db 的日常笔记

dbydd

2020 年 8 月 17 日

todos

标签：求导，泰勒公式

目录

Chapter 1

数学

1 基本概念

1.1 六大基本初等函数

常数函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数

1.2 二项式定理

$(x+y)^n = x^n + C_{n-1}^n(x^{n-1}y) + C_{n-2}^n(x^{n-2}y^2) + \ldots + y^n$

1.3 排列组合

排列：$P_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$
组合：$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

1.4 零散的定义

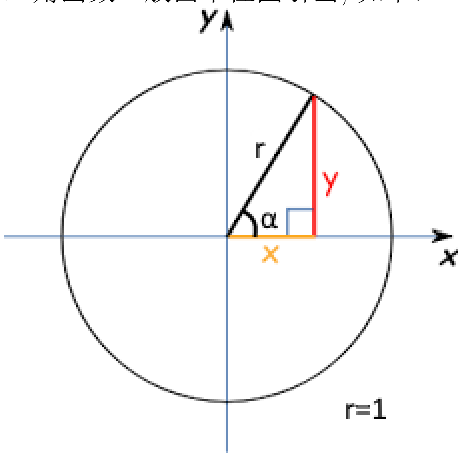
1. 有界：$\exists\epsilon, f(x) < \epsilon \quad (-\infty < x < \infty)$

1.5 零散的思想

1. 正变换是数学的重要工具, 三角变换是只变其形不变其质的。三角变换常常先寻找式子所包含的各个角之间的联系, 并以此为依据选择可以联系它们的适当公式, 通过换元法把三角恒等变换问题转化为代数恒等变换问题。

2 三角函数

三角函数一般由单位圆引出，如下：



2.1 正三角函数

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$
$\tan\alpha = \frac{y}{x}$

2.2 反三角函数

$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

2.3 和差化积

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha-\beta)\cdot(1+\tan\alpha\tan\beta)$

2.4 积化和差

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

2.5 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限。

2.5.1 第一组诱导公式

$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot\alpha$

2.5.2 第二组诱导公式

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

2.5.3 第三组诱导公式

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

2.5.4 第四组诱导公式

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

2.5.5 第五组诱导公式

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$

2.5.6 第六组诱导公式

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

2.5.7 杂项

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta)$
$\cos\alpha=2cos^2\frac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

2.6 倍角公式

2.6.1 半倍角公式

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$
$\sec\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{\frac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}}2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}=\frac{\pm\sqrt{\frac{4\sec^3\alpha+\sec^2\alpha}{2\cos\alpha}}}{\sec\alpha+1}$
$\csc\frac{\alpha}{2}=\frac{\pm\sqrt{\frac{\sec\alpha-1}{2\sec\alpha}}2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}=\frac{\pm\sqrt{\frac{3\sec^3\alpha-\sec^2\alpha}{2\sec\alpha}}}{\sec\alpha-1}$

2.6.2 二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^{\alpha}=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

2.6.3 n 倍角公式

$\cos n\theta=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}[(-1)^iC_{2i+1}^n\cos^{n-2i}\theta\sin^{2i}\theta]$
$\sin n\theta=\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}}[(-1)^iC_{2i+1}^n\cos^{n-2i-1}\theta\sin^{2i+1}\theta]$

2.6.4 万能替换公式

角 $\alpha(\alpha \neq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{z})$ 的所有三角比都可以用 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 表示. 这组公式叫做万能替换公式
$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
$\tan\alpha\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

2.7 三角恒等式

$\csc^2 x - cot^2 x = 1$
$\sec^2 x - tan^2 x = 1$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

3 微积分

3.1 极限

3.1.1 定理

1. 函数在一点极限存在的条件是左右极限存在且相等
2. 洛必达法则：当极限为 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$ 时可上下同时求导，求导后极限不变，每一步都需要重新判断是否依然符合类型

3.1.2 重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \to \lim\limits_{x\to 0}\sin x \to x$
$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

3.2 等价无穷小

$\lim\limits_{x\to 0}a^x - 1 \approx x\ln a$
$\lim\limits_{x\to 0}\arcsin(a)x \approx \sin(a)x \approx (a)x$
$\lim\limits_{x\to 0}\arctan(a)x \approx \tan(a)x \approx (a)x$
$\lim\limits_{x\to 0}\ln 1 + x \approx x$
$\lim\limits_{x\to 0}e^x \approx 1 + x$
$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \approx x$
$\lim\limits_{x\to 0}\tan x \approx x$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^b - 1 \approx abx$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

$\lim\limits_{x\to 0} 1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} x-\ln(1+x) \approx \frac{x^2}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \tan x - x \approx \frac{x^3}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} x-\arctan x \approx \frac{x^3}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0} x-\sin x \approx \frac{x^3}{6}$

$\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x - x \approx \frac{x^3}{6}$

以上等价无穷小都可以由泰勒公式推出