db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2021 年 2 月 7 日

注: 本笔记有些部分来自于wikipedia

todos

1. 誊录纸质笔记 线性代数-线性无关,基和维数.
2. 隐函数存在定理,等幂求和,(复变函数),概率论与数理统计(及测度论).
3. 重写线性代数
4. 补充多个section,计算机图形学等
5. 整合冗余部分

目录

第一部分

数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

注：待整理.

Chapter 1

数学分析

1 映射与函数

1.1 映射

映射指的是集合之间的一种对应关系.

定义：X, Y是两集合,按照某个规则f,对于任一的$x \in X$,有唯一的$y \in Y$与之对应,则称f是X到Y的一个映射.

记为：$f : X \to Y$,即：$x \mapsto y = f(x)$

称呼：

- y：在映射f下,x的像.
- x：在映射f下,y的一个逆像.
- X：f的定义域,记为$X = D_f$.
- Y：f的值域,记为$R_f \subset Y$,具体的来说,$R_f = \{y|y \in Y \wedge \exists x(y = f(x) \wedge x \in X)\}$

举例：设X是平面上三角形的全体,Y是平面上圆的全体,构造一个映射f,表示(y 是 x 的外接圆),记为：

$$f : X \underset{x \mapsto y}{\to} Y$$

1.1.1 映射的基本要素

- $X = D_f$,定义域.
- Y,限制值域的范围.
- f,需要保证像的唯一性.

这说明了两点：

1. 映射的像是唯一的,举例：

   设$X = \mathbb{R}^+ = \{x|x \in R \wedge x > 0\}$,假设存在映射$f : X \underset{x \mapsto y}{\rightarrow} Y(y^2 = x)$,此时$Y = \mathbb{R}$,那么假设$x = 4, y = \pm 2$.这个映射就无法保证像的唯一性.换句话说,这个$f$并不是个映射.

   但是可以稍作改造:对$Y = \mathbb{R}$做限制,令$Y = R^-$,此时：

   $$f : \begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y \end{array} \ (y^2 = x)$$

   就构成了一个映射

2. 映射不要求逆向唯一.

1.1.2 映射的分类

- 单射：

  f是X到Y的一个映射,若逆像也具有唯一性,则称f是单射(injection)

  逻辑命题表述：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2 (y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2))$

  注：单射的值域不一定完全等于Y,也可能包含于Y,即$R_f \subseteq Y$

- 满射：如果映射的值域完全等于Y,即$R_f = Y$,则称为满射(surjection).

  注：满射不一定是单射

- 双射：如果f又是单射,又是满射,则称f为双射(bijection)

  双射又称为一一对应.

1.1.3 逆映射

如果$f: X \to Y$是一个单射,即对任意的$y \in R_f$,有唯一的逆像$x \in X$与y对应.

如果$g: \begin{matrix} R_f \to X \\ y \mapsto x \end{matrix}$ 是满射($f(x) = y$)

那么g就称为f的逆映射,又记为f^{-1}

举例：$y = \sin x: \begin{matrix} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \\ x \mapsto y = \sin x \end{matrix}$,他的逆映射为：

$$x = \arcsin y: \begin{matrix} [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y \mapsto x \end{matrix} \ (\sin x = y)$$

1.1.4 复合映射

$$g: \begin{matrix} X \to U_1 \\ x \mapsto u = g(x) \end{matrix}$$

$$f: \begin{matrix} U_2 \to Y \\ u \mapsto y = f(u) \end{matrix}$$

这两个映射若是要复合在一起,那么就得满足：$R_g \subset U_2 = D_f$.即：g的值域在f的定义域中,才能构造出复合映射.

称为f与g的复合映射.

例：设$X = Y = U_1 = U_2 = \mathbb{R}$：

$$g: \begin{matrix} x \to U_1 \\ x \mapsto u = \sin x \end{matrix}$$

$$f: \begin{matrix} U_2 \to Y \\ u \mapsto y = \frac{u}{1+u^2} \end{matrix}$$

由于$R_g = [-1, 1] \subset D_f$,所以：

$$f \cdot g: \begin{matrix} X \to Y \\ x \mapsto y = \frac{\sin x}{1+\sin x} \end{matrix}$$

1.2 函数

函数是映射的特殊情况.

有映射：

$$f:\begin{array}{l} X\to Y \\ x\mapsto y=f(x)\end{array}$$

如果$X\subset\mathbb{R},Y=\mathbb{R}$,即如果两者都是实数构成的集合,那么就称$f$为一元实函数(简称函数).

如果X是卡氏积(笛卡尔乘积集合),那么就是多元实函数.

对函数来说,映射可以简写为：

$$y=f(x),x\in X\ (X=D_f)$$

其中x也称为自变量,y称为因变量,函数也反映了因变量与自变量变化的一种因果关系.

1.2.1 基本初等函数

以下几种函数被称为基本初等函数：

1. 常数函数：$y=\mathbb{C}$
2. 幂函数：$y=x^{\alpha}\ (\alpha\in\mathbb{R})$
3. 指数函数：$y=a^x\ (a>0\wedge a\neq 1)$
4. 对数函数：$y=\log_a x\ (a>0\wedge a\neq 1)$
5. 三角函数：$y=\sin x,\cos x,\tan x,\cot x...$
6. 反三角函数：$y=\arcsin x,\arccos x,\arctan x...$

1.2.2 初等函数

初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数.

例如：

$$y=ax^2+bx+c$$

1.2.3 自然定义域

自然定义域是指函数中自变量的最大取值范围.

如果函数不注明定义域,则默认定义域为他的自然定义域.

例：求$y=x+\frac{1}{x}$的自然定义域：

$$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\ \ R=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

方法不说了...难以描述.

1.2.4 函数的表示

- 显式表示：$y=f(x)$

- 分段表示：

  $A\cap B=\emptyset$,现有$\varphi(x)$定义于A上,$\psi(x)$定义于B上,构造函数$f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in A\\ \psi(x) & x\in B\end{cases}$$

  这样的表示称为函数的分段表示.

- 隐函数表示(函数的隐式表示)：$F(x,y)=0$

  也就是说没有写成$y=F(x)$的形式,而是写成了方程的形式,式中y与x的变化关系并没有写出,而是写在方程中.

  例如：

$$x^2+y^2=R^2\text{或者}x^2+y^2-R^2=0$$

  发现对任意的$x\in(-\mathbb{R},+\mathbb{R})$,都有两个$y$与之对应.

  这并不意味着这个函数关系无法讨论,只需要对y做限制,比如要求$y\geq 0$,这样一来对于给定的y,就有唯一确定的x,由此就构成了函数关系.

  需要注意的是并不是所有的隐函数都可以写出显式表达的形式,比如Kepler方程：

$$y=x+\varepsilon\sin y$$

  这个方程描述了行星绕太阳运行的轨迹的规律,轨迹是个椭圆.其中ε是这个椭圆的离心,x与时间有关,y与行星的位置有关.

- 参数表示：

  当x与y的关系不方便表示的时候可以考虑引进参数t(t只是个字符),如果x和y可以表示成t的函数：

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t\in[a,b]$$

  这样就间接的反映了变量y与x之间的参数表示,称为函数的参数表示.

他是这么表示的：有两个集合：

$$X=\{x|x=x(t),t\in[a,b]\},\ Y=\{y|y=y(t),t\in[a,b]\}$$

那么函数关系f就是一个映射：

$$f:\ \begin{array}{l} X\to Y \\ x=x(t)\mapsto y=y(t) \end{array}$$

1.2.5 函数的简单性质

1. 有界性：对于$y=f(x),x\in D$：

   如果存在$m<M$,使得$m\le f(x)\le M,x\in D$,则称$f(x)$有界,m称为下界,M称为上界.

   等价定义：存在$X>0$(此X不是集合),使得$|f(x)|\le X,x\in D$

   需要注意的是：如果函数有界,那么上下界是不唯一的.

2. 单调性：对于$y=f(x),x\in D$：

   若对于任意的$x_1,x_2\in D,x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$,则称函数$f$在$D$单调增加.如果$\le$可以换成$<$,则称为严格单调增加.

   记为：

   $$f\uparrow(f\text{严格}\uparrow)$$

   类似的,将不等号的箭头方向改变,也有单调减少和严格单调减少,记为：

   $$f\downarrow(f\text{严格}\downarrow)$$

3. 奇偶性：设函数的定义域D关于原点对称.即：

   $$x\in D\Leftrightarrow -x\in D$$

   那么：

   - 若在D上,$f(x)=f(-x)$,则称f是偶函数.
   - 若在D上,$f(x)=-f(x)$,则称f是奇函数.

4. 周期性：设D是函数f的定义域,$x\pm T\in D$,并且$f(x)=f(x\pm T)$

   T称为函数的一个周期.

   在所有的周期中,如果有最小的T,则称他为最小周期.

1.2.6 一些特殊的函数

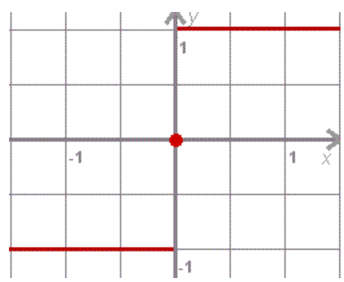
- 符号函数：

  符号函数(Sign function,简称sgn)是一个逻辑函数,用以判断实数的正负号.为避免和英文读音相似的正弦函数(sine)混淆,它亦称为Signum function.其定义为：

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = sgn(x) = \{-1, 0, 1\}$
奇偶性	奇函数

  图像为：



- 整数部分函数(下取整函数)：

$$y = [x]$$

  在数学和计算机科学中,取整函数是一类将实数映射到相近的整数的函数.

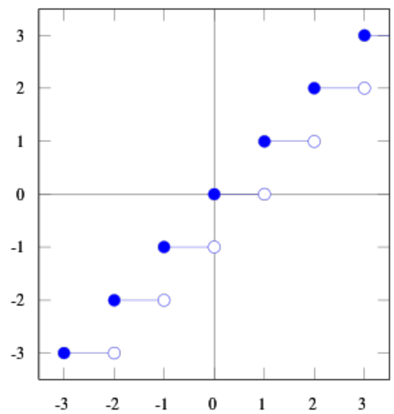
  常用的取整函数有两个,分别是下取整函数和上取整函数.

  下取整函数即为取底符号,在数学中一般记作$[x]$或者$E(x)$,在计算机科学中一般记作$floor(x)$,表示不超过x的整数中最大的一个：

$$[x] = \min\{n \in \mathbb{Z} \,| x \leq n\}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = [X] = \mathbb{Z}$
奇偶性	N/A

图像为：



下取整函数的符号用方括号$[x]$表示,称作高斯符号.

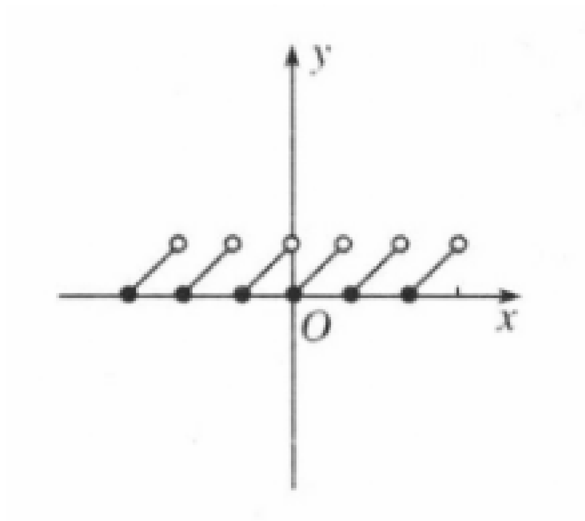
- 小数部分函数(分数部分函数)：

$$y = (x) = x - [x]$$

小数部分函数(decimal part function)亦称分数部分函数,是一种特殊的数论函数.x的小数部分记为x,读作x的小数部分(或分数部分).小数部分函数被定义为$x = x - [x]$,其中$[x]$是整数函数.$\{x\}$只能是0或正的纯小数,即$\{x\}$满足$0d\{x\} < 1$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = \{X\} = (0, 1)$
奇偶性	N/A

图像为：



- 狄利克雷函数：

  问：是否周期函数都有最小周期?

  答：不是.

  反例：狄利克雷函数(Dirichlet function)$D(x)$：

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x\text{无理数} \\ 1 & x\text{有理数} \end{cases}$$

定义域	$D = (-\infty, +\infty)$
值域(到达域)	$R = D(x) = (0, 1)$
奇偶性	偶函数

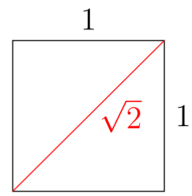
  任何的有理数$r > 0$都是他的周期,没有最小周期.

2 数列极限

2.1 实数系的连续性

2.1.1 引入

一切都得从实数系的诞生说起：
命题：$\sqrt{2}$不是有理数.



使用反证法

如果$\sqrt{2}$不是有理数,设其为有理数,即：

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

其中$n, m \in \mathbb{N}^{+}$且互质.

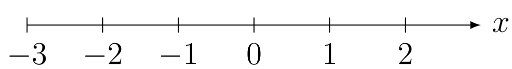
那么$2 = \frac{n^2}{m^2}$,即$n^2 = 2m^2$

则n是偶数.令$n = 2k$,则$m^2 = 2k^2$,因此m也是偶数,矛盾,得证.

$\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

换句话来说,在有理数上开根号不封闭,因此需要扩展数系.

从几何上看是这样的：



- $\mathbb{Z}$:

  整数集上每一个数都对应其上的一个点,每两个点之间总有距离,点与点之间距离至少为1.称这一性质为离散性.

  因此可以说：整数集合具有集散性.

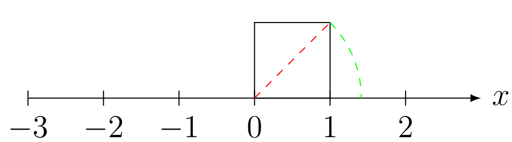
- $\mathbb{Q}$:

  有理数集合种每一个元素都可以在数轴上找到一个点与他对应,而且有理数很多,多到无法找到一个小区间,使得这个小区间内没有有理数.将这种性质称为稠密性.

  因此可以说：有理数集合具有稠密性.

- $\mathbb{R}$

  长期以来人们一直只认识有理数,直到公元200年前的古希腊：



就这样,人们发现了一个在数轴上的点,对应的不是有理数.

换句话说,尽管有理数集合在数轴上有稠密性,但是有空隙.

于是又扩展了数系,将无限不循环小数(即无理数)加进了有理数系,就这样出现了实数集合$\mathbb{R}$,自此运算又封闭了.

因此实数是有理数集合和有理数集合的并,即：

$$\mathbb{R} = \{x|x \in \mathbb{Q} \vee x\text{是无理数}\}$$

引入的无理数填满了数轴上的空隙,现在数轴上每一个点都与实数集合中的一个元素对应,换句话来说:实数集合布满了整个数轴,不留任何空隙.称这一性质为连续性.

即：实数的连续性.

实数集合有时候又被称为实数连续统.

2.1.2 最大数与最小数

首先提出以下概念：最大数与最小数.
$S \subset \mathbb{R},\ S \neq \emptyset$,如果$S$是有限集,则$S$必有最大数和最小数.
但是如果S是无限集,则S不一定有最大数与最小数.

- 如果$\exists \xi \in S$,使得$\forall x \in S$,有$x \leq \xi$,则称ξ是S中的最大数,记为$\xi = \max S$
- 如果$\exists \eta \in S$,使得$\forall x \in S$,有$x \geq \eta$,则称η是S中的最小数,记为$\eta = \min S$
- 显然,有限数集合一定有最大数和最小数.
- 但是无限数集合则不一定.

2.1.3 上确界与下确界

- 上界：
  - 设$S \subset \mathbb{R},\ S \neq \emptyset$,如果$\exists M \in \mathbb{R}$,使得$\forall x \in S$,有$x \leq M$,则称$M$是$S$的一个上界,或称$S$有上界.
  - 设U是S上界的集合,则U没有最大数,但U必定有最小数.
  - U中的最小数记为$\beta = supS$,称为S的上确界(supremum).

- $\beta: \begin{cases} \beta\text{是上界,即：}\forall x \in S(x \leq \beta) \\ \beta\text{是最小上界,即：}\forall \epsilon > 0 \exists x \in S(x > \beta - \epsilon) \end{cases}$

- 下界：
  - 设$S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$,如果$\exists m \in \mathbb{R}$,使得$\forall x \in S$,有$x \geq m$,则称m是S的一个下界,或称S有上界.
  - 设L是S下界的集合,则L没有最小数,但L必定有最大数.
  - L中的最大数记为$\alpha = inf S$,称为S的下确界(infimum).
  - $\alpha: \begin{cases} \alpha\text{是下界,即：}\forall x \in S(x \geq \alpha) \\ \alpha\text{是最大下界,即：}\forall \epsilon > 0 \exists x \in S(x < \alpha + \epsilon) \end{cases}$

2.1.4 确界存在定理(实数系连续性定理)

- 非空有上界的数集必有上确界.
- 非空有下界的子集必有下确界.

证明：

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}(x = [x] + (x))$$

$$(x) = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots$$

说明：

- 将(x)写成无限小数表示
- 如果是有限小数,那么后面加一列0.
- $0.a_1a_2 \dots a_p000 \dots$ $(a_p \neq 0)$可以写成$0.a_1a_2 \dots (a_p - 1)999 \dots$,这两者等价$(1 = 0.99999 \dots)$,但是一般使用前者的形式表示

设$S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$,有上界,$S$可以表示成为：

$$S = \{a_0 + a_1a_2 \dots a_n \dots | a_0 = [x], 0.a_1a_2 \dots a_n \dots = (x), x \in S\}$$

1. S有上界,取S中所有a_0的最大值,记为α_0
2. 作$S_0 = \{x | x \in S \wedge [x] = \alpha_0\}$,则$x \in S \wedge x \notin S \Rightarrow x < \alpha_0$

3. 取S_0中x的小数表示中第1位小数的最大者为α_1.

4. 作$S_1 = \{x|x \in S_1 \wedge x$的第一位小数为$\alpha_1\}$,则$x \in S \wedge x \notin S_1 \Rightarrow x < \alpha_0 + 0.\alpha_1$

5. 一般的,取S_{n-1}中x的小数表示中第n位的最大者为α_n

6. 那么$S_n = \{x|x \in S_{n-1} \wedge x$的小数第$n$位为$\alpha_n\}$,则$x \in S \wedge x \notin S_n \Rightarrow x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$

7. (a) 得到了一串集合$S \supset S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_N \supset \dots$
   (b) $\alpha_0 \in \mathbb{Z}, \alpha_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

8. 令$\beta = a_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$

9. 证明. β是S的上确界：

   (a) β是S的上界：
      i. $\forall x \in S$,或者$\exists n_0(x \notin S_{n_0})$,或者$\forall_{n\in\mathbb{N}}(x \in S_n)$
      ii. 若为前一种情况,则$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \le \beta$
      iii. 若为后一种情况,则考虑$[x]$与(x)的每一位小数.发现$x = \beta$
      iv. 因此β是S的上界.
   (b) β是最小上界,换句话来说：$\forall \epsilon > 0, \beta - \epsilon$不是上界.：
      i. 可取$n_0 \in \mathbb{Z}$,使$\dfrac{1}{10^{n_0}} < \epsilon$
      ii. 取$x \in S_{n_0}$,$[x] = \alpha_0$,前n_0位小数为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n_0}$
      iii. $\beta - x \le \dfrac{1}{10^{n_0}} < \epsilon \Rightarrow x > \beta - \epsilon$
      iv. 因此β是S的上确界.下确界同理.

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

此定理反映了实数系的连续性：

假设数轴上存在一点为空隙,这一点既不是有理数也不是无理数,那么这个空隙左边的实数没有上确界,右边的实数没有下确界.

因此被称为实数系连续性存在定理.

$$\frac{n^2}{m^2} + \frac{2nr}{m} + r^2 - 2 = \frac{2n}{m} + r^2 - t < 0$$

2.1.5 Dedekind切割定理

- 事实上实数连续性有多种等价的叙述方式,其中之一就是从有理数集的稠密性出发,使用Dedekind切割定理.

- 此定理是以有理数集Q的切割为基础导出无理数定义,进而定义整个实数系的.

- 定义1：设两个非空有理数集合A和B满足以下条件：$Q = A \cup B$.且对任意的$a \in A$与$b \in B$,成立$a < b$,则称A和B构成Q的一个切割,记为A/B.

  从逻辑上讲,对有理数集合Q的任何切割A/B,下述情况有且仅有一种出现：

  1. 集合A有最大数a_0,集合B没有最小数.
  2. 集合A没有最大数,集合B有最小数b_0
  3. 集合A没有最大数,集合B没有最小数.
  4. 集合A有最大数,集合B有最小数.

  但情况4是不可能发生的.因为根据切割的定理,可知$a_0 < b_0$.而$\dfrac{a_0+b_0}{2}$显然也是Q中的有理数,由$a_0 < \dfrac{a_0+b_0}{2} < b_0$,即得到$\dfrac{a_0+b_0}{2}$既不属于$A$也不属于$B$,这就与$Q = A \cup B$产生矛盾.
  对于情况1,称切割A/B确定了有理数a_0,对于情况2,称切割A/B确定了有理数b_0,而对情况3,由于A/B没有确定任何有理数,即A与B之间存在一个空隙,因此有必要引进一个新的数(即无理数)作为这一切割的确定对象,并且构成了实数集$\mathbb{R}$.

  引入了后就可以保证对实数集的任意切割都不会出现空隙了.

Dedekind切割定理的证明

Dedekind切割定理：设$\hat{A}/\hat{B}$是$\mathbb{R}$的一个切割,$\hat{A}, \hat{B}$在这里意思是非空,则或者$\hat{A}$有最大数,或者$\hat{B}$有最小数.

证明. 设A是$\hat{A}$中所有有理数所构成的集合,B是$\hat{B}$中所有有理数构成的集合,则A/B是有理数集合Q的一个切割.由前面所述,对于切割A/B,下述三种情况有且仅有一种出现：

1. 集合A有最大数a_0,集合B没有最小数.

2. 集合A没有最大数,集合B有最小数b_0

3. 集合A没有最大数,集合B没有最小数.

对情况1,可以证明此时a_0是集合$\hat{a}$的最大数,而集合$\hat{B}$没有最小数：

用反证法.若有$\hat{a} \in \hat{A}$,成立$a_0 < \hat{a}$,则由有理数的稠密性,在区间$(a_0, \hat{a})$中必存在有理数a_0.由$a < \hat{a}$,可知$a \in A$,但$a > a_0$,与a_0就是A的最大数矛盾,说明a_0就是集合$\hat{A}$的最大数.

对于任意的$\hat{b} \in \hat{B}$,因为$a_0 < \hat{b}$,于是在区间$(a_0, \hat{b})$中必存在有理数b.由$a_0 < b$,可知$b \in \hat{B}$,但是$b < \hat{b}$,这说明$\hat{B}$没有最小数.

对于情况2,可类似证明此时b_0也是集合$\hat{b}$的最小数,而集合$\hat{A}$没有最大数.

对于情况3,切割A/B确定一个无理数,将该无理数记为c,则对任意$a \in A$与任意$b \in B$,成立$a < c < b$.

因为无理数$c \in \mathbb{R} = \hat{A} \cup \hat{B}$,所以只有两种可能：或者$c \in \hat{A}$,或者$c \in \hat{B}$.若$c \in \hat{A}$,则$c$必是$\hat{A}$的最大数.若不是则存在$\hat{a} \in \hat{A}$,成立$c < \hat{A}$,在区间$(c, \hat{a})$中取有理数$a$,由$a < \hat{a}$,可知$a \in A$,但由$c < a$,又可知$a \in B$,这就产生矛盾.

同理.若$c \in \hat{B}$,则c必是$\hat{B}$的最小数.

综合情况123,可知Dedekind定理成立.

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

2.2 数列极限

注:本章内容可用于级数.

注:数列不是级数,级数需要求和数列不用.

2.2.1 数列

若函数f的定义域为全体正整数集合$\mathbb{N}^n$,则称

$$f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, f(n)\ (n \in \mathbb{N}^+)$$

为数列.因正整数集$\mathbb{N}^+$的元素可按由小到大的顺序排列,所以数列$f(n)$也可以写作：

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

或者可以简记为a_n,其中a_n称为该数列的通项.

以下为一些例子：

- $\{\frac{1}{x}\} : \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \cdots$
- $\{\frac{n}{n+3}\} : \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \ldots, \frac{n}{n+3}, \cdots$

- $\{n^2\}: 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$

- $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

简而言之,所谓数列就是按照正整数编号的一串数
注意：与集合不同,数列允许重复,而且有顺序.

2.2.2 邻域

a点的ϵ邻域$O(a,\epsilon) = (a-\epsilon, a+\epsilon)$,用集合的写法可表示为：

$$\{x|x-\epsilon < x < x+\epsilon\}$$

2.2.3 数列极限的定义

设数列x_n,存在x_0,若对于任意给定的$\epsilon > 0$,可以找到正整数N,使得当$n > N$时,有：

$$|x_n - a| < \epsilon(\text{或者等价的说},x \in O(a,\epsilon))$$

则称数列x_n收敛于a, a称为数列x_n的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

若不存在a,即数列x_n没有极限,则称x_n不收敛,或者称x_n发散.

- 此定义等价于：任给$\epsilon > 0$,若在$O(a,\epsilon)$之外数列x_n中的项至多只有有限个,则称数列x_n收敛域极限a.

- 由此定义可知,一个数列收敛的话,收敛于那个数,这与数列的前有限项无关,因此数列改动有限项不影响数列的收敛性和极限.

- $\frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \ldots$ 此数列以0为极限
  以零为极限的变量(此处的变量是数列)通常称为无穷小量.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \{x_n - a\}\text{是无穷小量}$$

2.2.4 一些例题

1. 用定义证明$\{\dfrac{n}{n+3}\}$的极限为1.

   证明. 对任意给定的$\epsilon > 0$:

   $$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| = \frac{3}{n+3} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{3}{\epsilon} - 3$$

   取$N = \left[\dfrac{3}{\epsilon}\right] + 1$,当$n > N$时,必定满足

   $$\left|\frac{n}{n+3} - 1\right| < \epsilon$$

   因此成立.

   □-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

2. - $\{n^2\} : 1, 4, 9, 16, \ldots$
   - $\{(-1)^n\} : -1, 1, -1, 1, \ldots$

   根据定义,以上数列都是发散的.

3. $0 < |q| < 1$,证明$\{q^n\}$是无穷小量.

   证明. 对任意的$\epsilon > 0$:

   $$|q^n - 0| = |q^n| < \epsilon$$

   $$\Leftrightarrow n \lg|q| < \lg\epsilon \Leftrightarrow n > \frac{\lg\epsilon}{\lg|q|}$$

   于是N只要取任意大于这玩意的正整数即可,取$N = max\left(\left[\dfrac{\lg\epsilon}{\lg|q|}\right], 1\right)$当$n > N$时,$|q^n - 0| = |q^n| < \epsilon$

   □-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

   注 : 根据对数列极限的定义的讨论,N取的太大没啥意义,可以只考虑绝对值很小的$\epsilon > 0$,不妨考虑任意给定的$0 < \epsilon < |q|$.则N可取为$\left[\dfrac{\lg\epsilon}{\lg|q|}\right]$,即$\left[\log_{|q|}\epsilon\right]$,当$n > N$时,成立$|q^n - 0| < \epsilon$

根据数列极限的定义来证明某一数列收敛,其关键是对任意给定的$\epsilon > 0$寻找正整数N.在上面的立体中,N都是通过解不等式$|x_n - a| < \epsilon$来得出的.但在大多数情况下,这个不等式并不容易解.实际上,数列极限的定义并不要求取到最好的N,所以在证明中常常对$|x_n - a|$适度的做一些放大处理,这是种常用的技巧.以下是一些例子,描述了怎么使用这个技巧：

1. 证明$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ (a > 1)$

2.2.5 O'Stolz(stolz)定理

设$(a_n)(n > 1)$和$(b_n)(n > 1)$为两个实数数列.若b_n为从某项开始严格单调的无界正数数列,且有穷极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$$

存在,则：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

其中L可以为有限实数或正/负无穷.

该定理虽然主要被用于处理数列不定型极限,但该定理在没有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$这一条件时也是成立的.虽然该定理通常是以分布$b_n$为正数数列的情形加以叙述的,但注意到该定理对分子$a_n$的正负没有限制,所以原则上把对数列$b_n$的限制条件按替换为"严格单调递减且趋于负无穷大"也是没问题的.

与洛必达的迭代用法类似,在尝试使用此定理考察数列极限时,如果发现两个数列差分的商任然是不定型,那么可以继续用.

注意：与洛必达类似,判定条件不存在不能认定极限本身不存在.

Chapter 2

离散数学

1 前置知识

2 集合论

2.1 集合论的主要内容

- 研究对象：集合,关系,函数,自然数,基数
- 研究思想：以逻辑为基础,以集合为工具,表示和构造各种数学对象
- 研究内容：
  - 集合的基本概念：集合之间的关系,运算,恒等式
  - 二元关系：表示,性质,函数,等价关系,序关系
  - 自然数：皮亚诺系统,自然数的运算,性质
  - 基数：有序集于无穷集,基数的比较
  - 良序,超限归纳法

2.2 集合论中的问题

- 如何给集合下定义?

- 如何用集合去定义关系,函数,自然数?
- 如何比较集合的大小?
- 能否把每个集合的元素依次列举出来?
- 有没有最大的集合?

2.3 集合的表示

- 列举法：

  列出集合中的全体元素,元素之间用逗号分开,然后用花括号括起来,比如：$A = \{a, b, c, d\}, B = \{2, 4, 6, \dots\}$.

- 描述法：

  用谓词$P(x)$表示x具有性质P,用$\{x|P(x)\}$表示具有性质P的集合.例如：$P_1(x)$表示x是英文字母,$P_2(x)$表示x是十进制数字,$C = \{x|P_1(x)\}$表示26个英文字母的集合,$D = \{x|P_2(x)\}$表示10个十进制数字的集合.

2.4 描述集合的注意事项

1. 集合中的元素是各不相同的.
2. 集合中的元素不规定顺序.
3. 集合的两种表示法可以互相转化,例如,$B = 2, 4, 6, ...$可用描述法表示为$B = \{x|x > 0$且x是偶数$\}$或$B = \{x|x = 2(k+1)$, k为非负整数$\}$.

2.5 常用的集合

- $\mathbb{N}$: 自然数集合 $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \dots$
- $\mathbb{Z}$: 整数集合 $\mathbb{Z} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- $\mathbb{Q}$: 有理数集合
- $\mathbb{R}$: 实数集合
- $\mathbb{C}$: 复数集合

2.6 集合之间的关系

2.6.1 子集

设A, B为二集合,若B中的元素都是A中的元素,则称B是A的子集,也称A包含B,或者B包含于A,记作$B \subseteq A$,其符号化形式为：

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

若B不是A的子集,则记作$B \subsetneq A$,其符号化形式为：

$$B \subsetneq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

2.6.2 有限集和无限集

- 有限集,即元素数量优先的集合,定义叙述为 ： S是由n个元素组成的集合(n是非负正整数,包含0),则称S为有限集.
- 无限集:不是有限集的集合都是无限集.

2.6.3 可列集

可列集是无限集的一种,如果某无限集S中的元素可以按某种规则排成一列,并且无重复,无遗漏,则称该S为可列集.

此时S可以被用列举法或者描述法表示.

任何无限集都包含可列集,但是无限集本身不一定是可列集.

另外,可列个可列集的并也是可列集.

2.6.4 相等

设A, B为二集合,若A包含B且B包含A,则称A与B相等,记作$A = B$,符号化形式为：

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \leftrightarrow x \in A)$$

2.6.5 集合之间包含关系的性质

设A, B, C为三个集合,则以下三命题为真：

1. $A \subseteq A$;

2. 若$A \subseteq A$且$A \neq B$,则$B \subsetneq A$;

3. 若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$,则$A \subseteq C$

2.6.6 真子集

设A, B为二集合,若A为B的子集且$A \neq B$,则称A为B的真子集,或者又称B真包含A,记作$A \subset B$,符号化形式为：

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

若A不是B的真子集,则记作$A \not\subset B$,其符号化形式为：

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge A \neq B$$

设A, B, C为三个集合,则以下命题为真：

1. $A \not\subset A$;

2. 若$A \subset B$,则$B \not\subset A$;

3. 若$A \subset B$,且$B \subset C$,则$A \subset C$

2.6.7 空集

不拥有任何元素的集合称为空集合,简称空集,记作$\emptyset$(读作ugh)

比如$\{x|x^2 + 1 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$和$\{(x, y)|x^2 + y^2 < 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}$都是空集.

注意：

- 空集是一切集合的子集,
- 空集是唯一的
- 空集是最小的集合.

2.6.8 全集

如果限定所讨论的集合都是某个集合的子集,则称该集合为全集,记作$\mathbb{E}$.

从定义可以看出,全集是相对的,视具体情况而定,因此不唯一.

比如：讨论区间(a, b)上的实数的性质时,可以取(a, b)为全集,也可以取$[a, b), (a, b], (a, +\infty), \mathbb{R}$等为全集.

给定若干个集合之后,都可以找到包含它们的全集.在今后讨论中,所涉及的集合都可以看成是某个全集$\mathbb{E}$的子集.

2.6.9 集合的元素个数/集合的基数/集合的势

$\emptyset$为0元集,含1个元素的集合为单元集或1元集,含两个元素的集合为2元集,依次类推,含n个元素的集合称为n元集($n \geq 1$).

一个集合A所包含的元素数目称为该集合的基数或势(cardinality).记作$|A|$或者$\#A$或$card(A)$

当A中的元素个数为有限数时($|A| < \infty$),A称为有穷集或有限集,否则称为无限集或者无穷集.

2.6.10 幂集

设A为一个集合,称由A的全体子集组成的集合为A的幂集,记作$\mathcal{P}(A)$.

用描述法可以表示为 $\mathcal{P}(A) = \{x|x \subseteq A\}$

注意:

- 在概率论中也会用$\mathcal{P}(A)$来表示事件A的概率,两者虽然不相同但是定义是一样的.
- 为了避免混淆,也可以用2^A表示A的幂集.
- 这并不是没有道理,设集合A的元素个数$|A| = n$,则$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

2.6.11 求幂集的步骤

为了求出给定集合A的幂集,先求A的由低到高的所有子集,再将它们组成集合.

设$A = \{a, b, c\}$,求$\mathcal{P}(A)$的步骤如下:

0元子集为$\emptyset$;1元子集为$\{a\}, \{b\}, \{c\}$;2元子集为$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$;3元子集为$\{a, b, c\} = A$;

所以,A的幂集为:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2.6.12 集族

除了幂集$\mathcal{P}(A)$以外,还有其他形式的由集合构成的集合,统称为集族.若集族中的集合都赋予记号,则可得带指标集的集族.

设$\mathcal{A}$为一个集族,S为一个集合,若对于任意的$\alpha \in S$,存在唯一的$A_\alpha \in \mathcal{A}$与之对应,而且$\mathcal{A}$中的任意集合都对应S中的某一元素,则称$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族,S称为$\mathcal{A}$的指标集.记为$\mathcal{A} = \{A_\alpha|\alpha \in S\}$,或$\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$

如果把$\emptyset$看作集族,则称$\emptyset$为空集族.

2.6.13 多重集

设全集为$\mathbb{E}$,$\mathbb{E}$中元素可以不止一次在A中出现的集合A称为多重集.若$\mathbb{E}$中元素a在A中出现k次$(k \geq 0)$,则称a在A中重复度为k.

例如：设全集$E = \{a, b, c, d, e\}, A = \{a, a, b, b, c\}$为多重集,其中$a, b$的重复度为2,$c$的重复度为1,而$d, e$的重复度为0.

集合可以看作重复度均≤ 1的多重集.

2.7 集合的运算

2.7.1 并集

设A, B为二集合,称由A和B的所有元素组成的集合为A与B的并集,记作$A \cup B$,称$\cup$为并元算符.

$A \cup B$得到的集合,用描述法可以表示为：

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合(初级并).

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合,$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$为可数个集合,则：

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x | \exists i (1 \leq i \leq n \wedge x \in A_i)\}$$

并集也可以写作类似求和的形式：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

2.7.2 交集

设A, B为二集合,称由A和B的公共元素组成的集合为A与B的交集,记作$A \cap B$,称$\cap$为并元算符.

$A \cap B$的描述法表示为

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合(初级交).

设$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$为可数个集合,则：

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x | \forall i (1 \leq i \leq n \to x \in A_i)\}$$

同样的,也有这种简化形式：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

2.7.3 不相交

设A, B为二集合,若$A \cap B = \emptyset$,则称A和B是不交的.设$A_1, A_2, \ldots$是可数个集合秒如果对于任意的$i \neq j$,都有$A_i \cap A_j = \neq$,则称$A_1, A_2, \ldots$是互不相交的.

设$A_n = \{x \in R | n-1 < x < n\}, n = 1, 2, \ldots$,则$A_1, A_2, \ldots$是互不相交的.

2.7.4 相对补集

设A, B为二集合,称属于A而不属于B的全体元素组成的集合为B对A的相对补集,记作$A - B$或$\complement_A B$.$A - B$的描述法表示为：

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

2.7.5 对称差

设A, B为二集合,称属于A而不属于B,或属于B而不属于A的全体元素组成的集合为A与B的对称差,记作$A \oplus B$.

$A \oplus B$的描述法表示为：

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

容易看出：

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

2.7.6 绝对补集

设$\mathbb{E}$为全集,$A \subseteq \mathbb{E}$, 称A对$\mathbb{E}$的相对补集为A的绝对补集,记作$A^{\complement}$或$\sim A$或$\complement_{\mathbb{E}} A$.

$A^{\complement}$的描述法表示为：

$$A^{\complement} = \{x | x \in \mathbb{E} \wedge x \notin A\}$$

因为$\mathbb{E}$是全集,所以$x \in \mathbb{E}$是真命题,于是：

$$A^{\complement} = \{x | x \notin A\}$$

2.7.7 广义并集

设$\mathcal{A}$为一个集族,称由$\mathcal{A}$中全体元素的元素组成的集合为$\mathcal{A}$的广义并,记作$\bigcup \mathcal{A}$(”大并$\mathcal{A}$”).

$\bigcup \mathcal{A}$的描述法表示为：

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x | \exists z (x \in z \wedge z \in \mathcal{A})\}$$

设$\mathcal{A}=\{\{a,b\},\{c,d\},\{d,e,f\}\}$,则$\bigcup\mathcal{A}=\{a,b,c,d,e,f\}$.
当$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族时：

$$\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\{A_\alpha|\alpha\in S\}=\bigcup_{\alpha\in S}A_\alpha$$

2.7.8 广义交

设$\mathcal{A}$为一个集族,称由$\mathcal{A}$中全体元素的元素组成的集合为$\mathcal{A}$的广义并,记作$\bigcap\mathcal{A}$(”大并$\mathcal{A}$”).
$\bigcap\mathcal{A}$的描述法表示为：

$$\bigcap\mathcal{A}=\{x|\exists z(x\in z\wedge z\in\mathcal{A})\}$$

设$\mathcal{A}=\{\{1,2,3\},\{1,a,b\},\{1,6,7\}\}$,则$\bigcap\mathcal{A}=\{1\}$.
当$\mathcal{A}$是以S为指标集的集族时：

$$\bigcap\mathcal{A}=\bigcap\{A_\alpha|\alpha\in S\}=\bigcap_{\alpha\in S}\mathcal{A}_\alpha$$

注意：当$A=\emptyset$时,$\cap\emptyset$无意义.

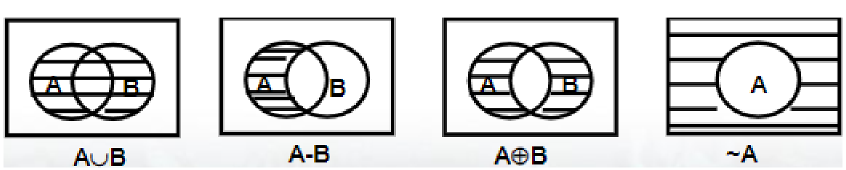
2.7.9 集合运算的优先级

有以下几类：

- 第一类运算(此类运算按照从左向右的顺序进行)：绝对补,幂集,广义交,广义并等.
- 第二类运算(此类运算按照括号决定的顺序运算,多个括号并排或没有括号的部分按照从左向右的顺序运算)：初级并,初级交,相对补,对称差等.

2.7.10 文氏图

文氏图就是将集合与集合之间的关系以及一些运算的结果用图像进行表示.在文氏图中,用矩形代表全集,用元或者其他闭曲线的内部代表$\mathbb{E}$的子集,并将运算结果得到的集合用阴影部分表示.



2.7.11 容斥原理(排斥原理)

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合,则：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

2.8 基本集合恒等式

设$\mathbb{E}$,A, B, C为$\mathbb{E}$的任意子集:

1. 幂等律：$A \cap A = A, A \cup A = A$
2. 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
3. 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. 德·摩根律：
   - 绝对形式：$(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}, (A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$
   - 相对形式：$\mathbb{E} - (A \cup B) = (\mathbb{E} - A) \cap (\mathbb{E} - B), \mathbb{E} - (A \cap B) = (\mathbb{E} - A) \cup (\mathbb{E} - B)$
6. 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
7. 零律：$A \cup \mathbb{E} = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
8. 同一律：$A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$
9. 排中律：$A \cup A^{\complement} = \mathbb{E}$
10. 矛盾律：$A \cap A^{\complement} = \emptyset$
11. 余补律：$\emptyset^{\complement} = \mathbb{E}, \mathbb{E}^{\complement} = \emptyset$
12. 双重否定律：$(A^{\complement})^{\complement} = A$
13. 补交转换律：$A - B = A \cap B^{\complement}$

2.9 集合恒等式推广到集族的情况

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$为集族,$B$为一集合：

- 分配律：$B\cup(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcap\limits_{\alpha\in S}(B\cup A_\alpha), B\cap(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcup\limits_{\alpha\in S}(B\cap A_\alpha)$
- 德·摩根律：
  - 绝对形式:
    - $(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})^{\complement} = \bigcap\limits_{\alpha\in S}({A_\alpha}^{\complement})$
    - $(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S})^{\complement} = \bigcup\limits_{\alpha\in S}({A_\alpha}^{\complement})$
  - 相对形式：
    - $B-(\bigcup\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcap\limits_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$
    - $B-(\bigcap\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}) = \bigcup\limits_{\alpha\in S}(B-A_\alpha)$

2.10 集合幂集运算的性质

1. $A\subseteq B$当且仅当$\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A-B)\subseteq(\mathcal{P}(A)-\mathcal{P}(B))\cup\{\emptyset\}$

2.11 有序对与卡氏积

2.11.1 有序对(有序二元组)

有序对又称有序二元组：

$$<a,b>=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

其中a是第一元素,b是第二元素.

$<a,b>$也记作(a,b).

由于集合没有顺序,因此a,b和b,a是一样的.又称无序对,在公理集合论中有一条定义无序对的公理,称为无序对公理：

如果a,b是集合,则{a,b}依然是集合

而在$< a,b >$中,a在每一个子集合中,而b只出现在其中一个子集合中,因此他们的地位不相等,所以在有序对中a是第一元素,n是第二元素.

实际上是定义了一个数组,用这种方法来保证元素的顺序.

接下来一章严格证明有序对的性质.

2.11.2 有序对性质的证明

- 引理1：$\{x,a\}=\{x,b\} \Leftrightarrow a=b$

  叙述为：当集合$\{x,a\}$等于$\{x,b\}$当且仅当$a=b$.

  证明：

  - 充分性($\Leftarrow$) 是显然的,因此不证.
  - 必要性($\Rightarrow$) 分两种情况：
    1. $x=a$. $\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow \{a,a\}=\{a,b\} \Rightarrow \{a\}=\{a,b\} \Rightarrow a=b$
    2. $x\neq a$. $a\in\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow a=b$.

  $\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 引理2：若$\mathcal{A}=\mathcal{B}\neq\emptyset$.则：

  1. $\bigcup\mathcal{A}=\bigcup\mathcal{B}$
  2. $\bigcap\mathcal{A}=\bigcap\mathcal{B}$

  证明：

  1. $\forall x, x\in\bigcup\mathcal{A} \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z) \Leftrightarrow \exists z(z\in\mathcal{B}\wedge x\in z) \Leftrightarrow x\in\bigcup\mathcal{B}$
  2. $\forall x, x\in\bigcap\mathcal{A} \Leftrightarrow \forall z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z) \Leftrightarrow \forall z(z\in\mathcal{B}\wedge x\in z) \Leftrightarrow x\in\bigcap\mathcal{B}$

  $\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 定理(性质1)–两个有序对相对,当且仅当他们的第一个元素和第二个元素分别相等：$< a,b >=< c,d >\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$

  证明：

  - ($\Leftarrow$) 显然,不证.

- $(\Rightarrow)$：

  由引理2,$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}\Rightarrow\bigcap\{\{a\},\{a,b\}\}=\bigcap\{\{c\},\{c,d\}\}\Rightarrow\{a\}=\{c\}\Leftrightarrow a=c$

  又因为$<a,b>=<c,d>\Leftrightarrow\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}\Rightarrow\bigcup\{\{a\},\{a,b\}\}=\bigcup\{\{c\},\{c,d\}\}\Rightarrow\{a,b\}=\{c,d\}$

  再由引理1,得出$b=d$.

  □-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 推论：$a\neq b\Rightarrow<a,b>\neq<b,a>$

  证明(反证)：

  $$<a,b>=<b,a>\Leftrightarrow a=b$$

  与$a\neq b$矛盾.

  □-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

2.11.3 有序n元组

- 有序三元组：

  $$<a,b,c>=<<a,b>,c>$$

- 有序n$(n>2)$元组：

  $$<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<<a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}>,a_n>$$

有以下定理：

$$<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<b_1,b_2,\ldots,b_n>\Leftrightarrow a_i=b_i, i=1,2,\ldots,n$$

2.11.4 笛卡尔乘积集合(卡氏积)

设A,B为两个集合,取$x\in A,y\in B$,构造有序对集合$\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$(属于$A$的$x$在前面,属于$B$的$y$在后面),将这样的集合记为笛卡尔乘积集合(又称为卡氏积)：

$$A\times B=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\}$$

这种集合可以用来表示两个集合中元素的排列组合.

举例,设$A=\{\emptyset,a\},B=\{1,2,3\}$,则：

- $A\times B=\{<\emptyset,1>,<\emptyset,2>,<\emptyset,3>,<a,1>,<a,2>,<a,3>\}$

- $B \times A = \{<1, \emptyset>, <1, a>, <2, \emptyset>, <2, a>, <3, \emptyset>, <3, a>\}$
- $A \times A = \{<\emptyset, \emptyset>, <\emptyset, a>, <a, \emptyset>, <a, a>\}$
- ...

2.11.5 卡氏积的性质

- 卡氏积非交换性：$A \times B \neq B \times A$(除非$A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$)

  反证法反例：设$A = \{1\}, B = \{2\}$：

$$A \times B = \{<1, 2>\} \neq \{<2, 1>\} = B \times A$$

$\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 卡氏积非结合性：$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$(除非$A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$)

  反证法反例：$A = B = C = \{1\}$：

$$(A \times B) \times C = \{<<1, 1>, 1>\} \neq \{<1, <1, 1>>\} = A \times (B \times C)$$

$\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 卡氏积分配律：

  1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  3. $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \cup A)$
  4. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

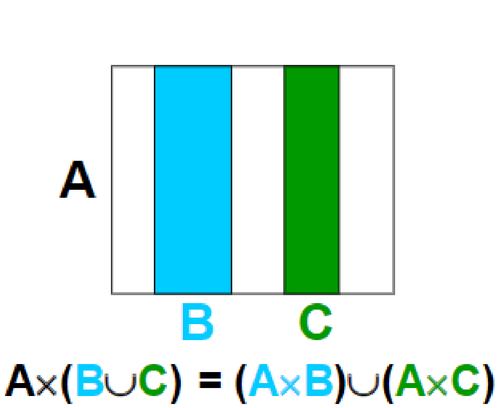
  其中选一个证明：$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

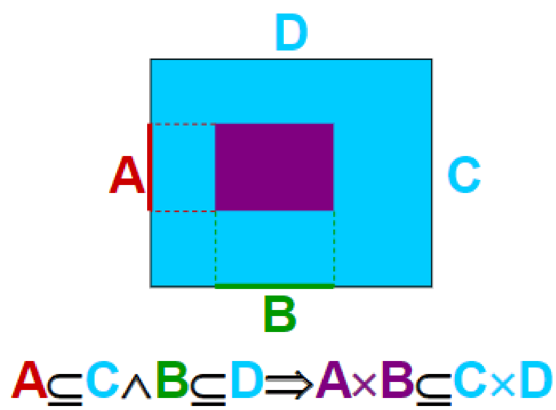
  证明：$\forall <x, y>, <x, y> \in A \times (B \cup C)$
  $\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)$
  $\Leftrightarrow (x \in A \vee y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$
  $\Leftrightarrow (<x, y> \in A \times B) \vee (<x, y> \in A \times C)$
  $\Leftrightarrow <x, y> \in (A \times B) \cup (A \times C)$

$\square$-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

2.11.6 卡氏积的图示

放张图就一目了然了：





特别的：$A = B = \mathbb{R}$,则$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$,也就是笛卡尔平面直角坐标系.

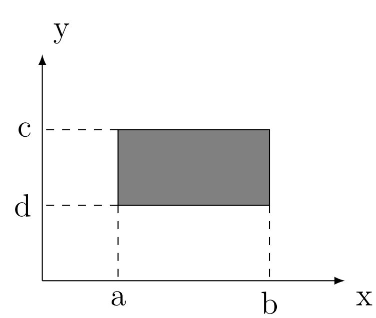
同样的,也有R^3, R^n

$$A = \{x|x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$$

$$B = \{y|y \in \mathbb{R} \wedge c \leq y \leq d\}$$

$$C = \{z|z \in \mathbb{R} \wedge e \leq z \leq f\}$$

那么$A \times B$的图像表示就是：



同样的,$A \times B \times C$表示的是空间中的一个立方体,这里就不画了(邪恶的tikz).

2.11.7 n维卡氏积

- n维卡氏积：

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< x_1, x_2, \ldots, x_n > | x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

- $A^n = A \times A \times \cdots \times A$
- $|A_i| = n_i, i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_n$.
- n维卡氏积性质于2维卡氏积类似.

2.11.8 n维卡氏积的性质

- 非交换：$A \times B \times C \neq B \times C \times A$ (要求A, B, C均非空,且互不相等)
- 非结合：(非二元运算)
- 分配律：例如：$A \times B \times (C \cup D) = (A \times B \times C) \cup (A \times B \times D)$
- 其他：比如$A \times B \times C = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee C = \emptyset$.

2.12 二元关系

2.12.1 n元关系

- n元关系：其元素全是有序n元组的集合.
- 例1：$F_1 = \{< a, b, c, d >, < 1, 2, 3, 4 >, < \alpha, \beta, \gamma, \delta >\}$—$F_1$是3元关系.
- 例2：$F_2 = \{< a, b, c >, < \alpha, \beta, \gamma >, < A, B, C >\}$—$F_2$是3元关系

2.12.2 二元关系

- 2元关系(关系)：元素全是有序对的集合.
- 比如$A = \{< A, B >, < 1, 2, 3 >, a, \alpha, 1\}$—如果$a, \alpha, 1$不是有序对,那么$A$不是关系.

2.12.3 二元关系的记号

- 设F是二元关系,那么有三种记法：
  - 中缀(infix)记号：xFy
  - 前缀(prefix)记号：$F(x,t), Fxy$
  - 后缀(suffix)记号：$\langle, xy\rangle \in F, xyF$
- 例如：$2 < 15 \Leftrightarrow < (2,15) \Leftrightarrow \langle 2,15\rangle \in <$

2.12.4 A到B的二元关系

- A到B的二元关系：是$A \times B$的任意子集.

  R是A到B的二元关系$\Leftrightarrow R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in \mathcal{P}(A \times B)$
- 如果$|A| = m, |B| = n$,则$|A \times B| = mn$,所以$|P(A \times B)| = 2^{mn}$,也就是说A到B不同的二元关系共有2^{mn}个.

2.12.5 A到B的二元关系举例

设$A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$,则$A$到$B$的二元关系共有4个：

$$R_1 = \emptyset, R_2 = \{\langle a_1, b\rangle\}, R_3 = \{\langle a_2, b\rangle\}, R_4 = \{\langle a_1, b\rangle, \langle a_2, b\rangle\}$$

反过来,B到A的二元关系也有4个：

$$R_5 = \emptyset. R_6 = \{\langle b, a_1\rangle\}, R_7 = \{\langle b, a_2\rangle\}, R_8 = \{\langle b, a_1\rangle, \langle b, a_2\rangle\}$$

2.12.6 A上的二元关系

- A上的二元关系：是$A \times A$的任意子集.

  R是A上的二元关系 $\Leftrightarrow R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R \in P(A \times A)$
- 如果$|A| = m$,则$|A \times A| = m^2$,所以：

  $$|P(A \times A)| = 2^{m^2}$$

  即A上不同的二元关系共有2^{m^2}个

2.12.7 一些特殊关系

- 设A是任意集合,则可以定义A上的：
  - 空关系：$\emptyset$
  - 恒等关系：$I_A = \{\langle x, x\rangle | x \in A\}$
  - 全域关系：$E_A = A \times A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in A\}$
  - 包含关系：$\subseteq_A = \{\langle x, y\rangle | x \subseteq \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y\}$
  - 真包含关系：$\subset_A = \{\langle x, y\rangle | x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subset y\}$
- 设$A \subseteq Z$,则可以定义A上的：
  - 整除关系：$D_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x|y\}$
  - 例：$A = \{1, 2, 3, 4\}$,则：

$$D_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$$

- 设$A \subset R$,则可以定义A上的：
  - 小于等于(less than or equal to)关系：$LE_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x \leq y\}$
  - 小于(less than)关系：$L_A = \{\langle x, y\rangle | x \in A \wedge y \in A \wedge x < y\}$
  - 大于等于(greater than or equal to)关系
  - 大于(greater than)关系,...

2.12.8 与二元关系有关的概念

- 对任意集合R,可以定义：
  - 定义域(domain)：$dom\ R = \{x | \exists y(xRy)\}$
  - 值域(range)：$ran\ R = \{y | \exists x(xRy)\}$
  - 域(field)：$fld\ R = dom\ R \cup ran\ R$

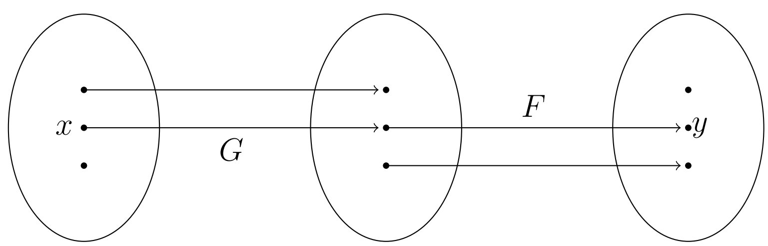
  例：
  - $R_1 = \{a, b\}$

- $R_2 = \{a, b, \langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle\}$
- $R_3 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 5, 6\rangle\}$

当a, b不是有序对时,R_1和R_2不是关系.

- $dom\ R_1 = \emptyset, ran\ R_1 = \emptyset, fld\ R_1 = \emptyset$
- $dom\ R_2 = \{c, e\}, ran\ R_2 = \{d, f\}, fld\ R_2 = \{c, d, e, f\}$
- $dom\ R_3 = \{1, 3, 5\}, ran\ R_3 = \{2, 4, 6\}, fld\ R_3\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 对任意集合F, G,可以定义：
  - 逆(inverse)：$F^{-1} = \{\langle x, y\rangle | yFx\}$
    定理：设F, G为二集合,则$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$
    这个可以用矩阵的逆来理解.
    证明：$\forall\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle \in (F \circ G)^{-1}$
    $\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in (F \circ G)$
    $\Leftrightarrow \exists z(yGz \wedge zFx)$
    $\Leftrightarrow \exists z(zG^{-1}y \wedge xF^{-1}z)$
    $\Leftrightarrow \exists z(xF^{-1}z \wedge zG^{-1}y) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in G^{-1} \circ F^{-1}$
    □-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)
  - 合成(复合)(composite)：$F \circ G = \{\langle x, y\rangle | \exists z(xGz \wedge zFy)\}$



    关于合成,还分为：
    * 顺序合成(右合成)：$F \circ G = \{\langle x, y\rangle | \exists z(xFz \wedge zGy)\}$
    * 逆序合成(左合成)：$F \circ G = \{\langle x, y\rangle | \exists z(xGz \wedge zFy)\}$

    合成运算有结合律：
    * 设R_1, R_2, R_3为集合,则：

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

证明：$\forall\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$
$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge z(R_1 \circ R_2)y)$
$\Leftrightarrow \exists z(xR_3z \wedge \exists t(zR_2t \wedge tR_1y))$
$\Leftrightarrow \exists z\exists t(xR_3z \wedge (zR_2t \wedge tR_1y))$
$\Leftrightarrow \exists t\exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$
$\Leftrightarrow \exists t\exists z(xR_3z \wedge zR_2t \wedge tR_1y)$
$\Leftrightarrow \exists t(\exists z(xR_3z \wedge zR_2t) \wedge tR_1y)$
$\Leftrightarrow \exists t(x(R_2 \circ R_3)t \wedge tR_1y)$
$\Leftrightarrow xR_1 \circ (R_2 \circ R_3)y$
$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
$\therefore (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

□-Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum/证毕)

- 对任意集合F, A,可以定义：
  - 限制(restriction)：$F \restriction A = \{\langle x,y\rangle | xFy \wedge x \in A\}$
  - 象(image)：$F[A] = ran(F \restriction A), F[A] = \{y | \exists x(x \in A \wedge xFy)\}$
- 对任意集合F,可以定义：
  - 单根(single rooted)：一个y对应唯一的一个x就是单根.
    F是单根的 $\Leftrightarrow \forall y(y \in ran\ F \to \exists! x(x \in dom\ F \wedge xFy)) \Leftrightarrow (\forall y \in ran\ F)(\exists! x \in dom\ F)(xFy)$
    * $\exists!$表示"存在唯一的"
    * $\forall x(x \in A \to B(x))$缩写为$(\forall x \in A)B(x)$
    * $\exists x(x \in A \wedge B(x))$缩写为$(\exists x \in A)B(x)$
  - 单值(single valued)：一个x对应一个唯一的y就是单值.

$$F\text{是单值的} \Leftrightarrow \forall x(x \in dom\ F \to \exists! y(y \in \rangle F \wedge xFy)) \Leftrightarrow (\forall x \in dom\ F)(\exists! y \in ran\ F)(xFy)$$

2.13 关系的表示与性质

2.13.1 关系矩阵

设$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, R \subseteq A \times A$

R的关系矩阵为一个$n \times n$的方阵$M(R) = (r_{ij})_{n\times n}$：

$$M(R)(i,j) = r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_iRa_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

举个例子：

- $A = \{a, b, c\}$
- $R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle\}$

$$M(R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M(R_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注：默认从左到右,从上到下按a, b, c的顺序排列.

2.13.2 关系矩阵的性质

- 集合表达式与关系矩阵可以唯一互相确定
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$
  - ^{T}表示矩阵转置
- $M(R_1 \circ R_2) = M(R_2) \cdot M(R_1)$
  - $\cdot$表示矩阵的"逻辑乘"(即分量相加或数乘换成逻辑操作),加法用$\vee$,乘法用$\wedge$

2.13.3 关系矩阵举例

- $A = \{a, b, v\}$
- $R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle\}$
- $R_2 = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle\}$
- 用$M(R_1), M(R_2)$确定$M({R_1}^{-1}), M({R_2}^{-1}), M(R_1 \circ R_1), M(R_1 \circ R_2)$,从而求出他们的集合表达式.

解：

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M({R_1}^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad M({R_2}^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

- ${R_1}^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$
- ${R_2}^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- $R_1\circ R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

- $R_1\circ R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$

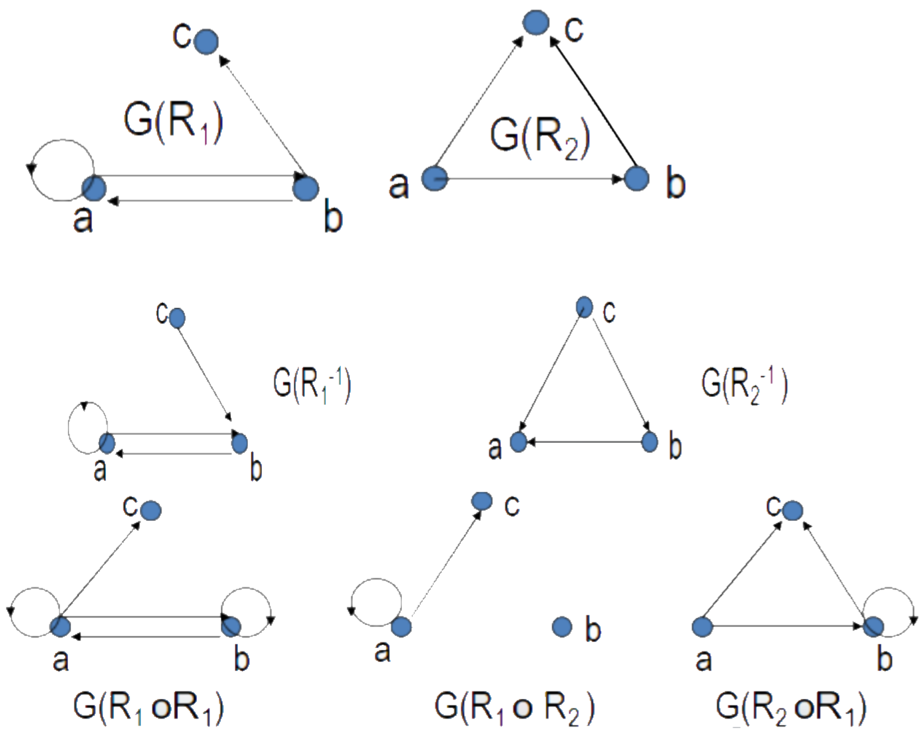
2.13.4 关系图

- $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},R\subseteq A\times A$
- R的关系图$G(R)$：
  - 以"o"表示A中元素(称为顶点), 以"$\rightarrow$"表示R中元素(称为有向边)
  - 若a_iRa_j,则从顶点a_i向顶点a_j引有向边$\langle a_i,a_j\rangle$

2.13.5 关系图举例

- $A=\{a,b,c\}$
- $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$
- $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$
- ${R_1}^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

- $R_2{}^{-1} = \{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$
- $R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$
- $R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$
- $R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$



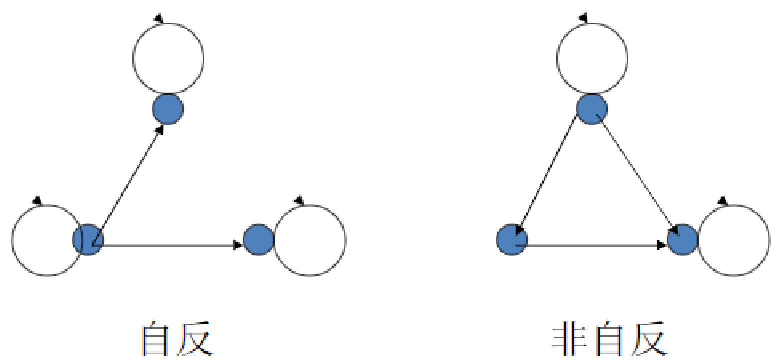
去他妈的tikz!

2.13.6 讨论

- 当A中元素标定次序后,对于$R \subseteq A \times A$:
  - $G(R)$与R的集合表达式可唯一互相确定.
  - R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可唯一互相确定.
- 对于$R \subseteq A \times B$:
  - $|A| = n, |B| = m$,关系矩阵$M(R)$时$n \times m$阶.
  - $G(R)$中边都是从A中元素指向B中元素.

2.13.7 关系的性质

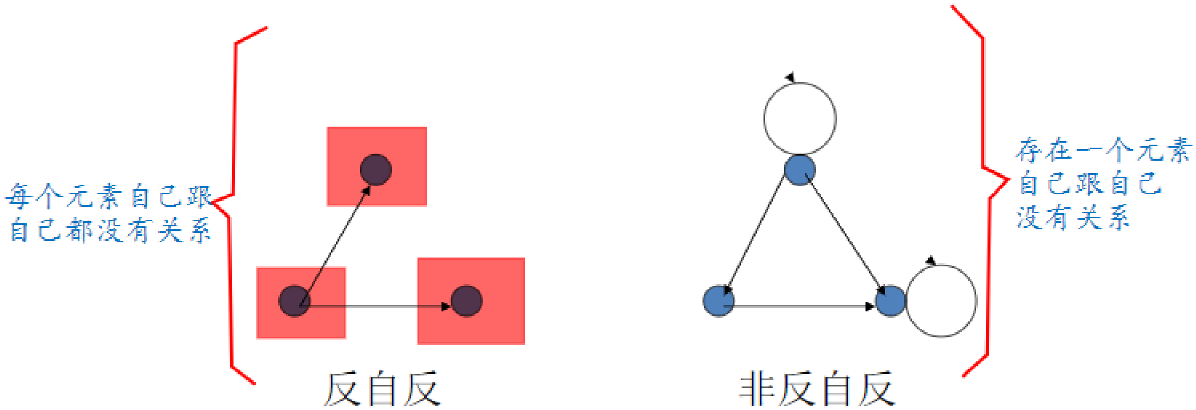
- 自反性(reflexivity)：
  - $R \subseteq A \times A$
  - R是自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)xRx$
  - R是非自反的$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \land \neg xRx)$



  定理：以下描述等价

  - R是自反的
  - $I_A \subseteq R$
  - R^{-1}是自反的
  - $M(R)$主对角线上的元素全为1
  - $G(R)$的每个顶点处均有环.

- 反自反性(irreflexivity)：
  - $R \subseteq A \times A$
  - R是反自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to \neg xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg xRx$
  - R是非反自反的$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \land xRx)$

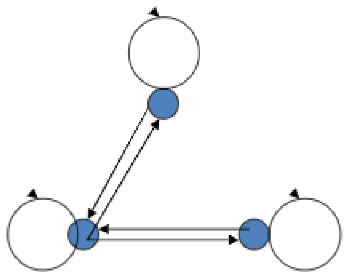


定理：以下描述等价

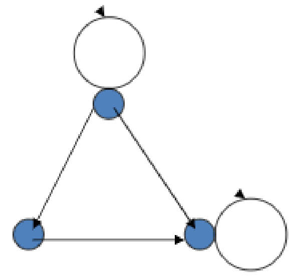
- R是反自反的
- $I_A \cap R = \emptyset$
- R^{-1}是反自反的
- $M(R)$主对角线上的元素全为0
- $G(R)$的每个顶点处均无环.

自反且反自反：$\emptyset$上的空关系

- 对称性(symmetry)：
  - $R \subseteq A \times A$
  - R是对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \rightarrow yRx]$
  - R是非对称的$\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$



对称

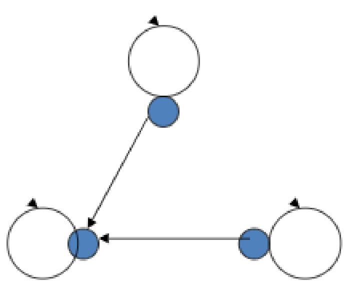


非对称

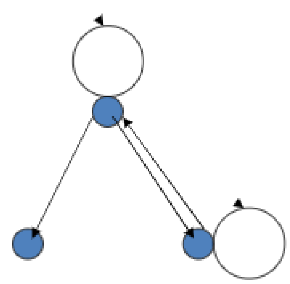
定理：以下描述等价

- R是对称的
- $R^{-1} = R$
- R^{-1}是对称的
- $G(R)$的任何两个顶点之间若有边,则必有两条方向相反的有向边.

- 反对称性(antisymmetry)：
  - $R \subseteq A \times A$
  - R是反对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \wedge yRx \rightarrow x = y]$
  - R非反对称$\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$



反对称

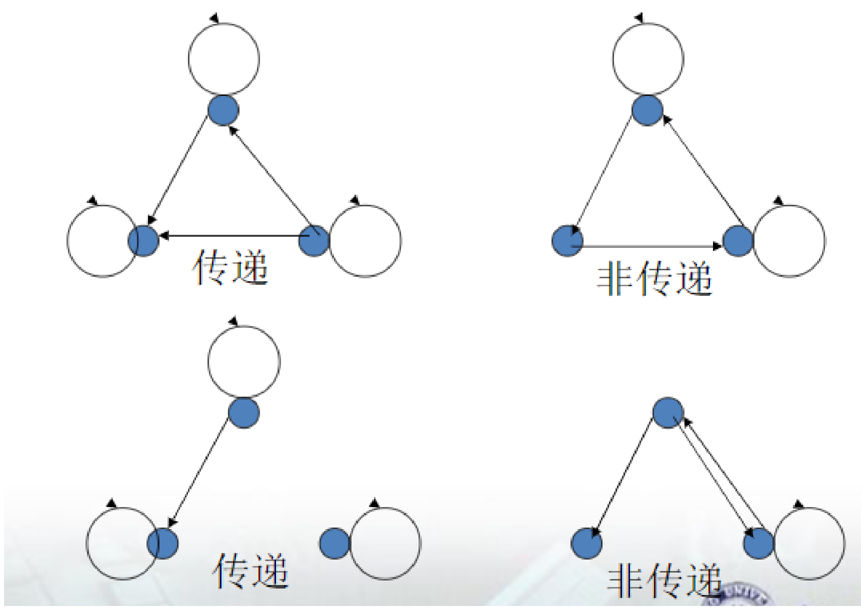


非反对称

定理：以下叙述等价

- R是反对称的
- $R^{-1} \cap R \subseteq I_A$
- R^{-1}是反对称的
- 在$M(R)$中,$\forall i \forall j(i \neq j \wedge r_{ij} = 1 \rightarrow r_{ji} = 0)$
- 在$G(R)$中,$\forall a_i \forall a_j(i \neq j)$,若有有向边$\langle a_i, a_j \rangle$,则必没有$\langle a_j, a_i \rangle$.

- 传递性(transivity)：
  - $R \subseteq A \times A$
  - R是传递的$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$
  - R非传递$\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$



定理：以下叙述等价

- R是传递的
- $R \circ R \subseteq R \Leftrightarrow R^{-1}$是传递的
- $\forall i \forall j, M(R \circ R)(i, j) \leq M(R)(i, j)$

- 在$G(R)$中,$\forall a_i \forall a_j \forall a_k$,若有有向边$\langle a_i, a_j\rangle$和$\langle a_j, a_k\rangle$,则必有有向边$\langle a_i, a_k\rangle$

在$\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$上：

- $\leq = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \geq y\}$自反,反对称,传递
- $<= \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x < y\}$反自反,反对称,传递
- $>= \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x > y\}$反自反,反对称,传递
- $| = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x | y\}$反对称,传递$(\neg 0|0)$
- $I_N = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x = y\}$自反,对称,反对称,传递
- $E_N = \{\langle x,y\rangle | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$自反,对称,传递

3 图论

3.1 图论的主要内容

- 研究对象：由顶点和边构成的图
- 研究思想：以集合论为基础,以图为工具,为各种二元关系建立模型
- 研究内容：
  - 图的基本概念：连通性,矩阵表示,带权图
  - 欧拉图,哈密顿图：边和顶点的遍历
  - 树：表示层级组织关系
  - 平面图：判定,表示,性质
  - 图的着色：各种调度问题的模型
  - 独立集,支配集,覆盖集,匹配：各种应用问题

3.2 图论中的问题

- 什么是图?有哪些图?图有什么性质?
- 什么是欧拉图?什么是哈密顿图?
- 什么是树?如何用矩阵表示图?
- 什么是图的着色?
- 什么是支配集,独立集,覆盖,匹配?
- 什么是带权图?