db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2020 年 11 月 28 日

todos

1. 誊录纸质笔记 线性代数-转置,置换和空间
2. 隐函数存在定理,等幂求和,二项式系数,朱世杰恒等式.
3. 重写线性代数
4. 场论:p20,三个概念即两个公式的算子表示法
5. 补充多个section,计算机图形学,场论等
6. 整合冗余部分

目录

Chapter 1

数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

1 基本概念

1.1 六大基本初等函数

常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数

1.2 介值定理

在数学分析中,介值定理(英语:intermediate value theorem,又称中间值定理)描述了连续函数在两点之间的连续性:

假设有一连续函数$f : [a, b] \to \mathbf{R}$, 且假设$f(a) < f(b)$, 若对任意数$u$满足$f(a) < u < f(b)$,则存在一点$c, a < c < b$,使得$f(c) = u$,当$f(a) > f(b)$时也有类似叙述

直观的比喻:这代表在$[a, b]$区间上可以画出一条连续曲线,而不让笔离开纸面.

定理:

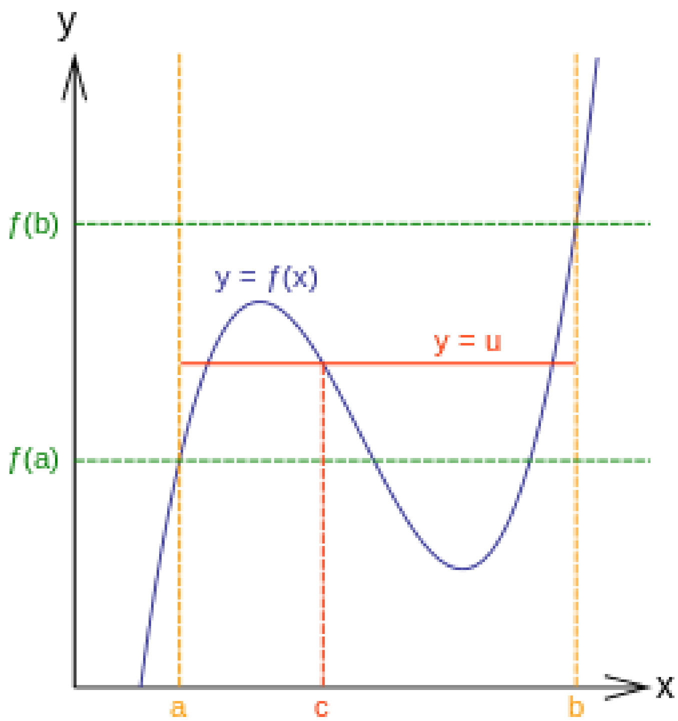
假设$I = [a, b]$是一个实数里的闭区间,而$f : I \to \mathbf{R}$是连续函数,那么其像集$f(I)$也是区间.他或者包含$[f(a), f(b)]$(如果$f(b) \leq f(a)$).换言之:

$f(I) \supseteq [f(a), f(b)]$.

或:

$f(I) \supseteq [f(b), f(a)]$.

介值定理通常以下述等价的形式表述:假设$f: I \to \mathbf{R}$是连续函数,且实数u满足$f(a) < u < f(b)$或$f(a) > u > f(b)$,则存在$c \in (a, b)$使得$f(c) = u$

图示:

1.3 二项式定理

$(x+y)^n = x^n + C_{n-1}^n(x^{n-1}y) + C_{n-2}^n(x^{n-2}y^2) + \cdots + y^n$

1.4 排列组合

$$\text{排列:} P_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$\text{组合:} C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1.5 立方差公式

- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

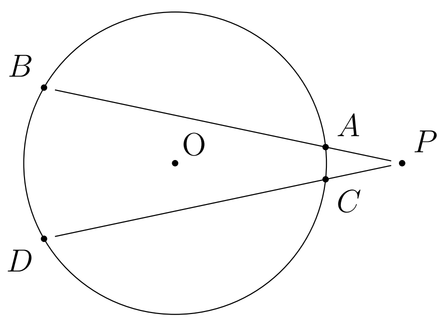
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^3)$

1.6 圆幂定理

给定一个圆r及一点p,由p引出两条割线,分别于r相交于A, B及C, D,则有$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

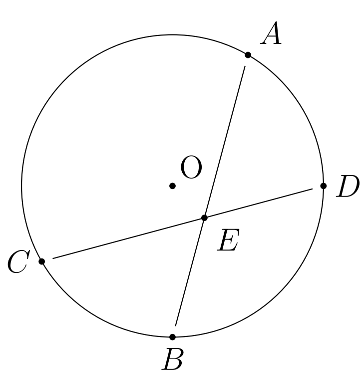
事实上此定理包含三条定理：

1.6.1 割线定理



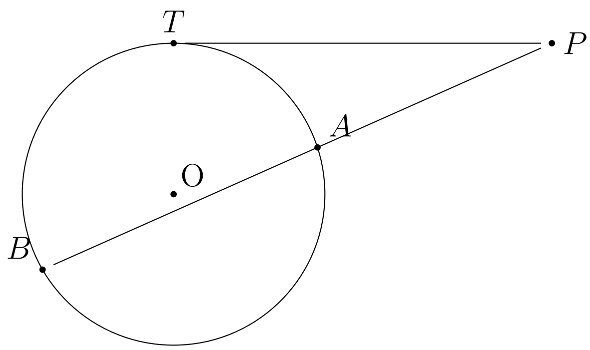
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

1.6.2 交弦定理



$$EA \cdot EB = EC \cdot ED$$

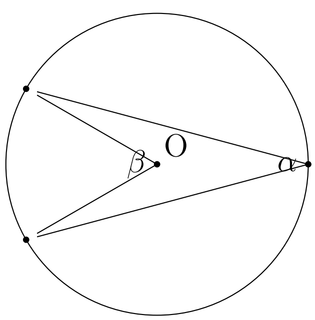
1.6.3 切割线定理



$$PT^2 = PA \cdot PB$$

1.7 圆周角定理

一条弧所对的圆周角α等于所对圆心角的一半.



1.8 韦达定理

1.8.1 韦达定理的普遍情况

设$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$是一个一元n次实(或复)系数多项式,首项系数$a_n \neq 0$,令P的n个根为$x_1, x_2, \ldots, x_n$,则根$\{x_i\}$和系数$\{a_j\}$之间满足关系式：

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ (x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n)+(x_2x_3+x_2x_4+\cdots+x_2x_n)+\cdots+x_{n-1}x=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_n} \end{cases}$$

等价的说,对任何$k=1,2,\ldots,n$,系数比$\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$是所有任取k个根的乘积的和的$(-1)^k$倍，即：

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

其中$i_1<i_2<\cdots<i_k$是要让所有根的组合都恰好出现一次.

(等号的左边被称作是初等对称多项式)

1.8.2 $n=2$的情况(二次)

设x_1,x_2是一元二次多项式ax^2+bx+c的两根,则由$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$有：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

在这个情况下，韦达定理的逆定理同样成立：给定一个一元二次多项式ax^2+bx+c,如果有两个数x_1,x_2,满足$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$和$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$,则x_1,x_2就是多项式ax^2+bx+c的两根.

1.8.3 $n=3$的情况(三次)

设x_1,x_2,x_3是一元三次多项式ax^3+bx^2+cx+d的三根，则

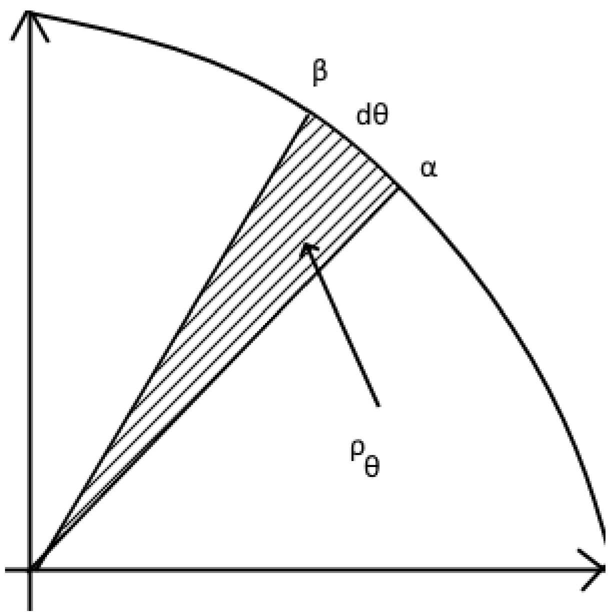
$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}, x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

1.9 极坐标

极坐标是不同于笛卡尔坐标系(直角坐标系)的另一种函数图像平面.

极坐标不同于笛卡尔坐标系,他没有x和y轴,而是用基准轴和角度表示一个点.

1.9.1　极坐标系下的面积



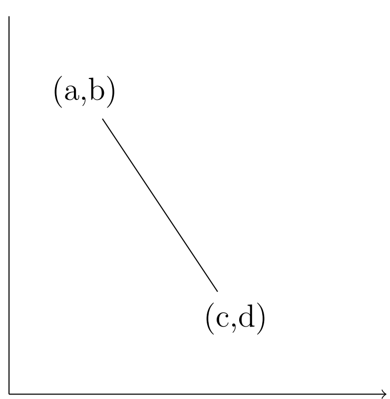
公式为$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(p(\theta))^2d\theta$
p是形成曲线的函数.

1.9.2　转换公式

从直角坐标系到极坐标有一套转换公式.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

1.9.3　极坐标表示线



由转换公式,可以将直线在直角坐标系下的解析式$y = kx + b$转换为在极坐标下的解析式：

$$\rho \sin\theta = k\rho \sin\theta + b$$

再变形得到：

$$\rho = \frac{b}{\sin\theta - k\cos\theta}$$

1.9.4 极坐标表示面

所谓"线动成面",想要用极坐标表示面,只需要加上ρ的取值条件就行(即：$a \leq \rho \leq b$,此处的a, b也可以是关于其他变量的公式).

1.9.5 柱面坐标

柱面坐标是一种将极坐标扩展到三维的方法,其实就是加了个z轴.因此转换公式为：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

1.9.6 球面坐标

球面坐标又是不同与柱面坐标的另一种形式,他引入了另一个表示角度的变量φ

球面坐标由三个变量组成,如果将某一个点用向量$\vec{v}$表示,那么三个变量分别是：

- r：表示$\vec{v}$的长度,可以理解成极坐标的ρ.取值范围为:$[0, +\infty)$
- θ：用过原点以z轴作为法向量的平面作为极坐标的平面,$\vec{v}$投影到此平面上时θ就是该投影在极坐标中的角度单位.取值范围为$[0, 2\pi]$
- φ：以原点为顶点,z轴为旋转轴,$\vec{v}$作为母线的圆锥面的半顶角.也就是$\vec{v}$与z轴的夹角.取值范围为:$[0, \pi]$

从直角坐标系到球面坐标系的转换公式为：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

1.10 不等式

1.10.1 基本不等式

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
注:当且仅当$a=b$时取等号
其中$\frac{a+b}{2}$称为a,b的算数平均数,$\sqrt{ab}$称为a,b的几何平均数.
将其变形,可得:

1. $a+b \geq 2\sqrt{ab}$(当且仅当$a=b$时取等号)
2. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2(a,b$同号)
3. $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2(a,b \in \mathbb{R})$
4. $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}(a,b \in \mathbb{R})$

1.10.2 柯西不等式

柯西不等式有很多种形式:

- 二维形式:

  由$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$变形:$ac+bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

  当且仅当$ab=cd$(即$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$)时.

  一般形式为$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$

  当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$或$a_i,b_i,i=1,2,3,\ldots,n$中至少有一方全为0时等号成立.

  一般形式推广:$(x_1+y_1+\ldots)(x_2+y_2+\ldots)\ldots(x_n+y_n+\ldots) \geq \left[\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^{\frac{1}{n}}+\ldots\right]^n$

此推广形式又称卡尔松不等式,其表述是:在m×n矩阵中,各列元素之和的几何平均不小于各行元素的几何平均之和.二维形式是卡尔松不等式n=2时的特殊情况.

- 向量形式:

  对于内积空间中的向量$\vec{x}$和$\vec{y}$,有

  $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2| \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \times \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$

  其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示内积.等价地,将两边开方,等式右边即可以写为两向量范数乘积的形式.

  $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||.$

  另外,当且仅当x和y线性相关时,等号成立(仅两个向量而言,线性相关等同于平行).

  若$x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$和$y_1, \cdots, y_n \in mathConstant$有虚部,内积即为标注内积.如果用上划线标记共轭复数,这个不等式可以更明确的表述为:

  $|\vec{x_1}\bar{\vec{y_1}} + \cdots + \vec{x_n}\bar{\vec{y_n}}|^2 \leq (|\vec{x_1}|^2 + \cdots + |\vec{x_n}|^2)(|\vec{y_1}|^2 + \cdots + |\vec{y_n}|^2).$

- 三角形式:

  在三角形ABC中,这个式子可以写作:$||\vec{AB}|| + ||\vec{BC}|| \geq ||\vec{AC}||$

  也就是说:$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

  等号成立的条件为:$ad = bc, \check{} ac + bc \geq 0$(即$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$).

- 积分形式:

  $\left(\int f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int f^2(x)dx \int g^2(x)dx$

- 一般形式:

  设V是一线性空间,定义内积,记作$\langle \alpha, \beta \rangle$,则:

  $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha||\beta|.$

  其中α, β为V中的向量.

1.10.3 均值不等式

平均数不等式,或称平均值不等式、均值不等式,是数学上的一组不等式,也是基本不等式的推广.它是说:如果$x_1, x_2, \cdots, x_n$是正数,则:

$\mathbf{H}_n \leq \mathbf{G}_n \leq \mathbf{A}_n \leq \mathbf{Q}_n$

其中:

$$\mathbf{H}_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

$$\mathbf{G}_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i} = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$\mathbf{A}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+x_n}{n}$$

$$\mathbf{Q}_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$,等号成立.

当$n = 2$时:

$$\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \leq \sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$$

即对这些正数:调和平均数≤几何平均数≤算数平均数≤平方平均数(方均根)

可简记为: **“算几调方”**

1.10.4 算术-几何均值不等式

算术-几何平均值不等式,简称算几不等式,是一个常见而基本的不等式,表现算术平均数和几何平均数之间恒定的不等关系.设$x_1, x_2, \ldots, x_n$为n个正实数,他们的算数平均数是$\mathbf{A}_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$,他们的几何平均数是$\mathbf{G}_n = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}$.算术-几何平均值不等式表明,对任意的正实数$x_1,\cdots,x_n$,总有:

$$\mathbf{A}_n \geq \mathbf{G}_n$$

等号当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$时成立.

1.10.5 常用不等式

- $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$
- $a^2+b^2 \geq 2ab$
- $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

- $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$
- $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
- $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

1.11 零散的定义

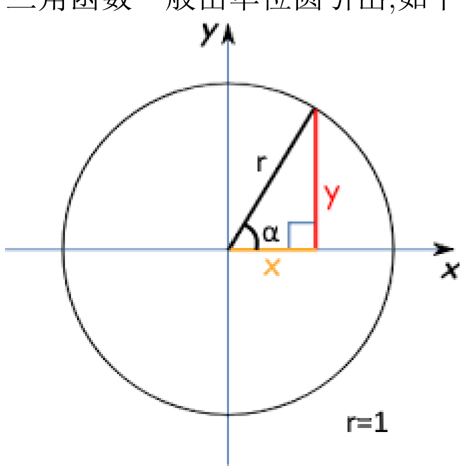
1. 有界:$\exists\epsilon, f(x) < \epsilon \quad (-\infty < x < \infty)$
2. 什么时候函数能复合：内层值域∈外层定义域

1.12 零散的思想

1. 正变换是数学的重要工具,三角变换是只变其形不变其质的.三角变换常常先寻找式子所包含的各个角之间的联系,并以此为依据选择可以联系它们的适当公式,通过换元法把三角恒等变换问题转化为代数恒等变换问题.

2 三角函数

三角函数一般由单位圆引出,如下:



2.1 正三角函数

名字	定义	定义域	值域
$\sin\alpha$	$\frac{y}{r}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\cos\alpha$	$\frac{x}{r}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan\alpha$	$\frac{y}{x}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbb{Z}))$	$\mathbb{R}$
$\cot\alpha$	$\frac{x}{y}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq k\pi(k\in\mathbb{Z}))$	$\mathbb{R}$
$\sec\alpha$	$\frac{r}{x}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}))$	$\lvert\sec\alpha\rvert\geq 1$
$\csc\alpha$	$\frac{r}{y}$	$\mathbb{R}(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}))$	$\lvert\csc\alpha\rvert\geq 1$

2.2 反三角函数

名字	定义	定义域	值域
$\arcsin x$	$x=\sin y$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\arccos x$	$x=\sin y$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\arctan x$	$x=\tan y$	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\mathrm{arccot}\, x$	$x=\cot y$	$\mathbb{R}$	$[0,\pi]$
$\mathrm{arcsecll}\, x$	$x=\sec y$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
$\mathrm{arccsc}\, x$	$x=\csc y$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

2.3 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha-\beta)\cdot(1+\tan\alpha\tan\beta)$$

2.4 积化和差

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

2.5 诱导公式

奇变偶不变,符号看象限.

2.5.1 第一组诱导公式

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

2.5.2 第二组诱导公式

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

2.5.3 第三组诱导公式

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

2.5.4 第四组诱导公式

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

2.5.5 第五组诱导公式

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$$

2.5.6 第六组诱导公式

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$

$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

2.5.7 杂项

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\arctan\frac{b}{a}),(a>0)$

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos x-\arctan\frac{a}{b}$

$\cos\alpha=2cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

2.6 倍角公式

2.6.1 二倍角公式

二倍角公式:由两角和公式推出

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2.6.2 半倍角公式

半倍角公式:将二倍角公式中的角2α看作整体β,经过变形推出:

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$$\sec\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{\dfrac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}}2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}=\frac{\pm\sqrt{\dfrac{4\sec^3\alpha+\sec^2\alpha}{2\cos\alpha}}}{\sec\alpha+1}$$

$$\csc\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{\dfrac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}}2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}=\frac{\pm\sqrt{\dfrac{3\sec^3\alpha-\sec^2\alpha}{2\sec\alpha}}}{\sec\alpha-1}$$

2.6.3 n倍角公式

$$\cos n\theta=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}[(-1)^iC_{2i+1}^n\cos^{n-2i}\theta\sin^{2i}\theta]$$

$$\sin n\theta=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}[(-1)^iC_{2i+1}^n\cos^{n-2i-1}\theta\sin^{2i+1}\theta]$$

2.6.4 万能替换公式

万能替换公式:尝试将正常的三角函数用半角公式表示时经过变形推出:

角$\alpha(\alpha\neq 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{z})$的所有三角比都可以用 $\tan\dfrac{\alpha}{2}$表示.这组公式叫做万能替换公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha\frac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

2.6.5 降幂公式

三角函数中的降幂公式可降低三角函数指数幂.多项式各项的先后按照某一个字母的指数逐渐减少的顺

序排列,叫做这一字母的降幂.直接运用二倍角公式就是升幂,将公式Cos2α变形后可得到降幂公式.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

2.7 三角恒等式

倒数关系：

- $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$
- $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$
- $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

商数关系：

- $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cot\alpha=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

平方关系：

- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
- $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$
- $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

余角关系：

- $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\dfrac{\pi}{2}$
- $\arctan\alpha+\operatorname{arccot}\alpha=\dfrac{\pi}{2}$
- $\operatorname{arcsecll}\alpha+\operatorname{arccsc}\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

负数关系：

- $\arcsin -\alpha = -\arcsin \alpha$
- $\arccos -\alpha = \pi - \arccos \alpha$
- $\arctan -\alpha = -\arctan \alpha$
- $\operatorname{arccot} -\alpha = \pi - \operatorname{arccot} \alpha$
- $\operatorname{arcsecll} -\alpha = \pi - \operatorname{arcsecll} \alpha$
- $\operatorname{arccsc} -\alpha = -\operatorname{arccsc} \alpha$

三角形的边角、面积、和外接圆半径之间有着密切的联系

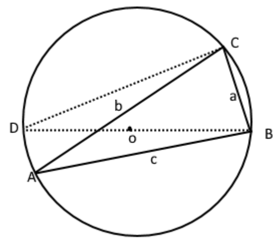
2.8 解斜三角形

设三角形$\triangle ABC$,角A、B、C的对边为abc,以A为原点O建系,总有以下公式:
$\mathbf{S}\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}cb\sin A$,即$\mathbf{S}\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$
同理得:$\mathbf{S}\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}\sin B, \mathbf{S}\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C.$
这就是说,三角形的面积等于任意两边与他们夹角正弦值的一半.

2.8.1 正弦定理

将$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$三个公式同除$\frac{1}{2}abc$,得:
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, 也可表示为:$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
此式表明:在三角形中,各**边**与它所对**角的正弦**的比相等

当$\angle C = 90°$时,由正弦定理可得:$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{1}{c}$,即$a = c\sin A, B = C\sin B$
并且,做三角形外接圆:



由圆周角定理可知$\angle D = \angle A, BD = 2R, bc = a$.于是$a = BC = BD\sin A = 2R\sin A$,即:

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

由正弦定理,可得:$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

所以,$a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$

变形也可得到:

$\sin C = \dfrac{c}{2R}, \sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin A = \dfrac{a}{2R}$

以及:

$a^2\sin 2B + b^2\sin 2A = 2ab\sin C$

2.8.2 余弦定理

由两点间距离公式,得$a = |BC| = \sqrt{(b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2}$

两边平方并化简得:

$a^2 = b^2 - 2b\cos A + c^2$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

也可变形化为:

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$

这些关系在直角三角形中也成立.

3 空间解析几何

不容小觑且难以理解的部分,加油.

3.1 关于向量

在空间解析几何部分不会引入过多有关线性代数的知识(比如向量空间).定理与定义将会互相交织.
注:本章中的向量默认为三维向量.

3.1.1 关于向量的基本概念

有以下概念:

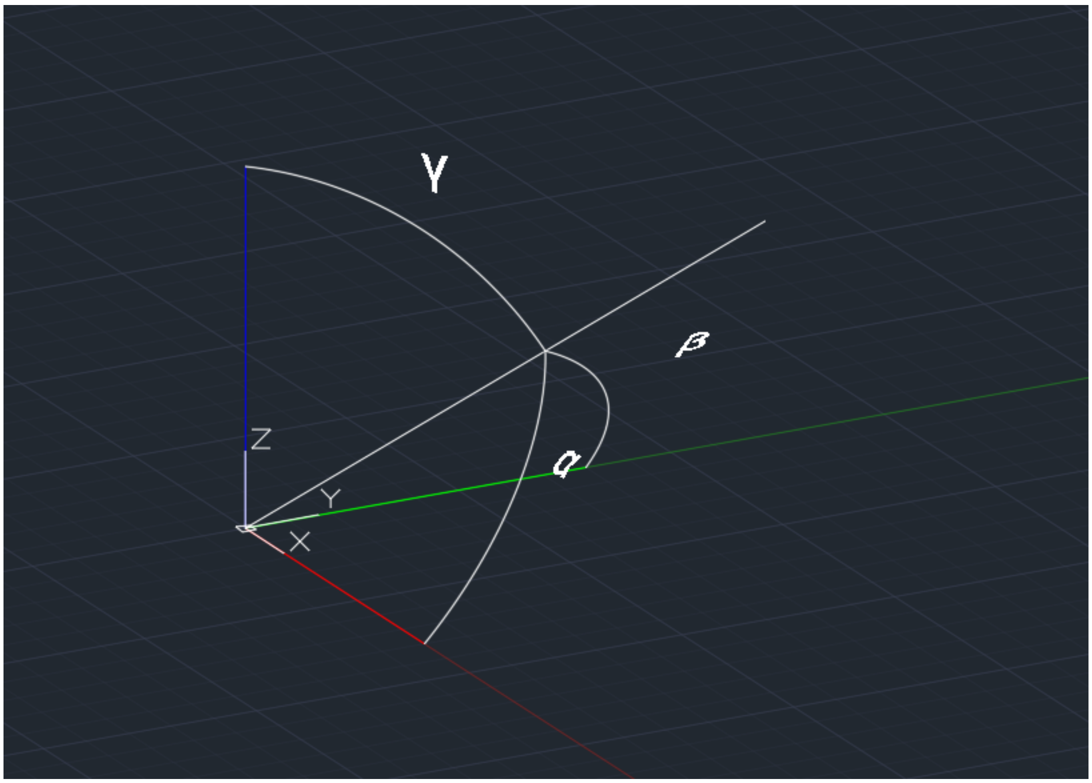
- 数乘:$\lambda\vec{\alpha}$,即λ倍长度的$\vec{\alpha}$,当$\lambda > 0$时,方向与原向量相同.当$\lambda < 0$时,方向相反.数乘前后向量的起点一致.
- 取模:$|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda||\vec{\alpha}|$,前一个“||”为绝对值,后一个“||”为取模.最后得出的结果为$|\lambda\vec{\alpha}|$的长度.
- 单位化:$|\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}| = 1$,即将一个向量除以他的长度得到的是单位向量(长度为1的向量)
- 在三维标准正交坐标系中存在三个单位向量:$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.他们互相垂直,长度为1.坐标系中任意一点(x,y,z)都可以表示为一个向量$\vec{r}$,$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- 设$\vec{a} = (ax,ay,az),\vec{b} = (bx,by,bz)$.则:$\vec{a} \pm \vec{b} = (ax \pm bx, ay \pm by, az \pm bz)$、$\lambda\vec{a} = (\lambda ax, \lambda ay, \lambda az)$.其中$ax,ay,az,bx,by,bz$称为分量.
- 平行:$\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\dfrac{ax}{bx} = \dfrac{ay}{by} = \dfrac{az}{bz}$即:对应分量之比相同.
- 向量长度(取模)公式:$\vec{r} = (x,y,z), |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.注:对于任意维度的向量,取模都是各分量平方和开根号.
- 两点之间距离公式:$A:(x_1,y_1,z_1), B:(x_2,y_2,z_2), |\vec{AB}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.注:在任意维度中,两点之间的距离公式都是对应分量作差的平方和开根号.
- 两向量夹角:(取锐角)设$\vec{a} = (a_1,a_2,a_3), \vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$,设夹角为$\theta$,则:$\cos\theta = \dfrac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

  有以下几种情况:

1. 垂直:$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
2. 平行:$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

求两直线夹角也同理.

3.1.2 方向角与方向余弦



$\vec{OM}=\vec{r}=(x,y,z)$

$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{OM}|}=\dfrac{x}{|\vec{r}|}$

$\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{OM}|}=\dfrac{y}{|\vec{r}|}$

$\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec{OM}|}=\dfrac{z}{|\vec{r}|}$

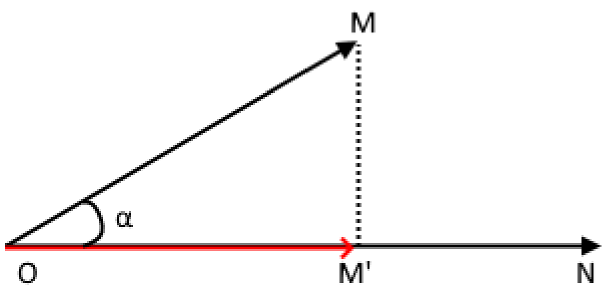
其中α,β,γ称为$\vec{OM}$的方向角.

有恒等式:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

方向余弦是指在解析几何里,一个向量的三个方向余弦分别是这向量与三个坐标轴之间的角度的余弦.两个向量之间的方向余弦指的是这两个向量之间的角度的余弦.在此处指的是前者,也就是:$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$.

将方向余弦作为三个分量,即:$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{x}{|\vec{r}|}, \frac{y}{|\vec{r}|}, \frac{z}{|\vec{r}|}) = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = e_r$
其中e_r是个单位向量,表示以向量$\vec{r}$的方向余弦为坐标的向量.

3.1.3 向量投影



直接写出来:

1. $Prj_u\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha$
2. $Prj_u(\vec{a} + \vec{b}) = Prj_u\vec{a} + Prj_u\vec{b}$
3. $Prj_u\lambda\vec{a} = \lambda Prj_u a$

u:任意轴　　$\vec{a}$:向量　　Prj_u:投影到u轴

3.1.4 数量积/点乘

点乘算出来的是数
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta = |a| \cdot Prj_a b = |b| \cdot Prj_b a$
θ:夹角

点乘有以下性质:

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |a| \cdot |a| \cdot \cos 0 = |a|^2$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\theta=90°,\vec{a}\perp\vec{b}$　　即:$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

4. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

5. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

6. $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

7. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

3.1.5 向量积/叉乘

叉乘算出来的是向量,这个向量垂直于其他两个向量.右手法则:食指为$\vec{a}$,中指为$\vec{b}$,拇指为$\vec{c}$
$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$
其中:$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$

有以下性质:

- $\vec{a}\times\vec{a}=0$
- 有非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}=0\ \Rightarrow\vec{a}//\vec{b}$.即:$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$
- $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

有两种计算方法:
首先,设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,并将结果向量记作$\vec{s}$:

- 坐标形式:

$$\vec{s}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

- 行列式形式:

$$\vec{s}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

3.2 关于空间平面

3.2.1 空间平面公式

法线向量与平面垂直.

空间平面有以下表示方法:

- 点法式:知道一点与法线向量.

  设一点$M_0:(x_0,y_0,z_0)$,法线向量:$\vec{n}=(A,B,C)$

  设$M(x,y,z),\vec{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),\vec{n}\cdot\vec{M_0M}=0$

  平面的点法式方程为:$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

- 一般式:三点确定一个向量.以实例演示:

  设$M_1(2,-1,4),M_2(-1,3,-2),M_3(0,2,3)$代入:

  $Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases}2A-B+4C=-D\\ -A+3B-2C=-D\\ 2B+3C=-D\end{cases}$$

  也有$Ax+By+Cz+(-Ay_0-By_0-Cz_0)=0$

  (由点法式推出)

  有以下情况:

  1. $D=0,Ax+By+Cz=0$:平面过原点.

2. $A=0, By+Cz+D=0$:平面法线垂直与x轴且平行于x轴,类似情况同理

3. $A=B=0, CZ+D=0$:平面过$z=-\dfrac{D}{C}$,平行于xy轴.

- 截距式:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3.2.2 求两平面夹角

其实是求两平面法线的夹角(取锐角)
因此只要设两平面法线向量为$n_1(A_1,B_1,C_1), n_2(A_2,B_2,C_2)$,然后套向量夹角公式就行了.
其中$\theta=(\widehat{n_1\ n_2})$或$(\widehat{-n_1\ n_2})=(\pi-(\widehat{n_1\ n_2}))$
其中当向量平行时意味着平面重合(因为取的是锐角)、

3.2.3 点到平面距离公式

设点$P_0(x_0,y_0,z_0), Ax+By+Cz+D=0$
$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

3.2.4 直线与平面夹角

指的是直线与法线的夹角
设与直线同方向的向量$L_1(M,N,P)$,夹角为θ
$\sin\theta=\dfrac{|AM+BN+CP|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{M^2+N^2+P^2}}$

有以下几种情况:

1. 直线垂直于平面: $\dfrac{A}{M}=\dfrac{B}{N}=\dfrac{C}{P}$
2. 直线平行于平面: $AM+BN+CP=0$

3.3 关于空间直线

3.3.1 空间直线及其方程

有以下三种形式:

1. 一般方程:(即两平面的交线)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1Z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

2. 对称式方程:

   设点$M(x, y, z), M_0(x_0, y_0, z_0)$是直线$L$上的任意两点,那么存在向量$\vec{M_0M}$与直线$L$的方向向量$\vec{s}$平行.因此两向量的对应坐标成比例.($\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{s} = (m, n, p)$)，因此得出:

   $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$

3. 参数式:将对称式变形

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

3.3.2 平面束

平面束即形成一条直线的所有面

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

其中A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例.即:$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, (\lambda \in \mathbb{R})$

3.4 关于空间曲线

3.4.1 空间曲线及其方程

有以下两种形式：

1. 一般式:(两曲面的交线)

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

2. 参数方程:(将曲线上的动点的坐标表示为参数t的函数)

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

3.4.2 空间曲线在坐标系面上的投影

设空间曲线c的一般方程为:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去其中一个变量,(比如z),求在xoy上的投影,得到方程:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

3.4.3 空间曲线的切线及法平面

先写出空间曲线的切线方程：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\Phi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

其中 $t\in[\alpha,\beta]$,设三个函数都可导且不同时为0.
则切向量$\vec{T}=\begin{bmatrix}\varphi'(t_0) & \Phi'(t_0) & \omega'(t_0)\end{bmatrix}$
切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\Phi'(y_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$
则法平面的点法式方程为：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\Phi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(z-z_0)=0$

3.4.4 空间曲线的切平面及法线

有两种情况：

1. $F(x,y,z)=0$(即隐函数)

   则切平面的方程为:$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

   法线的方程为：$\dfrac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$

2. $z=f(x,y)$,只需让$F=f(x,y)-z$,然后套公式1.

   切平面解析式为：$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

3.5 关于空间曲面

3.5.1 空间曲面及其方程

有非常多种曲面,都给他列出来:

- 旋转曲面:由二次曲线绕某一坐标轴旋转形成.
  - 设YOZ平面上有曲线$f(y,z)=0$:
    * 绕z轴旋转,曲面表达式为:$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
    * 绕y轴旋转,曲面表达式为:$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
  - 设XOY平面上有曲线$f(x,y)=0$:
    * 绕x轴旋转,曲面表达式为:$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
    * 绕y轴旋转,曲面表达式为:$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$
  - 设XOZ平面上有曲线$f(x,z)=0$:
    * 绕x轴旋转,曲面表达式为:$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
    * 绕z轴旋转,曲面表达式为:$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

- 二次曲面：

  二次曲面有以下12种:

- 椭球面:

  在直角坐标系中的方程为:
  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
  其中a和b是赤道半径(沿着x和y轴),c是极半径,(沿着z轴).这三个数都是固定的正实数，决定了椭球的形状.

  如果三个半径都是相等的,那么就是一个球;如果有两个半径是相等的,则是一个类球面.

  * $a=b=c$:球
  * $a=b>c$:扁球面
  * $a=b<c$:长球面
  * $a\neq b, b\neq c, c\neq a$:不等边椭球(三条边都不相等)

  点(a,0,0)、(0,b,0)和(0,0,c)都在曲面上.从原点到这三个点的线段,称为椭球的半主轴.它们与椭圆的半长轴和半短轴相对应.

  体积公式为:$\frac{4}{3}\pi abc$.
  注意,当三个半径都相等时,这个公式便化为球的体积;两个半径相等时,便化为扁球面或长球面的体积.

- 抛物面:

  例:$y^2-2x=0/F(x,y)=0$,参数中缺少z,因此母线平行于z轴

- 椭圆抛物面:

  椭圆抛物面在直角坐标系中的方程为:$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

- 双曲抛物面：

  双曲抛物面在直角坐标系中的方程为:$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

- 单叶双曲面:

  单叶双曲面在直角坐标系中的方程为:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
  当a = b时双曲面就会变得比较圆

- 双叶双曲面:

  双叶抛物面在直角坐标系中的方程为:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
  当a = b时双曲面就会变得比较圆

- 类球面:

  类球面是一种二次曲面.二维的椭圆有两个主轴，称为长轴与短轴.在三维空间里，将一个椭圆绕着其任何一主轴旋转，则可得到一个类球面.

  * 假若，这旋转主轴是长轴，则这个类球面为长球面.例如，英式足球里所用的橄榄球是长球形状.
  * 假若，这旋转主轴是短轴，则这个类球面为扁球面.例如，地球在北极与南极稍微有点扁平，在赤道又有点凸涨.所以，地球是扁球形状.
  * 假若，生成的椭圆是圆圈，则这个类球面为完全对称的圆球面.

  用另一种方法来描述,类球面是一种椭球面.而椭球面的公式已经给出,其中a与b分别是椭球面在x轴与y轴的赤道半径,c是椭球面在z轴的极半径,这三个正实数的半径决定了椭球面的形状.以z轴为旋转轴的类球面a = b,他的方程为:

  $$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

  * 如果三个半径都相等,则此椭球面是圆球面$(a=c)$
  * 如果类球面的赤道半径小于极半径,则这是类球面中的长球面.$(a<c)$
  * 如果类球面的赤道半径大于极半径,则这是类球面中的扁球面.$(a>c)$

- 球面:

  在空间解析几何中,球心为(x_0,y_0,z_0),半径为r的球面是满足以下方程的所有点的轨迹:

  $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

  当球心在原点上:$x^2+y^2+z^2=r^2$

  可化作三元二次方程:$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+G=0$(平方项系数相同)

  其中$D^2+E^2+F^2>4AG$.

  当满足以上两点时可逆推出一个三元二次方程是否为一个球面

  (当$D^2+E^2+F^2=4AG$时是一个点)

- 椭圆锥面(二次锥面):

  椭圆锥面在直角坐标系中的方程为:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

  当a = b时就会变成圆锥面.

- 椭圆柱面:

  椭圆柱面在直角坐标系中的方程为:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

  当a = b时就会变成圆柱面.

- 双曲柱面:

  双曲柱面在直角坐标系中的方程为:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

- 抛物柱面:

  抛物柱面在直角坐标系中的方程为:$x^2+2ay=0$

3.5.2 伸缩法

注:伸缩法不是放缩法!

举例:有$x^2+y^2=1$,沿着y轴伸缩两倍,则伸缩后的方程为:$x^2+\frac{y^2}{4}=1$.
也就是说:沿着n轴伸缩,就对变量n进行替换.

伸缩t倍，就把原变量替换成$\frac{n}{t}$

4 微积分

注:本章中的“可积”如果没有特别说明则通常指的是传统意义下的“黎曼可积”.勒贝格积分属于测度论.

4.1 极限

在一元的情况下,可微、可导与连续的关系如下

- 可微是可导的充要条件,即:可微$\Leftrightarrow$可导

- 可微和可导都是连续的充分条件,即:可微$\rightarrow$连续、可导$\rightarrow$连续

而在多元的情况下,可微、可导与连续的关系如下:

- 可微(全微分)是可导和连续的充分条件,即:可微$\Rightarrow$可导、可微$\Rightarrow$连续.

- 可导推不出连续.

4.1.1 定理

1. 函数在一点极限存在的条件是左右极限存在且相等

2. 洛必达法则:当极限为$\frac{0}{0}$或者$\frac{\infty}{\infty}$时可上下同时求导,求导后极限不变,每一步都需要重新判断是否依然符合类型

3. 归结原则(海涅定理#狭义):

   $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$存在的充要条件是:
   取$f(x)$定义域内的任意数列a_n,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$,且$a_n$不等于$a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=b$.
   海涅定理表明了函数极限与数列极限的关系.如果极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,$x_n$为函数$f(x)$定义域内任一收敛于$x_0$的数列,且满足:$x_n\neq x_0, n\in\mathbb{N}^+$,那么相应的函数值数列$f(x_n)$必收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

4.1.2 重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\to\lim_{x\to 0}\sin x\to x$$
$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

4.1.3 等价无穷小

$$\lim_{x\to 0} a^x-1\approx x\ln a$$
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{arcsin}(a)x\approx\sin(a)x\approx(a)x$$
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{arctan}(a)x\approx\tan(a)x\approx(a)x$$
$$\lim_{x\to 0}\ln 1+x\approx x$$
$$\lim_{x\to 0} e^x\approx 1+x$$
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\approx x$$
$$\lim_{x\to 0}\tan x\approx x$$
$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^b-1\approx abx$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$$
$$\lim_{x\to 0} 1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}$$
$$\lim_{x\to 0} x-\ln(1+x)\approx\frac{x^2}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \tan x - x \approx \dfrac{x^3}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} x - \arctan x \approx \dfrac{x^3}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} x - \sin x \approx \dfrac{x^3}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x - x \approx \dfrac{x^3}{6}$

以上等价无穷小都可以由泰勒公式推出

4.2 数列极限相关

注:本章内容可用于级数.

注:数列不是级数,级数需要求和数列不用.

4.2.1 数列

若函数f的定义域为全体正整数集合$\mathbb{N}^n$,则称

$$f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, f(n)\ (n \in \mathbb{N}^+)$$

为数列.因正整数集$\mathbb{N}^+$的元素可按由小到大的顺序排列,所以数列$f(n)$也可以写作：

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

或者可以简记为a_n,其中a_n称为该数列的通项.

4.2.2 数列极限

设数列a_n,存在a_0,若对于任意给定的正数ϵ,总存在正整数N,使得当$n > N$时由

$$|a_n - a| < \epsilon$$

则称数列a_n收敛于a, a称为数列a_n的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

若数列a_n没有极限,则称a_n不收敛,或者称a_n发散.

此定义等价于：任给$\epsilon > 0$,若在$(a-\epsilon, a+\epsilon)$之外数列a_n中的项至多只有有限个,则称数列a_n收敛域极限a.

4.2.3 O'Stolz(stolz)定理

设$(a_n)_{n>1}$和$(b_n)_{n>1}$为两个实数数列.若b_n为从某项开始严格单调的无界正数数列,且有穷极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L$$

存在,则：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

其中L可以为有限实数或正/负无穷.

该定理虽然主要被用于处理数列不定型极限,但该定理再没有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$这一条件时也是成立的.虽然该定理通常是以分布$b_n$为正数数列的情形加以叙述的,但注意到该定理对分子$a_n$的正负没有限制,所以原则上把对数列$b_n$的限制条i按替换为"严格单调递减且趋于负无穷大"也是没问题的.

与洛必达的迭代用法类似,在尝试使用此定理考察数列极限时,如果发现两个数列差分的商任然是不定型,那么可以继续用.

注意：与洛必达类似,判定条件不存在不能认定极限本身不存在.

4.3 渐进线

渐近线分为三种：

- 水平渐近线：当$x\to x_0$时,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=y_0$,则$y=y_0$是水平渐近线.
- 垂直渐近线：当$x\to x_0$时,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\to\infty$,且$x_0$为一般间断点,则$x=x_0$是垂直渐近线.
- 斜渐近线：

  当$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0(a,b\in\mathbb{C})$存在,则$y=ax+b$是斜渐近线.

  即：如果$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$存在,且$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$也存在,则$y=f(x)$有斜渐近线$y=ax+b$

4.4 导数

导数是什么？教科书上普遍给出的定义是指:函数图像的斜率变化率曲线,事实上某些观点表示导数也可以理解成是函数对于输入值的敏感程度,即:输入值的变化对应的输出值的变化的剧烈程度.

导数在一元情况下的定义是指$\lim\limits_{xtox_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$或者$\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

值得注意的是:求导是一种线性运算.

4.4.1 求导法则

以下为求导的基本法则:

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(u-v)' = u' - v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
5. $(\mathbf{c}v)' = \mathbf{c}(v)'$
6. $\frac{u}{v}' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

注:反函数的导数等于函数导数的倒数,即——互为倒数的导数相乘依然为1

4.4.2 复合函数求导

对于复合函数求导,有以下方法:

$y = f(u), u = g(x); \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$

4.4.3 求导公式表

以下为基本函数的求导公式表,类似线性组合,大多数函数的导数可以由以下公式组合得到.

$f(x) = C, f'(x) = 0$
$f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x, f'(x) = 1$
$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x, f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \sec x, f'(x) = \sec x \tan x$
$f(x) = \cot x, f'(x) = -\csc^2 x$
$f(x) = \csc x, f'(x) = -\csc x \cot x$
$f(x) = \arcsin x, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arccos x, f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x, f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = arccotx, f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = a^x, f'(x) = a^x \ln x$
$f(x) = \log_a x, f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x, f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = e^x, f'(x) = e^x$

值得注意的是:

1. 在一维的情况下,可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数存在且相等
2. 可导 $\Rightarrow$ 连续
3. 连续则不一定可导

4.4.4 线性近似/牛顿法近似函数/求方程解

由导数的另一种定义:$f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
当不再取极限的时候等号变成约等于,即:$f'(x) \approx \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, 两边移项,可得
$f(x) \approx f(a) + (x - a) f'(a)$或者$x - a \approx -\dfrac{f(a)}{f'(a)}$
前者被称为线性近似,后者就是牛顿法,其实本质上是同一个公式的不同变形.
当x和a取值越接近,近似也就越精确,这种方法本质上是取级数展开形式的前两位.

4.5 偏导数

设$f(x, y, z) = ax + by + cy + d$
$f'_x(x, y, z) = a$
$f'_y(x, y, z) = b$

$f'_z(x,y,z)=c$
换言之,偏导就是只把要求偏导的变量看作变量,其他变量看作常量再求导.

4.5.1 全微分

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\qquad \Delta z:$ 近似求得
定义:$f(x,y)$在定义域内有定义,产生Δx和Δy,$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+O(\rho)$
其中$A=f'_x,B=f'_y,\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$
并且A,B是x和y的函数(此处x,y为常量),与Δx和Δy(此处$\Delta x,\Delta y$是变量)无关.
如果能写成此形式,则成此函数在这点可微,且$A\Delta x+B\Delta y$叫做他的全微分.
记作:dz(近似值)$=A\Delta x+B\Delta y\approx\Delta z$(精确值)

4.6 微分

那么微分(differential)又是什么？微分是一个函数在自变量做无穷小变化时函数值的变化.在形式上确实与导数类似,但不应该与导数混淆.

可以形象化理解,微分就是曲线的切线.给定一个横坐标,可以在切线上找到纵坐标.就是这样一个映射.而导数就是这条切线的斜率.

4.6.1 微分公式

给出以下微分公式,与导数确实类似,但微分和导数是两个不同的映射.他们的定义域都是可微函数,微分的值域是1-form,导数的值域是函数.

1. $d(u\pm v)=du\pm dv$
2. $d(\mathbf{C}u)=\mathbf{c}du$
3. $d(uv)=vdu+udv$
4. $d(\frac{u}{v}=\frac{vdu+udv}{v^2})$

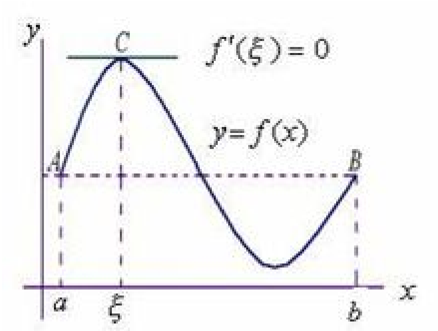
4.6.2 复合微分

与复合求导类似:
$y=f(u),u=g(x);$

$dy = y'dx = f'(u)du = f'ug'(x)dx$

即:$du = dg(x)$

4.6.3 罗尔中值定理

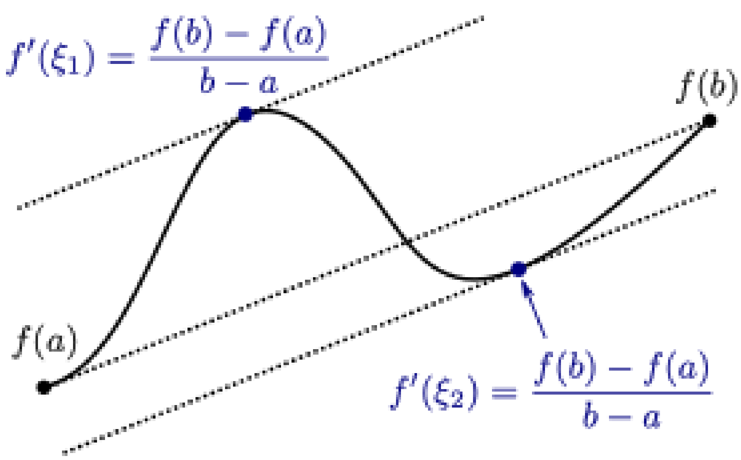


如果函数$f(x)$满足:

1. 在闭区间$[a, b]$上连续;
2. 在开区间(a, b)上可导;
3. 在区间端点处的函数值相等,即$f(a) = f(b)$,

那么在(a, b)内至少有一点ξ, $(a < \xi < b)$,使得$f'(\xi) = 0$.这个定理称为罗尔定理

4.6.4 拉格朗日中值定理



令$f:[a,b]\to\mathbf{R}$为闭区间$[a,b]$上的一个函数,且在开区间 (a,b)内对任意一点x,极限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$存在, 为一个有限数字或者等于$+\infty$或$-\infty$.如果有限,则极限等于$f'(x)$.

此定理称为**拉格朗日中值定理**,也简称中值定理,是罗尔中值定理的更一般的形式,同时也是柯西中值定理的特殊情形

这个定理再可以稍微推广一点.只需假设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$在$[a,b]$连续,且在开区间(a,b)内对任意一点x,极限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{b-a}$存在,为一个有限数字或者等于$+\infty$或者$-\infty$.如果有限,则极限等于$f'(x)$. 这版本定理应用的一个例子是函数$x\to x^{\frac{1}{3}}$,实值三次方根函数,其导数在原点趋于无穷.

注意若一个可微函数的值域是复数而不是实数,则上面这定理就未必正确.例如,对实数x定义$f(x)=e^{ix}$.那么

$f(2\pi)-f(0)=0\neq f'(c)(2\pi-0)$

因$|f'(x)|=1\neq 0$时,c为开区间$(0,2\pi)$中任意一点.

4.6.5 柯西中值定理

柯西中值定理,也叫拓展中值定理,是中值定理的一般形式.它叙述为:如果函数f和g都在闭区间$[a,b]$上连续,且在开区间(a,b)上可微,那么 在某个$c\in(a,b)$, 使得$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$

当然,如果$g(a)\neq g(b)$且$g'(c)\neq 0$,则可表示成:$\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

在几何上,这表示曲线

$$\begin{cases}[a,b]\to\mathbf{R}^2\\ t\mapsto(f(t),g(t))\end{cases}$$

上存在一点其切线平行于由两点$(f(a),g(a))$和$(f(b),g(b))$所连接的直线.但柯西定理不能表明在任何情况下这种切线都存在,因为可能存在一些c值使$f(c)=g(c)=0$, 所以在这些点曲线根本没有切线. 下面是这种情况的一个例子

$t\mapsto(t^3,1-t^2)$

在区间$[-1,1]$上,曲线由$(-1,0)$到$(1,0)$,却并无一个水平切线,然而他在$t=0$出有一个驻点(实际上是一个尖点).

柯西中值定理可以用来证明洛必达法则.拉格朗日中值定理是柯西中值定理当$g(t)=t$时的特殊情况.

4.6.6 达布中值定理

设$f(x)$在(A,B)区间中可导,且$[a,b]\in(A,B)$,$f'(a)<f'(b)$,则对于任意给定的$\eta:f'(a)<\eta<f'(b)$,都存在一点$c\in(a,b)$使得$f'(c)=\eta$

即：设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$为一个$[a,b]$上的实值可导函数,并在$[a,b]$上可导,那么f'满足：对任意介于$f'(a)$和$f'(b)$之间的t,存在$x\in(a,b)$使得$f'(x)=t$.

等价于：设$f(x)$在$[a,b]$上可微,若在$[a,b]$上$f'(x)$不等于0,则$f'(x)$在$[a,b]$上保持定号(恒正或恒负).

4.7 不定积分

在微积分中,函数f的不定积分(或称反导函数或原函数)是一个可微函数**F**且其导数等于原来的函数f,即$F\prime=f$.不定积分和定积分的关系由微积分基本定理联系起来.透过微积分基本定理,函数的定积分的计算就可以简单的通过求不定积分来进行.

4.7.1 不定积分公式

下面给出不定积分公式:

1. $\int x^a dx=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+\mathbb{C}$
2. $\int kdx=kx+\mathbb{C}$
3. $\int \dfrac{1}{x}dx=\ln(x)+\mathbb{C}$
4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}dx=\arctan x+\mathbb{C}$
5. $\int \cos xdx=\sin x+\mathbb{C}$
6. $\int \sin xdx=-\cos x+\mathbb{C}$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int \sec^2 xdx=\tan x+\mathbb{C}$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=\int \csc^2 xdx=-\cot x+\mathbb{C}$
9. $\int \sec x\tan xdx=\sec x+\mathbb{C}$

10. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + \mathbb{C}$

11. $\int e^x dx = e^x + \mathbb{C}$

12. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + \mathbb{C}$

4.7.2 不定积分第一类换元积分法

设$f(x)$为可积函数,$g = g(x)$是连续可导函数,则有:
$\int f(g)g'dx = \int f(g)dg$
第一类换元积分法基本就是配凑的思想.

4.7.3 不定积分第二类换元积分法

设$f(x)$为可积函数,$x = x(g)$为连续可导函数,则有:
$\int f(x)dx = \int f(x(g)x'dx)$

4.7.4 分部积分法

分部积分的公式为:
$\int udv = uv - \int vdu$
推荐按以下顺序考虑优先代入:
指数函数、三角函数、幂函数、对数函数、反函数

4.8 定积分

4.8.1 定义

$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$
以上为定义,实际中写法为$\int_b^a f(x)dx$.
其中a为积分区域上限,b为积分区域下限.

4.8.2 性质

定积分有以下性质:

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$即:交换上下限积分结果正负改变.

2. $a < b < c$;$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$,且$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

3. $f(x) \leq g(x)$; $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

4. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

4.8.3 定积分第一类换元积分法

设$f(x)$为可积函数,$g = g(x)$是连续可导函数,则有:
$\int_\alpha^\beta f(g)g'dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(g)dg$

4.8.4 定积分第二类换元积分法

设$f(x)$为可积函数,$x = x(g)$为连续可导函数,则有:
$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{x^{-1}(\alpha)}^{x^{-1}(\beta)} f(x)x'dx$
简而言之:定积分的第二类换元积分法有两个要点

1. 引入换元函数

2. 上下限也要变(将原函数上下限代入换元函数)

4.8.5 积分上限函数

$I(x) = \int_a^x f(t)dt$
如果$f(x)$,$I(x)$可导,则$I\prime(x) = \dfrac{d\int_a^x f(t)dt}{dx} = f(x)$
$f(x)$连续,$I(x)$是$f(x)$的一个原函数.
有以下几种变体:

1. $(\int_x^a f(t)dt)\prime = -f(x)$

2. $(\int_a^{\Phi(x)} f(t)dt)\prime = f(\Phi(x))\Phi\prime(x)$

3. $[\int_\Phi^\varphi f(t)dt]\prime = f(\varphi(x))\varphi\prime(x) - f(\Phi(x))\Phi\prime(x)$

4.8.6 牛顿-莱布尼兹公式/微积分基本定理

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

4.8.7 积分介值定理

在区间$[a,b]$上m和M分别是$f(x)$的最小值和最大值.

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

4.8.8 区间再现公式

设$f(x) = \int_b^a g(x)dx$,令$x = a+b-t$,当$x = a$时,$t = b$,当$x = b$时,$t = a$,dx变成$-dt$.即:

$f(x) = \int_b^a g(x)dx = -\int_a^b g(a+b-t)dt = \int_b^a g(a+b-t)dt$

由于定积分与被积变量无关,所以将上式结果中的t换成x,与原函数相加,得:

$f(x) = \dfrac{1}{2}\int_b^a [g(x) + g(a+b-x)]dx$

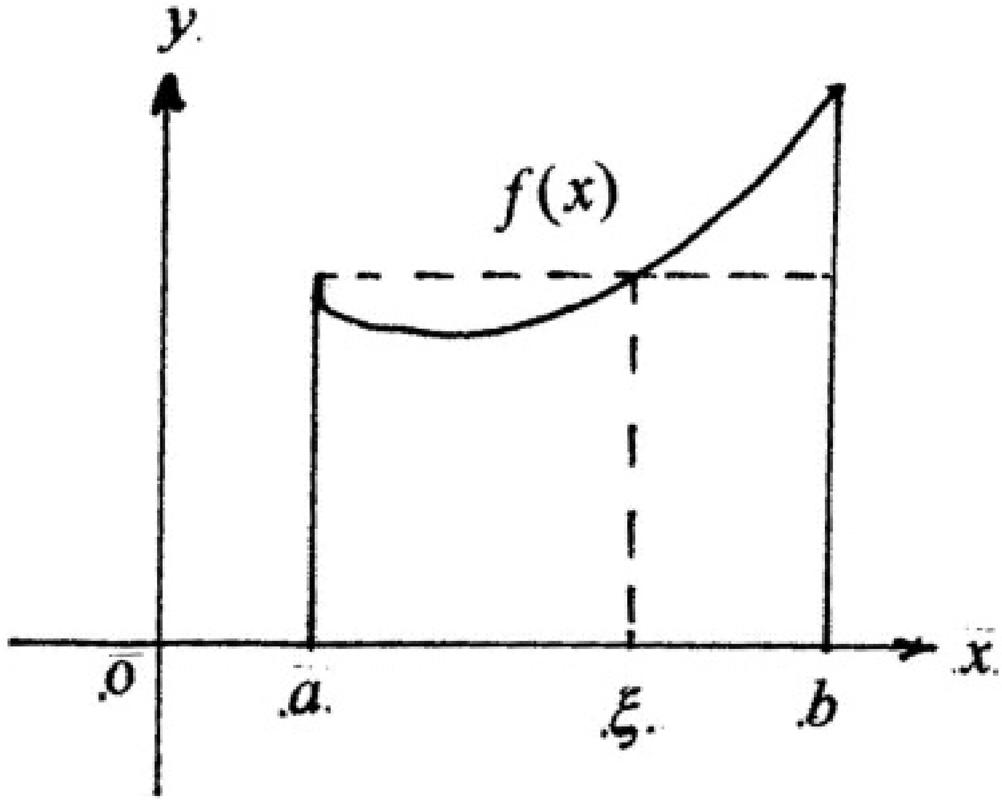
4.8.9 华里士公式(点火公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} \ (n\text{为大于1的奇数}) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \ (n\text{为正偶数}) \end{cases}$$

4.8.10 积分第一中值定理

设$f : [a,b] \to \mathbf{R}$为一连续函数,$g : [a,b] \to \mathbf{R}$要求$g(x)$是可积函数且在积分区间不变号,那么存在一点$\xi \in [a,b]$使得:

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ 他的几何意义为:



以下为证明:

在不失去一般性的条件下,设对所有的x,有$g(x) \geq 0$;因为f是闭区间上的连续函数,f取得最大值M和最小值m.于是得出不等式:

$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$

对不等式求积分,得出:

$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$

如果$\int_a^b g(x)dx = 0$,则$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.ξ可以取$[a,b]$上任意一点.

如果不等于0,那么$\int_a^b g(x)dx > 0$,对不等式变形可得:

$m \leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$

因为$f(x)$是连续函数,所以上面这玩意是个连续函数,所以必定存在一点$\xi \in [a,b]$,使得

$f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$

($g < 0$时也可以按这个步骤推出)

推论:拉格朗日中值定理的积分形式

在上式中令$g(x) = 1$,则可得出:

设$f : [a, b] \to \mathbf{R}$为一连续函数,则$\exists \xi \in [a, b]$,使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

也可以由拉格朗日中值定理推出:

设$F(x)$在$[a, b]$上可导,$f(x) = F\prime(x)$,则$\exists \xi \in [a, b]$,使

$$f(\xi) = F\prime(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

4.8.11 积分第二中值定理

积分第二中值定理与积分第一中值定理相互独立,却又是更精细的积分中值定理.

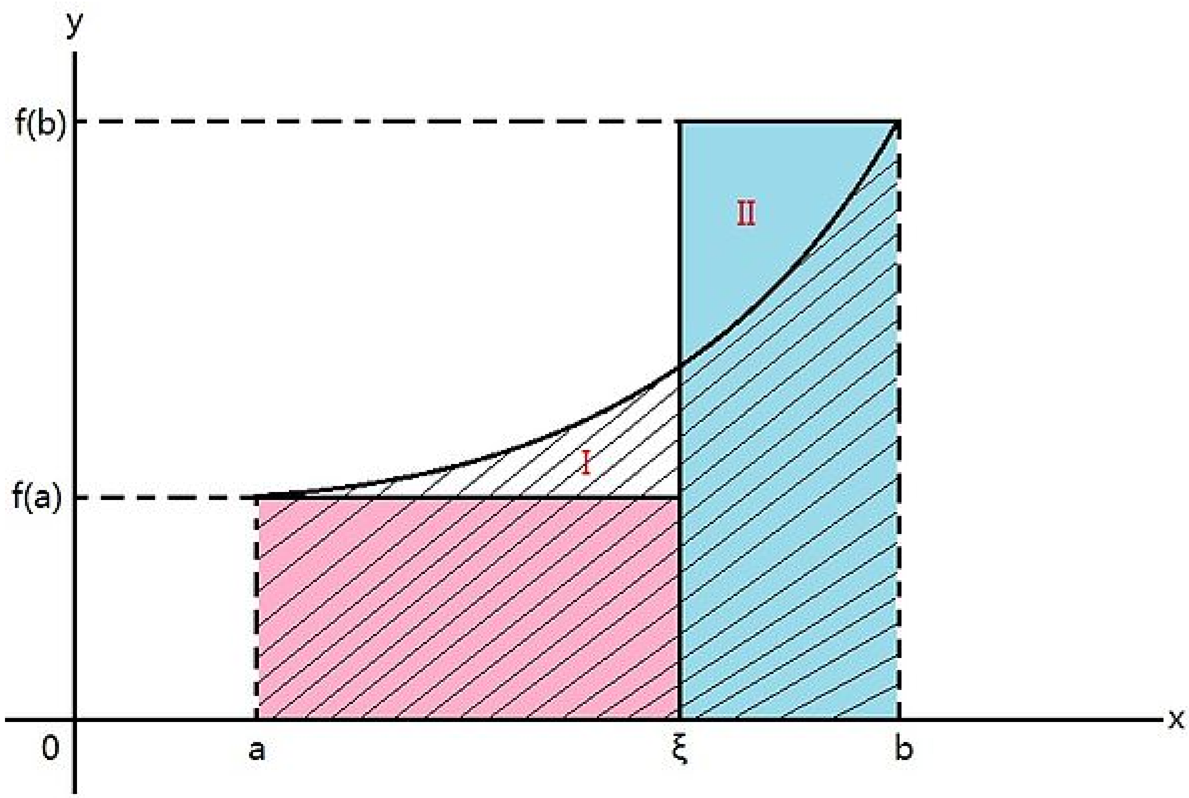
若f, g在$[a, b]$上可积且$f(x)$在$[a, b]$上单调,则存在$[a, b]$上的点ξ使

$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi)$

进而导出:

$\int_a^\xi f(x)dx - f(a)(\xi - a) = f(b)(b - \xi) - \int_\xi^b f(x)dx$

他的几何意义很明显为:能找到$\xi \in [a, b]$,使得红色区域的面　　和蓝色区域的面积相加等于阴影区域的面积,即S[I] = S[II]



4.8.12 定积分求平面函数曲线弧长

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \Phi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \Phi'^2(t)} dt$

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + y'^2}$

极坐标的情况:

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) d\theta}$ (注意求导符号)

4.9 反常积分

通常来说只需要极限存在,则此反常积分收敛.

4.9.1 无穷限反常积分

有以下几种情况:

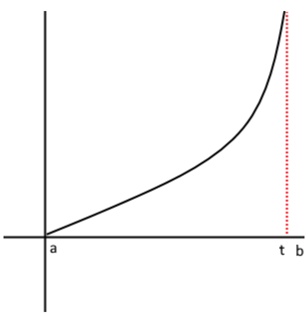
1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$

2. $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$

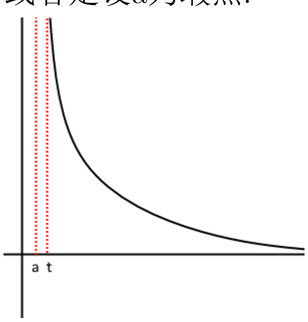
4.9.2 无界函数反常积分

设b为瑕点:



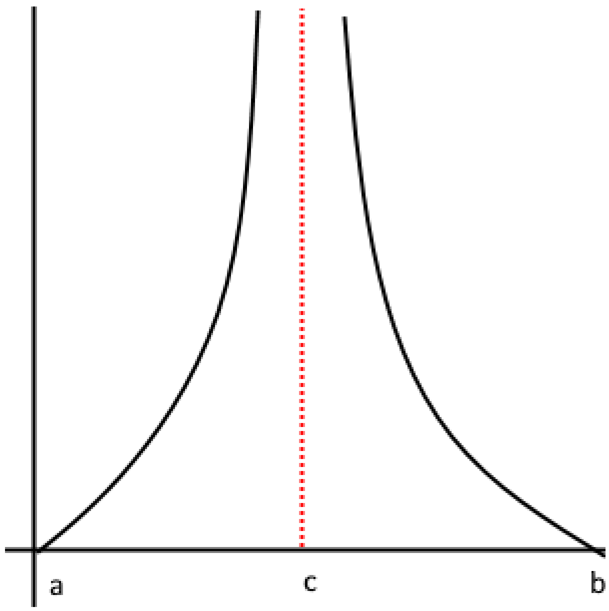
$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$

或者是设a为瑕点:



$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$

或者以上两者情况合一,设c为瑕点将其拆分:



$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

然后按照上方两个情况分别求解.

依然可以使用牛-莱公式.

瑕积分换元需要为单调函数,不论增减性.

4.9.3 gamma函数

$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx, (s > 0)$

gamma函数的特点就是:

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1$

因此:

$\Gamma(n+1) = n!$

4.10 无穷级数

4.10.1 泰勒公式/泰勒级数/展开

泰勒级数表示:当知道某点$x = a$的情况时,就能知道a点附近的函数是怎样的.

x在a点附近,最为粗略的估计就是$f(x) \approx f(a)$

然后才是修正项:$f'(a)(x-a)$,这是斜率乘以距离,最终得到的就是高度.相当于沿切线前进.

还有一项表示弯曲:$\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$,他是斜率的斜率,变化率的变化率.

但后面还有更多项,直接写出通项公式如何?

泰勒级数通项公式:$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n-1)}(x-a)^{n-1}$,0阶导指的是原函数,a是x附近的点.

还有泰勒公式:表示的不是一个函数的幂级数形式而是对于某个函数的近似,形式与泰勒级数通项公式类似.

泰勒公式:$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n+R_n(x)$.

$R_n(x)$是余项,表示误差,是$(x-a)^n$的高阶无穷小$O((x-a)^n)$.根据中值定理可得$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$,其中$a\leq\xi\leq x$,意思是$\xi$介于$a$和$x$之间.

当泰勒公式在$a=0$处展开时就称为麦克劳林公式.

麦克劳林公式:当$a=0, f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+...+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$,其中$0<\theta<1$

4.11 微分方程

微分方程是一种描述世界的好手段,当描述某个东西随时间的微小变化比起描述这个物体整体的变化更方便的时候就会使用微分方程.

4.11.1 一阶线性微分方程

形式$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$
有以下几种情况:

1. $Q(x)=0$ →齐次方程,则$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$ → $\frac{dy}{y}=-p(x)dx$,然后两边求积分,从而得出:$y=e^{-\int p(x)dx}e^{\mathbb{C}_1}=C\cdot e^{-\int p(x)dx}$

2. $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x), Q(x)\neq 0$,也就是非齐次方程.设$y=ue^{-\int p(x)dx,u}$是未知量.然后把$y$代入:

$$u'e^{-\int p(x)dx}-ue^{-\int p(x)dx}p(x)+p(x)ue^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

从而推出:

$$u'e^{-\int p(x)dx}=Q(x)$$

因此$u'=Q(x)e^{\int p(x)dx}$,从而推出:

$$u=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\mathbb{C}$$

将以上带入,得出:$y=e^{-\int p(x)dx}\cdot(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+\mathbb{C})$ (通用公式)

注:一个非齐次线性微分方程的通解等于对应的齐次微分方程的通解与非齐次微分方程的一个特解之和.

4.11.2 伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n$$

当$n=0$时,此式为齐次方程,当$n=1$,为一阶线性微分方程.

当n即不等于0也不等于1时,用y^n除以两边,得到：

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=Q(x)$$

设$y^{1-n}=z$,则：

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}\rightarrow\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}=y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

代入原方程,则原式等于：

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=Q(x)$$

再两侧同乘$\frac{dz}{dx}$：

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)Q(x)$$

再套用非齐次线性微分方程的公式,再把y求出来就行.

4.11.3 可降阶高阶微分方程

有以下几种情况:

1. $y^{(n)}=f(x)$,于是两边不断求积分进行降阶:$y^{n-1}=\int f(x)dx+\mathbb{C}$
2. $y''=f(x,y')$,设$y'=p,y''=p'$,则$p'=f(x,p)$.然后再进行回代.
3. $y''=f(y,y')$,同样的,令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$,于是$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

4.11.4 常系数齐次线性微分方程

例:$y''+py'+qy=0$

先找出特征方程:$r^2+pr+q=0$,即:设$r=p', r^2=''$.

有以下三种情况:

1. $\Delta=b^2-4ac=p^2-4q>0, r_1=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}, r_2=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$
2. $\Delta=b^2-4ac=p^2-4q=0, r_1=r_2=\dfrac{-p}{2}$
3. $\Delta=b^2-4ac=p^2-4q<0, r_1=\alpha+\beta_i, r_2=\alpha-\beta_i$,可扩写成以下三种形式:
   (a) $y=\mathbb{C}_1e^{r_1x}+\mathbb{C}_2e^{r_2x}$($\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2$为任意常数)
   (b) $y=(\mathbb{C}_1+\mathbb{C}_2)e^{r_1x}$
   (c) $y=e^{\alpha x}(\mathbb{C}_1\cos\beta+\mathbb{C}_2\sin\beta)$

4.11.5 关于运动的微分方程/线性常系数微分方程

开门见山,先提出此公式再进行分析.

$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+2r\dfrac{dy}{dt}+ky=0$

很明显,这是个二阶常系数线性微分方程,二阶指的是它最多求了2次导.线性、这意味着他可以是个抽象的向量,他能被线性代数的方式所表示(见4.1.2-关于抽象向量空间).至于“常系数”,这意味着它的系数都是常数.

先分析这个方程的退化形式.

1、设$m=0, r=1/2, \dfrac{dy}{dt}=ay$

很明显:这意味着函数求导后是它自身的倍数,这暗示着原函数是个指数函数.不难猜到:原函数可以为$y=e^{at}$.但这样还不够.仔细想想:如果e的前面有系数,求导后也依然还是原函数的倍数,所以通解应该是$y=ce^{at}$.

2、设 $r=0, \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y$,其中$\omega$是$\dfrac{k}{m}$.

这又意味着什么?这意味着:原函数求二次导后是负数倍的他自己,在实数范围内(毕竟一涉及i事情就麻烦了起来,不过如果包含虚数的范围倒也是一件合理的事情,设$y=e^{kx}, y''=k^2e^{kx}$,如果要使这个二阶导符合条件很明显k应该是i,而欧拉公式的完整写法是:$e^{ix}=\cos x+i\sin x$)符合这个条件的就这两个函数:$\sin\omega t$和$\cos\omega t$,那么这两个函数就是解集的“基向量/基础解系”,通过这两个函数的线性组合就可以得出所有符合条件的原函数,因此通解写作$y=C\cos\omega t+D\sin\omega t$

3、设$m=0,r=0,\dfrac{dy}{dt}=0$

这更明显,$y=C+Dt$.(y是个函数,表示位置)

那么回到那个方程:这个方程在很多领域都是很常见的.这个方程能表示一切振动.(比如弹簧,钟表,摆动...)通过选择不同的系数,可以建立各种最简洁的基础模型.

那么以弹簧为例来讲解.例子中t表示时间(这就是为什么不用x):

实际上,在这种模型中,常有$r=0$.那么取$r=0$的情况.

有牛顿定律:$F=ma$,m就是质量,a则是加速度,也就是二阶导,因此改写成二阶导形式:$F=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$(不考虑质量损失)

弹簧是悬空拉着一个小滑块的.y的正方向是向下,他表示弹簧的位移,当y是正的时候,弹簧有向上拉的力,而弹簧的力与y成正比,比例则是常数k.当y很大的时候弹簧被拉的很长,向上拉的力在往上拉,写作$F=-ky=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$其中F表示拉力,负号是因为力的方向与y相反(胡克定理).经过变形得到:$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky=0$.非常眼熟.

$r=0$,r表示的是阻力,可以是空气阻力也可以是磁力等等,他就是没法制作永动机的原因,不过现在是假想环境,所以设他为0,那么弹簧就会是一根永不停息的、上下振动的弹簧.就如同上面分析的结果,他沿着**正弦和余弦**振动.而常数C与D则取决于初始状态.

回想一下,$-ky=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$,将两边同除以m,负号移走,于是得到ω^2而$\omega^2=\dfrac{k}{m}$.

这种情况很简单,只有$\sin,\cos$.接下来,来一点阻力.

$my''+2ry'+ky=0$

现在,对于任意m,r,k.想要求解此方程,很棒的是指数函数可以求出正确答案.

核心思想是尝试指数函数$y=e^{\lambda t}$,λ指的是特征函数.(用λ而不用C的原因可以看4.1.1-什么是线性变换.)将这个代入方程,并求出合适的λ.何不先从常数项开始?

很容易看出常数项是$ke^{\lambda t}$

而一阶导呢?有$2r$乘以$y=e^{\lambda t}$的导数,只需要将导数代入方程.

一阶项是$2r\lambda e^{\lambda t}$

到二阶导,同理.

二阶项就是$m\lambda^2e^{\lambda t}$

写出完整的形态:$m\lambda^2e^{\lambda t}+2r\lambda e^{\lambda t}+ke^{\lambda t}=0$

消掉公因式$e^{\lambda t}$,他显然不是0,可以消掉.结果就是$m\lambda^2+\lambda+k=0$

这个方程只不过是个普通的二次方程,随随便便就能解出来.二次方程理应有两个解.因此$e^{\lambda_1 t}$和$e^{\lambda_2 t}$都是方程的解

回忆一下公式,$\lambda=\dfrac{-r\pm\sqrt{r^2-km}}{m}$

引入一些数字,$1y''+6y'+8y=0$.计算λ

$\lambda^2+6\lambda+8=0$

$\lambda_1=-2,\lambda_2=-4$

解是多少呢？$y(t)=Ce^{-2t}+De^{-4t}$

两个λ都在指数中,然后得解

注意:λ可能解出复数,可以照样用,但也可以写成另一种形式——利用欧拉公式的美妙性质.

$e^{it}=\cos t+i\sin t$

(欧拉第二天意识到$-i$也有公式)

$e^{-it}=\cos t-i\sin t$

直接跳到结果:

$e^{(x\pm ki)t}=e^{xt}\cdot(\cos(t\cdot n)\pm i\sin(t\cdot n))$

另外,当两个λ相同(出现重根)的时候,方程的解一个是$e^{\lambda t}$另一个是$te^{\lambda t}$,经过验算会发现最后消掉了一部分,得到的是正常的结果.

所以结论就是:线性常系数微分方程只要通过$e^{\lambda t}$就能解决.

4.11.6 关于增长的微分方程/非线性微分方程/偏微分方程剧透

从线性的开始.

最简单的:$\dfrac{dy}{dt}=cy$, 给予了初始条件$y(0)$

即增长率与自身成正比.很明显的这是呈指数形式的增长,解应该是$y(t)=y(0)e^{ct}$

看下一个方程,依然是线性的:$\dfrac{dy}{dt}=cy+s$,s表示source,可以用银行存钱来描述:前一项是每天的利息,后一项的每天存入的金额. 这就是右侧带有常数项的线性微分方程了.事实上甚至能拿现有的知识来解决它:$\dfrac{dy}{dt}=cy+s=c(y+\dfrac{s}{c})=\dfrac{d(y+\frac{s}{c})}{dt}$, 其中$\dfrac{s}{c}$是常数,所以可以任意加减而不影响求导结果.随后观察整体,会发现与第一个例子几乎相同,唯一不同的就是多了个$\dfrac{s}{c}$函数依然以增长率c增长.从0处的y值加上$\dfrac{s}{c}$开始.

所以,结论是:$y(t)+\dfrac{s}{c}=(y(0)+\dfrac{s}{c})e^{ct}$.这就是该微分方程的快速版解答了.将常数丢到右边,就是一个标准的形式.

所以线性方程(不只是线性微分方程)的解$y(t)=y_{particular}(t)+y_{another\ solution\ with\ a\ right\ side\ 0}(t)$.用人话说就是:线性方程的解总是自身的某个特解加上另一个右侧等于0的方程的解.

也就是说如果要求$\dfrac{dy}{dt}=cy+s$的解,那么首先求一个特解(也就是任一个满足方程的函数),能找到的最简单的函数就是常函数.想要常数满足方程,常熟的常数必然为0,而且c乘以此常数加s也应该为0.也就是$cy+s=$

$0,\ cy=-s,\ y=-\dfrac{s}{y}$.这就是一个特解了.

那么“一个右侧为0的方程的解”是什么意思？将s擦去,使得$\dfrac{dy}{dt}=cy$,保留含有y的,去掉常数项,使得右侧为0.也就是$y'-cy=0$.书本上喜欢称之为:齐次方程.也就是第一个例子.

那么齐次方程的解是什么呢？$\dfrac{dy}{dt}=cy$的解含有e^{ct}以及任意常数A,也就是Ae^{ct},任意Ae^{ct}都能满足这个简单的方程.

所以整个方程的解就是$-\dfrac{s}{c}+Ae^{ct}$A是任意常数.不过当然,如果有初始条件就能特定一个.只需要设$t=0$,就能解出A,在这里$A=y(0)+\dfrac{s}{c}$.在上面也算出来了.

不过线性的已经没啥意思了,来点线性的.非线性的微分方程很有趣,也可以表示很多东西,比如:人口的增长.

关于人口增长函数$P(t)$,用什么微分方程描述比较合理？

$\dfrac{dP}{dt}=cP-sP^2$.其中c表示增长率.同样的,有出生也会有死亡,所以需要一个减速项,因为人口增长不可能这么快.也就是s.这在一定程度上反映了人口之间的相互作用.(事实上这种公式在其他领域也有很多用途)

在这个公式中p^2表示人口之间的相互拥挤造成的影响,因此s是个很小的数,比如十亿分之一.

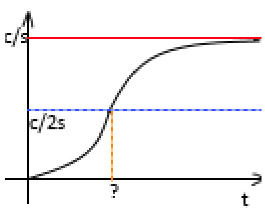
下面要解这个方程了.

不过对于非线性方程,目前(正在阅读的你,或者是我自己复习？)暂时没有现成的工具,需要更多的微积分知识.但是只要方法正确,就能解出来的.

先展示解吧:首先,如果一开始一个人都没有,那么就始终为0.$P=0$,常数解,很无趣.还有一种情况,很重要的情况,这种情况下导数也为0.

假设导数为0,将会得到一个特殊的特解,他不会变化.也就是当导数为0时,那么$cP=sP^2$.可以约掉一个P,也就是$P=\dfrac{C}{S}$.此时,增长和减少将会相互抵消,成为无法逾越的上限.

那么来看看真实情况下的解,不过为何不先看看图呢？:



其中$\dfrac{c}{s}$称为稳态,到了这里就会保持稳定,不会改变了.不过其实到不了哪里,只会一直接近而已.这就是这个式子所代表的人口曲线了.

那么就是解方程的环节了.有很多方法,先试试一个好使的:尝试$y = \frac{1}{P}$.然后尝试把整个方程写成y的形式.这是解这个方程的技巧,而解非线性方程常常需要一些技巧.

看看这个方程长啥样子:$\frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{dP}{dt}}{P^2}$而$\frac{dP}{dt}$是已知的,所以将他代进来,得到$-\frac{cP - sP^2}{P^2}$.将负号写进去,得到一个s:$s - \frac{c}{P}$.查看前面的推导能发现:$\frac{1}{p} = y$.所以得到$s - cy$.于是$\frac{dy}{dt}$变成了线性的,它还含有资源项s,而增长率项还含有一个-c.也许仔细想想为什么

那么写出y的解:$y(t) - \frac{s}{c} = (y(0) - \frac{s}{c})e^{-ct}$这就是y的解.$y = \frac{1}{P}$,接下来就是要回代了:

$\frac{1}{P(t)} - \frac{s}{c} = (\frac{1}{P(0)} - \frac{s}{c})e^{-ct}$,接下来的一堆化简就不写了.

这种模型称为logistic方程(只是为了提一下)

接下来再来一个有意思的方程:捕食者与猎物的方程:

这里有两个未知数:猎物——记作v,捕食者——记作u,表示的都是两者的总数.如果猎物不够,捕食者就会减少.捕食者减少,猎物就会增加.因此这里有正的$u \cdot v$

这是公式:

前面有个$-cu$,表示没有食物的情况,捕食者将会慢慢灭绝.

但如果猎物存在,那么资源项就会正比于uv.

所以$\frac{du}{dt} = -cu + suv$

那么$\frac{dv}{dt}$呢？情况大不相同.他们被捕食,因此有$-Suv$,同时也有正的增长率Cv

那么这就是一个模型了.剧透一下:这玩意叫偏微分方程(Partical Differential Equation),简称PDE,他比常微分方程(Ordinary Differential Equation, ODE)包含了更多的信息.也更难解.

5 多元微积分

注:如果忘了什么是偏导数就去上一章回顾.

5.1 多元函数的极值与最值

5.1.1 多元函数的极值

- 极值存在的必要条件：

如果$z=f(x,y)$有偏导且在(x_0,y_0)存在极值,则$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0$

驻点此时指偏导等于0的点,即$f'_x=f'_y=0$(需要同时成立).

有偏导数的函数极值点必是驻点.但是函数的驻点不一定是极值点.

- 极值存在的充分条件：

  依然是拿$z=f(x,y)$举例:

  首先求出驻点(x_0,y_0),$A=f''_{xx},B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

  - 当$AC-B^2>0$时,存在极值点.其中：
    * $A<0$,极值点为极大值.
    * $A>0$,极值点为极小值.
  - 当$AC-B^2>0$时,无极值.
  - 当$AC-B^2=0$时,无法判断.

5.1.2 多元函数的最值

多元函数的最值一般出现在三种情况中：

1. 驻点
2. 偏导不存在的点
3. 端点

5.1.3 条件极值与拉格朗日乘数法

设目标函数为$z=f(x,y)$,条件为$\varphi(x,y)=0$
假设y也是x的函数ψ,则：

$$z=f(x,\psi(x))$$

如果对x的导数存在且有极值,那么求导应该为0,因此对z求导：

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

那么：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0}=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_0}=0$$

由此结论,把y看作x的隐函数,则由隐函数存在定理：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}$
将其代入,从而得到：

$$f'_x(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}=0$$

设后一项中的$-\dfrac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}=\lambda$
代入替换,得：

$$f'_x+\lambda\varphi'_x=0$$

并且对λ作变形：

$$f'_y(x_0,y_0)-\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}\varphi'_y(x_0,y_0)=f'_y+\lambda\varphi'_y=0$$

联立方程组：

$$\begin{cases}f'_x+\lambda\varphi'_x=0\\ f'_y+\lambda\varphi'_y=0\\ \varphi(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

作辅助函数$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases}L'_x=0\\ L'_y=0\end{cases}\quad \text{即：}\begin{cases}f'_x+\lambda\varphi'_x=0\\ f'_y+\lambda\varphi'_y=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$$

当有两个以上的约束条件时：

$u=f(x,y,z,t),\varphi(x,y,z,t)=0,\psi(x,y,z,t)=0$

$L=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\psi(x,y,z,t)$

$$
\begin{cases}
L'_x = 0 \\
L'_y = 0 \\
L'_z = 0 \\
L'_t = 0 \\
\varphi(x,y,z,t) = 0 \\
\psi(x,y,z,t) = 0
\end{cases}
$$

5.2 隐函数

5.2.1 隐函数存在定理

5.3 重积分

5.3.1 二重积分

定义：$\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i f(\xi_i, \eta_i) = \iint\limits_D f(x,y) d\sigma$

解释：$f(x,y)$是区域D上的有界函数,将区域D任意分成n个区域$\Delta\sigma_1 \ldots \Delta\sigma_n$,在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点,$(\xi_i, \Upsilon_i) \cdot \Delta\sigma_i$,当$\lambda \to 0$时,如果上述极限存在,则称为$f(x,y)$的二重积分.其中$d\sigma$称为面积元素,可写作$dxdy$

设被积函数$f(x,y)$,从几何上来说：

- 当$f(x,y) \geq 0$时,二重积分结果为体积.
- 当$f(x,y) < 0$时,二重积分结果为体积的相反数.
- 当$f(x,y)$有正有负时,二重积分结果为XOY平面上半部分的体积减去下半部分的体积.

5.3.2 二重积分的性质

- $\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] \, d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint\limits_D g(x,y) d\sigma$
- D分为D_1, D_2,$\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y) d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y) d\sigma$
- $f(x,y) = 1, \iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \sigma$

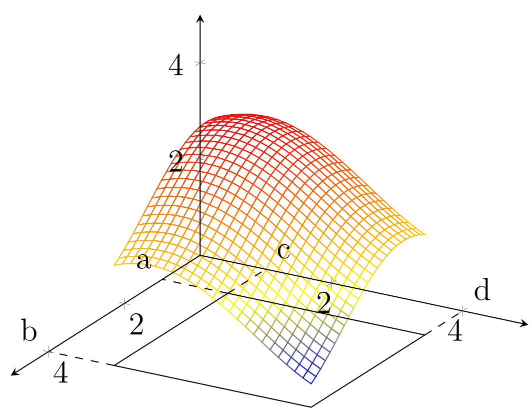
- $f(x,y) \leq g(x,y), \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \leq \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

- $\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\, d\sigma$

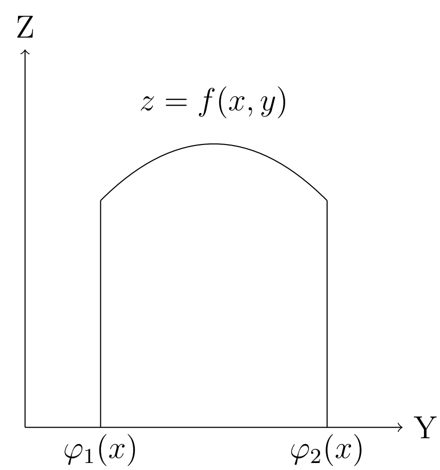
- M, m分别是函数的最高和最低点,$m\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y) \leq M\sigma$

- $m \leq \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma}{\sigma} \leq M$,即：$f(\xi,\eta) = \dfrac{1}{\sigma}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

5.3.3 直角坐标系下的二重积分计算



思路是将立体对象切成一个个面再进行积分,如下：



此图像的面积$S = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

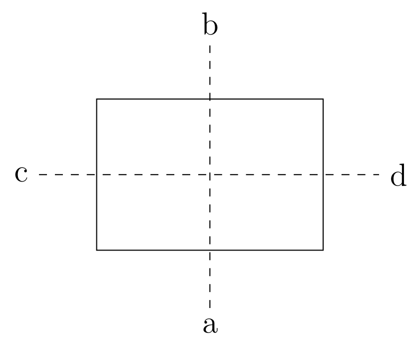
再对面积进行积分：$V = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d \int_{\phi_2(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dxdy$
在直角坐标系下有两种积分顺序:

- X型：内层积分时上方函数是上限,下方函数是下限,即:$\int_{xx}^{xx} \int_{\text{下}}^{\text{上}} f(x,y)dydx$
- Y型：内层积分时左侧函数是下限,右侧函数是上限,即:$\int_{xx}^{xx} \int_{\text{右}}^{\text{左}} f(x,y)dxdy$

5.3.4 直角坐标系下二重积分的特殊情况

有两种特殊情况可以简化二重积分的运算：

1. 积分区域为长方形：

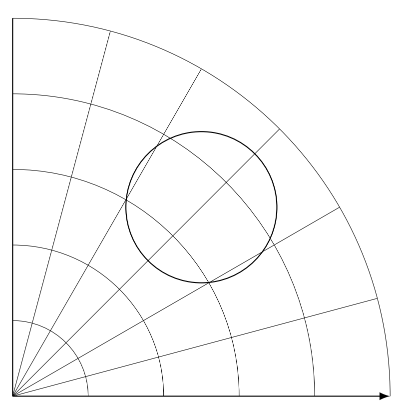


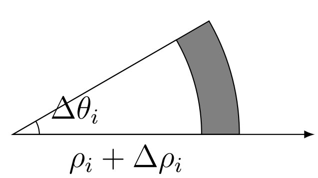
则$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$

2. 在情况 1 下,如果$f(d)c = f_1(x) \cdot f_2(y)$,则：

$$\int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y)dy = \int_a^b f_1(x)dx \int_c^d f_2(y)dy = \int_a^b f_1(x)dx \cdot \int_c^d f_2(y)dy$$

5.3.5 极坐标下的二重积分计算





公式的定义为：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{\rho}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{\rho}_i\sin\bar{\theta}_i)\cdot\bar{\rho}_i\Delta\rho_i\Delta\theta_i$$

简而言之,将直角坐标系下的二重积分转换为极坐标下的二重积分的公式为：

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

注意：

- 后面多出来了的一个ρ要记得加上,这个ρ并不是凭空冒出来的,它来自面积元素$d\sigma$：

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2}(\rho_i+\Delta\rho_i)^2\Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i = \frac{\rho_i+(\rho_i+\Delta\rho_i)}{2}\Delta\rho_i - \Delta\theta_i = \bar{\rho}_i\cdot\Delta\rho_i\cdot\Delta\theta_i$$

- 极坐标的积分顺序不能互换
- 何时使用极坐标：
  1. 积分区域为圆,圆环,扇形
  2. 被积表达式为$x^2+y^2,\frac{x}{y},\frac{y}{x}$

5.3.6 极坐标下的特殊情况

- $-x^2-y^2 = -(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta) = \rho^2$
- $\frac{x}{y} = \tan\theta$
- $\frac{y}{x} = \cot\theta$

5.3.7 二重积分换元法

设$f(x,y)$在B区域连续,$x=x(u,v),y=y(u,v)$,且x,y积分区域为D,用u,v换元后为D'

当：

1. $x(u,v),y(u,v)$有一阶连续偏导.

2. $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$

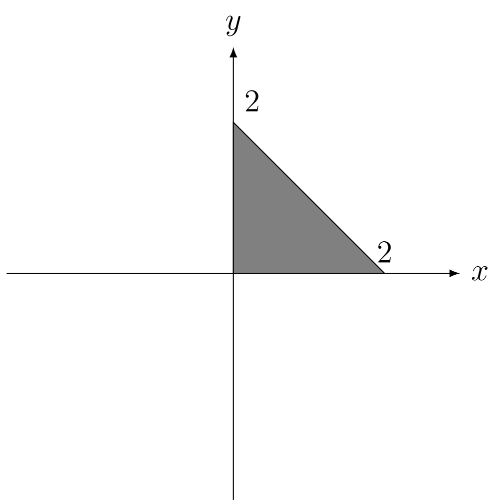
3. $|J(u,v)|\neq 0$(不全为0,如果指事字一个点或一条线上为0也成立)

4. D'到D点是一一对应的

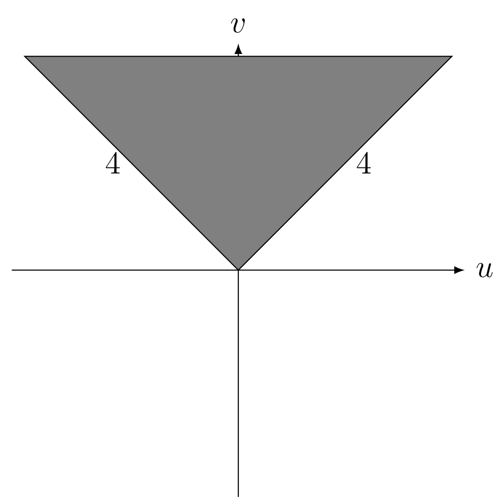
此时：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left\|J(u,v)\right\|dudv$$

从几何直观上看：



变成了：



其中$\|J(u,v)\|=\dfrac{1}{2}$,因此缩放了两倍.

一般来说在以下情况下会使用换元:

- 被积函数不好积
- 积分区域不好表示

5.3.8 三重积分

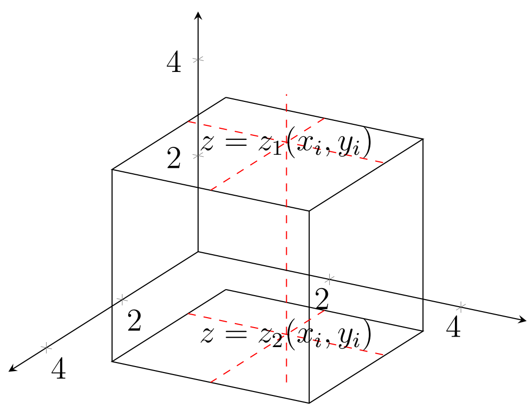
设$v=f(x,y,z)$,从空间中任取一点$\Delta V_i:f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$

定义为：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

Ω表示积分空间区域.

与二重积分类似,具体积分思路为：



$$\iint\limits_{D(x,y)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy$$

值得注意的是在二重积分情况下的特殊情况(5.3.4)在三重积分下也适用.

5.3.9 三重积分(柱面坐标)

由于柱面坐标只是单纯的加了个z轴,因此只是单纯的在外面套了一层对z轴的积分而已.

即：$dv = \rho d\rho d\theta dz$

5.3.10 三重积分(球面坐标)

公式为：

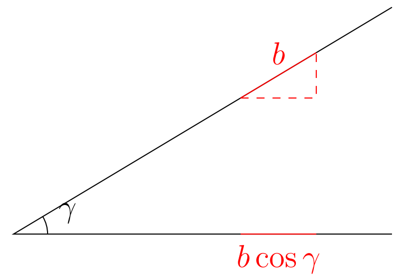
$$dv = dxdydz = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

多出来的$r^2\sin\varphi$也可以由雅可比行列式推出.

5.3.11 重积分应用(求曲面面积)

设$z = f(x,y)$;将曲面划分称一个个长为a宽为b的小方格:

图示如下：



设投影后的区域为$d\sigma$,投影前为dA.投影后长边的长度a不变,因此$dA=\dfrac{d\sigma}{\cos\gamma}$

其中$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}}$

所以$dA=\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}d\sigma$,即：

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}d\sigma$$

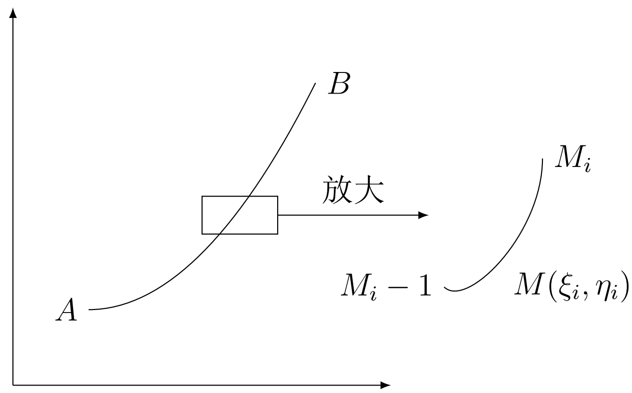
5.4 曲线积分与曲面积分

在数学中,曲线积分或路径积分(或contour integral[留数定理])是积分的一种.积分函数的取值沿的不是区间,而是特定的曲线,称为积分路径.曲线积分有很多种类,当积分路径为闭合曲线时,称为环路积分或围道积分.

在曲线积分中,被积的函数可以是标量函数或向量函数.当被积函数是标量函数时,积分的值是积分路径各点上的函数值乘上该点切向量的长度.在被积分函数是向量函数时,积分值是积分向量函数与曲线切向量的内积.在函数是标量函数的情形下,可以把切向量的绝对值(长度)看成此曲线把该点附近定义域的极小区间,在到达域内拉长了切向量绝对值的长度,这也是曲线积分与一般区间上的积分的主要不同点.

5.4.1 第一类曲线积分(对弧长的曲线积分)

设曲线的密度为$M(x,y)$,求质量m:



第一类曲线积分的定义为：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i = m = \int_L f(x,y)ds$$

其中ds称为曲线元素,也有三维的形式$\int_L f(x,y,z)ds$.

第一类曲线积分有以下运算性质：

- $\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds$
- $\int_L (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))ds = \alpha\int_L f(x,y)ds + \beta\int_L g(x,y)ds$
- $\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds \qquad (L = L_1 + L_2)$
- $f(x,y) \leq g(x,y), \int_L f(x,y)ds \leq \int_L g(x,y)ds$
- $\left|\int_L f(x,y)ds\right| \leq \int_L |f(x,y)|\, ds$

5.4.2 第一类曲线积分的计算

定理：设曲线L：

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t),(\alpha\leq t\leq\beta) \\ y=\psi(t)\end{cases}$$

这两个参数方程都有一阶连续导数,且$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$.

则$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt \qquad (\alpha<\beta)$

即:

1. $y=\varphi(x),(x_1\le x\le x_2)$

   则设曲线L的参数方程为：

$$\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases} \quad x_1\le t\le x_2$$

   则积分为：$\int_{x_1}^{x_2} f(t,\varphi(t))\sqrt{1+(\varphi'(t))^2}dt=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(t))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx \qquad (x_1<x_2)$

2. $x=\varphi(y),(y_1\le y\le y_2)$

   则设参数方程：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=t \end{cases} \quad y_1\le t\le y_2$$

   则积分为：$\int_{y_1}^{y_2} f(\varphi(t),t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+1}dt=\int_{y_1}^{y_2} f(\varphi(y),y)\sqrt{(\varphi'(t))^2+1}dy \qquad (x_1<x_2)$

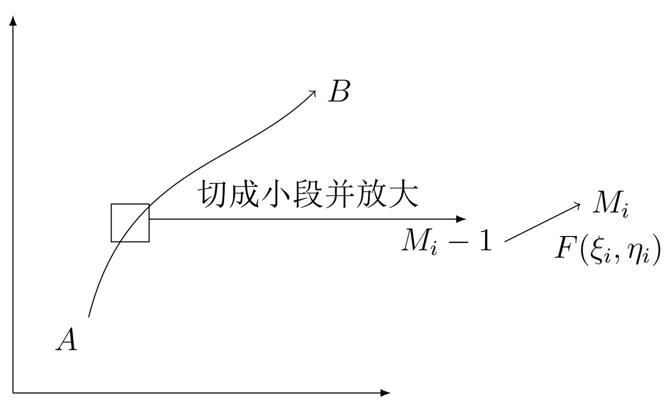
3. $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$

   $\vdots$

   $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\omega'(t))^2}dt \qquad (\alpha<\beta),(\alpha\le t\le\beta)$

5.4.3 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)

引出：设F是一变力,求他沿着曲线做的功ω：



$$\Delta\omega_i=F(\xi_i,\eta_i)\cdot(\overrightarrow{M_{i-1}M_i})$$

定义为：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

其中$F(\xi_i,\eta_i)$可以分解为$P(\xi_i,\eta_i)\vec{i}+Q(\xi_i,\eta_i)\vec{j}$,$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$可以分解为$\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$.($\vec{i},\vec{j}$为基向量)

因此对定义作变形,可以获得另一个形式：

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n}(P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i)$$

需要注意的是：求和与求极限需要单独对第一,第二项求(即对各个正交方向的基向量分别求).

- 如果第一项极限存在,则$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i=\int_L P(x,y)dx$
- 如果第二项极限存在,则$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i=\int_L Q(x,y)dy$

最后$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy=\int_L F(x,y)\cdot d\vec{r}$

其中$d\vec{r}$是一个向量,可以分解为$dx\vec{i}+dy\vec{j}$,因此实际上第二类曲线积分求的是积分向量函数各点与该点切向量的内积之和.

第二类曲线积分有以下运算性质：

- $\int_L(\alpha F_1(x,y)+\beta F_2(x,y))\cdot d\vec{r}=\alpha\int_L F_1(x,y)\cdot d\vec{r}+\beta\int_L F_2(x,y)\cdot d\vec{r}$
- $\int_L F(x,y)\cdot d\vec{r}=\int_{L_1}F(x,y)\cdot d\vec{r}+\int_{L_2}F(x,y)\cdot d\vec{r}$
- 如果L^-是L的反向曲线弧,则$\int_{L^-}F(x,y)\cdot d\vec{r}=-\int_L F(x,y)\cdot d\vec{r}$

5.4.4 第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)计算

设参数方程：

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

从起点A到终点B时,t从α到β.

则$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$

注意:第二类曲线积分中α不一定比β小,只是一个对应起点一个对应终点.

有以下特殊情况：

- $y=\psi(x)$：

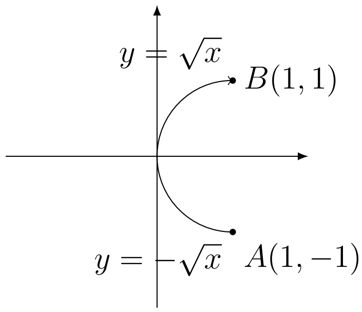
  令$x=x,y=\psi(x)$,则积分公式为$\int_\alpha^\beta[P(x,\psi(x))+Q(x,\psi(x))\psi'(x)]dx$

- $x=\varphi(y)$：

  令$x=\varphi(y),y=y$,则积分公式为$\int_\alpha^\beta[P(\varphi(y),y)\varphi'(y)+Q(\varphi(y),y)]dy$

5.4.5 第二类曲线积分计算例题

1. 设$F(x,y)=xy$,从A到B沿$y^2=x$积分:



   有两种方法：

   (a) 将AB分成两段,$A\to 0$和$0\to B$：

$$\int_L xydx=\int_{A0}xydx+\int_{0B}xydx.$$

   因为在$A0$上$y=-\sqrt{x}$,在$0B$上$y=\sqrt{x}$,所以x的取值在$A0$上是$1\to 0$,在$0B$上是$0\to 1$.所以上式等于：

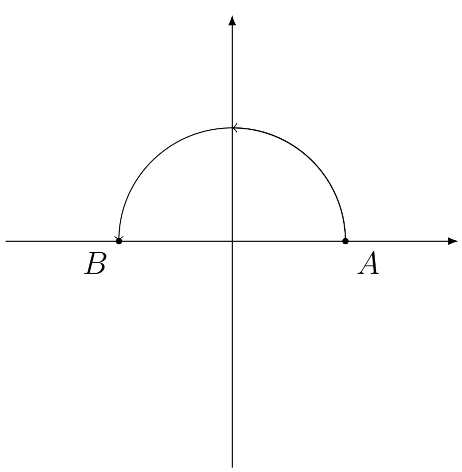
$$\int_1^0 x(-\sqrt{x})dx+\int_0^1 x(\sqrt{x})dx=2\int_x^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}$$

   这可以形象的称为”按照x型区域积分”

   (b) 将公式变形成$x=y^2$：

   $\int_L y^2dx=\int_{-1}^1 y^2\cdot ydx=\int_{-1}^1 y^2\cdot y\cdot 2ydy=\dfrac{4}{5}$

2. $\int_L y^2dx$,求沿着上半圆周L和从$A(a,0)$到$B(-a,0)$的直线AB的积分：



(a) 第一题：极坐标：

$$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, 0 \le \theta \le \pi(\text{注意旋转方向})$$

$$\int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta(-a\sin\theta)d\theta = a^3\int_0^{\pi} 1-\cos^2\theta d\cos\theta = -\frac{4}{3}a^3$$

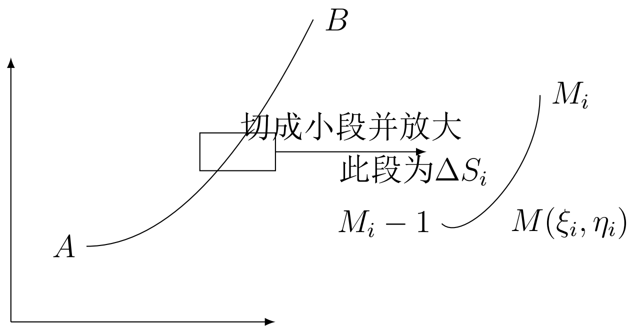
(b) 第二题：沿着x轴,y始终等于0. x从a到$-a$：

$$\int_a^{-a} 0^2 dx = 0$$

5.4.6 两类曲线积分之间的联系

先列出两类曲线积分的定义：

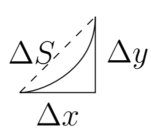
第一类：



$f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$(简称为$f\Delta S$)

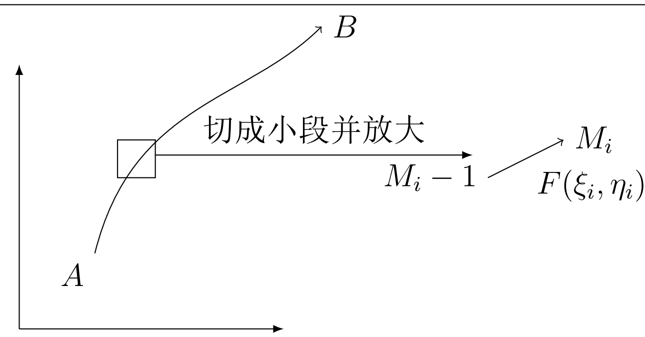
$\downarrow$

放大的积分弧段可以近似的看作一个三角形：



因此$f\Delta S = f\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

第二类



$P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$(简称为$P\Delta x + Q\Delta y$)

$\downarrow$

将$P\Delta x + Q\Delta y$除以$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

结果为$(P(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}})+Q(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}))$

即：$f = P(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}})+Q(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta$

设$x=\varphi(t), y=\psi(t)$,由此得出：

$\int_\alpha^\beta (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt$

$$=\int_\alpha^\beta (P\left(\varphi(t),\psi(t))\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}+Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{\psi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}\right)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$$

$= \int_{\alpha}^{\beta}(P(\varphi(t),\psi(t))\cos\alpha + Q(\varphi(t),\psi(t))\cos\beta)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}$
$= \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]ds$

5.4.7 格林公式

在物理学与数学中,格林公式给出了沿封闭曲线C的线积分与以C为边界的平面区域D上的双重积分的联系.格林公式是斯托克斯公式的二维特例：

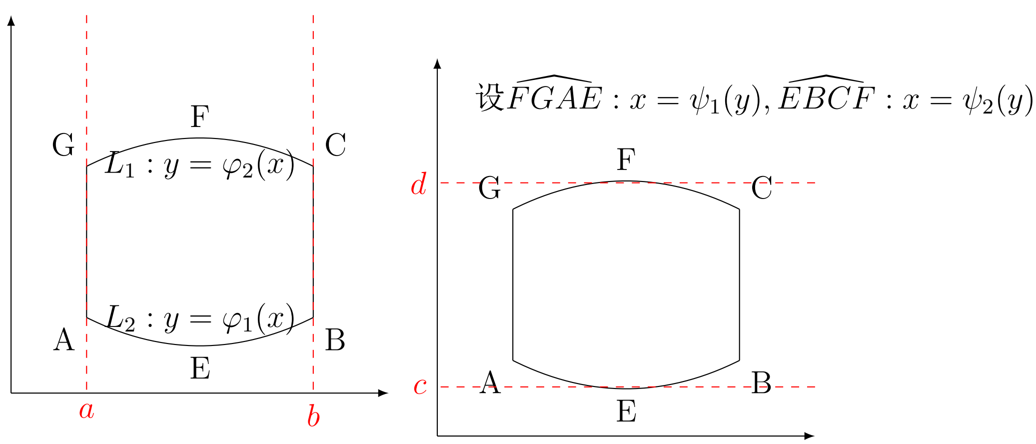
设闭区域D由分段光滑的简单曲线L围成,函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数(即:没有洞的区域),则有：

$$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{L^+}(Pdx + Qdy)$$

其中L^+是D的取正向的边界曲线,$\oint$表示闭合路线上的曲线积分.

5.4.8 当D为一个简单区域时格林公式的证明

设一个比较简单的区域D,无论是沿着Y还是X都最多只有两个垂边,即：



左:x型区域,右:y型区域

那么,区域D就可以写作:$D: \{(x,y)|\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$

1. 先证明后半部分：

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_a^b [P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))]dx :$$

$\oint_L Pdx$
$= \int_{L_1} Pdx + \int_{BC} Pdx + \int_{L_2} Pdx + \int_{GA} Pdx$
$= \int_{L_1} Pdx + \int_{L_2} Pdx$
$= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x))dx$
$= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))]dx$
$= -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$

2. 然后是前半部分：

   $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$
   $= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$
   $= \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)]dy$
   $= \int_{L_2} Qdy + \int_{L_1} Qdy$
   $= \oint_L Qdy$

5.4.9 格林公式的计算

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$$

有两种情况：

1. 已经得知了以上公式的右侧,求左侧 (计算区域面积): 使用格林公式,可以用线积分计算区域的面积.因为区域D的面积$A = \iint\limits_D 1dA$,所以只要选取适当的P与Q使得$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$,就可以通过$A = \oint_L (Pdx + Qdy)$来计算面积.

   还有一种可能的取值是$A = \oint_L xdy = -\oint_L ydx = \frac{1}{2}\oint_L (-ydx + xdy)$

   即：设$P = -y, Q = x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \frac{\partial P}{\partial y} = -1$
   那么$2\iint\limits_D dxdy = \oint_L xdy - ydx$

   所以$A = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

A:积分区域面积

2. 已经得知了左侧,求右侧：

有以下例子：

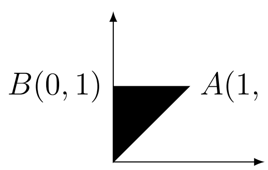
(a)

$$\oint_L x^2ydx - xy^2dy$$

L：正向圆周$x^2+y^2=a^2$.

$P=x^2y, Q=-xy^2, \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-y^2-x^2$

原式$=\iint\limits_D(-y^2-x^2)dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^2\rho d\rho=-\dfrac{\pi}{2}a^4$



(b) $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$,积分区域D：

设$P=0, Q=xe^{-y^2}$

原式 $=\oint_{OA+AB+BO}xe^{-y^2}dy$

$=\int_{OA}xe^{-y^2}dy$

$=\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$

注：OA直线是$y=x$

(c)

$$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta,\text{求面积}$$

用之前得出的$A=\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$：

$\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\cdot a\cos\theta+a\sin\theta\cdot a\sin\theta)d\theta$

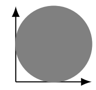
$=\pi ab$

(d)

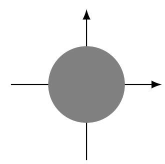
$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}, L:\text{无重点,分段光滑,且不过原点的连续闭曲线,方向逆时针.}$$

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},Q=\frac{x}{x^2+y^2}\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial y^2-x^2}{\partial(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

分两种情况：

i. 不包含原点,一阶偏导数存在且连续,$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$: 

ii. 包括原点,取适当小的$r>0$,在原点附近作圆,圆周$C:x^2+y^2=r^2$,称为复联通区域,方向逆时针,用于代换原区域.



$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

$$\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\theta\cdot r\cos\theta+r\sin\theta\cdot r\sin\theta}{r^2}d\theta=2\pi$$

5.5 雅可比矩阵与雅可比行列式

在向量分析(多元微积分)中，雅可比矩阵是函数的一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵。

其重要性在于，如果函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$在点$x$可微的话,在点$x$的雅可比矩阵即为该函数在该点的最佳线性逼近,也代表雅可比矩阵是单变数实数函数的微分在向量值多变数函数的推广,在这种情况下,雅可比矩阵也被称作函数f在点x的微分或者导数.

5.5.1 雅可比矩阵

假设某函数从$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^M$,从$x\in\mathbb{R}^n$映射到$f(x)\in\mathbb{R}^m$,其雅可比矩阵就是一个$m\times n$的矩阵.换句话讲也就是从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^m$的线性映射,其重要意义在于它表现了一个多变量向量函数的最佳线性逼近.因此,雅可比矩阵类似于单变数函数的导数.

此函数f的雅可比矩阵J为$m\times n$的矩阵,一般由以下方式定义：

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

矩阵的分量可表示成：

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

雅可比矩阵的其他常用符号还有：

$$Df, J_f(x_1, \ldots, x_n)\text{或者}\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

此矩阵的第i行是由函数f_i的梯度函数所表示的,$1 \leq i \leq m$.

如果p是$\mathbb{R}^n$中的一点,f在p点可微,根据数学分析,$J_f(p)$时在这点的导数.在此情况下,$J_f(p)$这个线性映射即f在点p附近的最佳线性逼近,也就是说当x足够靠近点p时,有：

$$f(x) \approx f(p) + J_f(p) \cdot (x - p)$$

讲更详细点也就是：

$$f(x) = f(p) + J_f(p)(x - p) + o(\|x - p\|)$$

其中,o表示高阶无穷小,$\|x - p\|$为x与p之间的距离

5.5.2 雅可比行列式

当雅可比矩阵为方阵时,其行列式称为雅可比行列式.

如果$m = n$,那么f是从$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^m$的函数,且他的雅可比矩阵是一个方阵.因此可以取他的行列式,称为雅可比行列式.

在某个给定点的雅可比行列式提供了f在接近该点时的表现的重要资讯.例如:如果连续可微函数f在p点的雅可比行列式不等于0,那么他在该点附近有f的反函数,这成为反函数定理.更进一步,如果p点的雅可比行列式是正数,则f在p点保持定向.如果是负数,则逆转定向.而从雅可比行列式的绝对值,就可以知道函数f在p点附近时放大或缩小体积;这就是他出现在换元积分法中的原因.

5.5.3 举例

1. 球坐标系到直角坐标系的转化由$F : R^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to R^3$给出,其分量为：

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

此坐标变换的雅可比矩阵是：

$$J_F(r,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

其雅可比行列式为$r^2\sin\theta$,由于$dV=dxdydz$,如果左变数变换的画其体积元dV会变成：$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$.

2. 设有函数$F:R^3\to R^3$,其分量为：

$$\begin{aligned}y_1&=5x_2\\ y_2&=4x_1^2-2\sin(x_2x_3)\\ y_3&=x_2x_3\end{aligned}$$

则他的雅可比行列式为：

$$\begin{vmatrix}0 & 5 & 0\\ 8x_1 & -2x_3\cos(x_2x_3) & -2x_2\cos(x_2x_3)\\ 0 & x_3 & x_2\end{vmatrix}=-8x_1\cdot\begin{vmatrix}5 & 0\\ x_3 & x_2\end{vmatrix}=-40x_1x_2$$

可以得出:当x_1与x_2同号时,F逆转定向;改函数处处具有反函数,除了在$x_1=0$或者$x_2=0$的点.

6 无穷级数

在数学中,一个有穷或无穷的序列$u_1,u_2,u_3,u_4\ldots$的和$S=u_1+u_2+u_3+\ldots$称为级数.如果序列是有穷序列,其和称为有穷级数;反之,称为无穷级数(一般简称为级数).序列$u_0,u_1,u_2,\ldots$中的项称作级数的通项(或一般项).级数的通项可以是实数,矩阵或向量等常量,也可以是关于其他变量的函数,不一定是一个数.一般的,如果级数的通项是常量,则称之为常数项级数,如果级数的通项是函数,则称之为函数项级数.

有穷数列的级数一般通过初等代数的方法就可以求得.无穷级数有发散和收敛的区别,称为无穷级数的敛散性.判断无穷级数的敛散性是无穷级数研究中的主要工作.无穷级数在收敛时才会有一个和;发散的无穷级数在一般意义上没有和,但可以用一些别的方式来定义.

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\ldots$$

其中u_n称为一般项,前n项之和$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_n$称为部分和,比如：

$$S_1 = u_1 \qquad S_2 = u_1 + u_2 \qquad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \ldots$$

当$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$,即趋于某个常数,就称此级数是收敛的.否则就是发散的.
设S是所有项的和,S_n是前n项的和,那么$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$就被称为余项.

6.1 无穷级数的性质

无穷级数有以下性质：

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于$s$则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$收敛于$ks$(即：级数的每一项乘以$k$不会改变敛散性.和也会乘以$k$)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于$s_1$和$s_2$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛,且和等于$s_1 \pm s_2$.即：
  - 两个收敛的级数,相加减后仍收敛.
  - 相加减后收敛的两个级数,本身未必收敛.
  - 若两个级数都是绝对收敛,则合在一起也是绝对收敛.
  - 若两个级数都是条件收敛,则合在一起可能是条件收敛,也可能是绝对收敛.
  - 若两个级数一个是绝对收敛,一个是条件收敛,则合在一起是条件收敛.
- 去掉,加上或改变有限项,敛散性不变
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,任意加括号后得到的级数也收敛,并且和不变.(加括号后收敛,原级数不一定收敛)
- 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要条件是$u_n$(即通项趋于0).(注意,是必要条件而非充分条件,即：u_n趋于0,级数未必收敛,u_n不趋于0,级数一定发散)

6.2 常数项无穷级数审敛法

常数项级数,即每一项都是常数的级数.

6.2.1 正项级数

若通项为实数的无穷级数$\sum u_n$每一项u_n都大于等于零,则称$\sum u_n$是一正项级数.

正项级数的部分和S_n是一个单调递增数列.由数列极限的判别准则:单调有界数列必有极限.因此,要么部分和数列S_n有界,这时$\sum u_n$收敛,$\lim\limits_{x\to\infty} S_n = s$,要么部分和数列趋于正无穷,这时级数发散.

- 比较判别法：

  设$\sum u_n$和$\sum v_n$是正项级数. 如果存在正实数M,使得从若干项开始,$u_n \le Mv_n$(也就是说u_n是v_n的高阶无穷小),则：

  - 当$\sum v_n$收敛时,可推出$\sum u_n$也收敛.
  - 当$\sum u_n$发散时,可推出$\sum v_n$也发散.

  使用此方法常常是对所要判别的级数的通项进行放缩.

  比较判别法的特点是要已知若干级数的敛散性.一般来说,可以选择比较简单的级数:P级数$U_p = \sum \dfrac{1}{n^p}$作为"标准级数",依此判断其他函数的敛散性.需要知道的是当$p \le 1$时,P级数发散.当$p \ge 1$时,P级数收敛.

  比如:已知级数$\sum \dfrac{1}{n^2}$收敛,则级数$\sum \dfrac{|\sin n|}{n^2}$也收敛,因为对任意的$n$,$\sin n \le 1$

- 比较判别法的极限形式：

  如果$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$或其他有限数,即同阶无穷小时,两者敛散性一致

  如果$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$,则：

  - 当$\sum v_n$收敛时,可推出$\sum u_n$也收敛.
  - 当$\sum u_n$发散时,可推出$\sum v_n$也发散.

  如果$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \infty$,则：

  - 当$\sum u_n$收敛时,可推出$\sum v_n$也收敛.
  - 当$\sum v_n$发散时,可推出$\sum u_n$也发散.

  注：使用此方法常常是采用等价无穷小替换或与p级数作比较，寻找同阶无穷小来判别原级数的敛散性。

- 达朗贝尔判别法：

  在比较判别法中,如果去几何级数为比较的标准级数,可得：

  设$\sum u_n$是通项大于零的正项级数.且$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=p$,则：

  - 当$p<1$时,级数$\sum u_n$收敛.
  - 当$p>1$时,级数$\sum u_n$发散.
  - 当$p=1$时,无法判断.级数$\sum u_n$可能收敛也可能发散

  这个判别法也被称为比值判别法或者比值审敛法.

  对于多个式子连乘的,适合用此方法.

- 柯西收敛准则：

  设$\sum u_n$时正项级数.并且$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=p$,则：

  - 当$p<1$时,级数$\sum u_n$收敛.
  - 当$p>1$时,级数$\sum u_n$发散.
  - 当$p=1$时,级数$\sum u_n$可能收敛也可能发散.

  这个判别法也称为根值判别法或根值审敛法.

  对于通项中含有以n为指数幂的,适合用此方法.

- 对数判别法：

  - 若存在$\alpha>0$,使当$n\geq n_0$时,$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}\geq 1+\alpha$,则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.
  - 若$n\geq n_0$时,$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}\leq 1$,则正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

- 积分判别法：

  若函数$f(x)$是区间$[a,+\infty]$上非负且单调递减的连续函数,则$\sum\limits_{n=a}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=a}^{\infty}f(n)$与$\int_{+\infty}^{a}f(x)dx$的敛散性一致.

  注意:只是敛散性一致.

6.2.2 交错级数

具有以下形式的级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \ (a_n >= 0)$$

被称为交错级数.

- 莱布尼茨判别法：

  在上述的级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$中,如果当$n$趋于无穷时,数列$a_n$的极限存在且等于0,并且每个$a_n$小于$a_{n-1}$(即:数列$a_n$是单调递减的),那么级数收敛.

  即：交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$满足：

  - $u_{n-1} > u_n$
  - $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
  - 注:此处所指的u_n, u_{n+1}不包括负号

- 利用级数的敛散性定义：

  研究交错级数的部分和数列是否收敛,若部分和数列收敛,则级数收敛,反之发散.

- 利用加括号级数判断：

  - 若加括号的级数发散,则原级数必发散
  - 若加括号的级数收敛,且原级数的通项的极限为0,则原级数收敛.

- 拆通项判别

- 交换奇偶项判别:

  常常是交换奇偶项配合莱布尼兹判别法判别.

6.2.3 任意项级数

- 比较判别法(只能判定收敛)：

  对于通项为任意实数的无穷级数$\sum u_n$,将级数$\sum |u_n|$称为他的绝对值级数.可以证明,如果$\sum |u_n|$收敛,那么$\sum u_n$也收敛,这时称$\sum u_n$为绝对收敛.如果$\sum u_n$收敛,但是$\sum |u_n|$发散,则称$\sum u_n$为条件收敛.

比如说,级数$\sum\frac{\sin n}{n^2}$绝对收敛,因为$\sum\frac{|\sin n|}{n^2}$是收敛的,而级数$\sum\frac{(-1)^n}{n}$是条件收敛的.它自身收敛到$\ln\frac{1}{2}$,但是他的绝对值函数$\sum\frac{1}{n}$是发散的.

- 比值判别法,根值判别法：

  若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或者$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,则$\rho<1$时收敛且为绝对收敛,$\rho>1$时发散.

黎曼级数定理说明,如果一个无穷级数$\sum u_n$条件收敛,那么对于任意的实数x,存在一个正整数到正整数的双射σ,使得级数$\sum u_{\sigma(n)}$收敛到x,对于正负无穷大,上述双射也存在.

6.2.4 常见常数项无穷级数

- 几何级数：

  几何级数(或等比级数)是指通向为等比数列的级数,比如：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$$

  一般来说,几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$收敛当且仅当$|z|<1$.

- 调和级数：

  调和级数是指通向为$\frac{1}{n}$的级数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

  他是发散的.

- p级数：

  指通项为$\frac{1}{n^p}$的级数：

$$U_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

  对于实数值p,当$p>1$时收敛,$p<=1$时发散,$p=1$时为调和级数.

- 列项级数：

  $$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$$

  收敛当且仅当数列b_n收敛到某个极限L,这时级数的和是$b_1 - L$.

- 交错级数：

  具有以下形式的级数：

  $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

  其中所有的a_n非负,就被称为交错级数.

6.3 函数项无穷级数审敛法

设$(u_n(x))_{n\geq 0}$为定义在区间I上的函数列,则表达式$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots$称为函数项级数,记为$\sum u_n(x)$.对函数项级数的主要研究是：

1. 确定对哪些x, $\sum u_n(x)$收敛

2. $\sum u_n(x)$收敛的话,其和是什么,有什么性质?

6.3.1 一些定义(收敛点,收敛域,发散点,发散域,和函数与部分和还有余项)

对于区间I上的每个点x_0,级数$\sum u_n(x_0)$是常数项级数.

- 收敛点：若$\sum u_n(x_0)$收敛,则称x_0是$\sum u_n(x)$的一个收敛点.

- 收敛域：$\sum u_n(x)$全体收敛点的集合称为他的收敛域.

- 发散点：若$\sum u_n(x_0)$发散,则称x_0是$\sum u_n(x)$的一个发散点.

- 发散域：$\sum u_n(x)$全体发散点的集合称为他的发散域.

- $\sum u_n(x)$在其收敛域的每一点上都有定义,因此定义了一个函数,称为$\sum u_n(x)$的和函数,记为$S(x)$.

- $S(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$,其中$S_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0)$为函数项级数在$x_0$点上的部分和.

- 余项为和函数减去部分和：$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$,显然：$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

6.3.2 阿贝尔定理

设$f(z)=\sum\limits_{n\geq 0}a_nx^n$为一幂级数,其收敛半径为$R$,若对于收敛圆(模长为$R$的复数的集合)上的某个复数$z_0$,级数$\sum\limits_{n\geq 0}a_nx_0^n$收敛,则有:$\lim\limits_{t\to 1^-}f(tx_0)=\sum\limits_{n\geq 0}a_nx_0^n$.

用人话来说就是:$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$,如果$x=x_0$时此幂级数收敛,如果$|x|\leq|x_0|$,则此幂级数绝对收敛.反之,如果$x=x_0$时发散,且$|x|>|x_0|$,则幂级数发散.

收敛半径是指收敛圆的半径,在数轴上是指收敛域的半径.

推论:收敛的情况有这三种:

- $x=0$时收敛
- $x\in(-\infty,+\infty)$时收敛.
- $|x|<R$时绝对收敛(在端点处可能发散也可能收敛).

在判断端点(是否收敛)之前$(-R,R)$称为收敛区间,经过判断决定了是否保留端点后才称为收敛域.

6.3.3 求幂级数的收敛域

设幂级数$\sum a_nx^n$满足$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$,则:

- ρ时正实数时,$R=\dfrac{1}{p}$.
- $\rho=0$时,$R=\infty$
- $\rho=\infty$时,$R=0$

如果模糊一下概念,可以概括为:$R=\dfrac{1}{\rho}$.

注:如果只有偶数项则不能用此方法.

6.3.4 幂级数的比值审敛法

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=L$$

求当x为何值时$L<1$

例：求$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径：

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}x^{2n+2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}}\right| = 4\left|x\right|^2 < 1,\ |x| < \frac{1}{2},\ R = \frac{1}{2}$$

6.3.5 幂级数的运算

- 幂级数的加法与减法：将相应系数进行加减.

  $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\dots)\pm(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\dots) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b$

- 幂级数的乘积：基于柯西乘积

  $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n\right)\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n\right]$
  $=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_ib_j(x-c)^{i+j}$
  $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)(x-c)^n$

  举例：

  $$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\times\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\dots$$

- 幂级数的除法：

  两个幂级数相除的结果仍然是幂级数.假设$b_0\neq 0$时：

  $$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\dots}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\dots} = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\dots$$

  系数$c_0,c_1,\dots,c_n$由以下等式逐一确立：

  $a_0=b_0c_0$

  $a_1=b_1c_0+b_0c_1$

  $a_2=b_2c_0+b_1c_1+b_0c_2$

$\cdots$

$a_n = b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_0 c_n$

相除所得的幂级数的收敛域可能比原来两个幂级数的收敛域都小得多.

在各种运算后得到的幂级数的收敛半径为较小者.

6.3.6 幂级数和函数的性质

- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域$I$上连续.

- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域上$I$可积,并有逐项积分公式：

$$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, (x \in I)$$

逐项积分后所得的幂级数和原函数有相同的收敛半径.收敛域端点要重新考察.

推论：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛域内可逐项积分任意次.

- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛区间$(-R, R)$内可导,并有逐项求导公式：

$$/'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_{n-1} x^{n-1}, (|x| < R)$$

逐项求导后所得的幂级数和原级数有相同的收敛半径.收敛域端点要重新考察.

推论：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在其收敛区间$(-R, R)$内有任意阶导数.

实际应用举例：求$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$的收敛域,和函数,并求$\frac{n}{2^n}$：

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1 = \rho, R = \frac{1}{\rho} = 1$$

因此$(-1, 1)$为收敛区间,在端点处判断后可得出结论:收敛域为$(-1, 1)$.

设$s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$\int_0^x s(x)dx = \int_0^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}dx$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1}dx$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n|_0^x$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$
$= \dfrac{x}{1-x}\ (|x| < 1)$

$S(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, x \in (-1,1), (\int_0^x S(x)dx)' = S(x)$(变上限积分).

令$x = \dfrac{1}{2}, S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,(()\ \dfrac{1}{2})^{n-1} = 4, \sum\limits_{n-1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} = S(x) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$

关于这些性质的用法有以下五条建议：

- 要先求导时,n最好在分母上,即$\dfrac{1}{n}$.
- 要先求积分时,n最好在分子上.
- 注意提出可以抵消的x的幂次方.
- 求几次积分就要求几次导,相反也一样.
- 可以适当的拆项.

6.4 函数的幂级数展开(泰勒级数)

假设有函数$f(x)$,想要展开成$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$的形式,其中$x$是$x_0$的极限,即：

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$
$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots$
$f''(x) = 0 + 0 + 2a_2 + 2 \times 3a_3(x-x_0) + 3 \times 4a_4(x-x_0)^2 + \ldots$
$f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 2 \times 3a_3 + 3 \times 4a_4(x-x_0) + \ldots$

将x取值成x_0,即$x = x_0$,代入：

$f(x_0) = a_0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ \rightarrow\ a_0 = f(x_0)$
$f'(x_0) = 0 + a_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots\ \rightarrow\ a_1 = f'(x_0)$

$$f''(x_0) = 0 + 0 + 2a_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \ \rightarrow\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$f'''(x_0) = 0 + 0 + 0 + 2 \times 3a_3 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \ \rightarrow\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$\vdots$

最后可以总结出公式：

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

这种级数展开泰勒级数,此通项公式称为泰勒展开式.

函数$f(x)$能展开成幂级数的充要条件就是：泰勒展开式成立,且收敛到$f(x)$.

更确切的来说：

6.4.1 泰勒展开式与马克劳林展开式

泰勒展开式：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \qquad x \in U(x_0),\text{此公式在}x_0\text{的邻域内成立}$$

当x_0取0,在0处展开,就称为马克劳林公式：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n \qquad x \in I_f,\text{麦克劳林的定义更加清晰:此公式在收敛域内成立.}$$

6.4.2 基础函数展开公式表推导

注：此处全部使用马克劳林展开

1. $f(x) = e^x$：

   由于$f^{(n)}(0) = 1$,而且$f' = e$,因此展开项为：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2. $f(x) = \sin(x), g(x) = \cos(x)$：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= \cos(x) & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}
$$

总结规律,可知：展开式只有奇数次项,并且正负会交替出现：

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

由$f'(x) = g(x)$,对上式求导就会得到cos的展开式：

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

特点是只有偶次项.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$：
   很容易看出这是等比(几何)级数的通项公式：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

   将x换成$-x$：

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

   上述两个公式在$|x| < 1$时成立

4. 公式3从0到x求定积分：$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = \ln(1-x), \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)$：

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

   上述两个公式对于在区间$(-1, 1]$内的所有x都成立.

5. 将公式1中的x换成$x\ln a$：$e^{x\ln a}=a^x$：

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^3(\ln a)^3}{3!}+\dots+\frac{x^n(\ln a)^n}{n!}+\dots$$

6. 将公式3中$\dfrac{1}{1+x}$中的x换成x^2：$\dfrac{1}{1+x^2}$：

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8+\dots+(-1)^nx^{2n}+\dots$$

同样的,对于在区间$(-1,1]$中的所有x成立.

7. 对公式7在0到x求定积分：$\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan(x)$：

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$$

对于所有$|x|<1$成立.

6.4.3 基础函数展开公式表

- $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dots,(-\infty<x<+\infty)$
- $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots,(-\infty<x<+\infty)$
- $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots,(-\infty<x<+\infty)$
- $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots,(-1<x<1)$
- $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\dots+(-1)^nx^n+\dots,(-1<x<1)$
- $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dots-\dfrac{x^n}{n}-\dots,(-1<x\leq1)$

- $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \dots, (-1 < x \le 1)$

- $a^x = 1 + x\ln a + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n(\ln a)^n}{n!} + \dots, (-\infty < x < +\infty)$

- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \dots, (-1 < x \le 1)$

- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, (-1 < x < 1)$

6.4.4 运算示例

1. 将$e^{\frac{x}{2}}$展开：

   将x换成$\frac{x}{2}$,即：

   $$e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^3}{3!3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n!n^2}$$

2. 将$f(x) = (1-x)\ln(1+x)$展成x的幂级数：

   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

   $$\begin{aligned}
   &(1-x)\ln(1+x) \\
   &= (1-x)(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots) \\
   &= x + (-\frac{1}{2} - 1)x^2 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2})x^3 + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{3})x^4 + \dots \\
   &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)x^n}{n(n-1)} \ (-1 < x \le 1)
   \end{aligned}$$

3. 将$\sin x$展成$x - \frac{\pi}{4}$的幂级数.

   (泰勒级数在$\frac{\pi}{4}$处展开,也可以用马克劳林),使用马克劳林：

$$\sin x \xrightarrow{x\to x-\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4})$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4}))$$
$$=\dots$$

4. 将$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展成$x-1$的幂级数：

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3+x}\right)$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{2}}\right)\text{(先凑出形式)}$$

令$\dfrac{x-1}{2}=t$,对$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t}$展开：$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{2^2}-\dfrac{(x-1)^3}{2^3}+\dots\right.$

同理,$\dfrac{1}{3+x}$经过变形：

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{1+\dfrac{x-1}{4}})=\frac{1}{4}\left(1-\frac{x-1}{4}\frac{(x-1)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^3}{4^3}+\dots\right.$$

因此.$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(2\dfrac{1}{n+2}-2\dfrac{1}{2n+3}\right)(x-1)^n$

还需要求出收敛域：

$-1<\dfrac{x-1}{4}<1\to -3<x<5$,收敛域为$(-3<x<5)$

$-1<\dfrac{x-1}{2}<1\to -1<x<3$,收敛域为$(-1<x<3)$

两者相加减,收敛域取交集：$(-3<x<5)\cap(-1<x<3)=(-1<x<3)$

即：$f(x)$收敛域为$(-1<x<3)$

7 抽象代数

8 线性代数

—线性代数,永远滴神!

8.1 一些杂七杂八的前置/补充

8.1.1 关于"线性"

通常来说线性是指满足以下两个性质(其中L表示线性操作)：

- 可加性：$L(a+b)=L(a)+L(b)$
- 齐次性：$\mathbb{C}L(a)=L(\mathbb{C}a)$

8.1.2 关于矩阵

矩阵并不是某一种特定事物的代表,也许它可以被认为是操作变量的线性变换,但它本身也是一种变量.他也可以只是一个单纯的数表.

...算了,留到矩阵论再写吧.

8.1.3 关于线性组合

线性组合(Linear combination)是线性代数中的概念,通常的表现形式如下：

$$\vec{b}=\mathbb{C}_1\vec{a}_1+\mathbb{C}_2\vec{a}_2+\mathbb{C}_3\vec{a}_3+\cdots+\mathbb{C}_n\vec{a}_n$$

直观上来看就是不同长度的向量相加,结果是个新向量.

8.1.4 矩阵的转置

矩阵的转置就是把每个元素的行标和列标互换,如果是方阵那么看起来就像是矩阵沿着对角线翻转：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

数学表达式为$(A^T)_{ij} = A_{ji}$,即A^T的第i行第j列的的元素.
若A是对称矩阵则有$A^T = A$.
矩阵乘积的转置$(AB)^T = B^T A^T$
给定一个矩阵R,R可以不是方阵,则乘积$R^T R$一定是对称阵.

$$(R^T R)^T = R^T (R^T)^T = R^T R$$

8.1.5 矩阵与向量的乘法

你知道矩阵和向量相乘有几种写法吗?(x

- 矩阵右乘列向量：
  - 由列图像可知：$A\vec{x}$的结果是矩阵列向量的线性组合：

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 \\ \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \mathbb{C}_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

  - 也可以把$\vec{x}$看作2×1矩阵,作矩阵乘法：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \times x_{11} + a_{12} \times x_{21} \\ a_{21} \times x_{11} + a_{22} \times x_{21} \end{bmatrix}$$

- 矩阵左乘行向量:
  - $\vec{x}^T A$的结果可以是行向量的线性组合：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_2 \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + \mathbb{C}_2 \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

  - ...也可以是矩阵乘法：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 & \mathbb{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1 \times x_1 + \mathbb{C}_1 \times y_1 & \mathbb{C}_2 \times x_2 + \mathbb{C}_2 \times y_2 \end{bmatrix}$$

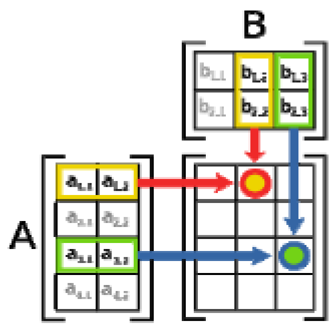
8.1.6 矩阵的乘法

矩阵的数乘：

$$\mathbb{C}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}a & \mathbb{C}b \\ \mathbb{C}c & \mathbb{C}d \end{bmatrix}$$

矩阵与矩阵的乘法有很多种看待方法,设A与B相乘得到C,其中A为$m\times n$矩阵,而B为$n\times p$矩阵,则C为$m\times p$矩阵.记c_{ij}为矩阵c中第i行j列的元素：

关于矩阵相乘,有一个很好用的技巧：将B矩阵的位置改变一下,如下图：

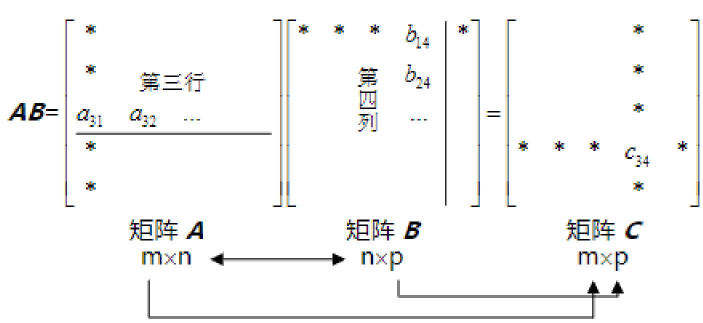


这样就一目了然了吧.

- 标准方法(行乘列)：

矩阵乘法的标准计算方法是取矩阵A的第i行的行向量和矩阵B第j列的列向量作点乘得到C_{ij}.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ik} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots$$



原理是矩阵相乘可以看作方程组相乘,见≪数学:他的内容,方法和意义≫(A.D.亚历山大洛夫)

- 列操作：

  列操作是指矩阵C的第j列是通过矩阵A乘以矩阵B的第j的列向量得到的.这表明矩阵C的列向量是矩阵A列向量的线性组合,组合的"权"就是矩阵B第j列的各个分量.

$$AB = A\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \dots & b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_1 & \dots & Ab_p \end{bmatrix}$$

  上式中b_i, Ab_i均为列向量,其中：

$$Ab_j = \begin{bmatrix} | & | & & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ | & | & & & | \end{bmatrix}$$

  为矩阵A中列向量的线性组合

- 行操作：

  行操作是指矩阵C的第i行是通过矩阵A的第i行乘以矩阵B得到的.这表明矩阵C的行向量是矩阵B行向量的线性组合.

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_1B \\ a_2B \\ \vdots \\ \vdots \\ a_mB \end{bmatrix} \text{此处}a_i\text{和}a_iB\text{为行向量}$$

$$a_iB = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -- & b_1 & -- \\ -- & b_2 & -- \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ -- & b_n & -- \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}\begin{bmatrix} -- & b_1 & -- \end{bmatrix} + a_{i2}\begin{bmatrix} -- & b_2 & -- \end{bmatrix} + \dots + a_{in}\begin{bmatrix} -- & b_n & -- \end{bmatrix}$$

- 列乘以行：

  矩阵A的第k列是一个$m\times1$的向量,而举证B的第k行是一个$1\times p$的向量,两向量相乘会得到一个矩阵C_k,将

所有的n个矩阵相加即得到C.

$$AB=\sum_{k=1}^{n}\overset{m\times 1}{\begin{bmatrix}a_{ik}\\ \vdots\\ a_{mk}\end{bmatrix}}\overset{1\times p}{\begin{bmatrix}b_{k1} & \dots & b_{ip}\end{bmatrix}}$$

可以从矩阵乘法对加法的分配率推导出来.

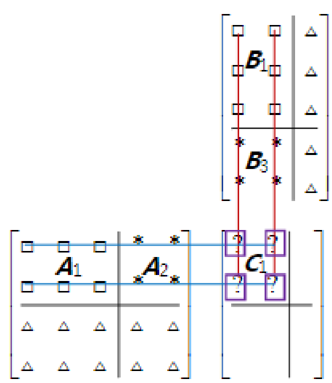
- 分块乘法：

  将矩阵A和矩阵B划分为严格匹配的区块,则矩阵乘法可以通过分块的乘法实现：

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_2 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{bmatrix}$$

  其中$C_1=A_1B_1+A_2B_2$,计算方法与正常的矩阵乘法中的计算方式相同.

  可以利用上文的小技巧来帮助理解矩阵的分块乘法：

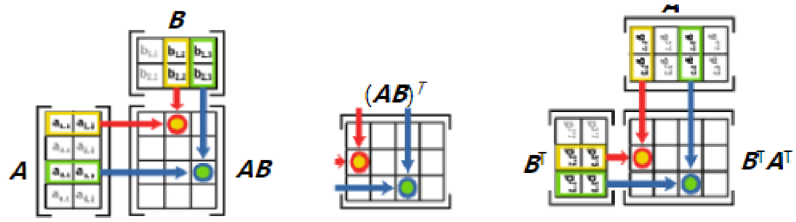


  可以看出C_1就是经过$A_1B_1+A_2B_2$的运算计算出来的,A_1中的元素只和B_1中的元素进行运算,A_2只和B_3进行运算,C_1为两者相加.

8.1.7 矩阵乘积的转置

$$(AB)^T=B^TA^T$$

可以用定义证明,也可以将矩阵乘法那章中的小技巧的图片按照乘积矩阵的对角线翻转：



8.1.8 逆矩阵

如果将矩阵看作一种函数,逆矩阵则是他的逆函数,即：

$$设A\vec{x}=\vec{b},则A^{-1}\vec{b}=\vec{x}$$

而且：

$$AB=C,则A^{-1}C=B\ (A,B,C都是矩阵)$$

因此：

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I$$

从消元矩阵的角度看,逆矩阵就是反转了消元矩阵的消元操作.

8.1.9 矩阵乘积的逆矩阵

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

因为显然如此：

$$ABB^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=I,比较两端可得出结论：\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

8.1.10 转置矩阵的逆矩阵

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

AA^{-1}两边取转置,并应用矩阵乘积的转置公式,得到$(A^{-1})^TA^T=I$.根据逆矩阵定义得到$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

8.2 $Ax = b$与四个子空间

8.2.1 线性方程的几何图像

线性代数的基本问题就是解n元一次方程组：

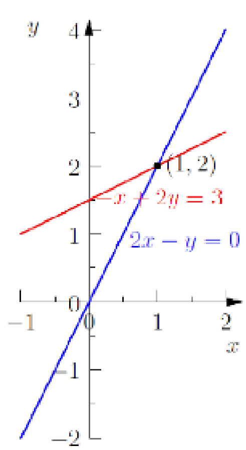
$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

将x和y抽离出来,可以写成矩阵乘以列向量的形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

其中$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$称为系数矩阵(coefficient matrix).
未知数向量记作$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.
而右侧的向量记为$\vec{b}$.
由此线性方程组可记作$A\vec{x} = \vec{b}$.

8.2.2 行图像



一次取一行,作出行图像.

行图像遵从解析几何的描述,每个方程在平面上的图像为一条直线.找到符合方程的两个数组,就可以确定出xy平面上的两个点,连接两点可以画出该方程所代表的直线.两直线交点即为方程组的解:
$x = 1, y = 2$.

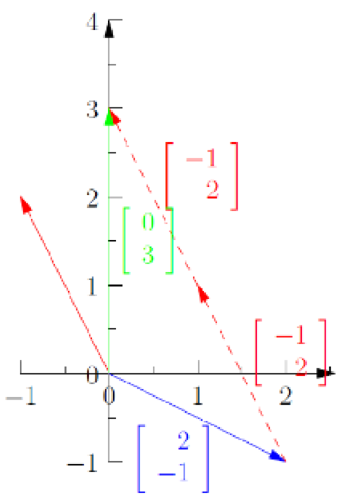
8.2.3 列图像

在列图像中,将$A\vec{x}$化成线性组合的形式：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

这样一来问题就变成了:寻找合适的矩阵A的列向量的线性组合以构成向量$\vec{b}$.

人话就是说：需要寻找满足要求的标量x和y来放缩$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 使得他们相加的结果等于$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.



可以看到:只需要一倍的$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 加上两倍的$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 就可以得到向量$\vec{b}$,因此：$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 即：$x = 1, y = 2$.

一直任意取x, y进行线性组合,最后会得到整个坐标平面.

在这方面,列图像相对于行图像的优点在于:如果$\vec{b}$改变了,那么对于行图像而言一切都变了,而对于列图像而言:列向量不需要发生变化,只需要寻找一个新的线性组合来得到新的$\vec{b}$.

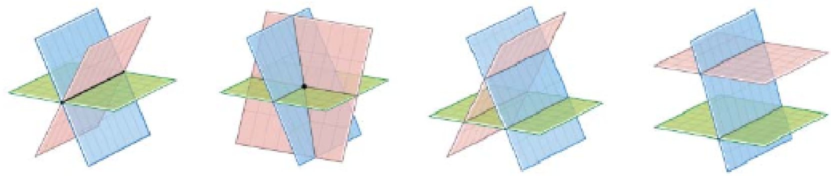
8.2.4 线性相关,线性无关

问题：是否对于所有的$A\vec{x} = \vec{b}$都能找到解$\vec{x}$?

拿三维的情况来说,很容易就能联想到：列向量的所有线性组合是否覆盖了整个空间?

很明显,并不是所有的情况都这么幸运,如果三个列向量中有两个向量的线性组合可以得到第三个向量,或者干脆三个列向量互为倍数-前者意味着三个向量处在同一平面,后者意味着三个向量处于同一直线,这种情况下这三个向量的组合就永远只能得到平面/直线上的其他向量.如果向量b不在平面/线上,那么就永远不可能得到解.此时称矩阵A为奇异矩阵(或不可逆矩阵),在矩阵A不可逆的条件下,不是所有的$\vec{b}$都能令$A\vec{x} = \vec{b}$有解.

从行图像的角度来看:当方程所代表的三个平面相交于一点时方程有唯一解;三个平面中至少两个平行则方程无解;平面的两两交线互相平行方程也无解;三个平面交于一条直线则方程有无穷多解.



推广到n维:一个向量组有n个向量,如果n个向量相互独立,则称这组向量**线性无关**,否则就是**线性相关**.

8.2.5 矩阵消元(消元法)(初等变换)

消元法是一种很自然的求解线性方程组的解法.任何情况下,只要矩阵A可逆,那么总可以通过消元法求得$A\vec{x}=\vec{b}$的解.

消元法与初等变换有同样的形式.事实上从本质来说是一种东西,叫法取决于用途.

概括来说,初等变换/消元法是指以下操作:

- 初等行变换:
  - 交换两行
  - 用$k(k\neq 0)$乘以某一行
  - 某一行的L倍加到另一行上去(L可以为0)
- 初等列变换:
  - 交换两列
  - 用$k(k\neq 0)$乘以某一列
  - 某一列的L倍加到另一列上去(L可以为0)

设矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}$$

将矩阵对角线上的元素称为主元,从左上角向右下角依次编号为:主元一,主元二...

消元的步骤如下,两个矩阵之间应当用箭头相连:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第一行乘以-3加到第三行}}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1\\0&\boxed{2}&-2\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{第二行乘以-2加到第三行}}U=\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&1\\0&\boxed{2}&-2\\0&0&\boxed{5}\end{bmatrix}$$

矩阵A为可逆矩阵,那么消元结束后的结果就是上三角阵U(Uppertriangular matrix).U的主对角线以下全为0,并且行列式等于其主元之积.

需要说明的是,主元不能为0,如果恰好消元至某行,0出现在了主元的位置上,应当通过与下方一行进行“行交换”使得非零数字出现在主元位置上.如果0出现在了主元位置上,并且下方没有对等位置为非0数字的行,则消元终止,并证明矩阵A为不可逆矩阵,且线性方程组没有唯一解.

$$\text{就像这样：}\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.2.6 高斯消元法

高斯消元法(Gauss elimination)就是通过对方程组中的某两个方程进行适当的数乘和加减,以达到将其中某个方程的某个系数变为0,从而简化整个方程组的目的.

设线性方程组：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

做方程的高斯消元时,需要对等式右侧的$\vec{b}$做同样的变换.手动计算时比较方便有效率的方法是应用”增广矩阵(augmented matrix)”,给矩阵A后面再加一列,中间用线隔开,在消元过程中带着$\vec{b}$一起操作：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$$

此时就将原方程$A\vec{x} = \vec{b}$转化成了新的方程$U\vec{x} = \vec{c}$,其中$\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$.

从最后一行得知$z = -2$,依次回代还可得到$y = 1, x = 2$.

需要说明的是,主元不能为0,如果恰好消元至某行,0出现在了主元的位置上,应当通过与下方一行进行“行交换”使得非零数字出现在主元位置上.如果0出现在了主元位置上,并且下方没有对等位置为非0数字的行,则消元终止,并证明矩阵A为不可逆矩阵,且线性方程组没有唯一解.

8.2.7 消元矩阵

矩阵运算的核心内容就是对行或者列进行独立操作.

消元矩阵则是记录这些操作的载体.

以上一章的的消元为例,写出增广矩阵,右侧为单位阵I(或者E) :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

作第一步替换,得到的矩阵是 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

此时右侧的矩阵就是表示这一步初等变换的"消元矩阵",消元矩阵乘以被消元的矩阵就是结果矩阵.他的第二行表示:取被消元矩阵 -3倍的行一,1倍的行二,0倍的行三 进行**线性组合**作为结果矩阵的第2行 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

各个消元矩阵可以相乘复合,产生的矩阵右乘被消元矩阵可以一步到位,完成被复合的那些矩阵所做的初等变换.

即 : 设第一步消元矩阵为E_{l1},第二步为E_{l2},最初的被消元矩阵为A,则:

$$E_{l2}(E_{l1}A) = (E_{l1}E_{l2})A$$

8.2.8 置换矩阵

置换矩阵表示了初等变换中的"交换两行"或者"交换两列"的操作.左乘被置换矩阵为行变换,右乘为列变换,比如 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

原理上也可以用线性组合的思想来解释,"线性代数"章节中置换矩阵可以简称为P,P矩阵是通过对I矩阵进行"行交换"或者"列交换"构造的.

(这也展示了矩阵运算不符合交换律的性质)

8.2.9 置换

当应用消元法求解方程组的时候需要通过行交换将0从主元位置移走.左乘一个置换阵可以实现行交换的操作.LU分解将$A = LU$变为了$PA = LU$.其中的P就是对A的行向量进行重新排序的置换矩阵.

置换矩阵P是通过对单位阵"行交换"得到的.对于$n \times n$矩阵存在着 $n!$个置换矩阵.置换矩阵具有特殊性质$P^{-1} = P^T$即$P^T P = I$

8.2.10 可逆矩阵,方程的非零解

如果矩阵A是方阵,且存在逆矩阵A^{-1},使得$A^{-1}A = AA^{-1} = I$(左逆矩阵等于右逆矩阵).则称矩阵A可逆(invertible),或者矩阵A非奇异(nonsingular).反之,如果A为奇异矩阵,则其没有逆矩阵,行列式也为0.

另一个等价的说法是:A为奇异矩阵,则方程$A\vec{x} = \vec{0}$存在非零解$\vec{x}$,比如:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在这个二阶矩阵的例子中,两个列向量指向同一方向.不可逆矩阵中总有列向量对生成线性组合没有贡献(不是最大线性无关组),等价的说法还有:不可逆矩阵的列向量可以通过线性组合得到0.

换而言之,若矩阵A存在逆矩阵,则方程$A\vec{x} = \vec{0}$只有零解.证明很容易,只需要简单的反证法:假设存在非零解$\vec{x}$,则有$x = (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$,矛盾.

对于可逆矩阵,求他的逆矩阵是一个重要的问题:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

从"列操作"以及"矩阵相乘"的角度看,求逆矩阵过程其实和求$A\vec{x} = \vec{b}$差不多,只是要求多组解.(此处$\vec{x}$为矩阵A^{-1}的第i列,而$\vec{b}$为单位阵I的第j列.)

8.2.11 高斯-若尔当消元法(Gauss-Jordan Elimination)(初等变换法)求逆矩阵

如同上面一章中说的,对上面一章结尾的二阶矩阵求逆相当于解两组方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

而高斯-若尔当消元法(国内通常称为：初等变换法)可以同时处理这两个方程：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]$$

对A进行一系列消元操作,也等于左乘消元矩阵E_l,此时消元的结果为$E_lA=I$,因为右侧矩阵也同样被左乘了消元矩阵,又因为右侧是单位阵,所以右侧矩阵$E_lI=E_l$.又由$E_lA=I$可知E_l就是A的逆矩阵,因此右侧矩阵给出的就是逆矩阵$E_l=A^{-1}$.

$$E_l[A|I]=[E_lA|E_lI]=[I|A^{-1}]$$

8.2.12 矩阵的LU分解

找到L矩阵(下三角矩阵),使得矩阵A变为上三角矩阵U.这就是LU分解:$A=LU$.

前几章已经描述了如何应用消元法将矩阵A转变为上三角阵U,这就引出了矩阵的LU分解,他是理解矩阵A性质的重要方法.

可以将矩阵的分解类比为多项式的因式分解,分解后的结果可以更容易看清"解"的状态.

再没有行交换的情况下,矩阵A通过左乘一系列消元矩阵E_l可以转化为U.再二阶矩阵中,只需要进行一次消元即可达到这一效果：

$$\underset{E_{l21}}{\begin{bmatrix}1&0\\-4&1\end{bmatrix}}\underset{A}{\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}}=\underset{U}{\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}}$$

在等式两侧左乘,得到$E_{l21}{}^{-1}E_{l21}A=E_{l21}{}^{-1}U$,即$A=E_{l21}{}^{-1}U$.这就是矩阵$A$的$LU$分解结构.$E_{l21}{}^{-1}$是$E_{l21}$的逆向操作.即左乘$E_{l21}$中使得矩阵$A$第二行$[8,7]$减去第一行的四倍得到新的第二行$[0,3]$那么再左乘$E_{l21}{}^{-1}$可以使得新的第二行$[0,3]$加上第一行的四倍又变回原来的第二行$0,7$.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}}=\underset{L}{\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}}$$

其中U为上三角矩阵(Upper triangular matrix),主元依次排列于他的对角线上,$E_{l21}{}^{-1}$即L为下三角阵(Lower triangular matrix).事实上可以将主元提出来变成对角阵D(Diagno matrix),比如：

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}2&1\\8&7\end{bmatrix}}=\underset{L}{\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}}\underset{D}{\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}}\underset{U'}{\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}}$$

三阶矩阵也是一样的.如果没有行交换操作,则消元矩阵的因子可以直接写入矩阵L,没有多余的交叉项出现时LU分解要优于$EA=U$这种形式的原因之一.

8.2.13 行交换

如果主元的位置出现了0,就需要进行”行交换”.可以通过左乘一个置换矩阵P(Permutation matrix)来实现”行交换”的操作,比如：

$$P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以实现3×3矩阵的第一行于第二行的交换.

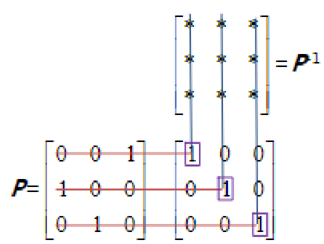
所有的3×3的置换矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于$n \times n$矩阵存在着$n!$个置换矩阵.置换矩阵每一行或者每一列只有一个元素是一,其他都是0,从第一行选一个位置设定为1有n个选择,第二行就只剩下$n-1$个选择,如此类推,最终有$n!$种可能.

对于某阶的置换矩阵几何而言,置换矩阵的两两乘积仍然在这个集合中.置换矩阵的逆矩阵也在其中.由于置换矩阵时正交矩阵,所以他的逆就是他的转置$p^{-1} = P^T$

可以用前面的小技巧来理解这件事情：



P的第i行和P^{-1}的第i列相乘会得到1,于其他列相乘都得到0,所以P^{-1}第i列只能是P的第i行行向量的转置(让分量1出现在向量里的相同位置),其他割裂以此类推,则P的每一个行向量转置就会得到P^{-1}的列向量,这就是矩阵转置P^T的定义,因此可得$P^{-1} = P^T$

8.2.14 向量空间

可以对向量进行所谓的”线性运算”,即通过加和($\vec{v} \pm \vec{w}$)与数乘运算($\mathbb{C}\vec{v}$)得到响亮的线性组合.向量空间对线性运算封闭,即空间内向量进行运算(加法和数乘)得到向量仍然在空间中.换而言之：空间中的任意向量v和w,对于任何实数c和d,线性组合$c\vec{v} + d\vec{w}$一定也属于其空间.

比如$\mathbb{R}^2$就是向量空间,他是具有两个实数分量的所有向量(即二维实向量)的集合.比如$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$...

可以粗浅的理解为:向量$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$的图像是从原点出发到点$(a,b)$的箭头,其中分量$a$为横轴坐标,第二份量$b$为纵轴坐标.空间$R^2$的图像就是整个$x-y$平面.

所有的向量空间必然包含零向量,因为任何向量数乘0或者加上反向量都会得到零向量,而因为向量空间对线性运算封闭,所以零空间必然属于向量空间.

推而广之,$\mathbb{R}^3$是具有三个实数分量的所有向量所组成的集合,同样的,R^n是具有n个分量的所有向量的集合.其中字母$\mathbb{R}$代表分量均为实数.

反例:$\mathbb{R}^2$中的第一象限则不是一个向量空间,因为他不满足封闭性.

8.2.15 子空间

包含于向量空间内的一个向量空间称为原向量空间的一个子空间,是原向量空间的一个子集,而且本身也满足向量空间的要求.但是"子空间"和"子集"的概念有区别,所有元素都在原空间之内就可以称之为子集,但是要满足对线性运算封闭的子集才能成为子空间.

比如用实数$\mathbb{C}$乘以$\mathbb{R}^2$空间中任一向量$\vec{v}$所可能得到的所有的向量的集合就是一个子空间.他的图像就是二维平面上穿过原点的一条直线.很容易就能想明白其中的向量也对于线性运算封闭.

反例:$\mathbb{R}^2$上一个不穿过原点的直线就不是向量空间.子空间必须包含零向量,因为数乘0得到的零向量必须处于子空间中.

$\mathbb{R}^2$的子空间包括：

- $\mathbb{R}^2$空间本身
- 过原点的任意一条直线(是R^2空间中的一条直线,其中的向量都拥有两个分量,与R^1空间有区别).
- 原点(仅包含0向量).

$\mathbb{R}^3$的子空间则包括：

- R^3空间本身
- 过原点的任意一个平面
- 过原点的任意一条直线
- 原点

8.2.16 列空间

矩阵A的列空间$C(A)$是其列向量的所有线性组合所构成的空间.

求解$A\vec{x}=\vec{b}$的问题,对于给定的矩阵A,任意的$\vec{b}$都能得到解吗?

$$如果A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$$

显然并不是所有的$\vec{b}$都能保证$A\vec{x}=\vec{b}$有解,因为它有4个线性方程而只有3个未知数,矩阵A列向量的线性组合无法充满$\mathbb{R}^4$,因此如果$\vec{b}$不能表示为A列向量的线性组合时,方程是无解的.只有当$\vec{b}$在矩阵A的列空间$C(A)$里时,$\vec{x}$才有解.

对于所给定的矩阵A,由于列向量不是线性无关的,第三个列向量为前两个列向量之和,所以尽管有3个列向量,但是只有2个对于张成空间有所贡献.矩阵A的列空间为$\mathbb{R}^4$内的一个二维子空间.

8.2.17 零空间(或化零空间)

矩阵A的零空间$N(4)$是指满足$A\vec{x}=\vec{0}$的所有解的集合.对于所给定的这个矩阵A,其列向量含有四个分量,因此列空间是空间$\mathbb{R}^4$中的子空间,$\vec{x}$为含有3个分量的向量,所以矩阵A的零空间是$\mathbb{R}^3$中的子空间.对于$m\times n$矩阵,列空间为$\mathbb{R}^m$中的子空间,零空间为R^n空间中的子空间.

本例中矩阵A的零空间$N(A)$为包含$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$的任何倍数的集合,因为很容易能看出来第一列向量和第二列向量相加再减去第三列向量为$\vec{0}$.所以此零空间为$\mathbb{R}^3$中的一条直线.

为了验证$A\vec{x}=\vec{0}$的解集是一个向量空间,可以检查它是否对线性运算封闭,若$\vec{u}$和$\vec{v}$是解集中的元素,则:

$$A(\vec{u}+\vec{v})=A\vec{u}+A\vec{v}=\vec{0}+\vec{0}=0$$
$$A(\mathbb{C}\vec{u})=\mathbb{C}A\vec{u}=0$$

因此$N(4)$的确是$\mathbb{R}^n$空间的一个子空间.

8.2.18 b的取值对于解的影响

如果方程变为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

则其解集就无法构成一个子空间.零向量并不在这个集合内.阶级是空间$\mathbb{R}^3$内过$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$的一个平面,但是并不过原点$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

8.2.19 构造列空间和零空间的方法

对于列空间,它是由列向量进行线性组合张成的空间;

对于零空间则是从方程组触发,通过让$\vec{x}$满足特定条件而得到的子空间.

9 数论

10 场论(含有多元微积分向量分析部分)

10.1 场论基本内容

注:矢量 = 向量,有时候会混着用，一般是那个顺口用哪个.

10.1.1 矢量函数/向量函数

向量值函数，有时也称为向量函数，是一个单变量或多变量的、值域是多维向量或者无穷维向量的集合的函数.向量值函数的输入可以是一个标量或者一个向量（定义域的维度可以是1或大于1);定义域的维度不取决于值域的维度.

即:设有数性变量t和变矢量$\vec{A}$.若对于t在某个范围内的每一个数值,$\vec{A}$都有一个确定的矢量和它对应,则称$\vec{A}$为数性变量t的矢量函数.记为:$\vec{A}=A(t)$,也可以写作$\vec{A}=A_x(t)i+A_y(t)j+A_z(t)k$

矢量函数$A(t)$的起点取在坐标原点，其终点随变量t变化描绘出了一条曲线，该曲线叫做$A(t)$的矢端曲线.也就是$A(t)$的图像.

10.1.2 矢量向量函数的极限

用$\delta-\epsilon$语言来说:

设矢量函数$A(t)$在点t_0的某个邻域内有定义(在t_0点可以没有),$\vec{A}_0$为常矢量.若对于任意给定$\epsilon>0$,都存在一个$\delta>0$,当$0<|t-t_0|<\delta$时，就有$|A(t)-\vec{A}_0|$成立，则称当$t\to t_0$时,$A(t)$有极限$\vec{A}_0$,记作:

$$\lim_{t\to t_0}A(t)=\vec{A}_0$$

注:在直角坐标系中有:

$$\lim_{t\to t_0}A_x(t)=A_{0x}$$
$$\lim_{t\to t_0}A_y(t)=A_{0y}$$
$$\lim_{t\to t_0}A_z(t)=A_{0z}$$

其中$\vec{A}_0=A_{0x}\vec{i}+A_{0y}\vec{j}+A_{0z}\vec{k}$

10.1.3 矢量函数的连续

设$A(t)$在t_0的某领域内有定义,且：

$$\lim_{t\to t_0}A(t)=A(t_0)$$

即：

$$\lim_{t\to t_0}A_x(t)=A_x(t_0)$$
$$\lim_{t\to t_0}A_y(t)=A_y(t_0)$$
$$\lim_{t\to t_0}A_y(t)=A_y(t_0)$$

就称$A(t)$在t_0点连续.

10.1.4 矢量函数的导数

设矢量函数$A(t)$在点t处有增量$\Delta\vec{A}=A(t+\Delta t)-A(t)$

当$\Delta t\to 0$时,$\dfrac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$的极限存在,则称此极限值为$A(t)$在点t处的导向量/导矢.即：

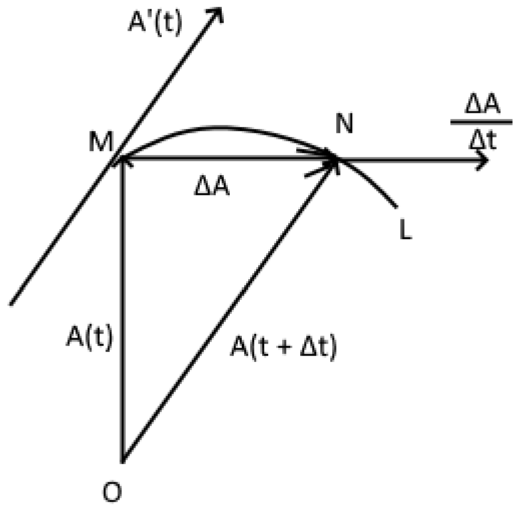
$$A'(t)=\frac{dA(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$$

以下为导数公式：

- $\dfrac{d}{dt}(\vec{\mathbb{C}})=0$ ($\vec{\mathbb{C}}$为常矢量)
- $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\pm\vec{B})=\dfrac{d}{dt}\vec{A}\pm\dfrac{d}{dt}\vec{B}$
- $\dfrac{d}{dt}(u\vec{A})=\dfrac{du}{dt}\vec{A}+u\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ 当u是常数k时,$\dfrac{d}{dt}(kA)=k\dfrac{d\vec{A}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{B}}{dt}+\vec{B}\cdot\dfrac{d\vec{A}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{dt}+\vec{B}\times\dfrac{d\vec{A}}{dt}$
- 若$\vec{A}=A(u),u=u(t)$,则$\dfrac{d\vec{A}}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}$

这些公式与函数的导数公式类似.只是在乘法上向量有点乘和叉乘两种乘法,而且没有除法,所以没有除法法则.

向量导数在几何上的直观图像为:



即：矢径长度随时间的变化率

10.1.5 矢量函数的微分

称$dA(t) = A'(t)dt\ (\Delta t = dt)$为$A(t)$在$t$处的微分.在直角坐标系中有:

$\dfrac{d\vec{A}}{dt} = A'_x(t)\vec{i} + A'_y(t)\vec{j} + A'_z(t)\vec{k}$

即：

$d\vec{A} = dA_x(t)\vec{i} + dA_y(t)\vec{j} + dA_z(t)\vec{k} = (A'_x(t)\vec{i} + A'_y(t)\vec{j} + A'_z(t)\vec{k})dt$

10.1.6 矢量函数的不定积分

若$A'(t) = a(t)$,则称$A(t)$是$a(t)$的原函数.$a(t)$的原函数的一般形式叫做$a(t)$的不定积分,记作：

$\int a(t)dt$

若$A'(t)$是$a(t)$的一个原函数,则有：

$\int a(t)dt = A(t) + \vec{\mathbb{C}} \qquad (\vec{\mathbb{C}}$为任意常矢)

10.1.7 矢量函数的定积分

类似于数性函数,$a(t)$在$[t_1, t_2]$上的定积分的定义为($A(t)$是$a(t)$的原函数)：

$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} a(\xi_i)\Delta t_i$

若$A(t)$是$a(t)$的一个原函数,则有：

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = A(t_2) - A(t_1) \qquad \text{(微积分基本定理)}$$

在直角坐标系中可分解为：

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)dt\vec{i} + \int_{t_1}^{t_2} a_y(t)dt\vec{j} + \int_{t_1}^{t_2} a_z(t)dt\vec{k}$$

- 从上述内容看出,矢量函数的微积分与数学分析(高等数学)中的微积分相类似,不过矢量函数要复杂些,他在直角坐标系中分解成三个数性函数,即他的三个分量.对矢量函数进行某一种运算,也就等于对他的各个分量进行这种运算.

- 矢量分解与坐标选取有关.在不同的坐标系中,有不同的表现形式,有的可能复杂的多.这里主要讨论直角坐标系的分解问题,多数问题还是会用分量表示.

10.2 场的分类与表示法

10.2.1 场的概念

某一物理量在空间的分布就称为"场".在这个空间发生了物理现象,也就有物理量在这个空间分布.

10.2.2 场的分类与表示

场中每一点$M:(x,y,z)$都对应着一个物理量,即某个函数$f(M)$,如果这个函数是数量值函数,这种场就叫做数量场.如果是向量值函数,那么这种场就叫做矢量场.

场中的物理量往往与点的位置有关,而且还将随时间变化.会随时间变化的场就叫做不稳定场(或不定常场),表示为：

$$u = f(M,t), \vec{A} = A(M,t)$$

在三维直角坐标系(可推广至任意维)下也可分解为：

$$u = f(x,y,z,t)$$

$$\vec{A} = A(x,y,z,t) = A_x(x,y,z,t)\vec{i} + A_y(x,y,z,t)\vec{j} + A_z(x,y,z,t)\vec{k}$$

如果场中物理量不随时间变换,这种场叫做稳定场(定常场),表示为：

$$u = f(M) \qquad \vec{A} = A(M)$$

在三维直角坐标系(可推广)下也可以分解为：

$$u = f(x, y, z)$$

$$\vec{A} = A(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

在不稳定场中,美以固定时刻也就是稳定场.在场论中,讨论稳定场是基础.对于不稳定场,可以在讨论不稳定场的基础上再讨论对时间的变化.因此接下来一大段着重讨论稳定场的规律.

10.2.3 场的直观表示

在数量场中,物理量是点的坐标(x, y, z)的函数：

$$u = f(x, y, z)$$

当u为某常数$\mathbb{C}$时,所有满足$f(x, y, z) = \mathbb{C}$的点就组成一个曲面.这个曲面的特点是在其上的点(x, y, z)处的函数值u相等,即

$$f(x, y, z) = \mathbb{C}$$

此曲面称为等值面,在平面中也被称为等值线.

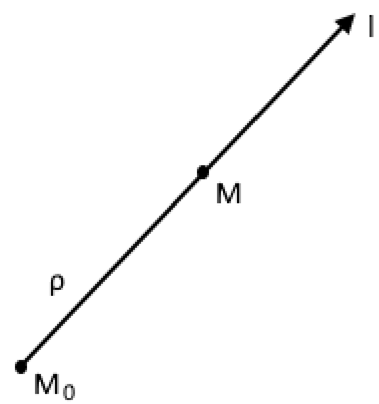
在矢量场中用矢量线表示.场中的曲线L,若他每点的切线方向与场在该点的矢量方向平行,则L称为该矢量场的矢量线.矢量线满足微分方程：

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

- 矢量线L不止有一个,而是一族曲线.矢量线L存在于场中,L上每一点都有一个矢量$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}$
- 矢量线L只反映矢量场在L上每点的方向,并没有大小数量关系.
- 等值面(线)是满足等函数值的自变量全体.因为C时任意常数,所以$f(x, y, z) = \mathbb{C}$表示等值面族.

10.3　方向导数与梯度

10.3.1　方向导数的定义



从数量场$u=u(M)$中任一点M_0出发引一条有向射线$\vec{l}$,在$\vec{l}$上任取一点M,记$\vec{M_0M}=\rho$,当沿$\vec{l}$,$M\to M_0$时,此式的极限存在：

$$\frac{\Delta u}{\vec{\rho}}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\vec{M_0M}}$$

称此极限值为函数$u(M)$在点M_0处沿方向$\vec{l}$的方向导数,记为$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}$,即：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{M\to M_0}\frac{u(M)-u(M_0)}{M_0M}$$

- 方向导数是一个数量,他与点M_0有关,也与方向$\vec{l}$有关.
- 以平面数量场为例说明方向导数的意义：

  设数量场

  $$u=f(x,y)$$

  不难看出：

  $$\frac{\Delta u}{\rho}=\frac{u(M)-u(M_0)}{\vec{M_0M}}=\frac{f(M)-f(M_0)}{\vec{M_0M}}$$

正是沿着$\vec{l}$方向,函数$f(x,y)$从点M_0到点M的平均升高,即平均变化率.而极限：

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta u}{\vec{\rho}}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\vec{M_0M}}(\text{沿着})\vec{l}$$

是$u=f(x,y)$在点M_0沿$\vec{l}$的变化率.所以方向导数是变化率,它反映了函数$u=f(x,y)$在$\vec{l}$方向上的增减情况.当$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}>0$,表示函数$u=f(x,y)$在点$M_0$沿方向$\vec{l}$是增加的,越大表示增加的越快,反之亦然.

- 偏导数是方向导数的特例.比如当$\vec{l}$指向x轴正向时,$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}$,当$\vec{l}$指向y轴正向时,$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial y}$.
- 有时候要考虑函数沿某曲线C的导数.函数沿曲线C的每一点的切线方向的方向导数叫做函数沿曲线C的导数.

10.3.2 方向导数的计算公式

设$u=u(x,y,z)$在$M_0(x_0,y_0,z_0)$处可微,$\vec{l}$的方向余弦是$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则u在点$M_0$沿$\vec{l}$的方向导数为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma$$

或者：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

10.3.3 梯度

设数量场$u=u(M)$,如果在场中任一点M处,存在非零矢量$\vec{G}$,其方向为函数$u(M)$在M点处方向导数的最大的方向,其模$|\vec{G}|$这个最大的方向导数值,则称矢量$\vec{G}$为数量场u在点M处的梯度,记为：

$$\textbf{grad}\ \ u=\vec{G}$$

在直角坐标系中有：

$$\textbf{grad}\ \ u=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\end{bmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

引入$grad\ u=\nabla u$

- 梯度是刻划数量场的概念.数量场的梯度是一个矢量.
- 任一点的梯度垂直于过该点的等值面(线),并且指向$u(M)$增大的一方.因而梯度方向平行于等值面(线)的法线方向.
- 数量场的每一点都有一个梯度,他是矢量,数量场的梯度场是矢量场,称为$u(M)$的梯度场.
- $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot l_0$,其中$l_0 = \dfrac{l}{|l|}$
- ∇称为nabla算子

10.3.4 梯度的运算公式

- $\mathbf{grad}\ \mathbb{C} = 0$
- $\mathbf{grad}\ (\mathbb{C}u) = \mathbb{C}\nabla u$
- $\mathbf{grad}\ (u \pm v) = \nabla u + \nabla v$
- $\mathbf{grad}\ (uv) = v\nabla u + u\nabla v$
- $\mathbf{grad}\ (\dfrac{u}{v}) = \dfrac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2} \qquad (v \neq 0)$(注意:与导数的顺序不同)
- $\mathbf{grad}\ \ f(u) = f'(u)\nabla u$
- 以上的公式都可以改写成用∇算子的形式

10.4 通量与散度,高斯公式

对于一个矢量场,主要讨论他的两个基本性质：其一是有没有源,其二是有没有旋

10.4.1 通量

定义：设矢量场$A(M)$,将沿着场中某一有向曲面S的曲面积分：

$$\Phi = \iint\limits_S A_n dS = \iint\limits_s A \cdot d\mathbf{S}$$

称为矢量场$A(M)$向正侧穿过曲面S的通量.其中$d\mathbf{S} = \vec{n}dS$,$\vec{n}$是dS的法线方向,$A_n = A \cdot \vec{n}$

说明：

- 通量$\varPhi$是一个数量.(顾名思义,通量就是矢量$\vec{A}$通过S的量,A可以表示流速,电场,磁场的强度等.相应的$\varPhi$就是流量,电通量,磁通量等.)因为$d\mathbf{S}=\vec{n}dS$,$A\cdot d\mathbf{S}$有正负之分

  - $(\widehat{\vec{A}\,\vec{n}})<\dfrac{\pi}{2},\varPhi>0$
  - $(\widehat{\vec{A}\,\vec{n}})>\dfrac{\pi}{2},\varPhi<0$
  - $\vec{A}\perp\vec{n},\varPhi=0.$

  在一个矢量场中,每点上的$\vec{A}$是确定对.$\varPhi$的正负与$\vec{n}$的制定有关.

- 若S是闭曲面,一般去向外法线方向为正向.因此:

  - $\varPhi>0$,表示S内部有源.这意味着穿过S流入的量小于流出的量,而$\varPhi$正是流出量与流入量的差,因此S内部有源.$\varPhi$就是由S散发出去的量.
  - $\varPhi<0$,表示S内部有洞.流出的量小于流入的量,$\varPhi$就是流入的多余部分,这个量再S所包围的区域内被吸收或者渗掉,所以有洞.$\varPhi$是吸收入S内部的量.
  - $\varPhi=0$,说明流入等于流出.

- 由定义得:

  $$d\varPhi=\vec{A}\cdot d\mathbf{S}$$

  表示流过面积元dS的正向的通量.

10.4.2 散度

通量描述了一固定区域上向量场的流通倾向,而散度在某点的的值则是这个性质在这点的局部描述,也就是说,从散度在一点的值,就可以看出向量场在这点附近到底是倾向于发散还是收敛.

设矢量场$A(M)$,在场中作包围点M的闭曲面S,S包围的趋于称为Ω,Ω的体积为ΔV.当Ω收缩到极限M时,如果极限:

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\oiint_S A\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

存在,则称此极限值为向量场A在点M处的散度.记为$\mathbf{div}\ \ A$,即:

$$\mathbf{div}\ \ A=\lim_{\Omega\to M}\frac{\oiint_S A\cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

说明:

- 散度是刻画矢量场的基本性质的量,是数量.$\textbf{div}\ A$形成一个数量场,称为矢量场A的散度场.
- 散度,顾名思义就是向量场一点处发散量的大小.在M点：
  - $\textbf{div}\ A > 0$,表示M点有源.值越大,表示源M的发散量越大.
  - $\textbf{div}\ A < 0$,表示M点有洞.绝对值越大,表示这个洞吸收量越大(或渗的越快).
  - $\textbf{div}\ A = 0$,表示M点无源无洞.
- 由定义可知,$\textbf{div}\ A$就是单位体积的通量的极限,也就是通量的密度.
- 散度算子为$\nabla\cdot$,表示点乘结果为数.
- 还有一种理解方法：散度表示当x, y, z有微小增加时,向量场分量增加量的总和.散度在各个方向是一样的,不随坐标系旋转而改变.

10.4.3 散度在常见坐标系中的计算公式

在不同的坐标系下,向量场的散度有不同的表达方.：

- 直角坐标系：

  在三维直角坐标系xyz中,设向量场A的表示为：

  $$A(x, y, z) = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

  其中$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$分别是$x, y, z$轴上的单位向量,场的分量$A_x, A_y, A_z$具有一阶连续偏导数,那么向量场$A$的散度就是：

  $$\textbf{div}\ A = \nabla\cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 圆柱坐标系：

  圆柱坐标系中,假设物体的位置为(ρ, φ, z),定义其径向单位矢量,横向单位的矢量和纵向单位的矢量为$\vec{e_\rho}, \vec{e_\Phi}, \vec{e_z}$,那么向量场$A$可以表示为：

  $$A = A_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{e_\rho} + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{e_\varphi} + A_z(\rho, \varphi, z)\vec{e_z}$$

  向量场A的散度就是：

  $$\textbf{div}\ A = \nabla\cdot A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- 球坐标系：

  球坐标系中,假设物体的位置用球坐标系表示为(r,θ,φ),定义它的基向量：$\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}$,则向量场$A$可以表示为：

  $$A=A_r(r,\theta,\varphi)\vec{e_r}+A_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e_\theta}+A_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e_\varphi}$$

  向量场A的散度就是：

  $$\textbf{div}\ \ A=\nabla\cdot A=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2A_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\theta A_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

10.4.4 高斯散度定理/高斯公式/高斯-奥斯特洛格拉特斯基公式

既然向量场某一处的散度是向量场在该处附近通量的体密度,那么对某一个体积内的散度进行积分,就应该得到这个体积内的总通量.事实上可以证明这个推论是正确的,称为高斯散度定理.高斯定理说明,如果在体积V内的向量场A拥有散度,那么散度的体积分等于向量场在V的表面S的面积分

设矢量场$A=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$的各分量$P,Q,R$再闭曲面所围区域$\Omega$内有一阶连续偏导数,则有：

$$\oiint_S A\cdot d\mathbf{S}=\iiint\limits_{\Omega}\textbf{div}\ \ AdxdydZ$$

或者：

$$\oiint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

说明：

- 高斯公式是重要公式,它的意义是曲面积分与体积分互化.因为曲面积分不易计算,所以将曲面积分化作了三重积分
- 高斯公式的物理意义是：矢量场通过任意闭曲面S的通量等于他所包围的体积V内散度的总和.

10.4.5 散度的运算性质

- 由于散度是线性算符,所以：

  $$\nabla\cdot(aF\pm bG)=a\,\nabla\cdot F\pm b\,\nabla\cdot G$$

  其中F,G是向量场,a,b是实数.

- $\nabla\cdot(\varphi A)=grad\varphi\cdot A+\varphi\,\nabla\cdot A$

  其中φ是数性函数.

- $\nabla\cdot(\vec{\mathbb{C}}\varphi)=\vec{\mathbb{C}}\cdot grad\varphi$

注意：

- 散度是对矢量场而言的,所以对一个标量函数求散度无意义.
- 散度运算与通常的微分运算相似：
$$d(uv)=vdu+udv$$
若是直接仿照应当有$\nabla\cdot(\varphi A)=\varphi\,\nabla\cdot A+A\,\nabla\cdot\varphi$,但是由于$\varphi$是数性函数,求散度无意义,只有写成$grad\varphi$才有意义.于是就能满足散度是一个”数量”的要求.

10.5 环量,旋度,斯托克斯公式

10.5.1 环量

设矢量场$A(M)$,将沿着场中某一有向封闭曲线l的曲线积分：
$$\Gamma=\oint_l A\cdot dl$$
称为矢量场A按照所取方向沿着曲线l的环量.

说明：

- 环量与通量一样,是一个刻画矢量场的特征量.
- 环量是一个数量,他的数值除了与场A有关外,还和回路l的形状和取向有关,说明Γ并不只是表示向量场本身内在属性的量,为了只表示场A本身的性质,就需要让l收缩到一点,为此引入环量面密度.

10.5.2 环量面密度

设M是矢量场中的一点,在M点取一矢量$\vec{n}$,并且在M点附近取回路l,作以l为边界,$\vec{n}$为法线且过M的曲面ΔS,并取l的正向与n构成右手系.令l沿着ΔS以任意方式收缩到M点,如果极限
$$\lim_{l\to M(\text{沿着}\Delta S)}\frac{\oint_l A\cdot dl}{\Delta S}$$
存在,则称此极限值为向量场A在点M处沿方向$\vec{n}$的环量面密度.记为L_n

说明：

- L_n是单位面积的环量的极限.在物理上,单位面积的某个两被称为面密度.$\dfrac{\oint_l A\cdot dl}{\Delta S}$是平均单位面积的环量,即$\Delta S$上的平均面密度.用微分方法处理,取极限得到了在$M$点的环量密度,与$l$的形状无关.

- L_n的大小反映了在点M沿着$\vec{n}$方向的旋转强弱情况.

- L_n的大小与取定的方向$\vec{n}$有关.在空间中一点,方向L_n可以任取,于是又无穷多个L_n,这些L_n中有一个最大者,沿着最大者的方向,场在该点旋转最强,于是引入旋度概念.

10.5.3 旋度

若在向量场A中的一点M处存在矢量$\vec{R}$,他的方向是A在该点环量面密度最大的方向,他的模就是这个最大的环量面密度.矢量$\vec{R}$称为向量场A在点M的旋度,记为$\textbf{rot}\ \ A$或者$\textbf{curl}\ \ A$

说明：

- 旋度是刻划向量场的一个特征量.说明一个矢量场是否有旋以及旋转强弱.

- 旋度与环量中l的形状,取向都无关,只与场在M点的量$A(M)$本身有关,他是代表矢量场本身内在属性的量.

- 旋度是一个向量算子,表示在三维欧几里得空间中的向量场的无穷小量旋转.在向量场的每个点上,点的旋度表示为一个向量,称为旋度向量.这个向量的模和方向刻画了在这个点上的强度和旋转方向.

- 由定义知旋度与环量面密度的关系：$L_n=\textbf{rot}\ \ A\cdot\vec{n}$

- 旋转的方向是旋转的轴,它由右手定则来确定,而旋度的大小是旋转的量.如果向量场表示一个移动的流形的流速,则旋度是这个流形的环量面密度.旋度为0的向量场叫做无旋向量场.旋度是向量的一种微分形式.微积分基本定理的对应形式是开尔文-斯托克斯定理(斯托克斯公式),他将向量场旋度的曲面积分关联到这个向量场环绕的边界曲线的曲线积分.

- 不同于梯度和散度,旋度不能简单的推广到其他维度;某些推广是可能的,但是只有在三位中,在几何上定义的向量场旋度还是向量场.这个现象类似于三维叉积,此联系反映在了旋度的符号$\nabla\times$上.

- 矢量场每点都对应一个旋度,这些旋度就形成了一个新的矢量场,称为原矢量场A的旋度场$\textbf{rot}\ \ A$.

10.5.4 旋度在直角坐标系中的运算公式

设矢量场A：

$$A=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

且P,Q,R具有一阶连续偏导数,则：

$$\textbf{rot}\ \ A=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

可以写成便于记忆的行列式(只是便于记忆,只有形式上的意义,无实际意义)：

$$\textbf{rot}\ \ A=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

10.5.5 旋度的运算性质

- $\textbf{rot}\ (\vec{A}\pm\vec{B})=\textbf{rot}\ \ \vec{A}\pm\textbf{rot}\ \ \vec{B}$
- $\textbf{rot}\ (\varphi\vec{A})=\varphi\,\textbf{rot}\ \ \vec{A}+\textbf{grad}\ \ \varphi\times\vec{A}$($\varphi$是数性函数)
- $\textbf{rot}\ \ \mathbb{C}\vec{A}=\mathbb{C}\,\textbf{rot}\ \ \vec{A}$
- $\textbf{rot}\ (\varphi\vec{a})=\textbf{grad}\ \ \varphi\times\vec{a}$($\vec{a}$为常向量)

10.5.6 斯托克斯公式

设矢量场$A=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$的分量$P,Q,R$在包围曲面$S$的空间区域中有一阶连续偏导数,$l$为曲面$S$的边界,则：

$$\oint_l A\cdot dl=\iint_S\textbf{rot}\ \ A\cdot dS$$

或者写成：

$$\oint_l Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right]$$

说明：

- 斯托克斯公式也是重要公式之一,利用它可以把曲线积分转换为曲面积分,或者相反.
- 由于计算曲面积分困难，而曲线积分可以直接计算,若用斯托克斯公式化为曲面积分,除了特殊情况外可能会更难计算,因此斯托克斯公式没有高斯公式用的多.

- 此公式的意义就是向量场在任意闭回路l上的环量等于以l为边界的曲面S上的旋度的总和.
- 注意： 高斯公式把闭曲面的曲面积分华为三重积分,斯托克斯则把曲线积分华为以l为边界的曲面积分,如果不能化为闭曲面的曲面积分,也就不能化成三重积分.

当A为平面向量场是,斯托克斯公式会变成格林公式,斯托克斯公式可以看作是格林公式的推广.

10.6 几个特殊的向量场

10.6.1 管形场

在向量场A中,如果$\mathbf{div}\ \ A=0$,则称A为管形场,又称无源场.

管形场的判别法：A为管形场$\Leftrightarrow$ $\mathbf{div}\ \ A=0$.

管形场的一条重要性质就是： 场中任一矢量管(由矢量线所组成的管型曲面)的所有横截面的通量都相等.

10.6.2 有势场

在矢量场$A(M)$中,如果存在函数$u(M)$使得$A=\mathbf{grad}\ \ u$,则称A为有势场.称$v=-u$为矢量场A的势函数.

有以下等价定义：

- $A=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$为有势场
- $\mathbf{rot}\ \ A=0$
- $\oint_l A\cdot dl=0$(l为任意闭曲线)
- $\int_{M_0}^{M} A\cdot dl$与路径无关.
- 存在函数u使得$du(x,y,z)=Pdx+Qdy+Rdz$

以上五条定义都互相等价

有势场的判别方法：如果$\mathbf{rot}\ \ A=0$,则A为有势场.

使用这一判别方法比较方便,当然等价定义也可以用于判别.

求势函数的方法：

1. 公式法：

   任取一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,则

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

   则势函数$v(x,y,z) = -u(x,y,z)$

2. 凑全微分法：

   找一个函数$u(x,y,z)$,使得

$$du = Pdx + Qdy + Rdz$$

   则势函数$v(x,y,z) = -u(x,y,z)$

3. 积分法:微分法换一种思路,解微分方程.

10.6.3 调和场

矢量场A中,若$\mathbf{div}\ \ A = 0$且$\mathbf{rot}\ \ A = 0$,则称A是调和场.也叫做无源无旋场.
说明：

- 调和场$\Leftrightarrow$有势场且管形场

- 调和场是有势场,必有u存在,使

$$\mathbf{grad}\ \ u = A$$

  又因为是管形场,所以$\mathbf{div}\ \ A = \mathbf{div}\ \ \mathbf{grad}\ \ u = 0$,即$\Delta u = 0$(参考公式表)

  u称为调和场的调和函数.

10.7 *nabla*算子(哈密尔顿算子)

10.7.1 定义

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

称为哈密尔顿算子(nabla算子).它是一个向量形式的微分算子,兼有微分运算和向量运算的双重作用.它本身既不是一个函数也不是某个物理量.他表示的是一种运算,以一定方式作用于函数式向量后才能表示一个量.

10.7.2 运算规则

- $\nabla u=\left(\vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\end{bmatrix}$

- $\nabla\cdot A=\left(\vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

- $\nabla\times A=\left(\vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\times(\vec{i}P+\vec{j}Q+\vec{k}R)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

  $=\vec{i}\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$

说明：

- ∇算子可以作用到数性函数,也可以作用到向量函数,有三种形式：

$$\nabla u \quad \nabla\cdot A \quad \nabla\times A$$

- ∇不是向量,所以$A\cdot\nabla\neq\nabla\cdot A$：

$$\nabla\cdot A=\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z$$

$$A\cdot\nabla=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}$$

10.7.3 梯度散度旋度以及高斯公式和斯托克斯公式的算子表示法

梯度：$\nabla u=\mathbf{grad}\ u$

散度：$\nabla\cdot A=\mathbf{div}\ A$

旋度：$\nabla\times A=\mathbf{rot}\ A$

高斯公式：$\oiint_S A\cdot d\mathbf{S}=\iiint\limits_{\Omega}\nabla\cdot A d\Omega$

斯托克斯公式：$\oint_l A\cdot dl=\iint_S\nabla\times A\cdot ds$

10.7.4 常用公式

- $\nabla(\mathbb{C}u) = \mathbb{C}\nabla u$
- $\nabla\cdot(\mathbb{C}\vec{A}) = \mathbb{C}\,\nabla\cdot\vec{A}$
- $\nabla\times(\mathbb{C}\vec{A}) = \mathbb{C}\,\nabla\times\vec{A}$
- $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$
- $\nabla\cdot(\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A} \pm \nabla\cdot\vec{B}$
- $\nabla\times(\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla\times\vec{A} \pm \nabla\times\vec{B}$
- $\nabla\cdot(u\vec{\mathbb{C}}) = \nabla u \cdot \vec{\mathbb{C}}$
- $\nabla\times(u\vec{\mathbb{C}}) = \nabla u \times \vec{\mathbb{C}}$
- $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
- $\nabla\cdot(u\vec{A}) = \nabla u \cdot \vec{A} + u\,\nabla\cdot\vec{A}$
- $\nabla\times(u\vec{A}) = \nabla u \times \vec{A} + u\,\nabla\times\vec{A}$
- $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$
- $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$
- $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\nabla\cdot\vec{B})\vec{A} - (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B}$
- $\nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta\,u(\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$为拉普拉斯算符,$\Delta\,u$称为调和量)
- $\nabla\times(\nabla u) = 0$(数量场的梯度场是无旋场)
- $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$(向量场的旋度场是无源场)
- $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \Delta\,\vec{A}$

$$\Delta\,\vec{A} = \Delta\,A_x\vec{i} + \Delta\,A_y\vec{j} + \Delta\,A_z\vec{k}$$

11 群论

12 矩阵论

13 离散数学

Chapter 2

计算机科学

1 编程

2 网络安全

3 计算机图形学

注:本章中向量默认为列向量.

3.1 对于线性代数部分的补充与扩展

在计算机图形学中线性代数的主要作用是操纵与计算空间中对象的变化.由此衍生出了一些特殊的观点.

同时有一部分重要的常用基础内容放在了数学篇中的空间解析几何部分.

1. 向量叉乘的对偶矩阵:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} y_a z_b - y_b z_a \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{bmatrix} = A * \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

2. 非满秩矩阵意味着将空间变换到了更低的维度.

3. 特征向量是指在进行了矩阵所代表的线性变换后方向没改变向量,特征值则是指特征向量的缩放倍数.

4. 逆矩阵所代表的变换成为逆变换,是原矩阵所代表的变换的反向操作,一个矩阵乘以他的逆矩阵是单位阵,这从几何上的直观理解就是什么都没做,两次操作互相抵消了.

3.2 变换

变换按照作用对象可以分为:

1. Modeling 模型变换

2. Viewing 视角变换

按照作用效果可以分为:

1. scale 缩放变换

2. rotate 旋转变换

3. shear 剪切变换

如同3b1b的观点,将目标空间看作矩阵的列空间.而矩阵每一列都对应了列空间中的一个基向量,拿2维空间举例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设第一列代表了x轴的单位向量i,则第二列代表了y轴的单位向量j

因此,对矩阵进行操作就相当于对矩阵所代表的空间进行操作.

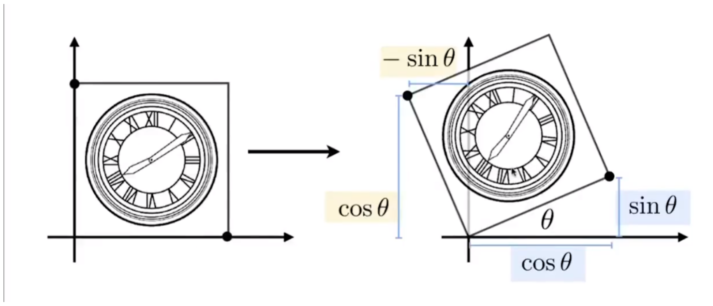
例如:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

这个矩阵就代表着将单位向量i移动到了坐标$(2,1)$,将单位向量j移动到了坐标$(1,2)$.整个二维空间都是由这两个单位向量所张成的.随着单位向量的移动,整个空间也就随之而变形.这种操作被称为变换. 其中一类最简单的变换称为线性变换,在线性代数篇中已有了详细解释.

旋转矩阵的表示原理如下:

先看看二维:

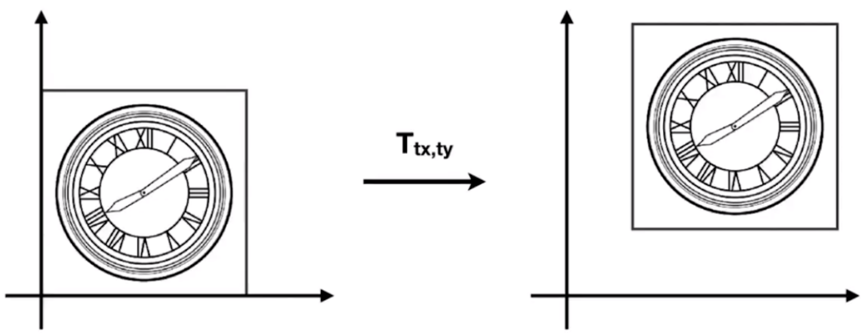


因此二维的旋转矩阵

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3.2.1 齐次坐标

由于单纯的线性变换并不能让对象动起来,依然只能在原点操作,所以需要齐次坐标表示空间上的位移.如下图:



用$x\prime$和$y\prime$来表示变换后的坐标,公式为:

$x\prime = x + t_x$

$y\prime = y + t_y$

仔细思考一下发现似乎并不能写成矩阵$A\vec{x} = \vec{b}$的形式.

事实上应该写成这样:

$$\begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

因此平移变换不属于线性变换.但是人们不想要特殊情况,于是引入了齐次坐标:

还是拿二维的情况举例,增加一个维度,将二维的点表示为:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T$$

将二维向量表示为:

$$\begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix}^T$$

也就是说:再多增加一个维度用于说明表示的是一个点还是一个向量,这是因为向量具有平移不变性,不管怎么移动表示的始终是一个方向.

齐次坐标的好处就在这里,它是这么用的:

$$\begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \\ w\prime \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

更直观一点:可以这么理解:

- 向量 + 向量 = 向量, 向量相加还是向量 $0 + 0 = 0$
- 点 - 点 = 向量, 两点相减得到向量 $1 - 1 = 0$
- 点 + 向量 = 点, 一个点加一个向量结果是一个点 $0 + 1 = 1$
- 点 + 点 = 两个点的中点, $1 + 1 = 2$,原因见扩充定义.

扩充定义如下:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{w} = \begin{bmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是总结,给出以下下定义:

仿射变换(Affine transformation) = 线性变换(Linear transformation) + 位移(transformation)
即:

$$\begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

都可以写成齐次坐标(homogeneous coordinates)的形式
即:

$$\begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

不如直接将其他操作的齐次坐标形式补全吧?

- 缩放(scale)：

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 旋转(rotation)：

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 平移(translation)：

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.2 组合变换

可以通过组合各个基础变换以形成复杂的变换效果.
组合方法为对应矩阵按照顺序从右向左做乘法.
大部分时候组合顺序至关重要.

3.2.3 三维变换

以上结论都可以用于三维,推而广之:

齐次坐标:

- 三维点:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 三维向量:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[x\ y\ z\ w]^T$,当w不等于1他所表示的三维的点其实是(第四个维度已略去):

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ \frac{z}{w} \end{bmatrix}$$

同样的,三维空间中齐次坐标描述的仿射变换的矩阵是4×4的:

$$\begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \\ z\prime \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

将二维操作类比过来:

- 缩放:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 平移:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 三维旋转(绕某个轴逆时针旋转):

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 三维旋转(欧拉角)：$R_{xyz}(\alpha,\beta,\gamma)=R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$

- 三维旋转($\vec{I}$绕任意轴n旋转角度α)(罗德里格斯旋转公式)：

$$R(n,\alpha)=\cos(\alpha)\vec{I}+(1-\cos(\alpha))\vec{n}\vec{n}^T+\sin(\alpha)\begin{bmatrix}0 & -n_z & n_y\\ n_z & 0 & -n_x\\ -n_y & n_x & 0\end{bmatrix}$$

(其中$\vec{n}$为旋转轴的单位向量)

3.2.4 观测变换

一般来说拍一张照片的步骤如下：

1. 找到一个好的位置摆放人物(模型变换,model transformation)

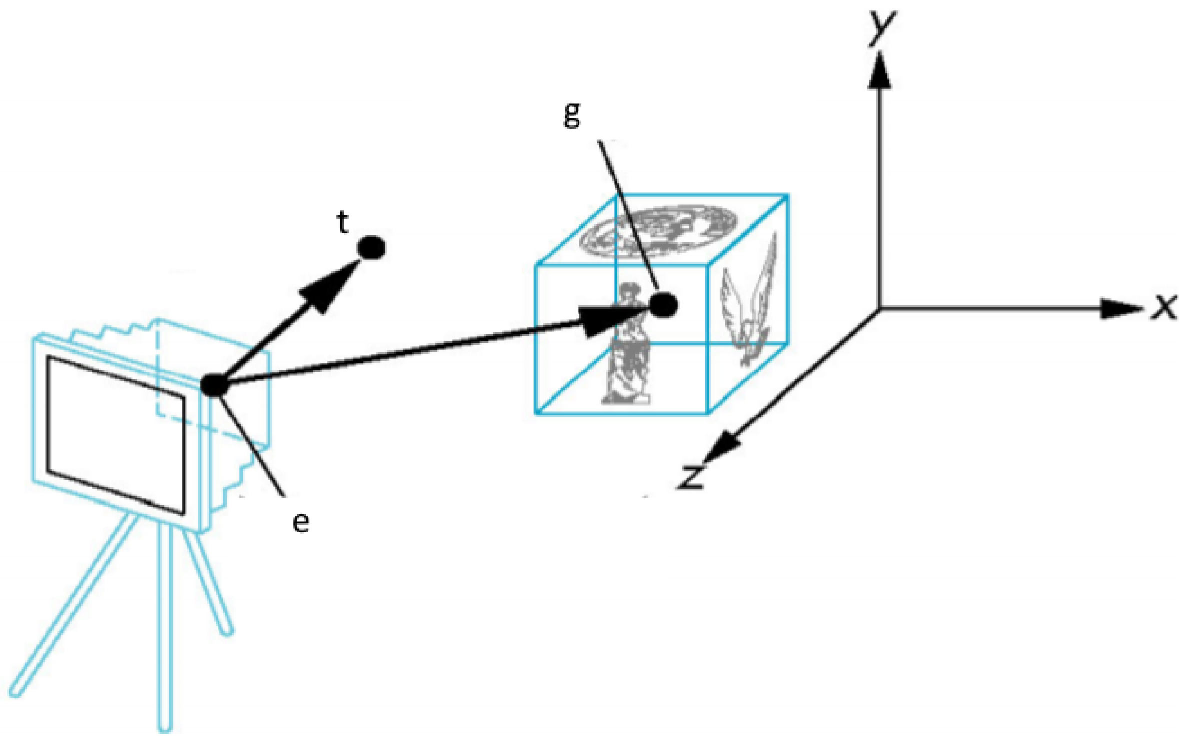
2. 找到一个好的"角度"来放下相机(视图变换,view transformation)

3. 按下快门(投影变换,projection transformation)

- 视图变换(view transformation)：

  首先定义相机：

  - 位置(Position)：$\vec{e}$
  - 视线方向(Look-at/gaze direction)：$\hat{\vec{g}}$
  - 向上方向(UP direction)：$\hat{\vec{t}}$ (注:这个表示的是相机自身的旋转,此向量垂直于上面两个向量张成的平面)



值得注意的是：定义相机永远在原点,视线朝向-z方向,以y轴作为向上方向(约定俗成,这么做有很多好处)

所以在实际情况中,需要将相机和被观测的对象视作一个整体，进行如下操作:

1. 将$\vec{e}$平移到原点.
2. 将$\hat{\vec{g}}$旋转到-z方向
3. 将$\hat{\vec{t}}$旋转到y方向
4. 将$\hat{\vec{g}} \times \hat{\vec{t}}$旋转到x方向

这一系列的矩阵操作记作M_{view},如下:

- 令$M_{view} = R_{view}T_{view}$
- 将$\vec{e}$平移到原点：

$$T_{view} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_e \\ 0 & 1 & 0 & -y_e \\ 0 & 0 & 1 & -z_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 将$\hat{g}$旋转到-z方向,将$\hat{t}$旋转到y方向,$(\hat{g}\times\hat{t})$旋转到x方向
- 仔细思考,发现上面的矩阵想要直接计算出来过于繁琐,应当反向思考—做基变换,再求逆以得到旋转矩阵：

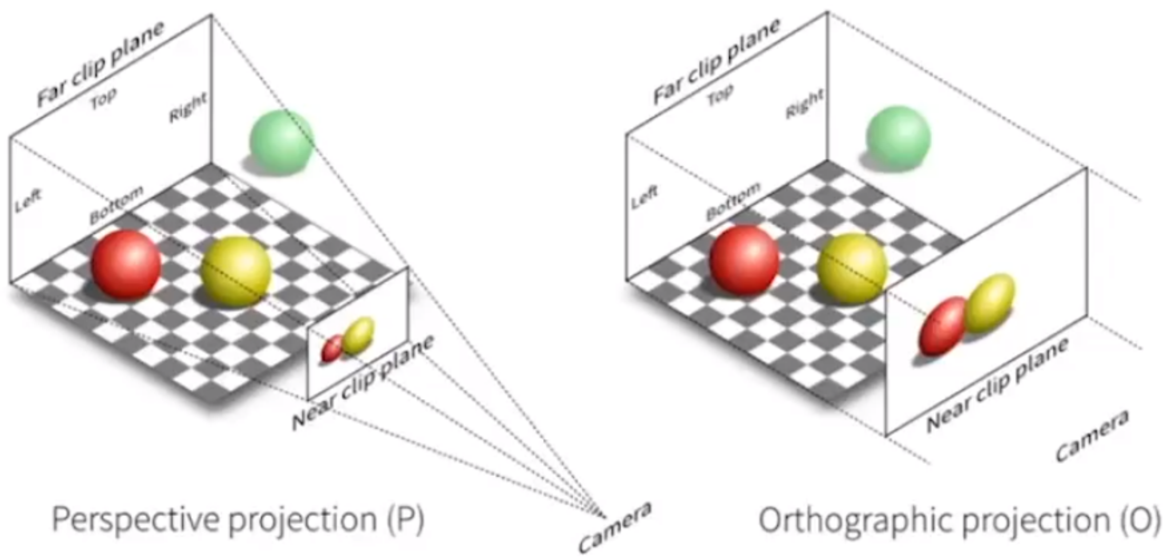
$$R_{view}^{-1}=\begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & x_{\hat{t}} & x_{-\hat{g}} & 0 \\ y_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{t}} & y_{-\hat{g}} & 0 \\ z_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{t}} & z_{-\hat{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_{view}=\begin{bmatrix} x_{\hat{g}\times\hat{t}} & y_{\hat{g}\times\hat{t}} & z_{\hat{g}\times\hat{t}} & 0 \\ x_{\hat{t}} & y_{\hat{t}} & z_{\hat{t}} & 0 \\ x_{-\hat{g}} & y_{-\hat{g}} & z_{-\hat{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  (由于旋转矩阵是正交矩阵,所以求逆等于求转置.)

随着相机的变换,其他所有物体也应当跟着变换,这样才能保证拍出来的是同样的照片.

- 投影变换(projection transformation)：

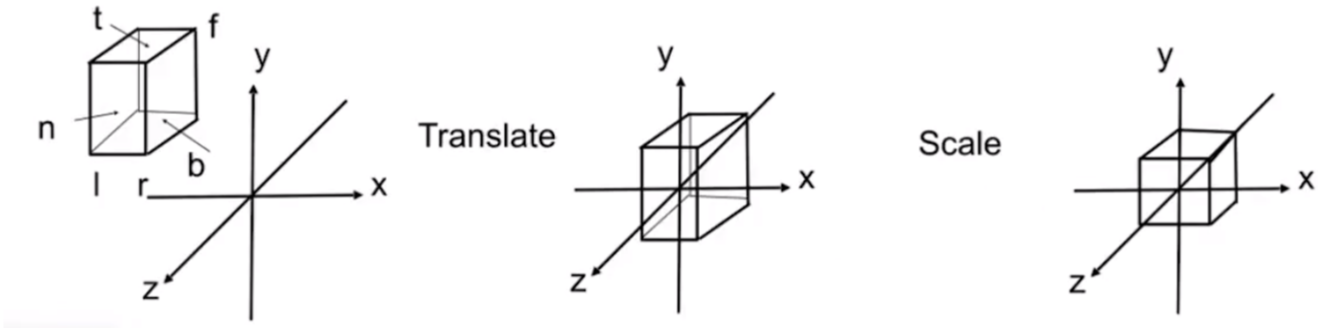
  投影分为两种：正交投影(Perspective projection)和透视投影(Orthographic projection):



两种投影的本质区别就在于是否有近大远小的现象.

- 正交投影(Orthographic projection)：

  先定义一个空间中的立方体, 给出三个轴的范围$[l,r]\times[b,t]\times[f,n]$,平移并缩放到标准立方体$[-1,1]^3$



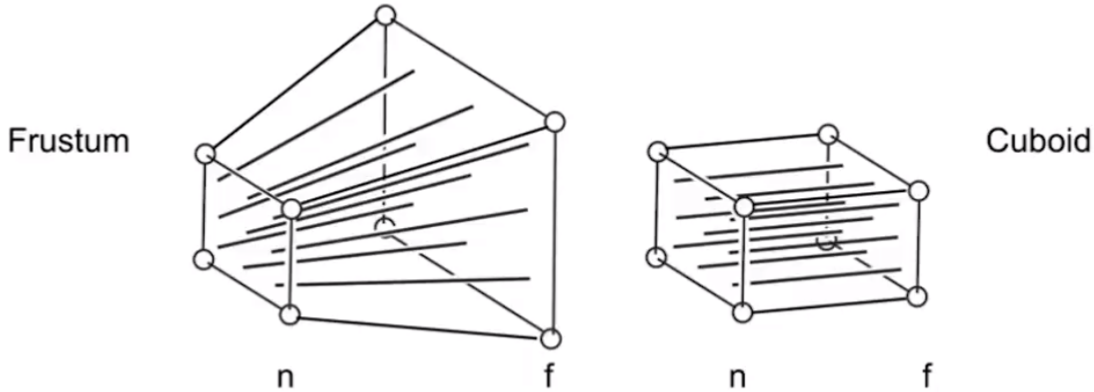
矩阵形式为:

$$M_{ortho} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n-f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{r+l}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{t+b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{n+f}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

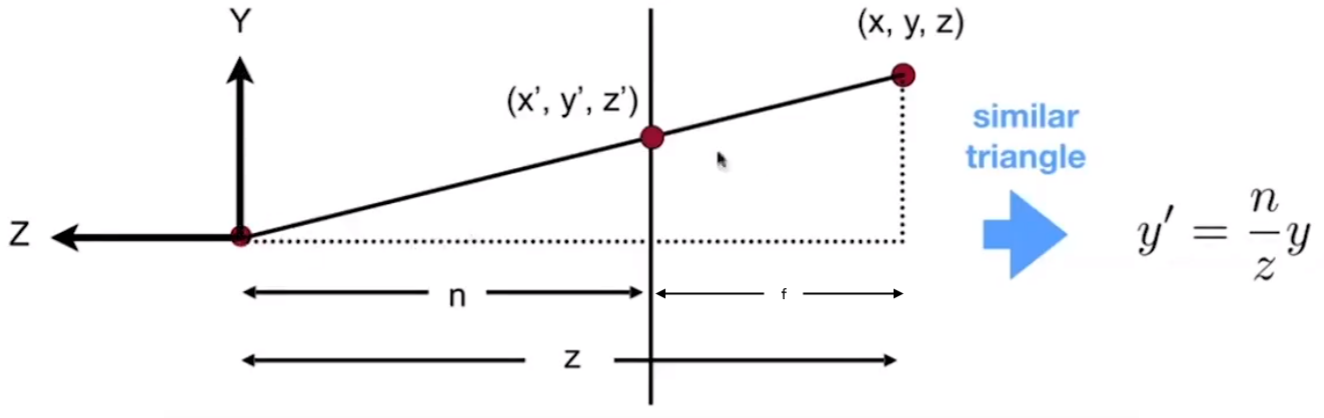
- 注意:由于视线方向沿着-z,所以$n > f$
- 这就是为啥OpenGL用的是左手系

– 透视变换(Perspective projection) :

首先把视锥压缩成长方体.(近平面永远不变,远平面z值不发生变化,中心点不发生变化)($n \to n, f \to f, M_{persp \to ortho}$)



关键就在于:要找到中点和被投影对象之间的联系.



$y' = \frac{n}{z}y$,由这个公式就可以算出来压缩后的y,并且结果是满足要求的.

类似的,还有$x' = \frac{n}{z}x$

于是得出结论：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{nx}{z} \\ \frac{ny}{z} \\ unknow \\ 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} nx \\ ny \\ still unknow \\ z \end{bmatrix}$$

因此，透视变换的本质就是由目标平面和被投影平面构造一个直角三角形

由此写出未完成的投影矩阵：

$$M_{persp \to ortho} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

而这一行未知的也一定与z有关系.

另外，任何在目标平面上的点被投影后一定在原地，也就是说:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} nx \\ ny \\ n^2 \\ n \end{bmatrix}$$

仔细思考可以得出:矩阵第三行前两个未知数一定为0:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = n^2$$

结合另一件事：被投影平面上的中心点投影后位置不变,可得出:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ n \\ 1 \end{bmatrix} = n^2 \to An + B = n^2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 1 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f^2 \\ f \end{bmatrix} \to Af + B = f^2 \end{cases} \to \begin{cases} A = n + f \\ B = -nf \end{cases}$$

所以：

$$M_{persp\to ortho} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & -nf \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

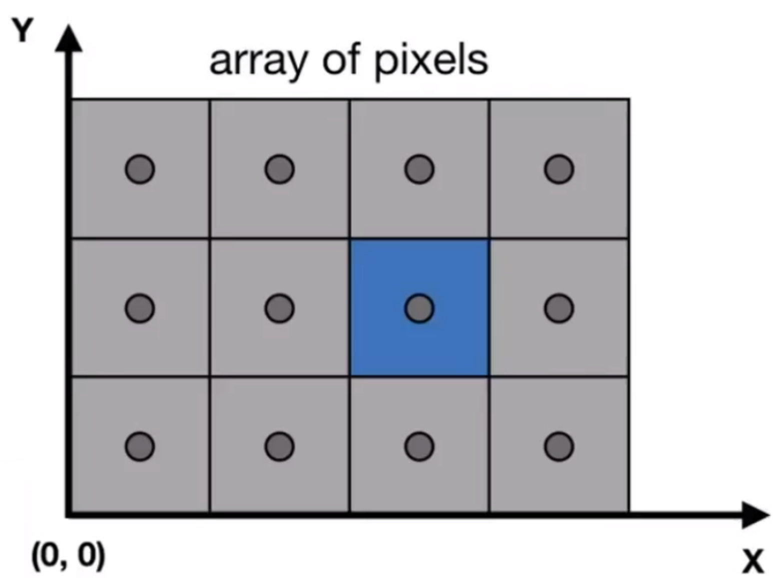
最后将正交投影和此式结合起来使矩阵变得完整：$M_{persp} = M_{ortho} M_{persp\to ortho}$

3.3 光栅化

3.3.1 定义与解释

- 什么是屏幕?
  - 对于图形学来说,抽象的认为是一个二维数组,其中每一个元素都是一个像素.
  - 数组的大小：分辨率.
  - 一个典型的光栅(raster)成像设备.

- 什么是光栅(raster)?
  - raster是德语中"屏幕"的意思.
  - Rasterize-光栅化 == 把东西画到屏幕上.
- 像素(Pixel,"picture element"的缩写)是什么?
  - 一个很小的只有单个颜色的方块.
  - 颜色由不同比例的三原色(红绿蓝,rgb)混合而成.
- 关于"屏幕空间(screen space)"的定义



  - 认为屏幕的左下角是原点,向上是Y,向右是X.
  - 像素的坐标都是用(x, y)描述的,x, y是整数.
  - 像素的下标范围是从$(0, 0)$到$(width - 1, height - 1)$.
  - 像素的中心总是位于$(x + 0.5, y + 0.5)$.
  - 屏幕被覆盖到的范围是从$(0, 0)$到$(width, height)$(全部铺满).
- 采样:
  - 给定一个函数,在多个地方判断输出结果.

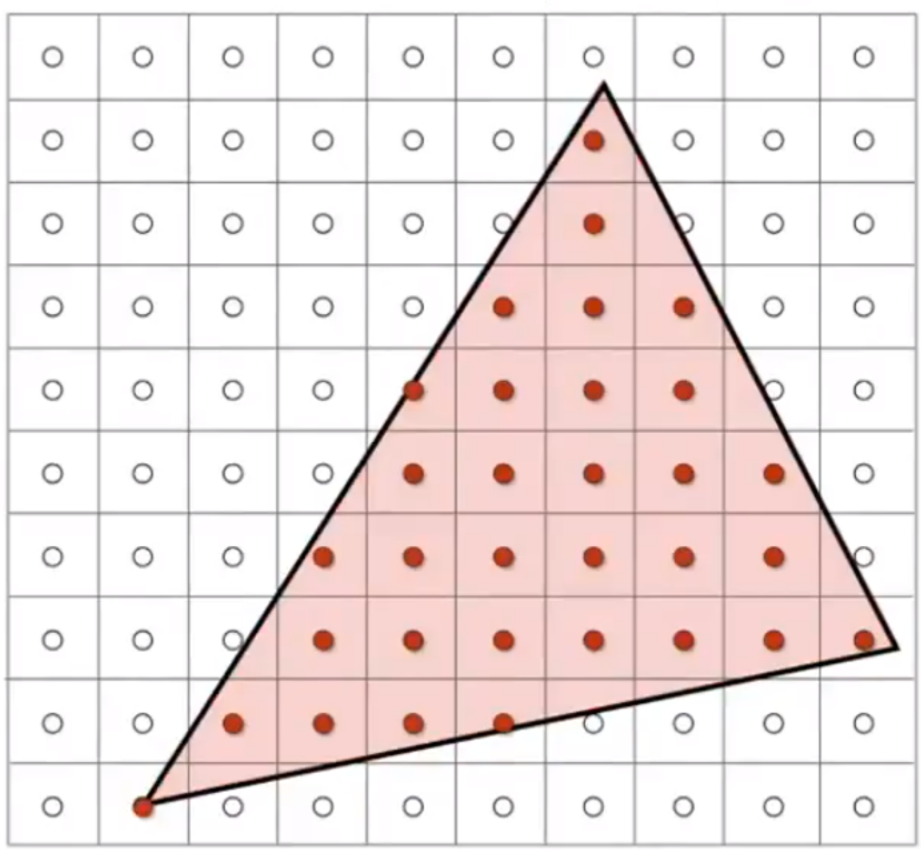
3.3.2 三角形光栅化

为什么是三角形?

- 三角形是最基础的多边形.
- 任何多边形都可以拆成三角形.
- 内部一定是个平面图形.
- 内外位置定义清晰
- 方便的渐变效果

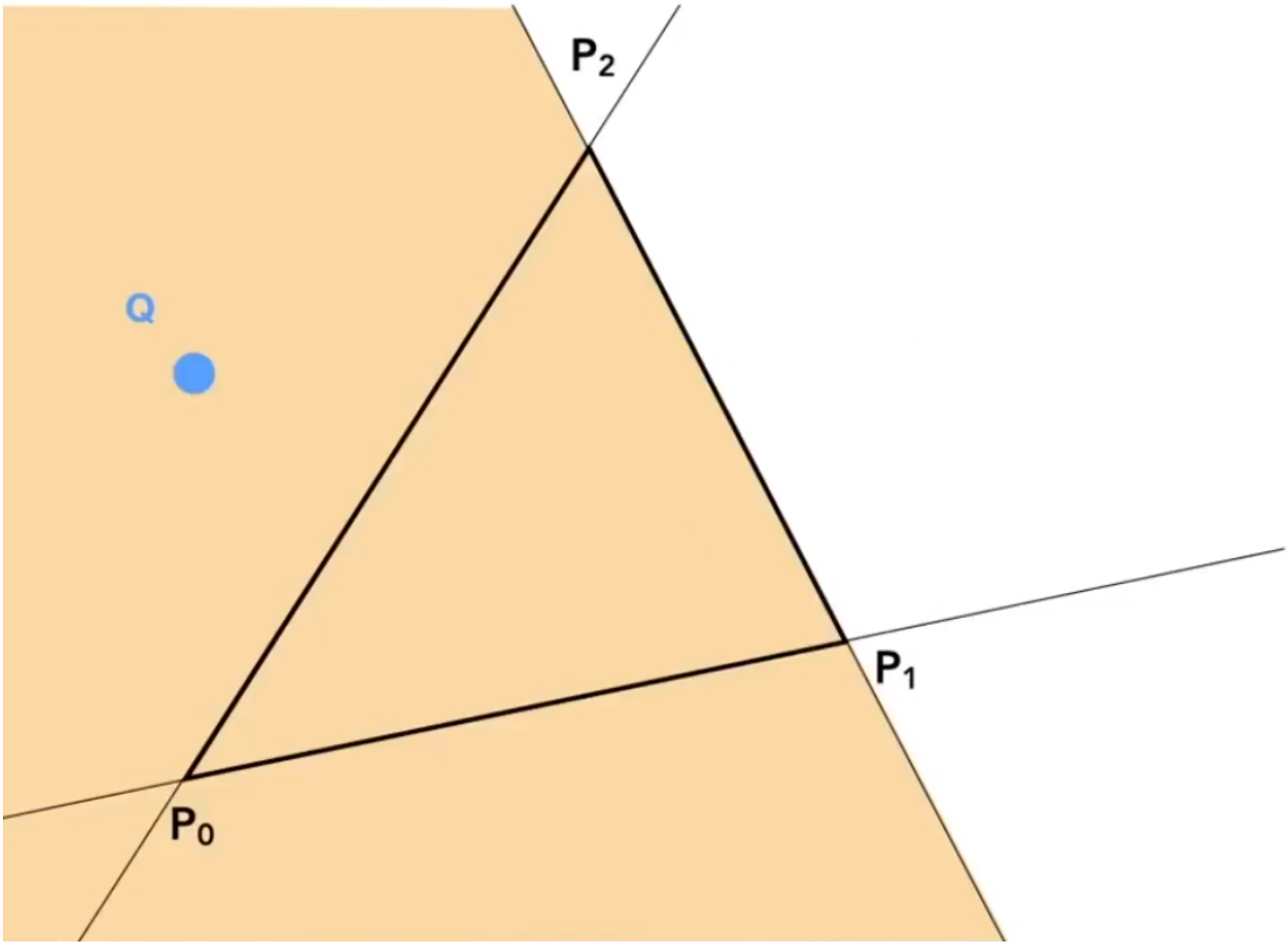
将一个三角形光栅化最简单的做法:采样

采样在图形学中是个重要的概念.此处所指的采样时值对屏幕空间中的像素中心进行采样.(即:判断像素中心是否在函数内,如果是就给像素涂色) :



代码实现很简单,两层循环遍历屏幕上所有的像素就行.

要判断一个点是否在三角形内,只需要做叉乘 :



比如:

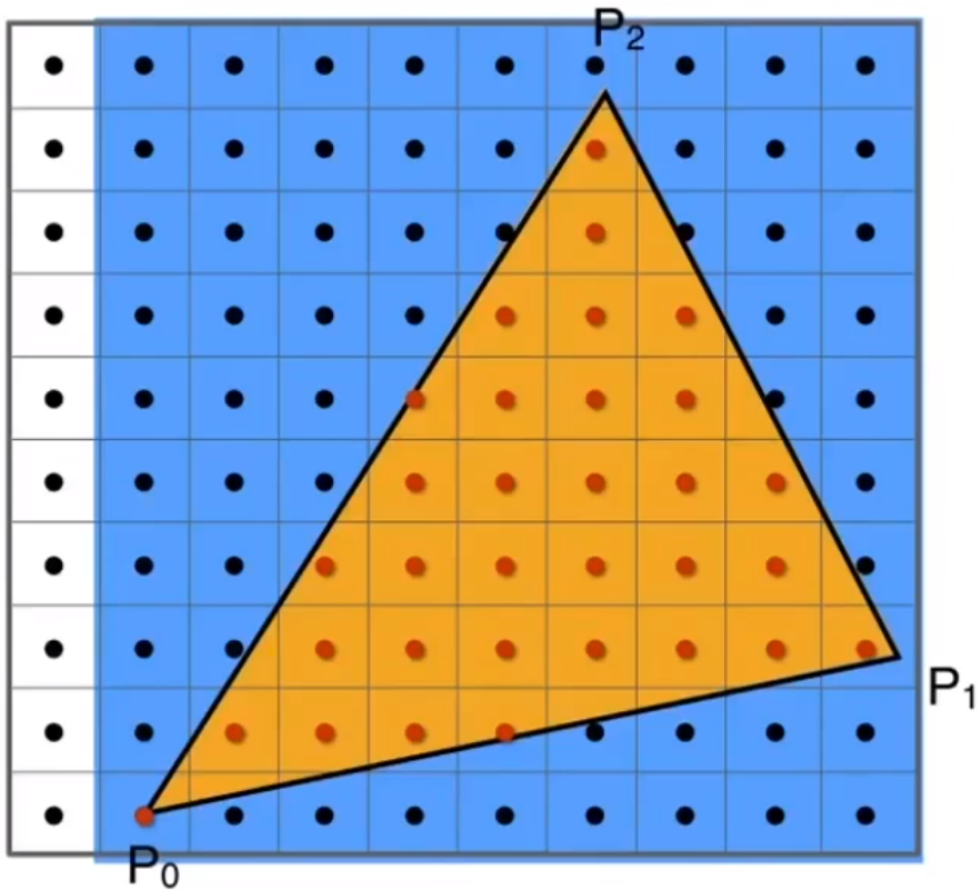
$$\vec{V_1} = P_1\vec{P}_2 \times P_1\vec{Q}$$

由于$\vec{V_1}$指向外侧,所以Q在P_1P_2左侧

如此就能不断的缩小范围,三条边都判断一次,就能知道该点是否在外面.

如果点正好在边上,就自己决定.

但是这么做性能消耗过大,因此可以界定一个判断范围-axis aliged bounding box :



不过对不同的情况有不同的处理方法,优化方法百花八门,交给数据结构与算法篇吧.

4 硬件

5 网络通信

6 科研辅助

Chapter 3

逻辑学

1 逻辑学基本常识

1.1 充分必要条件

充分必要条件(sufficient and necessary condition)简称为充要条件.
在逻辑学中:

- 当命题”若P则Q”为真时,P称为Q的充分条件,Q称为P的必要条件.

  因此:

- 当命题”若P则Q”与”若Q则P”皆为真时,P是Q的充分必要条件,同时,Q也是P的充分必要条件.

- 当命题”若P则Q”为真,而”若Q则P为假时”,P是Q的充分不必要条件,Q是P的必要不充分条件,反之亦然.

1.1.1 必要条件

P是Q的必要条件，代表”如果P是假,则Q是假”
以逻辑符号表示:
$\neg P \to \neg Q$
通过否定后件,得出”如果Q是真,则P是真”.
$Q \to P$

1.1.2 充分条件

P是Q的充分条件,代表”如果P是真,则Q是真”或”如果Q是假,则P是假”.

以逻辑符号表示:

$P \rightarrow Q$

1.1.3 必要条件及充分条件

P是Q的充分及必要条件,代表”当且仅当P是真,则Q是真”.

以逻辑符号表示:

$P \longleftrightarrow Q$

留意$\neg P \rightarrow \neg Q$可以推出$Q \rightarrow P$.

$(\neg P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

$(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$

$P \longleftrightarrow Q$