

db的日常笔记

dbydd

2020 年 8 月 14 日

todos

标签：求导，泰勒公式

目录

第一章 数学	1
1.1 基本概念	1
1.1.1 六大基本初等函数	1
1.1.2 二项式定理	1
1.1.3 排列组合	1
1.1.4 零散的定义	1
1.1.5 零散的思想	1
1.2 三角函数	2
1.2.1 正三角函数	2
1.2.2 反三角函数	2
1.2.3 和差化积	2
1.2.4 积化和差	2
1.2.5 诱导公式	3
1.2.6 倍角公式	4
1.2.7 三角恒等式	5
1.3 微积分	5
1.3.1 极限	5
1.3.2 等价无穷小	5

Chapter 1

数学

1 基本概念

1.1 六大基本初等函数

常数函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数

1.2 二项式定理

$$(x+y)^n = x^n + C_{n-1}^n(x^{n-1}y) + C_{n-2}^n(x^{n-2}y^2) + \dots + y^n$$

1.3 排列组合

排列: $P_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$

组合: $C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

1.4 零散的定理

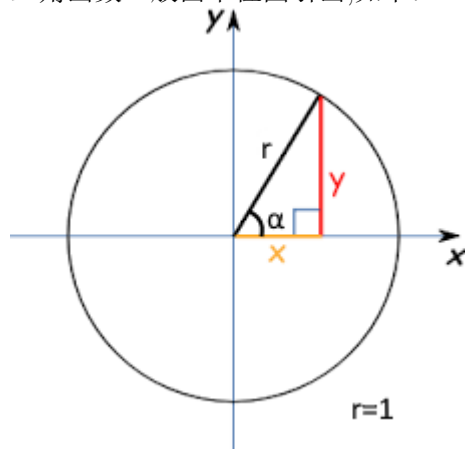
1. 有界: $\exists \epsilon, f(x) < \epsilon \quad (-\infty < x < \infty)$

1.5 零散的思想

1. 正变换是数学的重要工具,三角变换是只变其形不变其质的。三角变换常常先寻找式子所包含的各个角之间的联系,并以此为依据选择可以联系它们的适当公式,通过换元法把三角恒等变换问题转化为代数恒等变换问题。

2 三角函数

三角函数一般由单位圆引出,如下:



2.1 正三角函数

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

2.2 反三角函数

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

2.3 和差化积

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \tan(\alpha - \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \tan \beta)$$

2.4 积化和差

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

2.5 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限。

2.5.1 第一组诱导公式

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

2.5.2 第二组诱导公式

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

2.5.3 第三组诱导公式

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

2.5.4 第四组诱导公式

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

2.5.5 第五组诱导公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

2.5.6 第六组诱导公式

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

2.5.7 杂项

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

2.6 倍角公式

2.6.1 半倍角公式

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$$\sec \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{\frac{\sec \alpha - 1}{2 \sec \alpha}} 2 \sec \alpha}{\sec \alpha + 1} = \pm \sqrt{\frac{4 \sec^3 \alpha + \sec^2 \alpha}{2 \cos \alpha}}$$

$$\csc \frac{\alpha}{2} = \frac{\pm \sqrt{\frac{\sec \alpha - 1}{2 \sec \alpha}} 2 \sec \alpha}{\sec \alpha - 1} = \pm \sqrt{\frac{3 \sec^3 \alpha - \sec^2 \alpha}{2 \sec \alpha}}$$

2.6.2 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

2.6.3 n倍角公式

$$\cos n\theta = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} [(-1)^i C_{2i+1}^n \cos^{n-2i} \theta \sin^{2i} \theta]$$

$$\sin n\theta = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} [(-1)^i C_{2i+1}^n \cos^{n-2i-1} \theta \sin^{2i+1} \theta]$$

2.7 三角恒等式

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

3 微积分

3.1 极限

3.1.1 定理

1. 函数在一点极限存在的条件是左右极限存在且相等
2. 洛必达法则： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

3.1.2 重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \rightarrow x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

3.2 等价无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x - 1 \approx x \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(ax) \approx \sin(ax) \approx (a)x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(ax) \approx \tan(ax) \approx (a)x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) \approx x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x \approx 1+x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \approx x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \approx x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^b - 1 \approx abx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \ln(1+x) \approx \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x - x \approx \frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \arctan x \approx \frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6} \text{ 以上都可以由泰勒公式推出}$$