 \}$ —如果 $a, \alpha, 1$ 不是有序对,那么 $A$ 不是关系.

### 5.2.43 二元关系的记号

- 设 $F$ 是二元关系,那么有三种记法：
  - 中缀(infix)记号： $x F y$
  - 前缀(prefix)记号： $F(x, t), F x y$
  - 后缀(suffix)记号： $\langle, x y \rangle \in F, x y F$
- 例如： $2 < 15 \Leftrightarrow \langle (2, 15) \Leftrightarrow \langle 2, 15 \rangle \in <$

### 5.2.44 $A$ 到 $B$ 的二元关系

- $A$ 到 $B$ 的二元关系：是 $A \times B$ 的任意子集.  
 $R$ 是 $A$ 到 $B$ 的二元关系 $\Leftrightarrow R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in \mathcal{P}(A \times B)$
- 如果 $|A| = m, |B| = n$ ,则 $|A \times B| = mn$ ,所以 $|P(A \times B)| = 2^{mn}$ ,也就是说 $A$ 到 $B$ 不同的二元关系共有 $2^{mn}$ 个.

### 5.2.45 $A$ 到 $B$ 的二元关系举例

设 $A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$ ,则 $A$ 到 $B$ 的二元关系共有4个：

$$R_1 = \emptyset, R_2 = \{ \langle a_1, b \rangle \}, R_3 = \{ \langle a_2, b \rangle \}, R_4 = \{ \langle a_1, b \rangle, \langle a_2, b \rangle \}$$

反过来, $B$ 到 $A$ 的二元关系也有4个:

$$R_5 = \emptyset, R_6 = \{\langle b, a_1 \rangle\}, R_7 = \{\langle b, a_2 \rangle\}, R_8 = \{\langle b, a_1 \rangle, \langle b, a_2 \rangle\}$$

### 5.2.46 $A$ 上的二元关系

- $A$ 上的二元关系: 是 $A \times A$ 的任意子集.

$$R \text{ 是 } A \text{ 上的二元关系} \Leftrightarrow R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R \in P(A \times A)$$

- 如果 $|A| = m$ , 则 $|A \times A| = m^2$ , 所以:

$$|P(A \times A)| = 2^{m^2}$$

即 $A$ 上不同的二元关系共有 $2^{m^2}$ 个

### 5.2.47 一些特殊关系

- 设 $A$ 是任意集合, 则可以定义 $A$ 上的:

- 空关系:  $\emptyset$
- 恒等关系:  $I_A = \{\langle x, x \rangle | x \in A\}$
- 全域关系:  $E_A = A \times A = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in A\}$
- 包含关系:  $\subseteq_A = \{\langle x, y \rangle | x \subseteq y \subseteq A \wedge x \subseteq y\}$
- 真包含关系:  $\subset_A = \{\langle x, y \rangle | x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subset y\}$

- 设 $A \subseteq Z$ , 则可以定义 $A$ 上的:

- 整除关系:  $D_A = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x|y\}$
- 例:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , 则:

$$D_A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$$

- 设 $A \subset R$ , 则可以定义 $A$ 上的:

- 小于等于(less than or equal to)关系:  $LE_A = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y\}$
- 小于(less than)关系:  $L_A = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x < y\}$
- 大于等于(greater than or equal to)关系
- 大于(greater than)关系, ...

### 5.2.48 与二元关系有关的概念

- 对任意集合 $R$ ,可以定义 :
  - 定义域(domain) :  $dom R = \{x|\exists y(xRy)\}$
  - 值域(range) :  $ran R = \{y|\exists x(xRy)\}$
  - 域(field) :  $fld R = dom R \cup ran R$

例 :

- $R_1 = \{a, b\}$
- $R_2 = \{a, b, \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle\}$
- $R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 5, 6 \rangle\}$

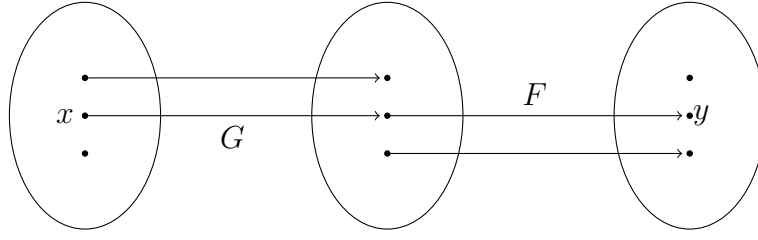
当 $a, b$ 不是有序对时, $R_1$ 和 $R_2$ 不是关系.

- $dom R_1 = \emptyset, ran R_1 = \emptyset, fld R_1 = \emptyset$
- $dom R_2 = \{c, e\}, ran R_2 = \{d, f\}, fld R_2 = \{c, d, e, f\}$
- $dom R_3 = \{1, 3, 5\}, ran R_3 = \{2, 4, 6\}, fld R_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 对任意集合 $F, G$ ,可以定义 :
  - 逆(inverse) :  $F^{-1} = \{\langle x, y \rangle | yFx\}$   
定理 : 设 $F, G$ 为二集合,则 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$   
这个可以用矩阵的逆来理解.  
证明 :  $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in (F \circ G)^{-1}$   
 $\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (F \circ G)$   
 $\Leftrightarrow \exists z(yGz \wedge zFx)$   
 $\Leftrightarrow \exists z(zG^{-1}y \wedge xF^{-1}z)$   
 $\Leftrightarrow \exists z(xF^{-1}z \wedge zG^{-1}y) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 合成(复合)(composite) :  $F \circ G = \{\langle x, y \rangle | \exists z(xGz \wedge zFy)\}$



关于合成,还分为：

\* 顺序合成(右合成)： $F \circ G = \{\langle x, y \rangle | \exists z(xFz \wedge zGy)\}$

\* 逆序合成(左合成)： $F \circ G = \{\langle x, y \rangle | \exists z(xGz \wedge zFy)\}$

合成运算有结合律：

\* 设 $R_1, R_2, R_3$ 为集合,则：

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明： $\forall \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge z(R_1 \circ R_2)y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge \exists t(zR_2t \wedge tR_1y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists t(xR_3z \wedge (zR_2t \wedge tR_1y))$$

$$\Leftrightarrow \exists t \exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$$

$$\Leftrightarrow \exists t \exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\exists z(xR_3z \wedge zR_2t) \wedge tR_1y)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(x(R_2 \circ R_3)t \wedge tR_1y)$$

$$\Leftrightarrow xR_1 \circ (R_2 \circ R_3)y$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

$$\therefore (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

• 对任意集合 $F, A$ ,可以定义：

– 限制(restriction)： $F \upharpoonright A = \{\langle x, y \rangle | xFy \wedge x \in A\}$

– 象(image)： $F[A] = \text{ran}(F \upharpoonright A), F[A] = \{y | \exists x(x \in A \wedge xFy)\}$

• 对任意集合 $F$ ,可以定义：

– 单根(single rooted)：一个 $y$ 对应唯一的一个 $x$ 就是单根.

$$F \text{ 是单根的} \Leftrightarrow \forall y(y \in \text{ran } F \rightarrow \exists! x(x \in \text{dom } F \wedge xFy)) \Leftrightarrow (\forall y \in \text{ran } F)(\exists! x \in \text{dom } F)(xFy)$$

\*  $\exists!$ 表示”存在唯一的”

\*  $\forall x(x \in A \rightarrow B(x))$ 缩写为 $(\forall x \in A)B(x)$

\*  $\exists x(x \in A \wedge B(x))$ 缩写为 $(\exists x \in A)B(x)$

– 单值(single valued) : 一个 $x$ 对应一个唯一的 $y$ 就是单值.

$$F \text{是单值的} \Leftrightarrow \forall x(x \in \text{dom } F \rightarrow \exists! y(y \in \text{ran } F \wedge xFy)) \Leftrightarrow (\forall x \in \text{dom } F)(\exists! y \in \text{ran } F)(xFy)$$

## 5.3 图论

### 5.3.1 图论的主要内容

- 研究对象 : 由顶点和边构成的图
- 研究思想 : 以集合论为基础,以图为工具,为各种二元关系建立模型
- 研究内容 :
  - 图的基本概念 : 连通性,矩阵表示,带权图
  - 欧拉图,哈密顿图 : 边和顶点的遍历
  - 树 : 表示层级组织关系
  - 平面图 : 判定,表示,性质
  - 图的着色 : 各种调度问题的模型
  - 独立集,支配集,覆盖集,匹配 : 各种应用问题

### 5.3.2 图论中的问题

- 什么是图?有哪些图?图有什么性质?
- 什么是欧拉图?什么是哈密顿图?
- 什么是树?如何用矩阵表示图?
- 什么是图的着色?
- 什么是支配集,独立集,覆盖,匹配?
- 什么是带权图?