# Parte 5: Demostraciones Matemáticas

Cuando se quiere aumentar el conocimiento en las matemáticas, se requiere construir demostraciones. Partiendo de premisas, y usando un razonamiento deductivo que usa la lógica matemática y los conocimientos ya demostrados, se llega a una conclusión que es verdadera cuando las premisas lo son. El resultado obtenido de esta forma se llama un teorema. Algunos teoremas toman años para ser demostrados.

Se requieren dos aptitudes para hacer demostraciones matemáticas: técnica y creatividad, por eso se puede hablar del **arte de la demostración**. En esta introducción se presentará unas técnicas básicas, ilustrándolas con demostraciones de teoremas sencillos.

## I Demostraciones directas

### 1/ Proposición Universal

Para demostrar una proposición de la forma: $\forall x \in U, P(x)$ , se demuestra que P(x) es verdadero para cualquier x de U.
La demostración empieza con: *"Sea x perteneciendo a U, tenemos…"*
La demostración se termina con: *"Luego (o entonces o por ende o…) P(x) es verdadero para todos los x de U. LQQD"*.

***Ejemplo:*** $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$
*Demostración: Sea* $x \in \mathbb{R}$*, usando la distributividad, tenemos* $(x-1)(x+2) = x^2+2x-1x-2$
*Entonces* $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ *. Luego la igualdad se verifica para todos los números reales. LQQD.*

### 2/ Proposición Existencial

Para demostrar una proposición de la forma: $\exists x \in U, P(x)$
Primero se debe encontrar un x que satisface la propiedad y luego la demostración empieza con: *"Sea x igual a …., entonces …".* Se demuestra después que P(x) es verdadero para el valor encontrado.
La demostración se termina con *"Luego (o entonces o por ende o…) existe un x tal que P(x) es verdadero. LQQD".*

***Ejemplo:*** $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 2 = 0$
*Primero se busca un x que satisface la ecuación resolviendo la ecuación, por ejemplo x = -2 o x = 1 son los valores posibles.*
*Demostración: Sea x = 1, entonces $x^2 + x - 2 = 1^2 + 1 - 2 = 0$, luego existe un número real tal que $x^2 + x - 2 = 0$. LQQD.*

Para demostrar una proposición de la forma: $\exists!\, \mathbf{x} \in \mathbf{U},\ \mathbf{P(x)}$, primero se hace como anteriormente, y después se demuestra la unicidad partiendo de: *"Sean x y x dos elementos de U tal que P(x) y P(y) estén verdaderos."* Se demuestra después que x = y, y se concluye diciendo: *"Por ende existe un único x que satisface P(x). LQQD."*

## 3/ Condicional

Para demostrar una proposición de la forma: $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$
Partiendo de P, se usa deducciones lógicas, teoremas demostrados anteriormente, definiciones de los conceptos, propiedades, etc. para llegar a Q.

***Ejemplo:*** $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ o $x = 1$
*Factorizando $x^2 + x - 2$, se obtiene $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Un producto es nulo solo si por lo menos uno de los factores es nulo, entonces $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$ o $x - 1 = 0$, luego $x = -2$ o $x = 1$. LQQD.*

## 4/ Bicondicional

Para demostrar una proposición de la forma: $\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ , se demuestra primero la implicación $P \Rightarrow Q$, y se demuestra después la recíproca $Q \Rightarrow P$. Se termina diciendo: *"Como demostramos que $P \Rightarrow Q$ y que $Q \Rightarrow P$, entonces demostramos que $P \Leftrightarrow Q$ . LQQD."*

***Ejemplo:*** $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ o $x = 1$

## 5/ Disyunción de casos

Para demostrar una proposición de la forma: $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B},\ \mathbf{P(x)}$ , se presenta dos casos: 1/ *"Si $x \in A$"* y se demuestra que P(x) se verifica. 2/ *"Si $x \in B$"* y se demuestra que P(x) se verifica. *LQQD.*

# I I   Demostraciones indirectas

## 1/ Demostración por la contrapuesta

Para demostrar una proposición de la forma: $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ se puede utilizar la equivalencia con la contrapuesta: $\neg\, \mathbf{Q} \Rightarrow \neg\, \mathbf{P}$ , que a veces, es más fácil demostrar.

La demostración empieza con: *"Suponemos que ¬Q, y vamos a demostrar que ¬P. Si Q es falso, entonces…"*

La demostración se termina con: *"como demostramos que ¬P es verdadero, entonces demostramos que la contrapuesta ¬ Q ⇒ ¬ P es verdadera, luego P ⇒ Q es verdadero. LQQD. "*

***Ejemplo:*** $\forall p \in \mathbb{N},\ p^2$ *par* $\Rightarrow p$ *par*

*Demostración: Sea p un número natural. Vamos a demostrar la contrapuesta que se enuncia: si p es impar entonces* $p^2$ *es impar.*

*Si p es impar entonces existe un número natural k tal que* $p = 2k+ 1$. *Luego* $p^2 = (2k + 1)^2$

*Entonces* $p^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ . *Luego, como* $p^2$ *es de la forma* $2q + 1$ *con* $q = 2k^2 + 2k$, *número natural, entonces* $p^2$ *es impar. Así que la contrapuesta queda demostrada, y por ende si* $p^2$ *es par entonces p es par. LQQD.*

## 2/ Demostración por contradicción

Para demostrar por contradicción que una proposición P es verdadera, se supone que P es falsa, se llega con deducciones a una falsedad, luego como ¬P es falso, P es verdadero.

La demostración empieza con: *"Suponemos que ¬P , entonces…"*

La demostración se termina con: *"Como llegamos a una contradicción, la suposición es falsa. Luego (o entonces o por ende o…) P es verdadero. LQQD".*

***Ejemplo:*** $\sqrt{2}$ *es irracional*

*Demostración: Suponemos que* $\sqrt{2}$ *es racional, entonces existe dos números relativos p y q tal que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, *además se puede seleccionar p y q de tal modo que* $\frac{p}{q}$ *sea irreducible.*

*Luego* $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ *y entonces* $p^2 = 2\, q^2$. *Así que* $p^2$ *es par.*

*Pero demostramos anteriormente que si un cuadrado de un número es par, entonces este número es par, luego p es par. Entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2k$.*
*Así que $p^2 = 2(2k^2)$, pero sabemos que $p^2 = 2q^2$, entonces $2(2k^2) = 2q^2$, y simplificando por 2, llegamos a $q^2 = 2k^2$. Entonces $q^2$ es par.*
*Usando la misma propiedad de los cuadrados pares, deducimos que q es par.*
*Pero si p y q son ambos pares, entonces $\frac{p}{q}$ es reducible (porque se puede dividir por 2 arriba y debajo de la fracción), lo que contradice la suposición que $\frac{p}{q}$ era irreducible. Luego $\sqrt{2}$ no es racional, y entonces $\sqrt{2}$ es irracional. LQQD.*

## III Demostraciones por inducción

Se usan para demostrar proposiciones de la forma: **$\forall\, n \in \mathbb{N}$, P(n).** Se usa el principio de inducción matemática siguiente:

**Teorema de inducción:** Si un predicado P(n) es verdadero para $n = 0$, y si cada vez que P(n) es verdadero, P(n+1) es verdadero; entonces P(n) es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esto quiere decir que para demostrar este tipo de proposición, basta demostrar que:
1/ P(0) es verdadero (a veces se empieza con P(1) si el predicado no es definido para n=0).
2/ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
La demostración empieza con: *"1/ Si n = 0 entonces … luego P(0) es verdadero"* .
La demostración sigue con "2/ *Suponemos que P(n) es verdadero, entonces…. Luego P(n+1) es verdadero".*
La demostración se termina con: *"Como P(0) es verdadero y que cuando P(n) es verdadero entonces P(n+1) es verdadero, podemos deducir por el teorema por inducción que P(n) es verdadero para cualquier número natural. LQQD"*.

***Ejemplos:*** *1/ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$*

*2/ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ es divisible entre 3.*