db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2021 年 1 月 25 日

注: 本笔记有些部分来自于wikipedia

todos

1. 誊录纸质笔记 线性代数-线性无关,基和维数.
2. 隐函数存在定理,等幂求和,(复变函数),概率论与数理统计(及测度论).
3. 重写线性代数
4. 补充多个section,计算机图形学等
5. 整合冗余部分

目录

Chapter 1

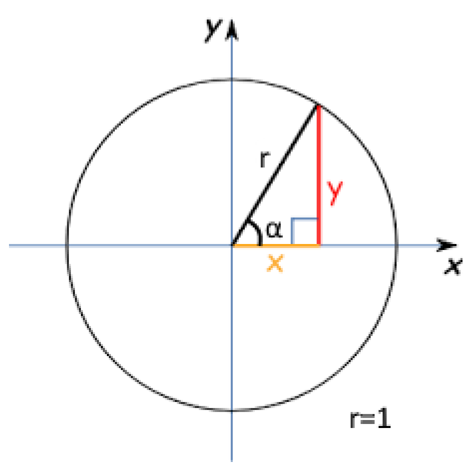
数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

注：待整理.

1 三角函数

三角函数一般由单位圆引出,如下:



1.1 正三角函数

名字	定义	定义域	值域
$\sin\alpha$	$\frac{y}{r}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\cos\alpha$	$\frac{x}{r}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan\alpha$	$\frac{y}{x}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z}))$	$\mathbb{R}$
$\cot\alpha$	$\frac{x}{y}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq k\pi(k\in\mathbb{Z}))$	$\mathbb{R}$
$\sec\alpha$	$\frac{r}{x}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}))$	$\lvert\sec\alpha\rvert\geq 1$
$\csc\alpha$	$\frac{r}{y}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}))$	$\lvert\csc\alpha\rvert\geq 1$

1.2 反三角函数

名字	定义	定义域	值域
$\arcsin x$	$x=\sin y$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$x=\sin y$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\arctan x$	$x=\tan y$	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\mathrm{arccot}\, x$	$x=\cot y$	$\mathbb{R}$	$[0,\pi]$
$\mathrm{arcsec}\, x$	$x=\sec y$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
$\mathrm{arccsc}\, x$	$x=\csc y$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

1.3 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha-\beta)\cdot(1+\tan\alpha\tan\beta)$$

1.4 积化和差

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

1.5 诱导公式

奇变偶不变,符号看象限.

1.5.1 第一组诱导公式

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

1.5.2 第二组诱导公式

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

1.5.3 第三组诱导公式

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

1.5.4 第四组诱导公式

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

1.5.5 第五组诱导公式

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$$

1.5.6 第六组诱导公式

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

1.6 倍角公式

1.6.1 二倍角公式

二倍角公式:由两角和公式推出

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1.6.2 半倍角公式

半倍角公式:将二倍角公式中的角2α看作整体β,经过变形推出:

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$\sec\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}}2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}=\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{4\sec^3\alpha+\sec^2\alpha}{2\cos\alpha}}}{\sec\alpha+1}$

$\csc\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}}2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}=\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{3\sec^3\alpha-\sec^2\alpha}{2\sec\alpha}}}{\sec\alpha-1}$

1.6.3 n倍角公式

$$\cos n\theta=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}[(-1)^i C_{2i+1}^{n}\cos^{n-2i}\theta\sin^{2i}\theta]$$

$$\sin n\theta=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}[(-1)^i C_{2i+1}^{n}\cos^{n-2i-1}\theta\sin^{2i+1}\theta]$$

1.6.4 万能替换公式

万能替换公式:尝试将正常的三角函数用半角公式表示时经过变形推出:

角$\alpha(\alpha\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{z})$的所有三角比都可以用 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$表示.这组公式叫做万能替换公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

1.6.5 降幂公式

三角函数中的降幂公式可降低三角函数指数幂.多项式各项的先后按照某一个字母的指数逐渐减少的顺序排列,叫做这一字母的降幂.直接运用二倍角公式就是升幂,将公式$\cos 2\alpha$变形后可得到降幂公式.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

1.7 三角恒等式

倒数关系：

- $\sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$
- $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$
- $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

商数关系：

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

平方关系：

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

余角关系：

- $\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arctan\alpha + \operatorname{arccot}\alpha = \dfrac{\pi}{2}$
- $\operatorname{arcsec}\alpha + \operatorname{arccsc}\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

负数关系：

- $\arcsin -\alpha = -\arcsin\alpha$
- $\arccos -\alpha = \pi - \arccos\alpha$
- $\arctan -\alpha = -\arctan\alpha$

- $\operatorname{arccot} -\alpha = \pi - \operatorname{arccot} \alpha$
- $\operatorname{arcsec} -\alpha = \pi - \operatorname{arcsec} \alpha$
- $\operatorname{arccsc} -\alpha = -\operatorname{arccsc} \alpha$

1.8 其他恒等式

1. $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \sin(x + \arctan \frac{b}{a}), (a > 0)$
2. $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \cos x - \arctan \frac{a}{b}$
3. $\cos \alpha = 2cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$
4.

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ (x > 0) \\ 0 \ (x = 0) \\ -\frac{\pi}{2} \ (x < 0) \end{cases}$$

证明：

对此式求导,得$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

化简后发现恒等于0,导数恒等于0说明是个常数,代入任意值都可得答案为$\frac{\pi}{2}$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

1.9 解斜三角形

三角形的边角、面积、和外接圆半径之间有着密切的联系

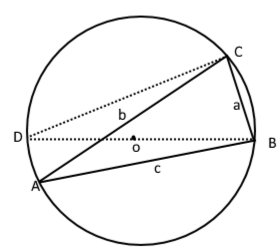
设三角形$\triangle ABC$,角A、B、C的对边为abc,以A为原点O建系,总有以下公式:

$\mathbf{S}\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}cb \sin A$,即$\mathbf{S}\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$

同理得:$\mathbf{S}\triangle_{ABC}=\dfrac{1}{2}\sin B,\mathbf{S}\triangle_{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C.$
这就是说,三角形的面积等于任意两边与他们夹角正弦值的一半.

1.9.1 正弦定理

将$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$三个公式同除$\dfrac{1}{2}abc$,得:
$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$, 也可表示为:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
此式表明:在三角形中,各**边**与它所对**角的正弦**的比相等
当$\angle C=90°$时,由正弦定理可得:$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{1}{c}$,即$a=c\sin A,B=C\sin B$
并且,做三角形外接圆:



由圆周角定理可知$\angle D=\angle A,BD=2R,bc=a$.于是$a=BC=BD\sin A=2R\sin A$,即:
$\dfrac{a}{\sin A}=2R$
由正弦定理,可得:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
所以,$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$
变形也可得到:
$\sin C=\dfrac{c}{2R},\sin B=\dfrac{b}{2R},\sin A=\dfrac{a}{2R}$
以及:
$a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C$

1.9.2 余弦定理

由两点间距离公式,得$a=|BC|=\sqrt{(b\cos A-c)^2+(b\sin A-0)^2}$
两边平方并化简得:

$a^2 = b^2 - 2b\cos A + c^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

也可变形化为:

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$

这些关系在直角三角形中也成立.