db的日常笔记

dbydd

最后编译日期:2021 年 3 月 7 日

注: 本笔记有些部分来自于wikipedia

todos

1. 誊录纸质笔记 线性代数-线性无关,基和维数.
2. 隐函数存在定理,等幂求和,(复变函数),概率论与数理统计(及测度论).
3. 重写线性代数
4. 补充多个section,计算机图形学等
5. 整合冗余部分

目录

第一部分

数学

注:由于特殊原因,数学分析,高等代数内容会被拆散放在各个章节中,善用搜索.

注：待整理.

Chapter 1

数论

1 整数的整除性

1.1 带余除法

设n, m都是整数且$n \neq 0$,则可以唯一的将m写作$m = q \cdot b + r$,其中q, r是整数,且$0 \leq r < |n|$.q称为商(quotient),r称作余数(remainder),取余数称为取模,记作$r = m \bmod n$

1.1.1 整除,倍数与约数

- 若余数$r = 0$,则称m能被n整除,或者n整除m,记作$n|m$
- 此时,称m是n的一个倍数(multiple),称n是m的一个约数或因子(divisor)
- 若$n|m$,则存在整数q使得$m = q \cdot n$,且有$n \leq |m|$

1.1.2 整除的线性组合,传递性与反对称性以及显然性质

假设a, b, c是整除,$a \neq 0$,则:

- 若$a|b$且$a|c$,则对于任意的整数x, y,有$a|(xb + yc)$
- 若$b \neq 0 : (a|b) \wedge (b|c) \Rightarrow a|c$
- 若$b \neq 0 : (a|b) \wedge (b|a) \Rightarrow a = \pm b$
- 对于任意正整数a,有$a|a$和$1|a$

1.2 素数与合数

若大于1的整数p的所有正因子只有p和1,则称其为质数或素数(prime);否则称其为合数(composite number)

1.2.1 素数有无穷多个

- 假设只有有限个素数,设为$p_1, p_2, \ldots, p_n$
- 令$m = p_1p_2...p_n + 1$,显然m无法被其中任意一个素数整除,因此矛盾:要么m本身是素数,要么存在大于p_n的素数可以整除m.

1.2.2 算数基本定理(唯一析因定理)

$$\forall n > 1 : n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$$

其中$p_1 < p_2 < \cdots < p_s$是s个相异的素数,指数k_i都是正整数.

此表达式又称作整数n的素因子分解.

1.3 最大公因子与最小公倍数

1.3.1 最大公因子

- 设a和b是两个不全为0的整数,若整数d满足$d|a$且$d|b$,则称d是a, b的公因子(common divisor).
- 所有公因子中最大的称作a与b的最大公因子(greatest common divisor),记作$GCD(a, b)$.
- 若整数a, b的最大公因子为1,则称a与b互素(relatively prime).

若$a = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}$且$b = p_1^{l_1}p_2^{l_2}\ldots p_s^{l_s}$,则:

$$GCD(a, b) = p_1^{min(k_1,l_1)}p_2^{min(k_2,l_2)}\ldots p_s^{min(k_s,l_s)}$$

1.3.2 最小公倍数

- 设a和b是两个不全为0的整数,若整数m满足$a|m$且$b|m$,则称m是a, b的公倍数.
- 所有公倍数中最小的正整数称为a与b的最小公倍数(least common multiple),记作$LCM(a, b)$.

若$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$且$b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}$,则：

$$LCM(a,b) = p_1^{max(k_1,l_1)} p_2^{max(k_2,l_2)} \dots p_s^{max(k_s,l_s)}$$

显然,对于任意的正整数a：

- $GCD(0,a) = a$
- $GCD(1,a) = 1$
- $LCM(1,a) = a$

1.3.3 欧几里得算法(辗转相除法)

设$a = qb + r$,其中a, b, q, r都是整数,则：

$$GCD(a,b) = GCD(b,r)$$

- 若$d|a$且$d|b$,则有$d|b$且$d|r = (a - qb)$
- 若$d|b$且$d|r$,则有$d|(qb + r)$,即$d|a$.
- 于是a与b的公因子集合和b与r的公因子集合相同.继而最大公因子集合相同.

基于这种性质,提出了欧几里得算法(辗转相除法),这种算法可以求两个数之间的最大公因子,以下为代码实现(c语言)：

```c
int GCD(int a,int b){
    if(b == 0){
        return a;
    } else {
        return GCD(b,a%b);
    }
}
```

1.3.4 裴蜀等式

由辗转相除法又可以导出此定理：

- 对于不全为0的整数a, b, d,方程$sa + tb = d$存在整数解s, t当且仅当$GCD(a,b)|d$.
- $sa + tb = d$称为裴蜀(Bezout)等式或贝祖等式.