Parte 2: Lógica Matemática

En el lenguaje, se encuentran ambigüedades que se no pueden encontrar en el lenguaje matemático. Por ejemplo la oración siguiente: 'Un americano muere de melanoma cada hora' se interpreta matemáticamente como si el mismo americano muere cada hora; por eso es muy importante definir sin ambigüedad las proposiciones matemáticas.

Afín de construir un lenguaje más amplio se usa los conectores lógicos (no, y, o, etc…) que permiten construir proposiciones (o predicados) más complejas a partir de proposiciones (o predicados) más sencillas enlazadas con conectores.

Las **proposiciones (o predicados) atómicas** son las proposiciones (o predicados) que no tienen conectores lógicos, las otras se llaman **proposiciones (o predicados) moleculares**.

Ejemplos de proposiciones atómicas:

1/ La gallina canta

2/ Marcos se levanta a las 4 de la mañana.

3/ $(2x^2 - 9 \log(5x+6))(5y^3 + 58xy) = 8/65$

Ejemplos de proposición molecular:

1/ *'Si ABCD es un cuadrilátero* y *los puntos medios de AC y BD coinciden entonces ABCD es un paralelogramo'.*

Esta proposición está construida a partir de las tres proposiciones atómicas siguientes:

P: ABCD es un cuadrilátero,

Q: los puntos medios de AC y BD coinciden,

R: ABCD es un paralelogramo

y de los dos conectores $\wedge$ (y) *y* $\Rightarrow$ (si …. entonces) *que vamos a definir en la parte siguiente. Luego, la fórmula proposicional molecular se puede escribir:* $P \wedge Q \Rightarrow R$

2/ *'José va al cine o al restaurante'.*

Esta proposición molecular es la disyunción de las proposiciones

P: José va al cine

Q: José va al restaurante

y se puede escribir $P \vee Q$ *(y se lee P o Q)*

3/ 'María y Luis bailan'.

Esta proposición se puede entender de dos maneras diferentes, y dependiendo de estas interpretaciones, es una proposición atómica o es una proposición molecular.

Si María y Luis bailan juntos, entonces es la pareja que baila, y no podemos dividir la proposición en dos proposiciones más sencillas; al contrario, si bailan cada uno independientemente del otro entonces es la conjunción de las proposiciones

P: María baila

Q: Luis baila

y se puede escribir $P \wedge Q$ *.*

I Conectores lógicos

Los conectores lógicos son símbolos que enlazan proposiciones con el fin de construir un lenguaje más amplio.

Los conectores lógicos se describen con su **tabla de verdad**: en cada columna se escribe el valor de verdad (V para verdadero, F para falso) de las proposiciones.

1/ Negación

Este conector puede actuar con una sola proposición.

Su símbolo es $\neg$ o $\sim$ y se lee 'no' o 'negación de'.

Sea P una proposición, la **negación** de P (se escribe **¬P** o **~P** , y se lee **no P** o **negación de P**) es la proposición falsa si P es verdadera y verdadera si P es falsa. Entonces su tabla de verdad es:

P	**¬P**
V	F
F	V

Ejemplos:

1/ ¬ (La naranja es una fruta) es la proposición: La naranja no es una fruta

2/ ¬ (2+1 = 4) es la proposición: $2 + 1 \neq 4$

3/ ¬ ($x \geq 0$*) es la proposición:* $x < 0$

4/ ¬ (Todos los días, yo voy a la playa) es la proposición: Algunos días, yo no voy a la playa.

5/ ¬ (María baila y Luis canta) es la proposición: María no baila o Luis no canta.

2/ Conjunción

Sean P y Q dos proposiciones; la **conjunción** de P y Q (se escribe **P ∧ Q** y se lee **P y Q**) es la proposición que es verdadera si y solo si P **y** Q son verdaderas. La tabla de verdad es:

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplos:

1/ (La naranja es una fruta) ∧ (La naranja es de color naranja)

2/ $(x^2 = 4) \wedge (x > 0)$

3/ $(4 < x) \wedge (x < 5)$ *se escribe también* $4 < x < 5$

4/ $(x \geq 10) \wedge (x \neq 10)$ *es también* $x > 10$

3/ Disyunción

Sean P y Q dos proposiciones; la **disyunción** de P y Q (se escribe **P ∨ Q** y se lee **P o Q**) es la proposición que es verdadera si y solo si por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera.

P	Q	P ∨ Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

1/ (Luis viene hoy) ∨ (Luis viene mañana)

2/ $(x^2 = 4) \Rightarrow (x = 2) \vee (x = -2)$

3/ $(x > 5) \vee (x = 5)$ *se escribe también* $x \geq 5$

4/ $(x > 0) \vee (x < 0)$ *es también* $x \neq 0$

Existe una variante de la disyunción, llamada **disyunción exclusiva:**

Sean P y Q dos proposiciones; la **disyunción exclusiva** de P y Q (se escribe **P $\underline{\vee}$ Q**) y se lee **P o Q exclusivo**) es la proposición que es verdadera si y solo si solo P es verdadero o Q es verdadero, **pero no ambos.**

P	Q	P $\underline{\vee}$ Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos:

1/ (Luis viene hoy) $\veebar$ *(Luis viene mañana). En esta proposición, Luis* ***no*** *puede venir los dos días contrariamente al ejemplo anterior con la disyunción.*

2/ $(x \geq 10) \veebar (x \leq 10)$ es también $x \neq 10$

Vamos a demostrar con la tabla de verdad, que la disyunción exclusiva P $\veebar$ Q es una manera más sencilla de escribir la proposición (P ∨ Q) ∧ ¬ (P ∧ Q) que se puede leer: P o Q pero no los dos al mismo tiempo.

P	Q	P $\veebar$ Q	P ∨ Q	P ∧ Q	¬ (P∧Q)	(P ∨ Q) ∧ ¬(P∧ Q)
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

Las dos columnas en amarillo son idénticas, por eso las fórmulas proposicionales son similares.

4/ Condicional

Sean P y Q dos proposiciones; la **condicional** de P y Q (se escribe **P ⇒ Q** y se lee **si P entonces Q** o **P implica Q**) es la proposición que solo es falsa cuando P es verdadero y Q es falso.

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos:

1/ (Los elefantes vuelan) ⇒ (ABC es un triangulo isósceles).

Notar que esta proposición es verdadera porque la premisa es falsa. Por eso la definición de la condicional es más amplia que la definición de la implicación como la conocemos usualmente, por la cual la premisa es siempre verdadera.

2/ $(x \geq 6) \vee (x \leq 12) \Rightarrow$ *(x es cualquiera)*

3/ $(x = -3) \Rightarrow (x^2 = 9)$

4/ (Todos los peces nadan) ∧ (El tiburón es un pez) ⇒ (El tiburón nada)

La recíproca de P ⇒ Q, es Q ⇒ P. Estas dos proposiciones no son iguales.

Si P ⇒ Q, podemos también decir que **P es suficiente para Q** o que **Q es necesario para P**.

Se puede también decir: **P solo si Q**, o **Q si P**.

Ejemplo: *(X es una vaca) ⇒ (X es un mamífero).*
Esta proposición se puede leer de las diferentes maneras siguientes:

- *Si X es una vaca entonces X es un mamífero*
- *X es una vaca implica X es un mamífero*
- *Para X, es suficiente ser una vaca para ser un mamífero*
- *Para X, es necesario ser un mamífero para ser una vaca*
- *X es una vaca solo si X es un mamífero*
- *X es un mamífero si X es una vaca*

La negación de la condicional: ¬ (P ⇒ Q), se escribe más sencillamente: **P ⇏ Q**, y se lee **P no implica Q**, y es verdadera únicamente cuando P es verdadero y Q es falso.

5/ Bi-condicional

Sean P y Q dos proposiciones; la **bi-condicional** de P y Q (se escribe **P ⇔ Q** y se lee **P si y solo si Q** o **P es equivalente a Q**) es la proposición **(P ⇒ Q) ∧ (Q ⇒ P).** Entonces **P ⇔ Q** es verdadero cuando la implicación **y** su recíproca son verdaderas. Luego su tabla de verdad es la siguiente (comprobarlo).

P	**Q**	**P ⇔ Q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En resumen **P ⇔ Q** es verdadera cuando P y Q tienen el mismo valor de verdad, y **P ⇔ Q** es falsa si los valores de verdad de P y Q son opuestos.

Ejemplos:

1/ (Existe un mamífero que pone huevos) **⇔** *(No todos los mamíferos no ponen huevos)*
2/ $(x^2 - 2x + 1 = 0) \Leftrightarrow x = 1$ *es verdadero porque* $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
3/ $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ *es falsa porque existe un x tal que* $x^2 = 9$ *y* $x \neq 3$ $(x = -3)$
4/ $(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = -2)$ *es verdadera.*
Para demostrarlo, hay que demostrar las dos condicionales:
$(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow (x=1) \vee (x=-2)$ *y* $(x = 1) \vee (x = -2) \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$
La primera se demuestra sabiendo que un producto de dos factores es nulo si y solo si cada factor es nulo, entonces $x - 1 = 0$ *o* $x+2 = 0$*, o sea* $x = 1$ *o* $x = -2$.
La secunda se demuestra reemplazando x con su valor (1 o -2) en la expresión.

<u>II Tipos de proposiciones</u>

1/ Tautologías

Una **tautología** es una proposición que es siempre verdadera (V). Para demostrar que una proposición molecular es una tautología, hay que construir su tabla de verdad y verificar que la columna entera está compuesta de V.

Ejemplos:

1/ $P \vee \neg P$

P	**$\neg$ P**	**P $\vee \neg$ P**
V	F	V
F	V	V

2/ $P \Rightarrow P \vee Q$

P	**Q**	**P $\vee$ Q**	**P $\Rightarrow$ P $\vee$ Q**
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

2/ Contradicciones

Una **contradicción** es una proposición que es siempre falsa (F). Para demostrar que una proposición molecular es una contradicción, hay que construir su tabla de verdad y verificar que la columna entera está compuesta de F.

Ejemplos *(demostrarlo con la tabla de verdad):*

1/ $P \wedge \neg P$

2/ $(P \underline{\vee} Q) \wedge (P \wedge Q)$

3/ Contingencias

Una **contingencia** es una proposición que es ni una tautología, ni una contradicción. Para demostrar que una proposición molecular es una contingencia, hay que construir su tabla de verdad y verificar que la columna entera tiene por lo menos una V y una F.

Ejemplos:

1/ $P \wedge Q$ *2/* $P \Rightarrow Q$ *3/* $P \Rightarrow \neg P$

III Relación de equivalencia entre proposiciones

1/ Definición

Dos proposiciones P y Q son **equivalentes** cuando ellas tienen la misma tabla de verdad. Es igual decir que P y Q están verdaderos al mismo tiempo, y son falsos al mismo tiempo. De otra manera P es equivalente a Q cuando $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología. Se escribe $P \simeq Q$.

Las equivalencias entre proposiciones permiten a veces simplificar unas proposiciones. Además dan algunas alternativas cuando queremos demostrar un teorema.

Ejemplos:

1/ $P \simeq \neg(\neg P)$

P	**¬ P**	**¬ (¬ P)**	**P ⇔ ¬ (¬ P)**
V	F	V	V
F	V	F	V

2/ $\neg(P \lor Q) \simeq \neg P \land \neg Q$

P	**Q**	**¬ P**	**¬ Q**	**P ∨ Q**	**¬ (P ∨ Q)**	**¬ P ∧ ¬ Q**	**¬ (P ∨ Q) ⇔ ¬ P ∧ ¬ Q**
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

En los dos ejemplos, las columnas en amarillo son idénticas, luego, las proposiciones son equivalentes. Las columnas en naranja muestran que el proceso es similar demostrando que obtenemos una tautología.

2/ Reglas de simplificación

Para simplificar la escritura de las proposiciones, se usan también las reglas de prioridad entre los diferentes conectores. Existen tres reglas que son las siguientes:

- Primero vienen las negaciones ($\neg$)
- Segundo vienen las disyunciones y las conjunciones ($\lor$ y $\land$)
- Luego viene la condicional y la bicondicional ($\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$)

Ejemplo:

$((\neg(P) \land Q)) \Rightarrow (R \lor S)) \simeq \neg P \land Q \Rightarrow R \lor S$

3/ Equivalencias importantes

Existen unas equivalencias que son importantes de conocer. Ya hemos demostrado las dos primeras y se puede verificar las demás construyendo la tabla de verdad asociada.

1/ $\mathbf{P \simeq \neg (\neg P)}$, o sea: la negación de la negación no cambia nada.

Ejemplo: *'No es verdad que x no es igual a 0'* es equivalente a *'$x = 0$'*

2/ $\mathbf{\neg (P \lor Q) \simeq \neg P \land \neg Q}$, o sea: la negación de la disyunción es la conjunción de las negaciones.

Ejemplo: *'No es verdad que Luis viene hoy o mañana'* es equivalente a *'Luis no viene hoy ni mañana'.*

3/ $\mathbf{\neg (P \land Q) \simeq \neg P \lor \neg Q}$, o sea: la negación de la conjunción es la disyunción de las negaciones.

Ejemplo: *'No es verdad que $x^2 = 4$ y $x = 3$'* es equivalente a *'$x^2 \neq 4$ o $x \neq 3$'.*

4/ $\mathbf{P \Rightarrow Q \simeq \neg P \lor Q}$

Ejemplo: *'Si ABCD es un cuadrado entonces es un rectángulo'* es equivalente a *'ABCD no es un cuadrado o es un rectángulo'*

5/ $\mathbf{P \not\Rightarrow Q \simeq P \land \neg Q}$

Ejemplo: *'Si $x^2 = 4$ no implica que $x = 2$'* es equivalente a *'$x^2 = 4$ y $x \neq 2$'*

6/ $\mathbf{P \Rightarrow Q \simeq \neg Q \Rightarrow \neg P}$ $\neg Q \Rightarrow \neg P$ es llamada la **contrapuesta** de $P \Rightarrow Q$

Ejemplos: *El problema del bar:* *'Si es un menor entonces no puede tomar alcohol'* es equivalente a *'Si puede tomar alcohol, entonces es un adulto'*

La tarea de Wason: *'Detrás de una vocal, hay una cifra par'* es equivalente a *'Detrás de una cifra impar, hay una consonante'.*

III Cuantificadores

Muchos teoremas matemáticos se enuncian de una de las dos maneras siguientes:

'Existe un x que verifica ……', o *'Para todo x, tenemos ……'*, o los dos conjuntamente .

Por ejemplo, para enunciar la existencia de la raíz cuadrada de unnúmero real positivo se escribe: *' Para todo número real positivo x, existe un número real positivo y tal que* $y^2 = x$ *'.*

De manera más concisa, el enunciado se escribe matemáticamente de la manera siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists\, y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x$$

∀ se llama **cuantificador universal**, y ∃ se llama **cuantificador existencial.**

1/ Proposiciones universales

Sea P(x) un predicado, entonces se construye la **proposición universal**: $\forall x, P(x)$

que es verdadera si para todo x, P(x) es verdadero, y que es falsa si existe un x que no cumple P(x).

Ejemplos:

1/ ∀ H ser humano, H es mortal. *Su valor de verdad es V.*

2/ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ *Su valor de verdad es V.*

3/ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x$ *Su valor de verdad es F porque x = -1 no cumple.*

4/ ∀ ABCD cuadrilátero, ABCD cuadrado ⇒ ABCD rectángulo *Su valor de verdad es V.*

2/ Proposiciones existenciales

Sea P(x) un predicado, entonces se construye la **proposición existencial**: $\exists\, x, P(x)$

que es verdadera si existe un x tal que P(x) es verdadero, y que es falsa si ningún x cumple P(x).

Ejemplos:

1/ ∃ M mamífero, M pone huevos. *Su valor de verdad es V (M = el ornitorrinco).*

2/ $\exists\, n \in \mathbb{Z},$ n es irracional *Su valor de verdad es F.*

3/ $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x\,y = 0$ *Su valor de verdad es V (x = 0).*

4/ ∃ ABC triángulo, ABC no es isósceles *Su valor de verdad es V.*

3/ Negaciones

Si no todos los x cumplen el predicado P(x), entonces existe un x que no cumple P(x). Por eso la negación de una proposición universal es una proposición existencial.

De manera similar, si no existe un x que cumple el predicado P(x), entonces todos los x no cumplen P(x). Por eso la negación de una proposición existencial es une proposición universal.

Más precisamente: $\neg(\forall x, P(x)) \simeq \exists x, \neg P(x)$

$$\neg(\exists x, P(x)) \simeq \forall x, \neg P(x)$$

Ejemplos:

1/ $\neg(\forall$ H ser humano, H es mortal$) \simeq \exists$ H ser humano, H es inmortal

2/ $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0) \simeq \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$

3/ $\neg(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x) \simeq \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}^+, y^2 \neq x$

4/ $\neg(\forall$ ABCD cuadrilátero, ABCD es un cuadrado $\Rightarrow$ ABCD es un rectángulo$) \simeq$

$\exists$ ABCD cuadrilátero, ABCD es un cuadrado $\wedge$ ABCD no es un rectángulo

5/ $\neg(\exists$ M mamífero, M pone huevos$) \simeq \forall$ M mamífero, M no pone huevos

6/ $\neg(\exists n \in \mathbb{Z},$ n es irracional$) \simeq \forall n \in \mathbb{Z},$ n es racional

7/ $\neg(\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}, xy = 0) \simeq \forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, xy \neq 0$

8/ $\neg(\forall$ A ave, A vuela$) \simeq \exists$ A ave, A no vuela

Ejercicio:

En los ejemplos arriba, decir cuál es la proposición verdadera: ¿la existencial o la universal?

Resumen

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q	P $\underline{\vee}$ Q	P ⇒ Q	P ⇔ Q
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Equivalencias importantes

$\neg(\neg P) \simeq P$

$\neg(P \vee Q) \simeq \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \simeq \neg P \vee \neg Q$

$P \Rightarrow Q \simeq \neg P \vee Q$

$P \Rightarrow Q \simeq \neg Q \Rightarrow \neg P$ (Contrapuesta)

$P \not\Rightarrow Q \simeq P \wedge \neg Q$

$\neg(\forall x, P(x)) \simeq \exists x, \neg P(x)$

$\neg(\exists x, P(x)) \simeq \forall x, \neg P(x)$

Vocabulario

Símbolo	Operación asociada	Significado
∧	Conjunción o producto lógico	"y", "pero", "sin embargo", "aunque"
∨	Disyunción o suma lógica	"o" (en sentido incluyente)
$\underline{\vee}$	Diferencia simétrica	"o" (en sentido excluyente)
~	Negación	"no", "no es cierto que", "es falso que"
⇒	Implicación material	"implica", "si…entonces..", "luego"
⇔	Equivalencia	"es equivalente a", "…si y sólo si…"

∃: Algunos/Hay algún/ Existe

¬∃: Ninguno/Nadie/ No existe

∀: Para cada/Cualquiera/Todos

¬∀: No todos