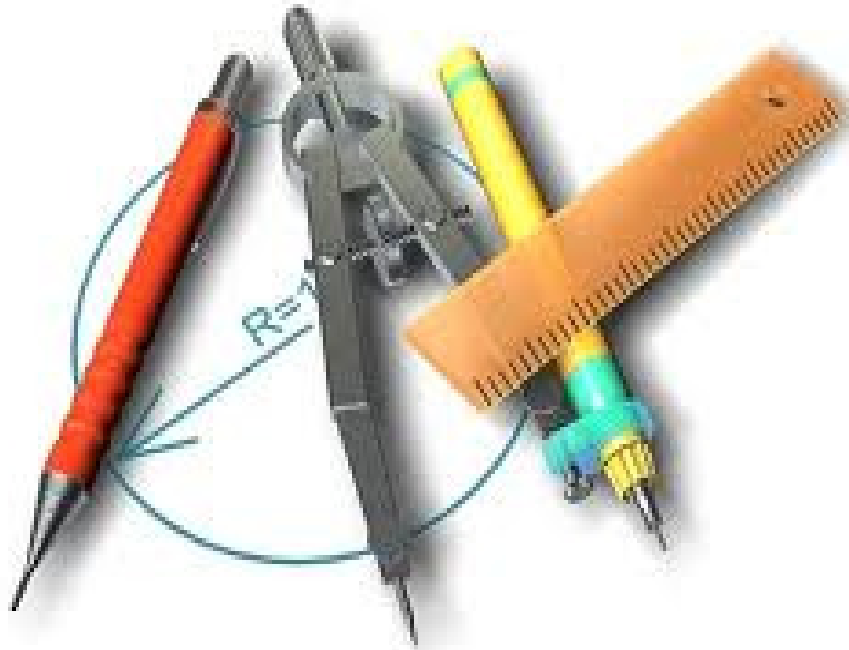


# GUÍA DE MATEMÁTICA 101



CRISTIAN M. GONZÁLEZ CRUZ, MSc.

Revisada y Corregida Por:  
PATRIA FERNÁNDEZ

Derechos Reservados  
Prohibida la copia parcial o total de este documento

| <b>UNIDAD 1 ECUACIONES E INECUACIONES</b>         | <b>PÁGINA</b> |
|---|---------------|
| Las ecuaciones                                    | 3             |
| Solución de una ecuación lineal                   | 4             |
| Ecuación fraccionaria                             | 7             |
| Ejercicio de ecuación                             | 9             |
| Despeje de fórmula                                | 10            |
| Ecuaciones cuadráticas                            | 12            |
| Problemas de palabras                             | 20            |
| Los números complejos                             | 31            |
| Operaciones con números complejos                 | 33            |
| Ecuaciones misceláneas (otro tipos de ecuaciones) | 36            |
| Las desigualdades                                 | 41            |
| Los intervalos                                    | 42            |
| Inecuaciones productos y cocientes                | 46            |
| <b>UNIDAD 2 GEOMETRÍA ANALÍTICA</b>               |               |
| Ejes de coordenadas                               | 54            |
| distancia y coordenadas del punto medio           | 54            |
| Gráfica de ecuaciones                             | 58            |
| La rectas   | 63            |
| Ecuación de la circunferencia                     | 72            |
|   | 77            |
|   | 78            |
|   | 83            |
|   | 88            |
| <b>LAS FUNCIONES</b>                              | <b>93</b>     |
| Tipos de funciones y graficas                     | 94            |
| Graficas trasladadas                              | 106           |
| Reflexiones                                       | 108           |
| Funciones a trozos                                | 110           |
| Operaciones con funciones                         | 112           |
| Funciones crecientes y decrecientes               | 114           |
| Funciones cuadráticas                             | 117           |
| Proporcionalidad o las variaciones                |               |
| <b>UNIDAD 4 CEROS DE OLINOMIOS</b>                |               |
| División de polinomios                            | 126           |
| La división sintética                             | 128           |
| Teorema del residuo y del factor                  | 130           |
| Factorización de polinomios de grado $> 2$        | 133           |
| Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales     | 137           |
| Sistema de ecuaciones lineales                    | 140           |

## UNIDAD 1.1

### LAS ECUACIONES

**ECUACION:** Es un enunciado que expresa la igualdad de dos expresiones o cantidades que pueden tener una o más variables  $x$ ,  $y$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$  etc.

Ejemplos

1.  $2x + 5 = 3x - 7$

2.  $D = v t$

3.  $3x^2 - 6x + 5 = 0$

**SOLUCIÓN O RAÍZ** de una ecuación: es un número o valor por el cual si sustituimos la variable  $y$  produce una expresión verdadera en la igualdad.

Ejemplo:  $2x - 4 = 6$ , si  $x = 5$  tenemos  $2(5) - 4 = 6$  V entonces

5 es una solución o raíz de la ecuación  $2x - 4 = 6$

### ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE

Toda ecuación de la forma  $ax + b = 0$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales y  $a \neq 0$ ,

Ejemplos: 1.  $2x + 6 = 0$  2.  $3x - 9 = 2$

**RESOLVER UNA ECUACION:** es hallar todos los valores que satisfacen la igualdad, o sea, los valores que puede tomar la variable para hacer cierta la igualdad.

**ECUACION ALGEBRAICA:** es una ecuación que sólo contiene expresiones algebraicas ya sean polinomios, radicales, expresiones racionales etc.

**ECUACION CONDICIONAL:** es una ecuación para la cual existen valores que no satisfacen la igualdad ejemplo:  $2x - 1 = 7$  no se satisface con otro valor diferente de 4.

**IDENTIDAD:** se satisface para todos los valores que están dentro del dominio de la variable.

Ejemplo  $(2y - 3)^2 = 4y^2 - 12y + 9$  la igualdad se satisface para cualquier valor que tome la variable  $y$ .

**ECUACIÓN LINEAL EN LA VARIABLE X:** es toda ecuación que se puede escribir de la forma

$ax + b = 0$  donde  $a \neq 0$ ,  $a$  y  $b$  denotan números reales.

Ejemplos:  $2x - 12 = 0$ ,  $3x + 4 = 2x - 1$ ,  $2x - 7 = 3x + 16$ .

**ECUACIONES EQUIVALENTES:** son ecuaciones que tienen las mismas soluciones

### **OPERACIONES QUE PRODUCEN LAS ECUACIONES EQUIVALENTES**

- 1) **Sume o reste en cada lado de la ecuación la misma expresión que represente un número real.**
- 2) **Multiplique o divida cada lado de una ecuación por la misma expresión que represente un número real diferente de cero.**

Ejemplo 1: Hallar la solución de  $x - 2 = -5$ ,

Si a ambos lados **sumamos 2**

$$x - 2 + 2 = -5 + 2$$

$$x + 0 = -3$$

$$x = -3, \quad CS = \{-3\}$$

Ejemplo 2:  $x + 3 = 12$  si a ambos lados restamos 3

$$x + 3 - 3 = 12 - 3$$

$$x = 9$$

$$CS = \{9\}$$

Ejemplos 3: Encuentre el conjunto solución de:  $2x - 1 = 7$

es equivalente con  $2x - 1 + 1 = 7 + 1$  equivalente a  $2x = 8$  Este a su vez es

equivalente a  $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$  equivalente a  $x = 4$ ,  $CS = \{4\}$

### **SOLUCION DE UNA ECUACION LINEAL**

Una ecuación de la forma  $ax + b = 0$  siempre que  $a \neq 0$

**Ejemplo 1:** encuentra la solución de la ecuación lineal  $ax + b = 0$

$$ax + b - b = 0 - b$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

$$CS = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$$

Resolver la ecuación  $5x - 4 = 2x + 2$ ,

Para solucionar  $5x - 4 = 2x + 2$

aplicamos las propiedades de las ecuaciones equivalentes y sumamos **4** en ambos miembros y restaremos **2x** en ambos miembros

$$5x - 4 + 4 - 2x = 2x + 2 - 2x + 4, \text{ entonces } 5x - 2x - 4 + 4 = 2x - 2x + 2 + 6,$$

$$5x - 2x + 0 = 0 + 2 + 6, \text{ de modo que tenemos } 3x - 0 = 0 + 6,$$

$$\text{Entonces } 3x = 6$$

Si dividimos ambos miembros entre 3, tenemos  $\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$  de ahí que  $x = 2$

**Observe que:** sumamos 4 para que con -4 que está en el 1er miembro obtener cero,  $-4 + 4 = 0$ ,

Restamos  $2x$  para que sumado con el  $2x$  que está en el 2do miembro obtener cero,

$$2x - 2x = 0$$

**Otra forma de realizar este ejemplo y de mejor comprensión para el alumno es:**

Hallar el conjunto solución de:  $5x - 4 = 2x + 2$

$$5x - 4 + 4 = 2x + 2 + 4 \quad \text{Sumamos 4 en ambos lados}$$

$$5x = 2x + 6$$

$$5x - 2x = 2x + 6 - 2x \quad \text{restamos } 2x \text{ en ambos lados}$$

$$3x = 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

Dividimos ambos lados entre 3

$$CS = \{2\}$$

**PRUEBA DE LA SOLUCION:** sustituimos la variable  $x$  por 2

$5(2) - 4 = 2(2) + 2$ , entonces  $10 - 4 = 4 + 2$  de modo que  $6 = 6$ , esto prueba que  $x = 2$  es una solución de la ecuación  $5x - 4 = 2x + 2$ .

**Ejemplo 2:**

Hallar la solución de la ecuación  $2x(3x-4) = 6x^2 - 7x - 1$

**Realizamos la multiplicación** en el 1er miembro  $6x^2 - 8x = 6x^2 - 7x - 1$

**Observa** que: los dos miembros tienen  $6x^2$  estos se pueden eliminar o suprimir aplicando la propiedad cancelativa,

$$-8x = -7x - 1, \text{ sumando } 7x \text{ en ambos miembros tenemos}$$

$$-8x + 7x = -7x - 1 + 7x,$$

$$-x = -1 \quad \text{multiplicamos ambos lados por } -1 \text{ obtenemos que } x = 1,$$

**Prueba:**

$$(-1)(-x) = (-1)(-1) \quad \text{y obtenemos que} \quad x = 1 \quad \text{CS} = \{1\}$$

**EJEMPLO 3: RESUELVA LA ECUACION**

$$(x - 5)^2 + 2 = (x - 2)^2 + 5 \quad \text{Desarrollando el cuadrado en ambos miembros tenemos}$$

$$x^2 - 10x + 25 + 2 = x^2 - 4x + 4 + 5 \quad \text{restar } x^2 \text{ en ambos lados (propiedad cancelativa)}$$

$$-10x + 27 = -4x + 9$$

$$-10x + 27 - 27 = -4x + 9 - 27$$

$$-10x = -4x - 18$$

$$-10x + 4x = -4x - 18 + 4x$$

$$-6x = -18$$

$$\frac{-6x}{-6} = \frac{-18}{-6}$$

$$x = 3 \quad \text{CS} = \{3\}$$

**EJEMPLO 4:**  $\frac{3x}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1x}{2} + \frac{1}{2}$  como el M.C.M. de los denominadores es 2, vamos a multiplicar ambos lados por 2

$$2\left(\frac{3x}{2} - \frac{5}{2}\right) = 2\left(\frac{1x}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$3x - 5 = x + 1$$

$$3x - 5 + 5 = x + 1 + 5$$

$$3x = x + 6$$

$$3x - x = x + 6 - x$$

$$2x = 6$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

$$x = 3 \quad \text{CS} = \{3\}$$

**EJEMPLO 5:**  $\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = \frac{1x}{3} + \frac{6}{5}$  el M.C.M. de los denominadores es  $3(5) = 15$

$$15\left(\frac{3x}{5} - \frac{2}{3}\right) = 15\left(\frac{1x}{3} + \frac{6}{5}\right)$$

$$9x - 10 = 5x + 18$$

$$9x - 5x = 18 + 10 \quad \text{restamos } 5x \text{ en ambos lados, sumamos } 10 \text{ en ambos lados}$$

$$4x = 28$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{28}{4}$$

$$x = 7 \quad \text{CS} = \{7\}$$

### ECUACIONES CON DECIMALES:

$$0.3x - 0.2 = 0.04x + 0.5$$

Observas que: si hay decimas, centésimas, milésimas se debe multiplicar por 10 si todos los decimales son décimas,

Multiplicamos por 100 si aparecen centésimas y no hay milésimas ni diez milésimas,

Multiplicamos por mil si hay por lo menos una milésima.

#### EJEMPLO 1:

#### ENCUENTRE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN $0.3x - 0.2 = 0.04x + 0.5$

Para solucionar  $0.3x - 0.2 = 0.04x + 0.5$  debemos multiplicar por 100 en ambos miembros porque aparece 0.04

$$(0.3x - 0.2)100 = (0.04x + 0.5)100 \quad \text{y tenemos } 30x - 20 = 4x + 50 \text{ que es una}$$

Ecuación con valores enteros y que ya podemos solucionar de manera normal

$$30x - 20 + 20 - 4x = 4x + 50 + 20 - 4x$$

$$26x = 70 \quad \text{entonces} \quad \frac{26x}{26} = \frac{70}{26}, \quad \text{por lo que} \quad x = \frac{70}{26} \quad \text{simplificando} \quad x = \frac{35}{13}$$

#### EJEMPLO 2: ENCUENTRE LA SOLUCIÓN DE: $0.2x + 1.2 = 0.7$

Multiplicamos por 10 en ambos lados  $10(0.2x + 1.2) = 10(0.7)$

$$2x + 12 = 7$$

$$2x + 12 - 12 = 7 - 12$$

$$\frac{2}{2}x = \frac{-5}{2}, \quad x = \frac{-5}{2} \quad \text{CS} = \left\{\frac{-5}{2}\right\}$$

**ECUACIONES FRACCIONARIAS:** se debe multiplicar ambos miembros por el M.C.M. de los denominadores y cuando se finalice se debe buscar el conjunto solución dentro del dominio de la variable.

**Ejemplos 1: Resolver la ecuación**  $\frac{1}{y-2} = \frac{2y+1}{y^2-4}$

**Factorizamos cada denominador**

$$y - 2 = y - 2$$

$y^2 - 4 = (y+2)(y-2)$  el M.C.M. de los denominadores es:  $(y+2)(y-2)$

re - escribimos la ecuación

$$\frac{1}{y-2} = \frac{2y+1}{(y+2)(y-2)} \quad \text{en la solución } y \neq \pm 2$$

multiplicamos cada lado por el M.C.M. de los denominadores  $(y+2)(y-2)$

$$(y+2)(y-2) \frac{1}{y-2} = (y+2)(y-2) \frac{2y+1}{(y+2)(y-2)}$$
$$y+2 = 2y+1$$

$$y - 2y = 1 - 2$$

$$-y = -2 \quad \text{multiplicando por } -1 \quad y = 2. \quad \text{CS} = \{2\}$$

**Ejemplos 2: Resolver la ecuación**  $\frac{3x}{x-2} - 1 = \frac{6}{x-2}$

Multiplicamos ambos miembros por el M.C.M. de los denominadores que es  $x - 2$ ,

Observas que: 2 no está dentro del dominio de la variable  $x$ , por tal motivo no puede ser solución de la ecuación porque hace el denominador cero.

Entonces multiplicando por el m.c.m.  $x - 2$

$$\left(\frac{3x}{x-2} - 1\right)(x-2) = \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2) \quad \text{y obtenemos}$$
$$\left(\frac{3x}{x-2}\right)(x-2) - 1(x-2) = \left(\frac{6}{x-2}\right)(x-2)$$

Entonces  $3x - x + 2 = 6$ ,  $2x + 2 = 6$  de ahí que restamos 2 en ambos miembros y  $2x + 2 - 2 = 6 - 2$ ,  $2x = 4$  dividiendo entre 2 nos queda que:

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \quad \text{por lo que } x = 2.$$

**Como 2 nos esta dentro del dominio de la variable en el conjunto solución se excluye este valor** y se expresa  $\text{CS} = \{ \}$ .

Si en el ejercicio anterior obteníamos cualquier valor diferente de 2 (que no estaba en el dominio), entonces tomamos dicho valor para **el conjunto solución**.

**Ejercicios 1.1:**

**REALICE LAS SIGUIENTES ECUACIONES Y COMPRUEBE CADA RESULTADO**

1.  $2x - 3 = 5x + 4$

2.  $3y(2y - 7) = (6y - 2)(y - 6)$



$$3. 4(2m - 3) = 7m - 12$$

$$4. (2x - 4)(5x + 3) = 10x^2 - 12x - 2$$

$$5. 3m^2 - 5m + 8 = (m - 1)(3m + 2)$$

$$6. 3x - (2x + 4) + 2x(5x - 1) = 10x^2 + 4x - 2$$

$$7. 6m - (5m + 1) + 2m(4m - 1) = 8m^2 + 2m - 7$$

$$8. 0.1a + 0.7 = 0.3a + 0.5$$

$$9. \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}x + 5$$

$$10. \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}x - 3$$

$$11. \frac{1}{3}(x - 2) + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3} + (2x)$$

$$12. (x + 3)^2 + 11 = x^2 + 6x + 20$$

$$13. 0.03b - 0.25 = 0.9b + 0.35$$

$$14. x - 2 = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

$$15. \frac{2x}{3} + \frac{24}{x} - 5 = 6x^2 - 5x - 8$$

$$16. \frac{5x}{3} - \frac{12}{x} = \frac{2 + 5x + 15x^2}{3}$$

$$17. \frac{2x}{x-2} + \frac{2x}{x^2-4} = 2x^2 + 3x - 1$$

$$18. \frac{5}{x-3} + \frac{2x}{x^2-9} = \frac{3}{x+3}$$

$$19. \frac{5}{x-4} + \frac{3}{x+4} = \frac{2x}{x^2-16}$$

$$20. \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+5} = \frac{2x}{x^2+3x-10}$$

$$21. \text{Considere lo siguiente } x = -4$$

$$4x = -16$$

$$x^2 + 4x = x^2 - 16$$

$$x(x + 4) = (x + 4)(x - 4)$$

$$x = x - 4$$

$$0 = -4$$

¿Por qué se obtiene el enunciado falso a partir de la ecuación  $x = -4$ ?

## 22. Considere esta secuencia de ecuaciones

$$x^2 - 1 = x^2 - 2x - 3$$

$$(x+1)(x-1) = (x-3)(x+1)$$

$$x - 1 = x - 3$$

$$-1 = -3 \quad \text{es falso}$$

¿cuál es la solución de la primera ecuación de la secuencia?

### 1.6 ECUACIONES MISCELÁNEAS U OTRO TIPOS DE ECUACIONES

Hay una gran variedad de ecuaciones que vamos a explorar y a realizar en este acápite

Por ejemplo:

#### ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las ecuaciones siguientes a)  $|x| = 5$ , b)  $|3x - 2| = 18$ , c)  $|5x + 5| - 2 = 43$ ,  
d)  $3| -2y + 9| - 7 = 65$  son ecuaciones que poseen valor absoluto

La solución de una ecuación con valor absoluto se fundamenta en la siguiente propiedad

**Si  $|x| = a$ , entonces  $x = a$  ó  $x = -a$  para todo  $a \geq 0$ .**

#### EJEMPLOS

#### REALICE LAS ECUACIONES SIGUIENTES Y ECIENTRE SU CONJUNTO SOLUCIÓN

1.  $|x - 5| = 9$ , entonces  $x - 5 = 9$  ó  $x - 5 = -9$

Resolviendo cada una de estas dos ecuaciones a)  $x - 5 = 9$ ,  $x - 5 + 5 = 9 + 5$   
 $x = 14$ ,

b)  $x - 5 = -9$ ,  $x - 5 + 5 = -9 + 5$ ,  $x = -4$  c.s. =  $\{14, -4\}$

2.  $|5 - 2x| = 7$ , entonces  $5 - 2x = 7$  ó  $5 - 2x = -7$ .

Resolviendo estas dos ecuaciones tenemos que:

a)  $5 - 2x = 7$

$$5 - 2x - 5 = 7 - 5, \quad -2x = 2 \quad x = \frac{2}{-2} \quad x = -1$$

b)  $5 - 2x = -7 \quad 5 - 2x - 5 = -7 - 5, \quad -2x = -12, \quad x = \frac{-12}{-2}$

$$x = 6 \quad CS = \{-1, 6\}$$

c)  $|5x - 10| = -70$  no tiene solución puesto que el valor absoluto nunca es negativo, Recuerde la propiedad para  $a \geq 0$

d)  $2|3x - 4| + 5 = 9$  debemos dejar el valor absoluto solo en el miembro de la

izquierda de modo que:  $2|3x - 4| + 5 - 5 = 9 - 5,$

$$2|3x - 4| = 4, \quad \text{dividiendo entre 2} \quad \frac{2|3x - 4|}{2} = \frac{4}{2}$$

$|3x - 4| = 2$  procedemos a plantear la ecuación de acuerdo a la propiedad anterior

$3x - 4 = 2$  ó  $3x - 4 = -2$  Si resolvemos estas ecuaciones obtenemos que:  $x = 2$  ó  $x = \frac{2}{3}$   $CS = \{2, \frac{2}{3}\}$

## EJERCICIOS 1.6 a :

### ENCUENTRA EL CONJUNTO SOLUCION DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES

1.  $|2x - 13| = 25$
2.  $|6 - 4x| = 6$
3.  $|5x - 4| + 2 = 36$
4.  $|-2x + 8| - 5 = 31$
5.  $2|3x - 1| + 7 = 37$
6.  $-2|x - 4| + 2 = 56$
7.  $3|-2x - 10| = 0$
9.  $|2x - 3| + 12 = 12$
8.  $|3x - 1| + 7 = 5$
10.  $-5|3x - 1| + 5 = -45$

## 1.3 ECUACIONES CUADRATICAS

Toda ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  donde  $a \neq 0$  es llamada ecuación cuadrática de variable x. (la ecuación cuadrática es una ecuación polinómica), también se le llama ecuación de segundo grado

Ejemplos

$$1. \quad 5x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$2. \quad x^2 + 5 = 7x$$

$$3. \quad 6x^2 = -4 + 9x$$

### TEOREMA DEL FACTOR CERO

Si  $p$  y  $q$  son dos expresiones algebraicas, entonces

$$p \cdot q = 0 \quad \text{si y solo si} \quad p = 0 \quad \text{o} \quad q = 0$$

### Una ecuación cuadrática se puede resolver por varios métodos

$$a) \text{ Solución por factorización: } \left\{ \begin{array}{l} \text{trinomio de la forma } ax^2 + bx + c \\ \text{trinomio de la forma } x^2 + bx + c \\ \text{trinomio de cuadrados perfectos} \\ \text{diferencia de cuadrados} \\ \text{factor común} \end{array} \right.$$

### Ejemplos

#### 1. Resolver por factorización la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Factorizamos aplicando el trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 3) = 0 \quad \text{apliquemos el teorema del factor cero}$$

$$(2x - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad (x + 3) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad x_2 = -3 \quad \text{Cs} = \left\{ \frac{1}{2}, -3 \right\}.$$

#### 2. Resolver por factorización la ecuación: $x^2 - 3x - 10 = 0$

Factorizamos el trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$  tenemos

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0 \quad \text{aplicamos el teorema del factor cero}$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2 = 0$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2 \quad \text{Cs} = \{-2, 5\}$$

#### 3. Resolver por factorización: la ecuación $5x^2 - 10x = 0$

$$\text{Extrayendo el factor común } 5x \quad \text{tenemos} \quad 5x(x - 2) = 0$$

$$\text{Usamos el teorema del factor cero} \quad 5x = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{ó} \quad x_2 = 2 \quad \text{Cs} = \{0, 2\}$$

#### 4. Resolver por factorización $x^2 - 4 = 0$

Factorizamos la diferencia de cuadrados  $(x + 2)(x - 2) = 0$

Usamos el teorema del factor cero  $x + 2 = 0$  ó  $x - 2 = 0$   
 $x_1 = -2$  ó  $x_2 = 2$

$$Cs = \{-2, 2\}$$

5. Resolver por factorización usando números reales;  $x^2 + 5x + 2 = 0$

Solución: Como  $x^2 + 5x + 2$  no es factorizable en los reales, eso no significa que la ecuación no tenga solución si no que se debe usar otro método que explicaremos mas adelante..

### **EJERCICIOS 1.3 a**

**Realiza las siguientes ecuaciones por factorización**

1.  $x^2 - 16 = 0$

2.  $2x^2 - 6x = 0$

3.  $x^2 - 4x - 21 = 0$

4.  $x^2 + 2x + 1 = 0$

5.  $x^2 - 7x + 10 = 0$

6.  $3x^2 + 13x + 4 = 0$

7.  $5x^2 - 14x - 3 = 0$

8.  $2x^2 - 7x + 3 = 0$

9.  $4x^2 - x - 5 = 0$

10.  $6x^2 + 5x - 4 = 0$

11.  $3x^2 = 10 - x$

12.  $x^2 + 16 = 8x$

### **b) METODO DE LA RAÍZ CUADRADA O ECUACION CUADRATICA ESPECIAL**

SI  $x^2 = d$  entonces  $x = \pm \sqrt{d}$

#### **Ejemplos**

**RESUELVE LAS SIGUIENTES ECUACIONES USANDO EL METODO DE LA RAIZ CUADRADA**

1.  $x^2 = 3$  entonces  $x = \pm \sqrt{3}$  es decir que:  $x_1 = \sqrt{3}$  ó  $x_2 = -\sqrt{3}$

2.  $(x - 2)^2 = 9$  entonces  $x - 2 = \pm \sqrt{9}$  por lo que  $x - 2 = \pm 3$

De ahí que  $x = 2 \pm 3$   $x_1 = 2 + 3$  ó  $x_2 = 2 - 3$

$x_1 = 5$  ó  $x_2 = -1$   $Cs = \{-1, 5\}$

### EJERCICIOS 1.3 b

REALIZA LAS ECUACIONES USANDO LA FÓRMULA ESPECIAL

1.  $x^2 = 4$

2.  $x^2 = 1$

3.  $x^2 - 16 = 0$

4.  $x^2 - 5 = 4$

5.  $(x + 1)^2 = 4$

6.  $(x - 3)^2 = 49$

7.  $(x + 5)^2 = 64$

8.  $(x + 4)^2 = 2$

9.  $(x + 7)^2 = 25$

10.  $(x - 9)^2 = 4$

#### a) SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA COMPLETANDO EL CUADRADO

**Dado  $x^2 + kx$  para formar un trinomio de modo que sea de cuadrados perfectos, el tercer termino debe ser  $(k/2)^2$  y así obtenemos**

a)  $x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$

**Dado  $x^2 - kx$  para formar un trinomio de modo que sea de cuadrados perfectos, el tercer termino debe ser  $(k/2)^2$  y así obtenemos**

b)  $x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$

**Observa:** Que el tercer término del trinomio es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término del trinomio.

Si tenemos un trinomio de cuadrados perfectos

c)  $x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$

$$d) \ x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$$

**Observe que:** el coeficiente del segundo término del trinomio es igual al doble de la raíz cuadrada del tercer término del trinomio.

### EJEMPLOS:

#### ENCUENTRA EL VALOR DE d QUE COMPLETA EL CUADRADO

$$1. \ x^2 + 6x + d \quad \text{sabemos que} \quad d = (6/2)^2 \quad \text{por lo que} \quad d = 9$$

$$2. \ x^2 + 5x + d \quad \text{sabemos que} \quad d = (5/2)^2 \quad \text{por lo que} \quad d = 25/4$$

$$3. \ x^2 + dx + 16 \quad \text{sabemos que} \quad d = 2\sqrt{16} \quad \text{por lo que} \quad d = 2(4) \quad d = 8$$

### EJEMPLO:

1. Resuelve la ecuación  $x^2 + 6x - 40 = 0$  completando el cuadrado

$$x^2 + 6x - 40 + 40 = 0 + 40$$

$$x^2 + 6x + \underline{\hspace{2cm}} = 40$$

completamos el cuadrado del miembro de la izquierda

$$x^2 + 6x + \underline{\hspace{2cm}} = 40 \quad \text{el termino que falta es} \quad \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

Sumemos **9** en ambos lados

$$\text{Tenemos } x^2 + 6x + 9 = 40 + 9$$

factorizamos el trinomio de cuadrados perfectos  $(x + 3)^2 = 49$

si aplicamos la formula especial o método de la raíz cuadrada

$$x + 3 = \pm\sqrt{49} \quad x + 3 = \pm 7 \quad x = 3 \pm 7$$

$$x_1 = 3 + 7 \quad x_2 = 3 - 7$$

$$x_1 = 10 \quad x_2 = -4 \quad \text{Cs} = \{-4, 10\}$$

#### 2. RESUELVE LA ECUACIÓN $x^2 - 3x - 2 = 0$ COMPLETANDO EL CUADRADO

Sumando 2 en ambos miembros tenemos  $x^2 - 3x - 2 + 2 = 0 + 2$

$x^2 - 3x + \underline{\hspace{2cm}} = +2$  completando el cuadrado en el miembro de la izquierda

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 3x + 9/4 = 2 + 9/4$$

$$\text{Factorizando } (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{8+9}{4} \quad (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{por lo que } x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \quad x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

$$Cs = \{ \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2} \}$$

### 3. RESUELVE $ax^2 + bx + c = 0$ CON $a \neq 0$ POR EL MÉTODO DE COMPLETAR EL CUADRADO

$$\text{Dividimos ambos miembros entre } a \quad \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{restamos } \frac{c}{a} \quad \text{en ambos miembros}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a} \quad \text{completando el cuadrado en el miembro de la izquierda tenemos}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$\text{factorizamos } (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{esta es la llamada } \underline{\text{fórmula cuadrática o fórmula general.}}$$

#### EJERCICIOS 1.3 c

#### HALLAR EL VALOR DE d QUE COMPLETA EL CUADRADO

$$1. \quad x^2 - 8x + d$$

$$2. \quad x^2 - 12x + d$$

$$3. \quad x^2 + 6x + d$$



4.  $x^2 + 3x + d$
5.  $x^2 + 2x + d$
6.  $x^2 - d x + 9d$
7.  $x^2 + d x + 81$
8.  $x^2 - d x + 121$
9.  $x^2 - d x + 4$
10.  $x^2 + d x + 1$

### RESUELVA LAS ECUACIONES COMPLETANDO EL CUADRADO

1.  $x^2 - 8x + 9 = 0$
2.  $x^2 - 4x - 21 = 0$
3.  $y^2 + 16y - 36 = 0$
4.  $w^2 + 2w - 5 = 0$
5.  $a^2 + 6a + 6 = 40$
6.  $x^2 - 5x = -4$
7.  $y^2 - 10y - 24 = 0$
8.  $m^2 - 3m - 2 = 0$
9.  $x^2 + 5x - 3 = 0$
10.  $2 + x - 6x^2 = 0$
11.  $2m^2 - 4m + 10 = 0$
12.  $3x^2 - 2x - 3 = 0$

### b) SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS USANDO LA FÓRMULA CUADRÁTICA O FORMULA GENERAL

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  observas el radicando  $b^2 - 4ac$  se llama discriminante

| Valor del discriminante | Naturaleza de las raíces             |
|-------------------------|--------------------------------------|
| Si $b^2 - 4ac > 0$      | Las raíces son reales y diferentes   |
| Si $b^2 - 4ac = 0$      | Las raíces son reales e iguales, una |

|                    |   |
|--------------------|---|
|                    | solución real con multiplicidad 2                                       |
| Si $b^2 - 4ac < 0$ | Las raíces no son reales y ambas son distintas (complejas y conjugadas) |

### EJEMPLOS

#### RESOLVER LA ECUACIÓN $4x^2 + x - 3 = 0$ USANDO LA FÓRMULA CUADRÁTICA

$$a = 4 \quad b = 1 \quad c = -3$$

Buscamos el valor del discriminante para saber la naturaleza de las raíces

$$b^2 - 4ac$$

$$(1)^2 - 4(4)(-3)$$

$$1 + 48$$

49 como  $49 > 0$  las raíces son reales y diferentes

Usando la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 7}{8}$$

ó

$$x_2 = \frac{-1 - 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{6}{8}$$

ó

$$x_2 = \frac{-8}{8}$$

$$x_1 = \frac{3}{4}$$

ó

$$x_2 = -1$$

Este ejercicio se podía resolver así:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

y se obtienen las mismas soluciones

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad \text{ó} \quad x_2 = -1$$

**ejemplo 2: encuentre el conjunto solución de la ecuación  $4x^2 - 4x = -1$**

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$a = 4, \quad b = -4, \quad c = 1$$

el discriminante es  $b^2 - 4ac$

$$(-4)^2 - 4(4)(1)$$

$16 - 16 = 0$  como el discriminante es igual a cero las soluciones son reales e iguales

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2(4)}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{8}, \quad x = \frac{4}{8} \quad x = \frac{1}{2} \text{ esta raíz tiene multiplicidad 2}$$

$$Cs = \{ \frac{1}{2} \}$$

### **EJERCICIOS 1.3 d**

#### **RESUELVA LAS SIGUIENTES ECUACIONES USANDO LA FÓRMULA CUADRÁTICA O FÓRMULA GENERAL**

1.  $x^2 + 4x - 96 = 0$

2.  $2m^2 - 3m + 1 = 0$

3.  $x^2 + 4x - 21 = 0$

4.  $y^2 + 7y - 60 = 0$

5.  $w^2 + 49 = 14w$

6.  $3s^2 = -s - 1$

7.  $5x^2 + 4 = 9x$

8.  $4x^2 + 11x + 45 = 0$

9.  $4x^2 + x - 3 = 0$

10.  $9x^2 - 30x + 25 = 0$

11.  $x^2 + 5x + 6 = 0$

12.  $4s^2 - 3s - 80 = 5$

13.  $3x(2 - x) + 9 = 0$

14.  $5x(1 - x) = -2$

15.  $\frac{36}{x^2-9} = \frac{2x}{x-3} + \frac{5}{x+3}$

16.  $\frac{1}{x} + \frac{6}{x+4} = 1$

17.  $\frac{7}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = 5$

$$18. \frac{5}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{9}{x+3} = 0$$

$$19. \frac{-5}{x+1} + \frac{4x+1}{x^2+1} = 0$$

$$\frac{2}{x+5} + \frac{3x-5}{x^2+5} = 0$$

## ECUACIONES CON RADICALES

Son ecuaciones que contienen variables en el radicando del radical

### EJEMPLOS:

$$a) \sqrt{x+3} = 2,$$

$$b) \sqrt{6x-2} = 8,$$

$$c) \sqrt{x+3} = 2x-5,$$

$$d) \sqrt[3]{x+4} - 1 = 0$$

$$e) \sqrt{2x^2-4x+1} = \sqrt{4x-7},$$

## SUGERENCIAS PARA RESOLVER ESTAS ECUACIONES CON RADICALES

1. Reescriba la ecuación de modo que aísle el radical en uno de los miembros de la igualdad (Si contiene más de un radical distribuirlo en cada lado de la igualdad)
2. Eleve cada miembro de la igualdad a una potencia igual al índice del radical
3. Si aún le quedan radicales con variables en el radicando repita los pasos 1 y 2.
4. Resuelva la ecuación resultante
5. Verifique todas las soluciones encontradas para escoger el conjunto solución, de manera que rechace las soluciones extrañas.

Ejemplos

### HALLAR EL CONJUNTO SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES

$$1. \sqrt{x-3} - 2 = 0 \quad \text{aislamos el radical} \quad \sqrt{x-3} - 2 + 2 = 0 + 2$$

$$\sqrt{x-3} = 2 \quad \text{elevando cada lado al cuadrado porque el índice es 2}$$

$(\sqrt{x-3})^2 = (2)^2$ , entonces  $x-3 = 4$  resolviendo esta ecuación  $x-3+3 = 4+3$ ,  $x = 7$ .

Verificando

$$\sqrt{7-3} - 2 = 0 \quad \sqrt{4} - 2 = 0 \quad 2-2 = 0 \quad \underline{V} \quad CS = \{7\}$$

2.  $\sqrt[3]{2y-4} + 7 = 9$  aislando el radical tenemos  $\sqrt[3]{2y-4} = 9 - 7$

$$\sqrt[3]{2y-4} = 2 \quad \text{Elevando al cubo} \quad (\sqrt[3]{2y-4})^3 = (2)^3$$

$$2y - 4 = 8 \quad 2y = 8 + 4, \quad 2y = 12 \quad y = \frac{12}{2} = 6 \quad CS = \{6\}$$

Si el índice es impar no vas a encontrar valores extraños en la solución.

3.  $\sqrt{2x-5} + x - 2 = 2$  aísle el radical \_\_\_\_\_

$$\sqrt{2x-5} = 2 + 2 - x$$

$$\sqrt{2x-5} = 4 - x \quad \text{eleve ambos miembros al índice} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{De modo que } (\sqrt{2x-5})^2 = (4-x)^2 \quad 2x-5 = 16-8x+x^2$$

Organizando la ecuación cuadrática  $0 = x^2 - 8x + 16 - 2x + 5$

$0 = x^2 - 10x + 21$  resolviendo por factorización

$0 = (x-7)(x-3)$  aplicando el teorema del factor cero

$0 = x-7$  ó  $0 = x-3$  de donde  $x = 7$  ó  $x = 3$

**Comprobación para  $x = 7$**

$$\sqrt{2(7)-5} + 7 - 2 = 2$$

$$\sqrt{9} + 7 - 2 = 2 \quad 3 + 7 - 2 = 2 \quad \underline{F} \quad x = 7 \quad \underline{\text{no es solución}}$$

**Comprobación para  $x = 3$**

$$\sqrt{2(3)-5} + 3 - 2 = 2, \quad \sqrt{6-5} + 3 - 2 = 2, \quad 1 + 3 - 2 = 2 \quad \underline{V} \quad CS = \{3\}$$

**EJERCICIOS 1.6 b:**

**ENCUENTRE EL CONJUNTO SOLUCIÓN DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES**

1.  $\sqrt{x-3} = 2$

2.  $x-5 = \sqrt{1+4x}$

3.  $2\sqrt{x+4} - x = 1$

4.  $x-6 + \sqrt{x+6} = 0$

5.  $\sqrt{x-2} - x + 4 = 0$
6.  $\sqrt{6y^2+3} = -2y + 5$
7.  $\sqrt[3]{7m-1} - 15 = -12$
8.  $\sqrt{x+3} - 4 - \sqrt{5x-1} = 0$
9.  $3\sqrt{x+7} - x = 7$
10.  $\sqrt{x-3} - 2x = -7$
11.  $\sqrt{4x^2+4} - 2\sqrt{x^2+2x-1} = 0$
12.  $\sqrt{x+3} - 3 = \sqrt{2x-1}$
13.  $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-16} = 4$
14.  $\sqrt[3]{x^2+2x} = 2\sqrt[3]{x-12}$
15.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{5+2x} = 5$

### ECUACIONES DE GRADO MAYOR O IGUAL A 3 QUE SE PUEDEN RESOLVER POR AGRUPACION DE TÉRMINOS

#### EJEMPLO:

**RESOLVER LA ECUACION**  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  **agrupando**

$(x^3 - 2x^2) - (x - 2) = 0$  factorizando

$x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$

$(x - 2)(x^2 - 1) = 0$

$(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$  aplicado el teorema del factor cero

$X - 2 = 0$       ó       $x + 1 = 0$       ó       $x - 1 = 0$

$X_1 = 2,$       ó       $x_2 = -1$       ó       $x_3 = 1$

#### EJERCICIOS 1.6      c:

**REALICE LAS SIGUIENTES ECUACIONES**

1.  $X^3 - 4x = 0$
2.  $2X^3 - 18x^2 =$
3.  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
4.  $2x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$
5.  $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$
6.  $-x^3 - 2x^2 + 2x = 0$

$$7. x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$8. x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$9. x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$10. 10x^3 - 6x^2 = 15x - 4x^4$$

### ECUACIONES DEL TIPO CUADRÁTICO

Algunas ecuaciones no son realmente cuadráticas, pero pueden expresarse de la forma  $au^2 + bu + c = 0$ , donde  $a \neq 0$ . Y  $u$  es una expresión en que contiene la variable de la ecuación original dada, estas ecuaciones son llamadas ecuaciones del tipo cuadrático.

**La solución de una ecuación del tipo cuadrático es muy parecida a la solución de la ecuación cuadrática o de segundo grado.**

### EJEMPLOS:

#### HALLAR LA SOLUCIÓN DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES

1.  $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$  recuerda que  $x^4 = (x^2)^2$  de modo que: podemos expresar la ecuación  $(x^2)^2 - 4(x^2) + 3 = 0$  de modo que si hacemos  $u = x^2$  sustituyendo

Tenemos  $u^2 - 4u + 3 = 0$  que es una ecuación cuadrática, factorizamos y  $(u - 3)(u - 1) = 0$ , entonces  $u - 3 = 0$  ó  $u - 1 = 0$   
 $u = 3$  ó  $u = 1$  como  $u = x^2$   
 Sustituimos  $x^2 = 3$ ,  $x^2 = 1$ , entonces  
 $x = \pm\sqrt{3}$ ,  $x = \pm\sqrt{1}$  CS =  $\{\pm\sqrt{3}, \pm 1\}$

2.  $x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$  como  $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$  expresamos la ecuación

$(x^{1/3})^2 + (x^{1/3}) - 6 = 0$  si hacemos  $u = x^{1/3}$ , entonces  
 $u^2 + u - 6 = 0$  (ecuación cuadrática)

$(u + 3)(u - 2) = 0$ ,  $u + 3 = 0$  ó  $u - 2 = 0$  así que  $u = -3$  ó  $u = 2$

Como  $u = x^{1/3}$ , entonces  $x^{1/3} = -3$  ó  $x^{1/3} = 2$

Elevamos ambos miembros al cubo  $(x^{1/3})^3 = (-3)^3$  ó  $(x^{1/3})^3 = (2)^3$   
 $x = -27$  ó  $x = 8$

### EJERCICIOS 1.6 d

#### RESUELVA CADA ECUACIÓN

1.  $2X^4 - 3x^2 - 2 = 0$

2.  $X^{-4} - 4x^{-2} - 6 = 0$

3.  $3X^6 - 6x^3 - 7 = 0$

4.  $2X^4 - 5x^2 + 2 = 0$

$$5. \quad x^{2/3} - 4x^{1/3} + 3 = 0$$

$$6. \quad x - 3x^{1/2} - 10 = 0$$

$$7. \quad 3x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

## 1.2 FORMULAS Y APLICACIONES

Algunas aplicaciones en ciencias requieren el uso de fórmulas que incluyan varias variables y muchas veces es necesario obtener una fórmula más conveniente a partir de otra despejando la variable deseada en función de las variables restantes, encontrando ecuaciones equivalentes.

### DESPEJE DE FORMULAS:

#### Ejemplo 1.

Si tenemos la fórmula de la distancia en el movimiento rectilíneo y uniforme  $d = vt$  **despejar v**

Como la variable  $v$  y la variable  $t$  están multiplicando, debemos dividir ambos miembros entre  $t$ ,

$$\frac{d}{t} = \frac{vt}{t} \quad \text{de donde} \quad \frac{d}{t} = v \quad \text{es decir que} \quad v = \frac{d}{t}$$

#### Ejemplo 2

#### FÓRMULA DEL MONTO EN EL INTERES SIMPLE

$M = C + Crt$  **despejar C,**

Observe que:  $C$  aparece más de una vez en un mismo miembro de la ecuación,

por tanto debemos factorizar antes de despejar,

extrayendo el factor común en el segundo miembro  $M = C(1 + rt)$

dividimos ambos miembros entre el factor  $(1 + rt)$

$$\frac{M}{(1+rt)} = \frac{C(1+rt)}{(1+rt)} \quad \text{simplificamos y obtenemos} \quad \frac{M}{1+rt} = C$$



o lo que es lo mismo

$$C = \frac{M}{1+r}$$

## FÓRMULA DE LA RESISTENCIA TOTAL (RESISTENCIAS EN PARALELO)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{DESPEJAR } R_1,$$

Como la formula tiene el modelo de una ecuación fraccionaria, usamos el mismo procedimiento que usamos para resolver dicho tipo de ecuaciones

c) Buscar el M.C.M. de los denominadores  $R R_1 R_2$

d) Multiplicamos cada miembro por el M.C.M. hallado

$$R R_1 R_2 \frac{1}{R} = R R_1 R_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{R} R R_1 R_2 = \frac{1}{R_1} R R_1 R_2 + \frac{1}{R_2} R R_1 R_2 \quad \text{Simplificando tenemos}$$

$$R_1 R_2 = R R_2 + R R_1$$

Observas que  $R_1$  está en ambos miembros, debes agruparlo en un solo miembro y luego factorizamos

Si restamos  $R R_1$  en ambos lados y tenemos

$$R_1 R_2 - R R_1 = R R_2 + R R_1 - R R_1 \quad \text{cancelamos}$$

$$R_1 R_2 - R R_1 = R R_2 \quad \text{extraemos el factor común en el miembro de la izquierda } R_1$$

$$R_1 (R_2 - R) = R R_2 \quad \text{dividiendo ambos lados entre } (R_2 - R)$$

$$R_1 = \frac{R R_2}{R_2 - R}$$

## EJERCICIOS 1.2

EN CADA UNA DE LAS FORMULAS DADAS DESPEJA LA VARIABLE QUE SE TE INDICA

1.  $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32)$  Grados Celsius Despejar  $^{\circ}\text{F}$

2.  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  Resistencia en paralelo Despejar  $R_2$ ,

3.  $C = 2\pi r$  Longitud de una circunferencia Despejar  $r$

4.  $I = C r t$  Interés simple Despejar  $t$ , despejar  $r$

5.  $A = \frac{(B+b)h}{2}$  Área de un trapecio Despejar B, Despejar h
  6.  $P = 2l + 2h$  Perímetro de un rectángulo Despejar l, despejar h
  7.  $A = \frac{bh}{2}$  Area de un triangulo Despejar b, despejar h.
  8.  $R = \frac{V}{I}$  Ley de ohm en electricidad Despejar I, despejar V
  9.  $H = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$  Altura en caída libre Despejar  $v_0$ ,
  10.  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$  Volumen de una esfera Despejar r
  11.  $v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  Volumen de un cono Despejar r, despejar h
  12.  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  Lentes en óptica Despejar p, despejar q
- 20.

#### Despeje la variable especificada

- 1)  $E = \frac{1}{2} M V^2$  (Energia cinetica) Despeje V
- 2)  $V = \pi r^2 h$  (Volumen de un cilindro) Despeje r
- 3)  $A = \pi r^2$  (Area del circulo) Despeje r
- 4)  $F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$  (Ley de la gravitación universal) Despeje d
- 5)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (Ecuacion de una elipse) Despeje y, Despeje x

#### 1.4 PROBLEMAS DE PALABRAS

##### ESCRIBE EN LENGUAJE MATEMATICO ESTOS ENUNCIADOS

1. El doble de un número n \_\_\_\_\_
2. El cubo de un número x \_\_\_\_\_
3. El cuadrado de la suma de x con y \_\_\_\_\_
4. La suma de los cuadrados de x e y \_\_\_\_\_
5. La diferencia de dos números m y n \_\_\_\_\_
6. El cuadrado de una diferencia de dos números x , y \_\_\_\_\_

7. La diferencia de los cuadrados de dos números  $m, n$  \_\_\_\_\_
8. El triplo de un número  $x$  \_\_\_\_\_
9. El cuadrado de un número  $m$  mas el cubo de ese mismo número \_\_\_\_\_
10. Un número  $x$  aumentado en 12 unidades \_\_\_\_\_
11. El doble de un número  $w$  disminuido 8 unidades \_\_\_\_\_
12. El cubo de un número  $z$  menos el doble de el mismo número \_\_\_\_\_

### PROBLEMAS DE PALABRAS O DE PLANTEO

**Sugerencias: para resolver un problema de palabra**

**Lea cuidadosamente el problema hasta comprenderlo**

1. Use siempre una variable  $x, y, m, n, p, s$  para plantear los enunciados en forma simbólica o lenguaje matemático.
2. Haga una lista de los datos conocidos y su relación con los datos desconocido
3. La palabra “es” equivale a “=” en el planteo un problema
4. plantee con los símbolos matemáticos las operaciones que el problema describe
5. Si es apropiado use un esquema, una tabla un diagrama, o una gráfica.
6. Resolver la ecuación o inecuación formulada
7. Verifique o compruebe la solución hallada.

**(un problema de edad)**

**Ejemplo 1:** La edad de una abuela es el triplo de la edad del nieto y juntos tienen 76 años, hallar la edad de cada uno.

Vamos a escribir la edad de la abuela en función de la edad del nieto porque tiene menos años que ella.

Sea  $x$  la edad del nieto

Sea  $3x$  la edad de la abuela, esto así, porque la abuela tiene el triple de la edad del nieto

Juntos tienen 76 años

Planteo  $x + 3x = 76$  y resolviendo esta ecuación obtenemos la solución del problema

$x + 3x = 76$ , sumando en el primer miembro  $4x = 76$  dividiendo entre 4

$\frac{4}{4}x = \frac{76}{4}$   $x = 19$  esta es la edad del nieto y  $3x = 3(19) = 57$  es la edad de la abuela, así  $19 + 57 = 76$ .

**(Un problema de suma y diferencia de números)**

**Ejemplo 2.** La suma de dos números es 50 y su diferencia es 26, encuentre los dos números.

Se puede plantear de dos formas: por la prueba de suma o por la prueba de diferencia

| Prueba de la diferencia  | prueba de la suma  |
|--|--|
| Sea $x$ el menor uno de los números<br>Sea $x + 26$ en mayor de los números  | sea $x$ uno el menor de los números<br>sea $50 - x$ el mayor de los números  |
| Pláteo   | Pláteo   |
| $x + (x + 26) = 50$  | $(50 - x) - x = 26$  |
| Solución $x + x + 26 = 50$<br>$2x + 26 = 50$<br>$2x + 26 - 26 = 50 - 26$<br>$2x = 24$<br>$\frac{2}{2} x = \frac{24}{2} \quad x=12$<br>$x + 26 = 12 + 26 = 38$<br>los dos números son 12 y 38 | Solución $50 - x - x = 26$<br>$50 - 2x = 26$<br>$50 - 2x - 50 = 26 - 50$<br>$- 2x = - 24$<br>$\frac{-2}{-2} x = \frac{-24}{-2} \quad x=12$<br>$50 - x = 50 - 12 = 38$<br>los dos números son 12 y 38 |

(Un problema de edad pasado el tiempo)

**Ejemplo 3:** Hace dos años José tenía cinco veces la edad de Pedro. Ahora es ocho años mayor que Pedro. Encuentre la edad actual de ambos

|              | Edad actual | Edad de hace 2 años      |
|--------------|-------------|--------------------------|
| <b>Pedro</b> | $x$         | $x - 2$                  |
| José         | $x + 8$     | $x + 8 - 2, \quad x + 6$ |

El planteo está en el enunciado donde dice:

Hace dos años José tenía cinco veces la edad de pedro

$$x + 6 = 5(x - 2), \quad x + 6 = 5x - 10, \quad x + 6 - 5x - 6 = 5x - 10 - 5x - 6,$$

$$x - 5x = -10 - 6, \quad -4x = -16, \quad x = \frac{-16}{-4}, \quad x = 4 \text{ edad actual de pedro,}$$

$$x + 8 = 4 + 8 = 12 \text{ edad actual de José.}$$

Otro planteo es:

|       | Edad actual | Edad de hace 2 años       |
|-------|-------------|---------------------------|
| José  | $x$         | $x - 2$                   |
| Pedro | $x - 8$     | $x - 8 - 2, \quad x - 10$ |

Hace dos años José tenía cinco veces la edad de pedro

$$x - 2 = 5(x - 10) \text{ resuelva la ecuación y encuentre las edades.}$$

(Problema de Estadística)

**Ejemplo 4** Un estudiante obtiene 78 puntos en un examen y 82 puntos en un segundo examen de la misma asignatura, si desea que su promedio sea 85 puntos ¿Cuánto debe obtener en el tercer examen.

Calificación del primer examen 78 puntos

Calificación del segundo examen 82 puntos

Calificación del tercer examen  $x$  puntos (no se conoce esa puntuación, usamos una variable)

### Planteo

$$\text{Promedio} = \frac{\text{nota del 1er examen} + \text{nota del 2do examen} + \text{nota del 3er examen}}{3}$$

$$85 = \frac{78 + 82 + x}{3} \quad 3(85) = 160 + x, \quad 255 = 160 + x, \quad 255 - 160 = x, \quad 95 = x$$

95 es la puntuación que debe obtener en el tercer examen.

### (Problema de trabajo)

**Ejemplo 5.** Una bomba A llena un tanque de agua en 2 horas y una bomba B llena el mismo tanque de agua en 3 horas, si usamos las dos bombas a la vez, ¿en que tiempo llenarían el tanque?

Trabajo realizado por la bomba A en una hora =  $\frac{t}{2}$

(Si lo llena en 2 horas, en una hora lo llena hasta la mitad del volumen del tanque)

Trabajo realizado por la bomba B en una hora =  $\frac{t}{3}$

(Si lo llena en 3 horas, en una hora lo llena hasta un tercio del volumen del tanque)

Planteo: los problemas de trabajo se reducen a la unidad en su planteo

### El tiempo para llenar el tanque

Trabajo de la bomba A + trabajo de la bomba B = 1

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 1, \quad \frac{6t}{2} + \frac{6t}{3} = (6)1, \quad 3t + 2t = 6, \quad 5t = 6 \quad t = \frac{6}{5} \quad t = 1.2 \text{ horas}$$

Las dos bombas juntas llenarían el tanque en 1 hora y 12 minutos.  $(0.2 \times 60) = 12$

Otro planteo es:

Parte del tanque llenado por la bomba A en 1 hora =  $\frac{1}{2}$ ,

Parte del tanque llenado por la bomba B en 1 hora =  $\frac{1}{3}$ ,

Parte llenada por A y B juntas =  $\frac{1}{t}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{bomba A en 1 hora} & & \text{bomba B en 1 hora} & & \text{A y B juntas} \\ \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & = & \frac{1}{t} \end{array}$$

$$\frac{3+2}{6} = \frac{1}{t}, \quad \frac{5}{6} = \frac{1}{t}, \quad \frac{5t}{6} = 1, \quad t = \frac{6}{5} \quad t = 1.2 \text{ horas}$$

### (Problema de inversión)

**Ejemplo 6:** Se tienen \$24,000 para invertir de modo que una cantidad  $x$  se colocará en un certificado financiero que paga 12% anual y la cantidad restante se invertirá en una cuenta de ahorros al 9% anual. Si al finalizar el año desea obtener de ganancia el 10% del total invertido.

Total a invertir \$ 24,000

Sea  $x$  cantidad a invertir en el certificado financiero

Sea \$ 24,000 –  $x$  la cantidad restante a invertir en ahorro

Interés a ganar en el certificado financiero (1 año)

$$I = C r t = (x) (12 \%) (1) = 0.12 x$$

Interés a ganar en ahorros (1 año)

$$I = (\$ 24,000 - x) (9 \%) (1)$$

$$I = (\$ 24,000 - x) (0.09) (1)$$

$$I = \$ 2,160 - 0.09 x$$

Total de intereses a cobrar en el año

$$IT = 10\% \text{ de } \$ 24,000 = 0.10 (\$ 24,000) = \$ 2,400$$

### Planteo del problema

Intereses del certificado financiero + intereses de los ahorros = intereses totales

$$0.12 x + \$ 2,160 - 0.09 x = \$ 2,400$$

$$0.03 x + \$ 2,160 = \$ 2,400$$

$$0.03 x = \$ 2,400 - \$ 2,160$$

$$0.03 x = \$ 240 \text{ multiplicando por } 100, \quad 3 x = \$ 24,000, \quad x = \frac{\$ 24,000}{3}$$

$$X = \$ 8,000.00$$

cantidad a invertir en el certificado financiero

$$\$ 24,000 - x = \$ 24,000 - \$ 8,000 = \$ 16,000 \quad \text{cantidad a invertir en ahorro.}$$

### (Problema de mezcla)

**Ejemplo.** ¿Cuántos litros de una solución ácida al 60% hay que añadir a 28 litros de una disolución al 20% para hacer una solución ácida al 30%?

**Datos**

|                 | Cantidad original | Cantidad añadida | Cantidad final              |
|-----------------|-------------------|------------------|-----------------------------|
| <b>Solución</b> | <b>28 litros</b>  | <b>X</b>         | <b>28 + x</b>               |
| <b>Acido</b>    | <b>28 (0.20)</b>  | <b>x (0.60)</b>  | <b>28 (0.20) + x (0.60)</b> |

$$(28 + x) (0.30) = 28 (0.20) + x (0.60)$$

$$8.4 + 0.4 x = 5.6 + 0.6 x, \quad 0.4 x - 0.6 x = 5.6 - 8.4, \quad -0.2 x = -2.8, \text{ multiplicando por}$$

$$10, \quad -2 x = -28, \quad x = \frac{-28}{-2}, \quad x = 14 \text{ litros de solución ácida al 60\% se deben añadir.}$$

**(Problema de mezcla)**

**Ejemplo 8.** Un químico tiene 80 ml de una solución que contiene un ácido a 40% de concentración ¿Cuántos ml. de ácido puro debe agregarse para que la concentración sea al 60%?

**Datos**

|                 | Cantidad original | Cantidad añadida | Cantidad final       |
|-----------------|-------------------|------------------|----------------------|
| <b>Solución</b> | <b>80 ml.</b>     | <b>X</b>         | <b>80 + x</b>        |
| <b>Ácido</b>    | <b>28 (0.40)</b>  | <b>x (100%)</b>  | <b>80 (0.40) + x</b> |

$$(80 + x)(0.60) = 80(0.4) + x, \quad 48 + 0.6x = 32 + x, \quad 0.6x - x = 32 - 48, \quad -0.4x = -16$$

Multiplicando. Por 10  $-4x = -160, \quad x = \frac{-160}{-4},$

1.  $x = 40$  litros de solución ácida al 60% se deben añadir.

**Ejemplo 9.** El ancho de un rectángulo es 3 unidades menor que su largo. Si el área es igual a  $4 \text{ m}^2$ , ¿Cuánto miden los lados?

**Vamos a dibujar el rectángulo**

$$L = h + 3$$



Sea  $L$  el largo del rectángulo

Sea  $h$  el ancho del rectángulo

$\text{largo} \times \text{ancho} = \text{área del rectángulo}$

$$L(h) = 4 \text{ m}^2$$

$$(h + 3)(h) = 4, \quad h^2 + 3h = 4, \text{ resolviendo esta ecuación cuadrática } \quad h^2 + 3h - 4 = 0$$

$$h^2 + 3h - 4 = 0$$

$$(h + 4)(h - 1) = 0, \quad h + 4 = 0 \quad \text{ó} \quad h - 1 = 0, \text{ entonces } h = -4 \quad \text{ó} \quad h = 1$$

Como son dimensiones o medidas  $-4$  se descarta como solución y las dimensiones son

$$h = 1 \quad \text{y} \quad l = 3 + h \quad l = 3 + 1, \quad l = 4, \quad \text{largo} = 4 \text{ m}^2, \quad \text{ancho} = 1 \text{ m}^2.$$

**Ejemplo 10.** La suma de los cuadrados de dos números enteros pares consecutivos positivos es 452. Encuentre dichos números.

Sea  $x$  el menor de dos números enteros pares

Sea  $x + 2$  el siguiente número par (los números enteros pares consecutivos se llevan 2)

La suma de los cuadrados de los dos números enteros pares consecutivos es:  $x^2 + (x+2)^2$ ,

Planteo

$$x^2 + (x+2)^2 = 452 \text{ desarrollamos el cuadrado}$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 452$$

$$2x^2 + 4x + 4 - 452 = 0, \quad 2x^2 + 4x - 448 = 0, \quad \text{dividiendo entre 2}$$

$$x^2 + 2x - 224 = 0 \quad \text{resolviendo la ecuación cuadrática}$$

$$(x + 16)(x - 14) = 0, \quad x + 16 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 14 = 0$$

$$x = -16 \quad \text{ó} \quad x = 14$$

Como son positivos

$x = 14$ ,  $x + 2 = 14 + 2$ ,  $x + 2 = 16$ , los números son 14 y 16.

## EJERCICIO 1.4

**PROBLEMAS DE APLICACIÓN (Se resuelven con ecuaciones de una sola variable, de primer y segundo grado, no usar dos variables)**

1. Un estudiante obtiene 83 puntos en un examen y 93 puntos en un segundo examen de la misma asignatura, si desea que su promedio sea 90 puntos ¿Cuánto debe obtener en el tercer examen.
2. Un solar tiene cerrado en todo su alrededor 100m. si el largo es 20m. más que el ancho, hallar medidas de las dimensiones del largo y el ancho.
3. Hace 10 años la edad de Juan era 4 veces la edad de Manny, hoy Juan es 15 años mayor que Manny, hallar las edades de Juan y de Manny.
4. En una tienda un artículo tiene precio de \$1860 y se anuncia que dicho artículo tendrá un 20% de descuento a partir de hoy ¿Cuánto se debe pagar si hoy deseo comprar dicho artículo?
5. Se tienen \$824,000 para invertir de modo que una cantidad  $x$  se colocará en un certificado financiero que paga 16% anual y la cantidad restante se invertirá en ahorro al 10% anual. Si al finalizar el año desea obtener de ganancia \$36,000 ¿Qué cantidad de dinero debe colocar en cada inversión?
6. Un químico tiene 10ml de una solución que contiene un ácido a 30% de concentración. ¿cuantos mililitros de ácido puro debe invertir para que la concentración aumente al 50%?
7. Un Señor \$682,000 para invertir de modo que una cantidad  $x$  se colocará en un certificado financiero que paga 16% anual y la cantidad restante se invertirá en una cuenta de ahorros al 10% anual. Si al finalizar el año desea obtener de ganancia el 12% del total invertido
8. Una pareja desea cenar en un restaurant, pero no quiere gastar mas de \$400 si deben pagar 16% de itbis más 10% de propinan ¿Cuál es la cantidad que debe hacer en la cuenta para gasta justo \$400.



9. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 192, encuentre los tres números
10. Un trabajador dominicano recibe \$8,000 de su salario neto y antes del pago se le hizo un descuento del 25% de su salario bruto ¿Cuál es su salario bruto?
11. Un patrón cobra para si \$60 por hora trabajada y \$20 por hora trabajada para su ayudante. Si a un cliente le entregan una factura por \$580 y el ayudante trabajo 5 horas menos que su jefe ¿Cuántas horas trabajó cada uno?, ¿Qué cantidad le toca a cada uno?
12. Hallar dos números sabiendo que su suma es igual a 21 y que uno de ellos es igual al doble del otro.
13. Cuatro veces un numero disminuido en disminuido en diez es igual a 14¿cual es el numero?
14. Hallar dos número sabiendo que su suma es 37 y que si se divide el mayor por el menor, el cociente vale 3 y el residuo 5
15. Encuentre dos número cuya suma sea 50 y cuya diferencia sea 26
16. El cociente de dos números es 4. Si un numero es 39 menos que el otro, encuentre los dos números
17. Encuentre tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48
18. En 5 años Bryan tendrá 3 veces la edad que tenía hace 7 años ¿cuántos años tiene?
19. La edad de una persona es 41 años y la de su hijo es 9. Hallar al cabo de cuantos años la edad del padre triplica del hijo
20. Hace diez años, la edad de Paty era cuatro veces mayor que la edad de Johanna y, hoy en día, es solamente el doble. hallar las edades de ambos
21. La edad actual de Juan es el doble de la de Fernando hace cinco años Juan era tres veces mayor que Fernando. Hallar su edades actuales
22. En una oferta, una tienda de artículos deportivos redujo un 24% en precios de las bolas de beisbol, hasta alcanzar un precio de 96.40¿cual es el precio original?
23. Marcos compro un libro al que le rebajaron un 15 %. si pago \$1,020.00 ¿cual era el precio original del libro? Construye las ecuaciones relacionadas
24. Encuentra tres números consecutivos enteros tales que el producto del primero por el tercero es igual a 5 veces el segundo mas 13.

25. Un cuadrado de lado  $L$  se deforma para obtener un rectángulo sumando 3 unidades a uno de sus lados y restando 2 al otro lado. El rectángulo obtenido tiene área 6. Hallar el valor de  $L$ .
26. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 74. Encuentre dicho números.
27. Encuentra tres números consecutivos enteros tales que el cuadrado del primero más el cuadrado del segundo es igual al cuadrado del tercero mas 7 veces el segundo.
28. El área de un rectángulo es igual a  $35 \text{ m}^2$  y si perímetro es igual a 24 metros ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
29. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 2 unidades mas que uno de los lados y una unidad mas que el otro ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
30. Encuentra dos números enteros cuyo producto sea  $-30$  y tales que uno sea 11 unidades mayor que el otro ¿Hay mas? ¿por que?
31. En un rectángulo, el ancho mide 2 cm menos que el largo. Si el área mide  $48 \text{ cm}^2$  ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? ¿Cuánto mide de las diagonales?
32. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide una unidad menos que el otro. Si el cuadrado de la hipotenusa es igual a 25. ¿Cuánto mide cada uno de los catetos?
33. El producto de la diferencia de 17 menos un número por la suma de 17 mas el mismo número es igual a 64 ¿sabes cual es el número? ¿puedes encontrar otro que cumpla las mismas condiciones?
34. El producto de dos números es 42. El mayor es el triple del menor menos 11. Encuentra dichos números.
35. El lado de un cubo mide 2 cm. El volumen de ese cubo mas el volumen de otro cubo es igual a 12 por la suma del lado del primer cubo mas el lado de segundo. Encuentra cuantos centímetros mide el lado del segundo cubo.
36. Dos cubos son tales que el lado de uno de ellos es 6 unidades mayor que el otro. Si la diferencia de las áreas de una de las caras de cada cubo es igual a 432 ¿cual es la diferencia de los volúmenes de los cubos?
37. El volumen comprendido entre dos esferas concéntricas es igual a  $\frac{224}{3}\pi \text{ cm}^3$  ¿Cuál es el volumen de la esfera pequeña si se sabe que su radio es 2cm menor que el radio de la grande?

38. Dos números enteros consecutivos satisfacen que la diferencia del cubo del mayor menos el cubo del menor es igual a 7. Encuentra dichos números
39. Dos números enteros consecutivos satisfacen que la diferencia del mayor elevado a la cuarta, menos el menor elevado a la cuarta es igual a 80 veces la suma de 1 mas el producto de la mitad del mayor por el menor. Encuentra dicho números
40. Encuentra tres números enteros pares consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual a cuadrado del tercero.
41. Encuentra dos números enteros pares consecutivos tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual a -176.
42. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 61. Encuentra dichos números.
43. La suma de dos números enteros consecutivos es 13. Encuentra los números.
44. La suma de dos números enteros consecutivos es -17 encuentra los números
45. La suma de dos números enteros pares consecutivos es 34. encuentra los números
46. La suma de dos números enteros impares consecutivos es 16. Encuentre los números
47. Un rectángulo tiene un perímetro de 28 cm y un área de  $45 \text{ cm}^2$ . ¿Cuántos cm miden sus lados?
48. La suma de los cuadrados de dos números enteros pares consecutivos es 100. encuentra dichos números.
49. Una bomba puede vaciar una cisterna en  $3\frac{1}{2}$  horas, y otra la puede vaciar en 4 horas. ¿en cuanto tiempo vaciaran la cisterna las dos bombas trabajando juntas?
50. Cuatro por el recíproco de cierto número es 14. Encuentra dicho número.
51. Cinco tercios de un número, aumentado en siete tercios es 5. Encuentra el número
52. Cinco veces el número más 21 es igual a tres veces ese número menos 11. encuentra el número.
53. Una bomba A trabajando sola llena un tanque en 5 horas, y otra bomba B llena el mismo tanque en 3 horas, ¿en qué tiempo lo llenar trabajando juntas las dos bombas?

54. Una tienda departamental anuncia que aportara para la construcción de escuelas \$3 por cada 150 que venda de cierto artículo. si la aportación durante el primer mes fue de \$1, 000; ¿qué cantidad recibió por la venta del artículo mencionado?
55. El peso del vapor de agua es el 62.5% del peso del aire, si 1 litro de vapor de agua pesa 0.80625 gramos ¿Cuánto pesa un litro de aire?
56. El hidrogeno pesa el 6.9 % del peso del aire ¿Qué cantidad de hidrogeno hay en un globo de  $15\text{ m}^3$  de cantidad, si el decímetro cubico de aire pesa 1.3 gramos?
57. Si el 7% del agua de mar es sal ¿Cuántos gramos de agua hay que evaporar para obtener un kilo de sal?
58. Una inversión inicial de \$7,400 se convirtió en \$9,000 al cabo de un año ¿Cuál era la tasa de interés a la que estuvo invertida?

## 1.7 LAS DESIGUALDADES

Una desigualdad es el enunciado de que dos expresiones o dos cantidades no son iguales, una cantidad puede ser mayor  $>$ , o puede ser menor  $<$ , o mayor o igual  $\geq$ , o menor o igual  $\leq$ . Ejemplos:  $3x + 12 > -2x + 24$ ,  $5m - 7 < 3 - 2m$ ,  $3 \leq 24$ .

Ejemplos

| Expresiones  | Conclusiones |
|--------------|--------------|
| $7 > 4$      | Verdadero    |
| $2 > 6$      | Falso        |
| $8 < 3$      | Falso        |
| $2 < 9$      | Verdadero    |
| $6 \leq 9$   | Verdadero    |
| $7 \leq 7$   | Verdadero    |
| $12 \leq 10$ | Falso        |
| $8 \geq 2$   | Verdadero    |
| $5 \geq 5$   | Verdadero    |
| $2 \geq 6$   | falso        |

Todas las expresiones anteriores son desigualdades.

**INECUACIÓN:** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas las cuales poseen por lo menos una variable.

Ejemplos:  $3x + 12 > -2x + 24$ ,  $4y - 21 \geq 6y - 12$ ,  $-5 > 2m + 7$

## SOLUCION DE UNA INECUACIÓN O DESIGUALDAD

Si se obtiene una expresión verdadera cuando se sustituye la variable ya sea  $x$ ,  $y$ ,  $m$ ,  $n$  por un número  $b$ , entonces el número  $b$  es una solución de la inecuación o desigualdad.

Ejemplo en la desigualdad  $2x - 3 < 9$ , el número 5 está dentro del conjunto solución puesto que:  $2(5) - 3 = 7$  y  $7 < 9$  es una expresión verdadera.

**Observas que hay mas valores que también son soluciones de esta desigualdad.**

**RESOLVER UNA INECUACIÓN O DESIGUALDAD:** es encontrar todas las soluciones, o sea encontrar todos los valores que forman el conjunto solución.

**DESIGUALDADES EQUIVALENTES O INECUACIONES EQUIVALENTES:** Son las desigualdades que tienen idénticas soluciones.

La mayor parte de inecuaciones o desigualdades posee un número infinito de soluciones

Ejemplo1:

1.  $-5 < x < 7$  tiene como solución el conjunto de todos los números reales comprendido entre  $-5$  y  $7$  (sin incluir el  $-5$  ni el  $7$ ).

2.  $3 \leq x \leq 10$  tiene como solución el conjunto de todos los números reales comprendido entre  $3$  y  $10$  incluyendo el  $3$  y el  $10$ .

3.  $-4 \leq y < 6$  tiene como solución el conjunto de todos los números reales comprendido entre  $-4$  y  $6$ , incluyendo el  $-4$ , pero no el  $6$ .

4.  $3 < m \leq 12$  tiene como solución el conjunto de todos los números reales comprendido entre  $3$  y  $12$ , no incluye el  $3$ , pero si incluye el  $12$ .

**ESTOS CONJUNTOS SOLUCIONES RECIBEN EL NOMBRE DE INTERVALOS**

**LOS INTERVALOS**

**DEFINICION DE INTERVALO:**

Es un conjunto de número reales que puede estar comprendido o no entre dos números reales.

**Ejemplos:**

La desigualdad:  $2 < x < 5$  tiene como solución todos los valores reales entre  $2$  y  $5$ , no incluye ni  $2$ , ni  $5$ , es decir que es un intervalos cuyo valores están entre  $2$  y  $5$

La desigualdad  $x < 7$  tiene como solución todos los valores reales menores que  $7$ , no incluye el  $7$ , es decir que solo conocemos un extremos en este intervalo que está desde  $-\infty$  hasta  $7$ .

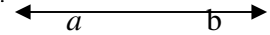
## TIPOS DE INTERVALOS Y NOTACIÓN

Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados y mixtos

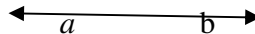
Intervalos abiertos: no incluye los extremos, su notación es:  $(a, b)$  o puede ser también

$]a, b[$ , la desigualdad que corresponde a este intervalo es  $a < x < b$

y la gráfica correspondiente en la recta numérica es:

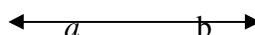
  $a$  es llamado extremo inferior,  $b$  es llamado extremo superior

Intervalos cerrados: incluyen los extremos, su notación es:  $[a, b]$ , la desigualdad correspondiente es:  $a \leq x \leq b$

Gráfica correspondiente en la recta numérica es: 

Intervalos mixtos; incluyen solamente uno de sus extremos, ya sea el inferior o el superior, su notación es:  $[a, b)$  este incluye el extremo  $a$ , pero no incluye  $b$ ,

La desigualdad correspondiente es:  $a \leq x < b$

La gráfica correspondiente es: 

$(a, b]$  este intervalo no incluye  $a$ , pero si incluye  $b$ ,

la desigualdad correspondiente es:  $a < x \leq b$ ,

la gráfica correspondiente es: 

Existen otros intervalos que contienen infinito y/o infinito negativo

Ejemplos:

1.  $(-\infty, \infty)$ , este intervalo representa el conjunto de todos los números reales, su desigualdad correspondiente es:  $-\infty < x < \infty$

Su gráfica es la recta numérica real completa

2.  $(-\infty, a]$  incluye todo los valores desde  $-\infty$  hasta  $a$ , la desigualdad correspondiente es:  $x \leq a$

Dibuja la grafica correspondiente \_\_\_\_\_

3.  $(-\infty, a)$  incluye todo los valores desde  $-\infty$  hasta  $a$ , pero no incluye  $a$ ,

La desigualdad correspondiente es:  $x < a$

Dibuja la grafica correspondiente \_\_\_\_\_

4.  $(b, \infty)$ , incluye todo los valores desde  $b$  hasta  $\infty$ ,

la desigualdad correspondiente es:  $x > b$

Dibuja la grafica correspondiente \_\_\_\_\_

5.  $[b, \infty)$ , incluye todo los valores desde b hasta  $\infty$ , incluyendo b

la desigualdad correspondiente es:  $x \geq b$

Dibuja la grafica correspondiente \_\_\_\_\_

### EJERCICIOS 1.7

A CADA INTERVALO REALIZA LA DESIGUALDAD Y LA GRÁFICA QUE LE CORRESPONDE


| INTERVALO       | GRÁFICA | DESIGUALDAD |
|-----------------|---------|-------------|
| $[-3, 7]$       |         |             |
| $(0, 9)$        |         |             |
| $(-5, 2]$       |         |             |
| $[2, 13]$       |         |             |
| $(-\infty, 6)$  |         |             |
| $(-\infty, -2]$ |         |             |
| $[-3, \infty)$  |         |             |
| $(4, \infty)$   |         |             |
| $(-1, 1]$       |         |             |

A CADA DESIGUALDAD ESCRIBE EL INTERVALO Y LA GRÁFICA QUE LE CORRESPONDE

| DESIGUALDAD        | INTERVALO | GRAFICA |
|--------------------|-----------|---------|
| $-3 < x < 9$       |           |         |
| $4 \leq x < 8$     |           |         |
| $-1 \leq x \leq 3$ |           |         |
| $0 > x$            |           |         |
| $x < 7$            |           |         |
| $5 < x \leq 12$    |           |         |
| $x \leq -5$        |           |         |
| $2 \leq x$         |           |         |


### PROPIEDAD DE LA DESIGUALDAD:

#### Multiplicar o dividir por un número positivo

1. Si  $x < a$  para  $c > 0$ , entonces  $c x < c a$  y 

2. Si  $x > a$  para  $c > 0$ , entonces  $c x > c a$  y 

#### Multiplicar o dividir por un número negativo

1. Si  $x < a$  para  $c < 0$ , entonces  $c x > c a$  y 

2. Si  $x > a$  para  $c < 0$ , entonces  $c x < c a$  y  $\frac{x}{c} < \frac{a}{c}$

**Nota:** Las propiedades para la suma de las ecuaciones equivalentes se cumplen también en las desigualdades o inecuaciones.

### SOLUCION DE UNA DESIGUALDAD O INECUACIÓN:

Solucione la desigualdad y escriba el resultado en forma de intervalo y la gráfica correspondiente

1.  $2x + 4 < -16$  restando 4 en ambos lados  $2x + 4 - 4 < -16 - 4$

$2x < -20$  dividiendo entre 2 ambos lados  $\frac{2x}{2} < \frac{-20}{2}$ ,  $x < -10$

La solución en notación de intervalo es  $(-\infty, -10)$

Realice la grafica de la solución \_\_\_\_\_

2.  $-3x + 6 \geq 2x - 14$  vamos a sumar  $-2x - 6$  en ambos lados de la desigualdad

$-3x + 6 - 2x - 6 \geq 2x - 14 - 2x - 6$   
 $-5x \geq -20$  dividiendo entre  $-5$

$\frac{-5x}{-5} \leq \frac{-20}{-5}$  por tanto  $x \leq 4$

La notación de intervalo correspondiente es  $(-\infty, 4]$

Realiza la grafica correspondiente \_\_\_\_\_

### **DESIGUALDADES O INECUACIONES SIMULTÁNEAS**

$-10 < 3X + 5 \leq 17$

Aquí tenemos dos desigualdades a la vez y podemos descomponer dicha desigualdad en dos  $-10 < 3X + 5$  y  $3X + 5 \leq 17$

Podemos solucionar cada una por separado y luego unir en un solo intervalo las soluciones  $-10 - 5 < 3X + 5 - 5$ ,  $-15 < 3x$   $\frac{-15}{3} < \frac{3x}{3}$   $-5 < x$

$3X + 5 - 5 \leq 17 - 5$ , entonces  $3x \leq 12$ ,  $\frac{3x}{3} \leq \frac{12}{3}$   $x \leq 4$

De manera que la solución es  $(-5, 4]$

**Otra forma es resolverla de manera simultánea**

### **RESOLVER LA DESIGUALDAD Y ESCRIBA LA SOLUCIÓN EN FORMA DE INTERVALO Y LA GRAFICA CORRESPONDIENTE A LA SOLUCIÓN**



$$-10 < 3X + 5 \leq 17 \quad \text{restando 5 en cada lado} \quad -10 - 5 < 3X + 5 - 5 \leq 17 - 5$$

$$-15 < 3x \leq 12 \quad \text{dividiendo entre 3}$$

$$\frac{-15}{3} < \frac{3x}{3} \leq \frac{12}{3}, \quad \text{de modo que:} \quad -5 < x \leq 4$$

el intervalo correspondiente es  $(-5, 4]$

Realice la gráfica \_\_\_\_\_

## INECUACIONES O DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

### PROPIEDADES

Para  $b > 0$

1. SI  $|x| < b$ , entonces  $-b < x < b$

### EJEMPLOS:

Resolver la desigualdades y escriba la solución en forma de intervalo y realice la grafica correspondiente a la solución

a.  $|2x - 5| < 35$ , entonces  $-35 < 2x - 5 < 35$

Resolvemos esta inecuación simultánea

$$-35 + 5 < 2x - 5 + 5 < 35 + 5$$

$$-30 < 2x < 40, \quad \frac{-30}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{40}{2} \quad -15 < x < 20$$

Solución  $(-15, 20)$

Gráfica \_\_\_\_\_

b.  $|-5x + 10| \leq 35$ , planteamos  $-35 \leq -5x + 10 \leq 35$

Resolvemos la inecuación o desigualdad simultánea

$$-35 - 10 \leq -5x + 10 - 10 \leq 35 - 10$$

$$-45 \leq -5x \leq 25 \quad \text{dividiendo entre } -5$$

$$\frac{-45}{-5} \geq \frac{-5x}{-5} \geq \frac{25}{-5} \quad \text{de modo que:} \quad 9 \geq x \geq -5$$

Organizamos  $-5 \leq x \leq 9$  intervalo  $[-5, 9]$

Haz la Gráfica \_\_\_\_\_

Para  $b > 0$

2. SI  $|x| > b$ , entonces  $x < -b$  ó  $x > b$

### EJEMPLOS:

Resolver la inecuación y escriba el intervalo de la solución y la gráfica

a.  $|2x - 4| > 18$ , planteamos  $2x - 4 < -18$  ó  $2x - 4 > 18$

|            |                                |   |                               |
|------------|--------------------------------|---|-------------------------------|
| Resolvemos | $2x - 4 < -18$                 | ó | $2x - 4 > 18$                 |
|            | $2x - 4 + 4 < -18 + 4$         | ó | $2x - 4 + 4 > 18 + 4$         |
|            | $2x < -14$                     | ó | $2x > 22$                     |
|            | $\frac{2x}{2} < \frac{-14}{2}$ | ó | $\frac{2x}{2} > \frac{22}{2}$ |
|            | $x < -7$                       | ó | $x > 11$                      |

Solución  $(-\infty, -7) \cup (11, \infty)$

Gráfica \_\_\_\_\_

## 1.8 OTRAS DESIGUALDADES

Las desigualdades siguientes se resuelven con un razonamiento simple usando la regla de los signos para dividir cantidades

### Ejemplos:

Resuelve la desigualdad

1.  $\frac{-5}{x-3} < 0$  Observas que  $\frac{-5}{x-3}$  es negativo, dice menor que cero

Si observa el numerador  $-5$  de modo que el denominador  $x - 3$  es positivo, pues  $\frac{-}{+} = -$   $x - 3 > 0$ ,  $x > 0 + 3$ ,  $x > 3$

Solución  $(3, \infty)$

Gráfica \_\_\_\_\_

2.  $\frac{3}{x+5} > 0$   $\frac{3}{x+5}$  es positivo, dice mayor que cero

Si observas el numerador 3 es positivo, de modo que el denominador  $x + 5$  es positivo,  $\frac{+}{+} = +$

Así  $x + 5 > 0$   $x > 0 - 5$ ,  $x > -5$

Solución  $(-5, \infty)$ , Gráfica \_\_\_\_\_

## EJERCICIOS 1.8

RESUELVE LAS DESIGUALDADES Y ESCRIBE LA SOLUCIÓN EN NOTACIÓN DE INTERVALO Y EN FORMA GRÁFICA

1.  $2x - 7 < -9$
2.  $-7 - 3x < -22$
3.  $2 - 7x > -9$
4.  $5x - 8 > -18$
5.  $3x - 6 \geq -2x + 24$
6.  $5x - 2 \leq 4x - 3$
7.  $x - 2 \leq 4x - 8$
8.  $-10 < 2x < 30$
- 9a.  $-30 < -3x + 3 \leq 27$
- 9b.  $6 \leq 2x + 4 < 26$
10.  $2 \leq -2x + 8 \leq 12$
11.  $\frac{-2}{x-7} < 0$
12.  $\frac{6}{x-1} < 0$
13.  $\frac{-5}{x-4} > 0$
14.  $\frac{5}{x+3} > 0$
15.  $\frac{-2}{x+3} < 0$
16.  $|3x - 9| < 18$
17.  $|-2x - 1| \leq 13$
18.  $|5x + 15| < 35$
19.  $|3x + 3| \leq 27$
20.  $|2x + 3| > 31$
21.  $|-10x - 5| \geq 45$
22.  $|x + 7| > 5$

$$23. | - 3x + 12 | \geq 45$$

### 1.9 INECUACIONES NO LINEALES (CUADRÁTICAS, CUBICAS):

Sean a, b, c constantes reales tales que  $a \neq 0$ . Sea x una variable real.

Llamaremos inecuación cuadrática a toda inecuación que tiene uno de sus miembros en la forma  $ax^2 + bx + c$ , y el otro miembro es cero.

Son inecuaciones cuadráticas o cúbicas

- a)  $x^2 - 2x - 35 < 0$ ,
- b)  $x^2 - 2x - 10 > 0$ ,
- c)  $-x(x-3)(x+4) \geq 0$ , d)  $x(x+1)(x-2) \geq 0$

Si la expresión  $ax^2 + bx + c$  es factorizable. Para resolver estas inecuaciones se debe factorizar la expresión  $ax^2 + bx + c$

Luego encontramos los valores críticos (son los valores que hacen cero a cada factor), los colocamos en una recta numérica para ver los intervalos en que divide la misma

Y la solución la encontramos usando una tabla de signos

#### Ejemplos:

**ENCUENTRE LA SOLUCIÓN DE:  $x^2 - 2x - 35 < 0$**

**Podemos hallar la ecuación auxiliar, pero trabajaremos con el diagrama de signo**

Solución: **1ro.** factorizamos:  $x^2 - 2x - 35 = (x-7)(x+5)$

**2do.** Encontramos los valores críticos de cada factor que son los valores que lo hacen cero, es como que aplicamos el teorema del factor cero

$$x - 7 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 5 = 0, \quad \text{de ahí que} \quad x = 7 \quad \text{o} \quad x = -5$$

**3ro.** si colocamos estos valores en una recta numérica y buscamos los intervalos abiertos en los cuales se divide obtenemos  $(-\infty, -5)$ ,  $(-5, 7)$ ,  $(7, \infty)$

**4to. Diagrama de signos o tabla de signos** intervalos

| Factores     | $(-\infty, -5)$    | $(-5, 7)$         | $((7, \infty))$   |
|--------------|--------------------|-------------------|-------------------|
|              | Valor de prueba -6 | Valor de prueba 2 | Valor de prueba 8 |
| $(x-7)$      | -                  | -                 | +                 |
| $(x+5)$      | -                  | +                 | +                 |
| $(x-7)(x+5)$ | +                  | -                 | +                 |

Observa que la solución está donde el signo sea negativo por que dice **que:  $x^2 - 2x - 35$  es menor que cero** y menor que cero significa valores reales negativos.

**Entonces la solución esta en el intervalo abierto  $(-5, 7)$**

**Ejemplo 2) Encuentre la solución de:  $x(x-4)(x+1) \geq 0$ ,**

Observa que dice  $x(x-4)(x+1)$  es mayor o igual que cero la solución está donde queden signos positivos y por que dice igual los intervalos serán cerrados, es decir que incluyen los extremos.

Como la expresión está factorizada avanzamos a buscar los valores críticos

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0, \text{ de ahí que } x = 0, \quad x = 4, \quad x = -1$$

Intervalos a usar  $(-\infty, -1)$   $(-1, 0)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(4, \infty)$

DIAGRAMA O TABLA DE SIGNOS                      intervalos

| FACTORES      | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 0)$ | $(0, 4)$ | $((4, \infty))$ |
|---------------|-----------------|-----------|----------|-----------------|
|               | -2              | -0.5      | 1        | 5               |
| X             | -               | -         | +        | +               |
| X-4           | -               | -         | -        | +               |
| X+1           | -               | +         | +        | +               |
| X (X-4) (X+1) | -               | +         | -        | +               |

SOLUCION  $[-1, 0] \cup [4, \infty)$

**EJERCICIOS 1.9 : Encuentre la solución de cada una de estas desigualdades y escriba la solución como un intervalo y de forma grafica.**

- d)  $x^2 - 2x - 10 > 0$
- e)  $-x(x-3)(x+4) \geq 0$
- f)  $x(x+1)(x-2) \geq 0$
- g)  $2x^2 - x - 6 < 0$
- h)  $18x^2 - 2x > 0$

- i)  $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$
- j)  $x^2 - 9 \geq 0$
- k)  $x^2 - 4x \leq 0$
- l)  $(x-1)(x-3)(x+2) > 0$

### Inecuaciones en las que uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero

En general estudiaremos en las páginas siguientes los tipos

$\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ ;  $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$ ;  $\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$ ;  $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ , en donde  $p(x)$  y  $q(x)$  son polinomios con  $q(x) \neq 0$

Para resolver este tipo de inecuaciones la realizaremos con igual procedimiento que las ecuaciones cuadráticas y cúbicas como producto, pero debemos tener presente no incluir en la solución los valores que hacen cero el denominador de cada cociente, por eso usaremos las propiedades de los intervalos abiertos.

Por lo anterior es que al resolver inecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero, usaremos tablas de signos tal y como si hizo anteriormente.

### Ejercicios 1.10 : Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

- |                                       |                                     |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| a.) $\frac{x-2}{x+3} \geq 0$          | b.) $\frac{x-2}{x+1} < 0$           |
| c.) $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)} \leq 0$ | ch.) $\frac{x-2}{(2x+1)(x-5)} > 0$  |
| d.) $\frac{6}{(x-3)(2-x)} \geq 0$     | e.) $\frac{3}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0$ |

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1. $\frac{x-7}{x+2} \leq 0$         | 6. $\frac{(x-2)(x+3)}{2(x-3)} \geq 0$   |
| 2. $\frac{(x-1)(4-x)}{2x+1} \geq 0$ | 7. $\frac{2-x}{3x+1} < 0$               |
| 3. $\frac{3x+1}{(1-2x)(3-x)} > 0$   | 8. $\frac{x+7}{(x+3)(2-x)} \leq 0$      |
| 4. $\frac{-2}{2x-3} > 0$            | 9. $\frac{(1-x)(2+x)}{(3x+1)(3-x)} > 0$ |
| 5. $\frac{-5}{(2x+5)(x+4)} < 0$     |   |
| 10. $\frac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$      | 11. $\frac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$      |
| 12. $\frac{(x+2)}{x^2-4x} \leq 0$   | 13. $\frac{-2x}{x^2+x+3} \geq 0$        |

$$14. \frac{x^2+x^2-2x}{x+4} < 0$$

$$15. \frac{x^2+4x}{x+1} \leq 0$$

$$16. \frac{x^2+2x}{(1-x)(x-2)} \geq 0$$

$$17. \frac{x^2+3}{(x+5)(x+3)} \leq 0$$

## 1.5 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El conjunto de los números complejos es necesario para resolver ecuaciones cuyas soluciones no son posibles dentro del conjunto de los números reales.

Por ejemplo: Al resolver la ecuación  $x^2 + 1 = 0$

obtenemos  $x = \pm\sqrt{-1}$  expresión que no tiene sentido en el conjunto de los números reales, pues tiene índice par y el radicando es negativo.

$\sqrt{-1}$  Es llamada la unidad imaginaria, de modo que:  $\sqrt{-1} = i$

Se definió la unidad imaginaria  $i = \sqrt{-1}$

*Ejemplo 1. Hallar el valor de:*

1.  $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2i$
2.  $\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = \sqrt{9} \sqrt{-1} = 3i$
3.  $\sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)(-1)} = \sqrt{\frac{4}{9}} \sqrt{-1} = \frac{2}{3}i$
4.  $-\sqrt{-81} = -\sqrt{81(-1)} = -\sqrt{81} \sqrt{-1} = -9i$
5.  $\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3} \sqrt{-1} = \sqrt{3} i$

### EJERCICIOS 1.5 a

Hallar el valor de los siguientes radicales

$$1. \sqrt{-36}$$

$$2. \sqrt{-49}$$

$$3. -\sqrt{-16}$$

$$4. \sqrt{25}$$

$$5. -\sqrt{4}$$

$$6. \sqrt{-64}$$

$$7. \sqrt{100}$$

$$8. -\sqrt{121}$$

9.  $\sqrt{-2}$

10.  $-\sqrt{-5}$

**Definición:**

*Un número complejo expresado en su forma binómica o canónica  $a + bi$  posee una cantidad real y una cantidad imaginaria,  $a$  es la parte real,  $bi$  es la parte imaginaria, pero  $a$  y  $b$  son números reales*

**Ejemplos:**

a)  $2 + 5i$ ,      b)  $-4 - 3i$ ,      c)  $0 + 9i = 9i$ ,      d)  $-6 + 0i = -6$

*En el ejemplo c el número complejo  $9i$  se llama imaginario puro*

*En el ejemplo d el número complejo  $-6$  se llama real puro.*

**POTENCIAS DE  $i$**

$i^0 = 1$

$i^1 = \sqrt{-1} = i$

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$i^3 = i^2(i^1) = -1(i) = -i$

$i^4 = i^2(i^2) = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4(i) = (1)i = i$

$i^6 = i^4(i^2) = 1(-1) = -1$

*Observas que después de las primeras cuatro potencias de  $i$ , los valores se repiten*

*Nota: Para encontrar el valor de cualquier potencia de  $i$  que sea mayor que cuatro, divide el exponente entre cuatro y el residuo será la nueva potencia de  $i$  que es equivalente al resultado de la potencia que estamos buscando.*

**EJEMPLO 1. Encuentra el valor de:**

- $i^{54}$  dividimos 54 entre 4 y obtenemos cociente 13 y residuo 2, de modo que:  
 $i^{54} = i^2 = -1$



2.  $i^{28}$  dividimos 28 entre 4 y obtenemos cociente 7 y residuo cero, de modo que  
 $i^{28} = i^0 = 1$
3.  $i^{19}$  dividimos 19 entre 4 y obtenemos cociente 4 y residuo 3, de modo que  
 $i^{19} = i^3 = -i$

**EJERCICIO 1.5 b: Encuentra el valor de**

1.  $i^{41}$
2.  $i^{95}$
3.  $i^{36}$
4.  $i^{21}$
5.  $i^{30}$
6.  $i^{48}$
7.  $i^{62}$

**Definición:**

**IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS**

Dos números complejos  $Z = a + bi$ , y  $Z_1 = c + di$  son iguales ( $Z = Z_1$ ) solamente si ocurre que:  $a = c$ , y  $b = d$

**Ejemplos:**

1. Hallar el valor de x e y si  $2x + 8i = 10 - 4yi$ ,

Por la definición anterior  $2x = 10$ , y  $8 = -4y$   
 Resolviendo estas ecuaciones  $x = 5$ ,  $y = -2$

**EJERCICIOS 1.5 b : Hallar el valor de x e y en cada expresión dada si:**

1.  $3x + 9i = -1 + 2yi$
2.  $(2x + 3) + (3y - 1)i = 19 + 26i$
3.  $(-3x + 1) + (2y + 5)i = 4 + (2x + 17)i$

4.  $3x + 9i = -1 + 2y i$
5.  $(x + 3) + (3y - 5) i = 5 + 22 i$
6.  $(-3x - 1) + (2y + 3) i = -2 + (x + 1) i$
7.  $x + 72 i = -1 + 8y i$
8.  $(5x - 3) + (-5y - 1) i = -23 + 14 i$
9.  $(-8x + 2) + (y + 5) i = 18 + (2x + 4) i$
10.  $(2x + 2) + (y + 1) i = 18 + (3x + 9) i$

### OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

| Operaciones                         | Definición  |
|-------------------------------------|---|
| Suma de números complejos           | $(a + b i) + (c + d i) = (a + c) + (b + d) i$       |
| Resta de números complejos          | $(a + b i) - (c + d i) = (a - c) + (b - d) i$       |
| Multiplicación de números complejos | $(a + b i) (c + d i) = (a c - b d) + (a d + b c) i$ |

**EJEMPLOS 1:** Dado los números complejos  $Z = 2 - 5 i$ , y  $Z_1 = -6 - 3 i$  realiza las operaciones siguientes:

1.  $Z + Z_1$ ,
2.  $Z - Z_1$
3.  $Z \cdot Z_1$

La suma  $Z + Z_1 = (2 - 5i) + (-6 - 3i) = (2 + (-6)) + (-5 + (-3)) i = -4 - 8 i$

La resta  $Z - Z_1 = (2 - 5i) - (-6 - 3i) = (2 - (-6)) + (-5 - (-3)) i = 8 - 2 i$

La multiplicación  $Z \cdot Z_1 = (2 - 5i) \cdot (-6 - 3i)$   
 $= (2(-6) - (-5)(-3)) + (2(-3) + (-5)(-6)) i = -27 + 24 i$

**Definición:**

**Conjugado de un número complejo:** Si  $Z = a + bi$  es un número complejo, entonces su Conjugado, denotado por  $\overline{Z} = a - bi$

**Ejemplos:** ESCRIBA EL CONJUGADO DE cada número complejo dado  
:

1.  $3 - 2 i$  el conjugado es  $3 + 2i$
2.  $-5 + 3 i$  el conjugado es  $-5 - 3 i$
3.  $-2 - 4 i$  el conjugado es  $-2 + 4 i$

4.  $6 + 5i$  el conjugado es \_\_\_\_\_
5.  $-1 - i$  el conjugado es \_\_\_\_\_
6.  $8 - 3i$  el conjugado es \_\_\_\_\_
7.  $-9 + 7i$  el conjugado es \_\_\_\_\_
8.  $-3i + 2$  el conjugado es \_\_\_\_\_
9.  $7i - 6$  el conjugado es \_\_\_\_\_
10.  $3i$  el conjugado es \_\_\_\_\_

Recuerda el producto notable

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

### EJEMPLO 1:

En los números complejos conjugados se cumple que:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 (-1) \\ = a^2 + b^2$$

### EJEMPLO 2:

Realiza el producto de:  $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2$

$$(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16$$

$(3 + 4i)(3 - 4i) = 25$  pues son complejos conjugados y se cumple el producto notable anterior

### COCIENTES DE NUMEROS COMPLEJOS

Debemos multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador (esto es multiplicar por un 1 expresado de manera especial)

### EJEMPLO 3: EXPRESA DE LA FORMA $a + bi$ EL NUMERO COMPLEJO $\frac{3}{2-5i} =$

El conjugado del denominador es:  $2 + 5i$

por tanto multiplicaremos por  $\frac{2+5i}{2+5i} = 1$  (ese es nuestro 1 expresado de manera especial)

$$1. \frac{3}{2-5i} \times \frac{2+5i}{2+5i} = \frac{6+15i}{(2)^2-(5i)^2} = \frac{6+15i}{4+25} = \frac{6+15i}{29} = \frac{6}{29} + \frac{15}{29}i$$

**EJERCICIO 1.5 c : EXPRESA EN LA FORMA  $a + bi$**

$$2. \frac{4}{6-i}$$

$$3. \frac{-7}{5-3i}$$

$$4. \frac{3+2i}{2-5i}$$

$$5. \frac{-2-3i}{2i+5}$$

**EJERCICIOS 1.5 d:**

**REALIZA LAS OPERACIONES INDICADA Y EXPRESA EL RESULTADO EN LA FORMA  $a + bi$**

$$1. (2 + 3i) + (4 - i) =$$

$$2. (-8 - 5i) + (-1 + 3i) +$$

$$3. (-9 + 3i) - (-5 + 4i) +$$

$$4. (3 + 2i) - (-7 - 2i) =$$

$$5. (-2 - 2i)(6 - 3i) +$$

$$6. (4 + 5i)(3 + 2i)$$

$$7. [(2 - 3i) + (-6 - 5i)] - (10 - 4i) =$$

$$8. [(12 - 3i) - (6 - 2i)] + (9 - 3i) =$$

$$9. [(-7 - 4i) + (-1 + i)] (5 - 2i) =$$

$$10. [(2 - 3i) (-6 - 5i)] + (10 - 4i) =$$

$$11. [(-2 + 3i) (-1 - 5i)] - (13 + 14i) =$$

$$12. \frac{-4+12i}{3i+7i}$$

$$13. \frac{-2-3i}{8+6i}$$

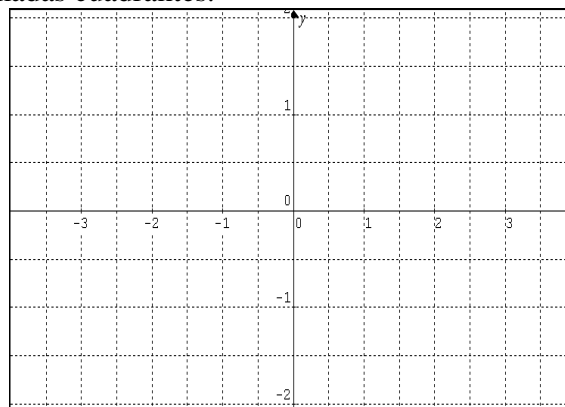
$$14. \frac{(-2-3i)-(-7+2i)}{-3+2i}$$

$$15. \frac{(-3-2i)(5+6i)}{1-4i}$$

## UNIDAD 2 (GEOMETRIA ANALITICA)

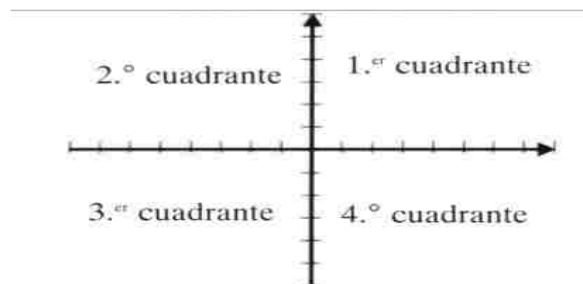
### EJES DE COORDENADAS RECTANGULARES O COORDENADAS CARTESIANAS

Los ejes de coordenadas cartesianas o ejes o coordenadas rectangulares son dos rectas numéricas perpendiculares una horizontal y otra vertical que se cortan en el punto correspondiente al cero de ambas rectas numéricas (origen del sistema) y dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes.



La horizontal se llama abscisa o eje x, y la vertical se llama ordenada o eje y

Observe que:

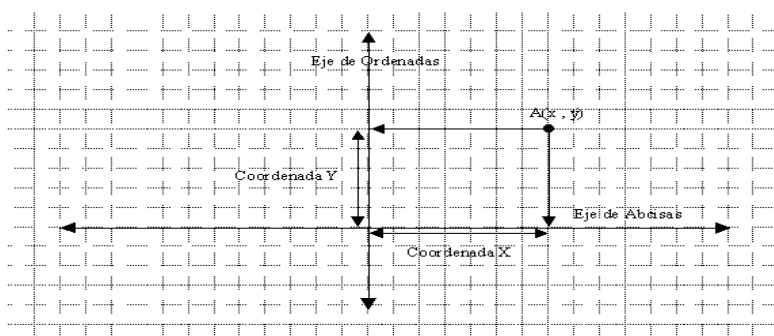


En el primer cuadrante el eje x es positivo, y el eje y es positivo

En el segundo cuadrante el eje x es negativo y el eje y es positivo  
 En el tercer cuadrante tanto el eje x como el eje y son negativos  
 En el cuarto cuadrante el eje x es positivo y el eje y es negativo

## UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

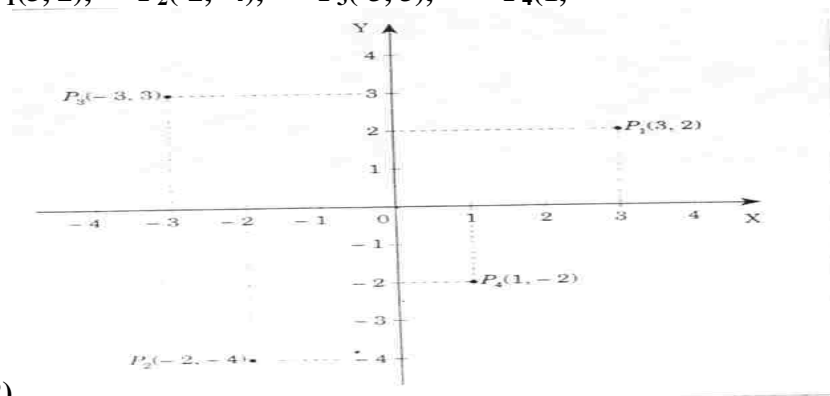
Todo punto en el plano corresponde a la forma  $(x, y)$ , es decir que:  
 la primera componente corresponde a la coordenada x o abscisa y  
 la segunda componente corresponde a la coordenada y u ordenada.



### EJEMPLOS DE UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO.

Determina la ubicación en el Plano Cartesiano de los siguientes puntos:

$P_1(3, 2)$ ,  $P_2(-2, -4)$ ,  $P_3(-3, 3)$ ,  $P_4(1, -$



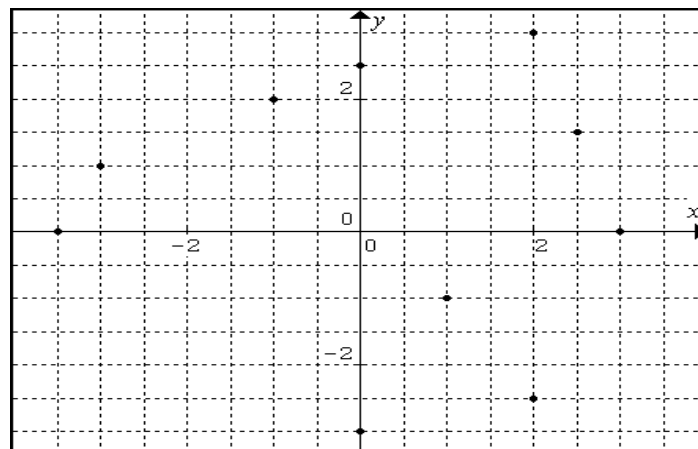
2)

### EJERCICIOS 2.0:

Ubicar en el planos los siguientes puntos y diga el cuadrante al que pertenece cada punto

- 1) (3, 5)
- 2) (-2, -4)
- 3) (4, -6)
- 4) (-1, 3)
- 5) (0, -4)
- 6) (5, 0)
- 7) (-0.5, 0.5)
- 8) (0,3)
- 9) (-5, 0)
- 10) (-7, 2)
- 11) (9, 1)
- 12) (1, -2)
- 13) (-6, -7)
- 14) (1/3, 4)
- 15) (-4,8)

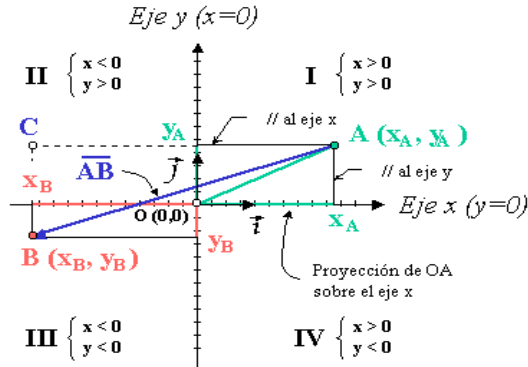
II) Escribe las coordenadas (x, y) de los puntos marcados en **negrita** en el siguiente gráfico



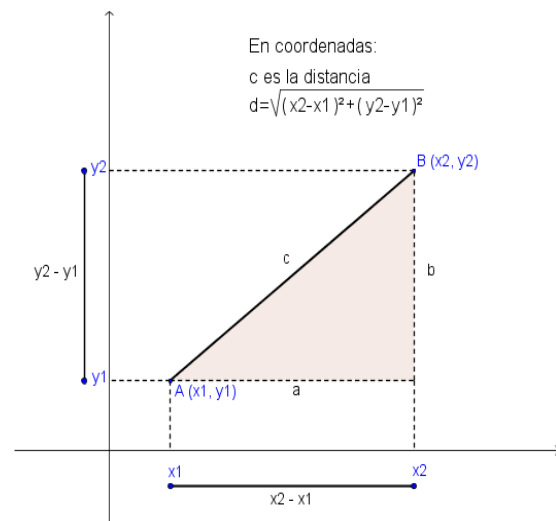
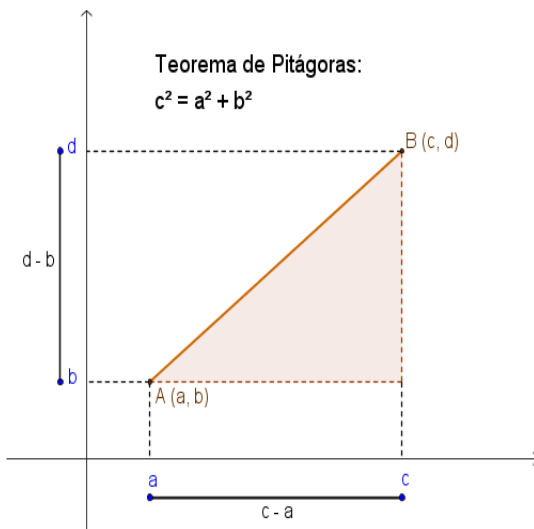
## 2.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DEL PLANO $P_1(X_1, Y_1)$ Y $P_2(X_2, Y_2)$

### Distancias en el plano: OBSERVA LA GRÁFICA

Las sub-variedades lineales del plano son los puntos y las rectas.



¿Qué puede expresar de lo observado en la figura anterior?



Si haces un dibujo como el de la figura en seguida te das cuenta que la distancia horizontal entre los dos puntos es  $c - a$ .

la distancia vertical es  $d - b$ ,

Si observa el triángulo rectángulo de la figura te darás cuenta que  $c-a$  es un cateto y  $d-b$  el otro cateto y por Pitágoras

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$



$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Por lo tanto, como la distancia entre los puntos es la hipotenusa, entonces

$$\text{La distancia} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Podemos decir que  $c = x_2$ , y  $a = x_1$ ,  $d = y_2$   $b = y_1$  entonces usaremos la fórmula para la Distancia entre dos puntos así:

Dados dos puntos del plano  $p_1 = (x_1, y_1)$  y  $p_2 = (x_2, y_2)$

Se determina la distancia entre estos dos puntos a través de la fórmula:

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo:

1) Dados los puntos  $p_1(2, -5)$  y  $p_2(3, 1)$  hallar la distancia entre los dos puntos

**Datos**

$$X_1 = 2$$

$$Y_1 = -5$$

$$X_2 = 3$$

$$Y_2 = 1$$

**Fórmula**

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - (-5))^2}$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(1)^2 + (1 + 5)^2}$$

$D_{p_1p_2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$  se puede dejar expresada o buscar en una calculadora.

La distancia es igual a  $\sqrt{37}$

## EJERCICIOS 2.1

1) A cada par de puntos encuentra la distancia ellos

a)  $P_1(-2, 1)$  y  $p_2(4, 9)$

b)  $P_1(2, 1)$  y  $p_2(2, 4)$

c)  $P_1(2, -5)$  y  $p_2(-3, 7)$

d)  $P_1(1, 1)$  y  $p_2(4, 3)$

e)  $P_1(-2,1)$  y  $p_2(-1,-3)$

## 2.2 LAS COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO

Las coordenadas del punto medio del segmento con extremos

$p_1(x_1, y_1)$  y  $p_2(x_2, y_2)$  coinciden con la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Se debe expresar como un punto  $PM \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

**Ejemplo 2):** Hallar las coordenadas del punto medio ubicado entre los puntos  $P_1(-2,1)$  y  $p_2(4, 9)$

**Datos**

$$\begin{array}{l} x_1 = -2, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad y_2 = 9 \\ PM \left( \frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 9}{2} \right) = \left( \frac{2}{2}, \frac{10}{2} \right) = (1, 5) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{fórmula} \\ PM \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \end{array}$$

(1, 5) Es el punto medio entre  $P_1(-2,1)$  y  $p_2(4, 9)$ .

### EJERCICIOS 2.2:

**Ubique los puntos en el plano cartesiano y encuentre la distancia entre ellos y las coordenadas del punto medio**

- a)  $P_1(3,-3)$  y  $p_2(8, 9)$
- b)  $P_1(5,1)$  y  $p_2(9, 4)$
- c)  $P_1(6,-5)$  y  $p_2(-3, 7)$
- c)  $P_1(-1,6)$  y  $p_2(7,-9)$
- d)  $P_1(-2,3)$  y  $p_2(-4,-3)$
- e)  $P_1(-4,1)$  y  $p_2(4,7)$
- f)  $P_1(2,1)$  y  $p_2(2, 3)$
- g)  $P_1(-2,5)$  y  $p_2(3,- 7)$
- h)  $P_1(1,3)$  y  $p_2(2,3)$
- i)  $P_1(0,4)$  y  $p_2(4,0)$

### Ejercicios 2.2 b:

Traza el triángulo formado por cada trío de puntos, usa la distancia entre cada par de puntos para probar si es rectángulo, si es equilátero, si es isósceles, si es escaleno.

1)  $P_1(1,1)$ ,  $p_2(-2,7)$  y  $P_3(1,7)$

2)  $P_1(2,1)$ ,  $p_2(2,5)$  y  $P_3(5,1)$

3)  $P_1(3,2)$ ,  $p_2(8,2)$  y  $P_3(3,6)$

4)  $P_1(-1,3)$ ,  $p_2(-1,9)$  y  $P_3(2,9)$

## 2.3 GRÁFICAS DE ECUACIONES

Las leyes de los movimientos son relaciones matemáticas entre constantes y variables (fórmulas) y no podemos explorarlas sin algún conocimiento de las mismas.

### Descripción Matemática de una Curva

El sistema cartesiano designa a cualquier punto en el plano con un par de números  $(x, y)$  que son las distancias a dos ejes perpendiculares. Esos números se conocen como "coordenadas" del punto.

Una línea en el plano, recta o curva, contiene muchos puntos, cada uno con sus propias coordenadas  $(x, y)$ . Con frecuencia existe una fórmula ("ecuación") que relaciona  $x$  e  $y$ :

### Ejemplo:

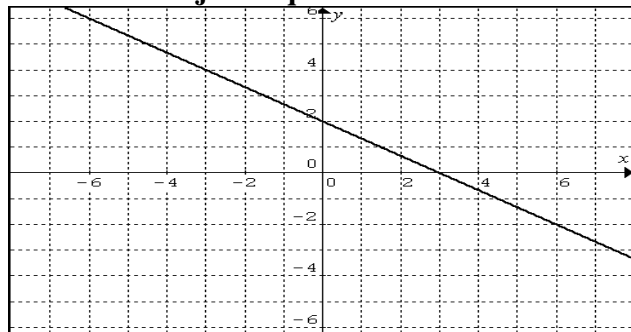
La línea recta tiene la relación:  $y = ax + b$

Graficar la línea recta  $y = \frac{-2}{3}x + 2$

Tomaremos una muestra de los valores que puede tomar el eje  $x$  para calcular los valores del eje  $y$

| X | -2   | -1  | 0 | 1   | 2   |
|---|------|-----|---|-----|-----|
| Y | 10/3 | 8/3 | 2 | 4/3 | 2/3 |

La curva dibujada aquí es



Donde con cualquier par de números  $(x, y)$ , y con esos puntos se obtiene como resultado una línea recta, en este caso.

**Otras relaciones más complicadas dan lugar a curvas.**

El trazado de una línea dado por tales relaciones ó por cualquier relación, hasta una simple observación.

**Ejemplo:** la temperatura según pasa el tiempo se puede expresar por medio de una gráfica.

**Hay Relaciones más complicadas dan gráficas que son curvas:**

**Por ejemplo:**

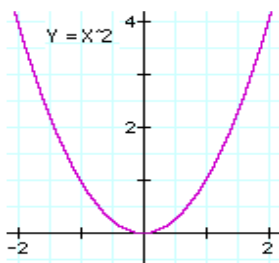
$y = a x^2$ , es una parábola, siendo  $a$  cualquier número real.

**Normalmente si la variable  $y$  está aislada o explícita (aunque no siempre), entonces, la fórmula tiene la forma:  $y = f(x)$**

**Ejemplo:** Grafique la ecuación  $y = x^2$

**Aquí  $a = 1$ , damos valores al eje  $x$ , calculamos la coordenada correspondiente a cada valor en el eje  $y$ , y así obtenemos**

|          |           |           |          |          |          |
|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| <b>X</b> | <b>-2</b> | <b>-1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> |
| <b>Y</b> | <b>4</b>  | <b>1</b>  | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>4</b> |



**Es una parábola  $y = x^2$**

**Donde  $f(x)$  simboliza "cualquier expresión que implique a  $x$ " o, en términos matemáticos, una "función de  $x$ "**

En general, la gráfica de *cualquier* ecuación de la forma  $y = ax^2 + c$ ,  $a \neq 0$

Es una parábola con vértice  $(0; c)$

Que abre hacia arriba si  $a > 0$  o hacia abajo si  $a < 0$ .

Cuando  $c = 0$ , la ecuación se reduce a:  $y = ax^2$  el vértice está en el origen  $(0, 0)$ .

Las parábolas también pueden abrir a la derecha o a la izquierda

$$x = ay^2 + c \quad \text{O en otras direcciones.}$$

## INTERSECTOS DE UNA GRÁFICA:

La gráfica de una ecuación puede cortar (o no) el eje de las  $x$  o al eje de las  $y$ .

Una intersección con el eje de las  $x$  se conoce también como *cero* de la

Gráfica de una ecuación o como *raíz* de una ecuación, aquí  $y = 0$ .

El punto de intersección con  $x$  tiene coordenadas  $(x, 0)$

En las intersecciones con el eje  $y$ ,  $x=0$  el punto de intersección tiene coordenadas  $(0, y)$

**Ejemplo: Encontramos las intersecciones en  $x$  y en  $y$  de la gráfica de  $y = x^2 + 3$ .**

a) Intersecciones en  $x$ : Hacemos  $y = 0$  en la ecuación y despejamos  $x$ .

$$0 = x^2 + 3$$

Obtenemos  $x^2 = -3$  ó  $x = \pm\sqrt{-3}$  no tiene punto intersección con  $x$  pues  $\pm\sqrt{-3}$  es una cantidad compleja, que no es real.

Por lo tanto, los puntos en que la gráfica corta el eje  $x$  no existen.

b) Intersecciones en  $y$ :

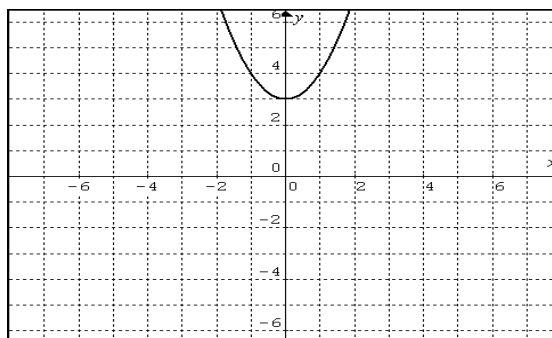
Hacemos  $x = 0$  en la ecuación y despejamos  $y$ .

$$y = 0 + 3$$

Obtenemos  $y = 3$

Así, el punto en que la gráfica cruza el eje  $y$  es  $(0, 3)$ .

Ver la gráfica:



## SIMETRÍA:

Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto*:

**Al eje  $y$ ,** Siempre que el punto  $(x, y)$  se encuentre en la gráfica cuando  $(-x, y)$  también

Lo esté.

La gráfica de  $y = x^2 + 3$  del ejemplo anterior tiene esta propiedad, ya que la

Sustitución de  $x$  por  $-x$  da la misma ecuación:

$$y = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3.$$

Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto Al eje x*:

Siempre que el punto  $(x, y)$  se encuentre en la gráfica cuando  $(x, -y)$  también lo esté,

Dado que siempre que la sustitución de  $y$  por  $-y$  de la misma ecuación.

### Ejemplo 1:

El ejercicio anterior  $y = x^2 + 3$  su grafica no es simétrica con respecto al eje  $x$  dado que al sustituir  $y$  por  $-y$  no logramos obtener la misma ecuación que teníamos al principio.

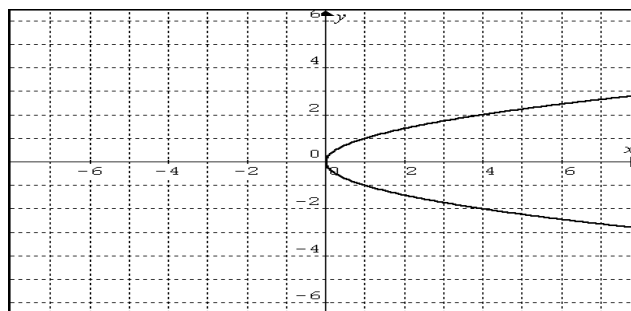
$$-y = x^2 + 3 \text{ y multiplicando por } -1 \text{ obtenemos } y = -x^2 - 3$$

### Ejemplo 2:

si tenemos  $x = y^2$  es simétrica con respecto al eje  $x$ , y su gráfica también lo es.

Al sustituir  $y$  por  $-y$  obtenemos la misma ecuación  $x = (-y)^2$ ,  $x = y^2$

Que es la ecuación que teníamos al principio. (Ver la gráfica)



## SIMETRÍA CON RESPECTO AL ORIGEN

Diremos que una gráfica es *simétrica con respecto al origen* si la sustitución Simultánea de  $x$  por  $-x$ , y la  $y$  por  $-y$  lleva a la misma ecuación dada al principio.

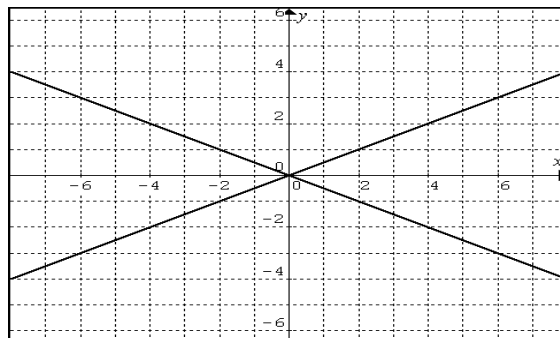
### Por ejemplo 3:

probar si  $4y^2 = x^2$ , es simétrica con respecto al origen

Cambiamos la  $x$  por  $-x$  y cambiamos  $y$  por  $-y$  de manera simultanea así

$4(-y)^2 = (-x)^2$  es equivalente a  $4y^2 = x^2$ . Es simétrica con respecto al origen

La gráfica de esta ecuaciones como sigue



Si una gráfica es simétrica con respecto a un eje, basta determinar la gráfica en la mitad del plano coordenado, ya que el resto se puede trazar Tomando una *imagen espejo*, o *reflexión*, en el eje apropiado.

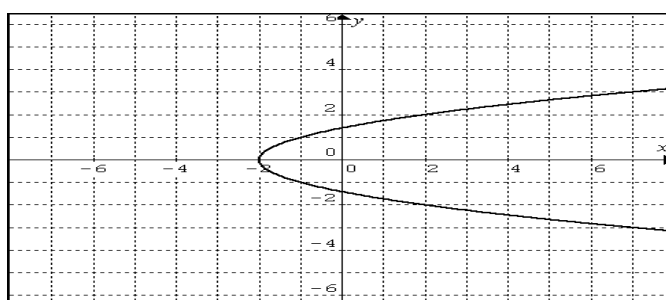
Graficar la ecuación  $y^2 - x - 2 = 0$  (ecuación expresada de manera implícita, la Y no esta aislada)

Solución: Despejando y se obtiene:  $y = \pm \sqrt{x + 2}$

Hacemos una tabla de valores:

|   |    |         |           |            |         |           |
|---|----|---------|-----------|------------|---------|-----------|
| X | -2 | -1      | 0         | 1          | 2       | 3         |
| Y | 0  | $\pm 1$ | $\pm 1.4$ | $1 \pm .7$ | $\pm 2$ | $\pm 2.2$ |

Luego escribimos los ejes de coordenadas y ubicamos los puntos encontrados y procedemos a unirlos para obtener la gráfica de la ecuación  $y^2 - x - 2 = 0$ , o lo que es lo mismo  $y = \pm \sqrt{x + 2}$



Generalmente cuando se pide realizar una gráfica de una ecuación se buscan los intersechos con x, con y, la simetría con x, con y, y con el origen.

### Ejercicio 2.3

Grafique las ecuaciones siguientes, encuentre los interseptos y la simetría con los ejes de coordenadas y con el origen si es que hay.

a)  $Y = 2x - 1$

b)  $Y = x^2 + 1$

c)  $Y = x^2 - 3$

d)  $Y = x^3 + 1$

e)  $Y^2 = -x^2 + 4$

f)  $Y = x^3$

g)  $2x - 4y + 6 = 0$

h)  $Y = 2x^2 - 4x - 1$

i)  $X - 2y + 8 = 0$

j)  $Y = 2x^2 - 4x + 3$

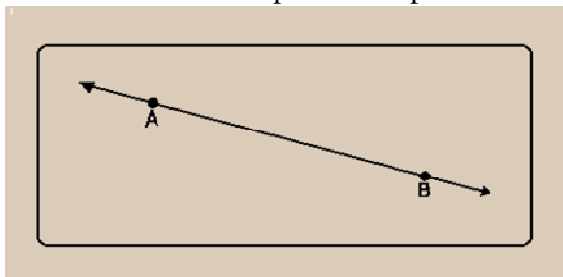
k)  $2x - y + 2 = 0$

l)  $Y = -x^2 + x + 1$

## 2.4 LAS RECTAS Y LAS ECUACIONES DE LA RECTA

Una línea recta se puede entender como un conjunto de puntos alineados en una única dirección

Uno de los postulados de la geometría Euclidiana dice "para determinar una recta solo es necesario dos puntos del plano.



### PENDIENTE DE UNA RECTA

Si tenemos una recta L que pasa por los puntos  $p_1(x_1, y_1)$  y  $p_2(x_2, y_2)$  al número

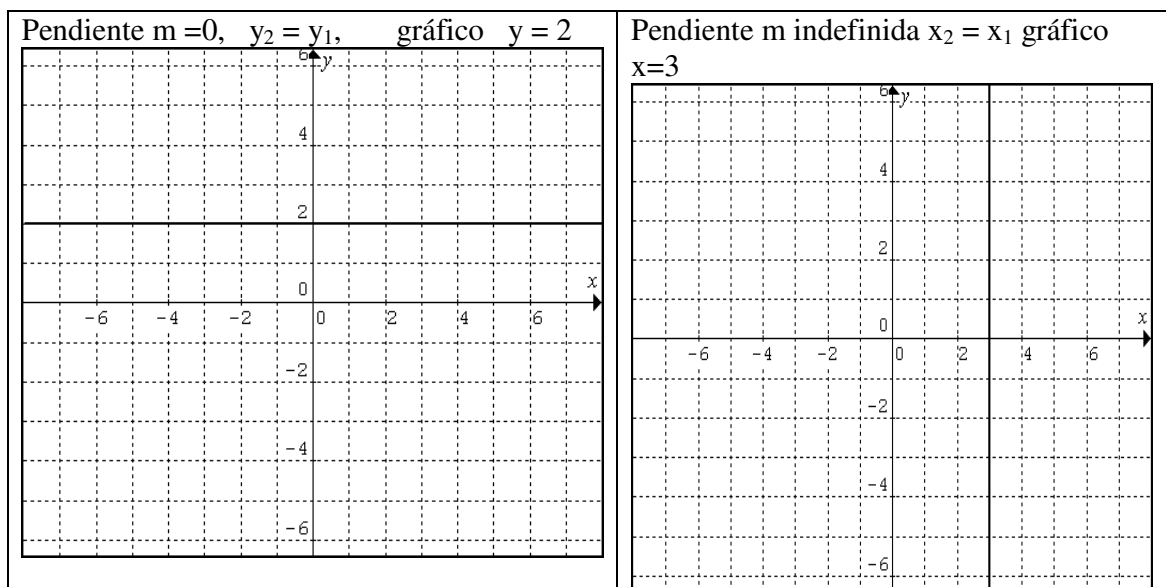
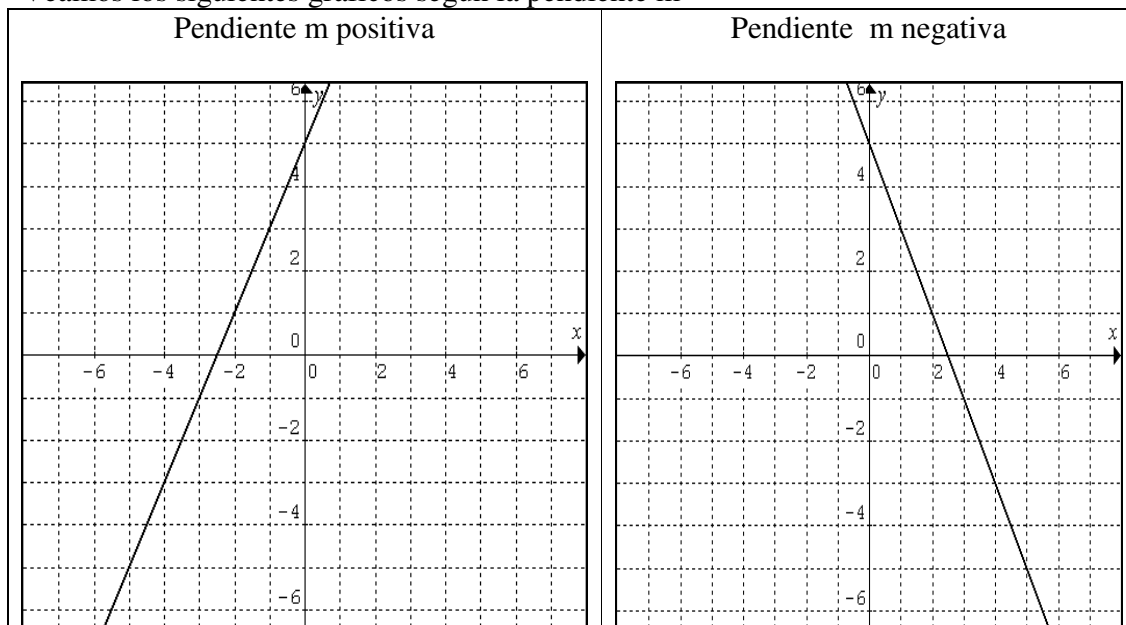
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{donde } x_2 \neq x_1, \text{ se le llama pendiente de la recta L}$$



La pendiente  $M = \frac{\text{cambio, diferencia o incremento en el eje } y}{\text{cambio, diferencia o incremento en el eje } x}$

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Veamos los siguientes gráficos según la pendiente m



El ángulo  $\theta$  que una recta tiene con el eje positivo de X, está relacionado con la pendiente M, en la siguiente ecuación:  $(m = \tan \theta)$  esta ecuación no la usaremos por ahora en este curso de matemática.

**Ejemplo:**

- 1) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos

$p_1(-2,3)$  y  $p_2(1, 5)$

Datos

$X_1 = -2$

$Y_1=3$

$X_2=1$

$Y_2=5$

Fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5 - 3}{1 - (-2)}$$

$$m = \frac{2}{1+2}$$

$$M = \frac{2}{3}$$

**EJERCICIOS 2.4 a**

- 2) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(2,-3)$  y  $p_2(-1, 7)$
- 3) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(-3,3)$  y  $p_2(6, 1)$
- 4) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(-2,2)$  y  $p_2(1, 1)$
- 5) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(0,4)$  y  $p_2(6, 2)$
- 6) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(8,5)$  y  $p_2(1, 4)$
- 7) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(5,3)$  y  $p_2(-1,-5)$
- 8) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(-2,4)$  y  $p_2(-4, 5)$
- 9) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(-12,5)$  y  $p_2(1, -5)$
- 10) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos  $p_1(1,3)$  y  $p_2(6,8)$

**ECUACION DE LA RECTA PENDIENTE INTERSECTO**

La ecuación  $y = mx + b$  es la ecuación de la recta pendiente - intercepto de la recta con el eje y.

Por lo tanto,  $m$  es la pendiente en esta ecuación, el valor de  $b$  puede ser interpretado como el punto donde la recta intercepta al eje y, es decir, el valor de  $y$  cuando  $x = 0$ . Este valor también es llamado ordenada al origen.

**ECUACION DE LA RECTA PUNTO - PENDIENTE**

Si la pendiente  $m$  de una recta y la recta pasa por el punto  $(x_1, y_1)$ , entonces la ecuación de la recta puede ser encontrada usando:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

**EJEMPLO:**

Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente  $m = -2/3$  y pasa por el punto  $(5, 4)$  y la ecuación pendiente intersección

**Datos**

$$M = -2/3$$

$$X_1 = 5$$

$$Y_1 = 4$$

formula  $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = \frac{-2}{3}(x - 5) \text{ si multiplicamos ambos lados de la igualdad por 3}$$

para eliminar el denominador tenemos

$$3(y - 4) = 3\left(\frac{-2}{3}\right)(x - 5) \text{ de ahí tenemos } 3y - 12 = -2(x - 5)$$

$$3y - 12 = -2x + 10$$

$$\text{y la ecuación de la recta es } 2x + 3y - 12 - 10 = 0$$

$$2x + 3y - 22 = 0$$

**La ecuación pendiente intersección se encuentra despejando la variable y.**

$$3y = -2x + 22 \text{ dividiendo ambos lados entre 3,}$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{-2x + 22}{3} \quad \text{aplicando la propiedad distributiva}$$

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{22}{3}, \quad \text{es decir que la pendiente}$$

$$m = -2/3 \quad \text{y el intersección } b = +22/3.$$

**ECUACION GENERAL DE LA RECTA**

La ecuación general de una recta es  $Ax + By + c = 0$ ,

Donde la pendiente está dada por  $m = \frac{-A}{B}$

Esto quiere decir que si tenemos la ecuación general de una recta también

tenemos la pendiente de esa recta.

**Ejemplo:**

Hallar la pendiente de una recta cuya ecuación es  $3x + 4y - 1 = 0$

$$A = 3$$

$$B = 4 \quad \text{fórmula } m = \frac{-A}{B} \quad \text{sustituyendo la pendiente es } m = \frac{-3}{4}$$

**RECTAS PARALELAS**

Dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  con pendiente  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente son paralelas entre sí,

Si ocurre que  $M_1 = M_2$

Esto es que dos o más rectas son paralelas si ambas poseen la misma pendiente, o si ambas son verticales y por ende no tienen pendiente indefinida;

### RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  con pendiente  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente son perpendiculares entre si,

Si ocurre que  $M_1 \cdot M_2 = -1$ , esto es que  $M_2 = -1/M_1$ , o  $M_1 = -1/M_2$ ,

se puede presentar el caso de una recta horizontal o con pendiente  $M = 0$  y otra vertical con pendiente indefinida que también son perpendiculares.

En palabras esto significa que:

(Dos o más rectas que son perpendiculares (forman un ángulo recto entre ellas) y el producto de sus pendientes es igual a -1, o una posee pendiente 0 y la otra no esta definida (infinita))

### Ejercicios

- 1) Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (2,8) y su pendiente  $m = -5$
- 2) Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (-2,8) y su pendiente  $m = -3/4$
- 3) Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (5,7) y su pendiente  $m = \frac{1}{3}$
- 4) Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (-5,-7) y su pendiente  $m = \frac{5}{9}$
- 5) Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto (3,2) y su pendiente  $m = \frac{4}{7}$
- 6) Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1,2) y B (-2,5).
- 7) Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (9,1) y B (-2,-5).
- 8) Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-1,2) y B (-7,3).
- 9) Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1,-8) y B (-2,2).
- 10) Escribe de todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (7,9) y B (3,-5).
- 11) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen o intercepto de la recta

$$-2x + 3y - 1 = 0.$$

12) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen o intercepto de la recta

$$5x + 2y + 4 = 0.$$

13) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen o intercepto con y, de la recta

$$3x + 7y - 7 = 0.$$

14) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen o intercepto de la recta

$$4x + 10y + 9 = 0.$$

15) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen o intercepto y, de la recta

$$x + 2y - 3 = 0.$$

16) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta  $-5x + 8y + 6 = 0$ .

17) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es paralela a la recta

$$S = 2x + y + 2 = 0.$$

18) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(-4,3), y es paralela a la recta

$$s = 4x - 7y + 2 = 0.$$

19) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es perpendicular a la recta

$$S = 2x + 2y - 1 = 0.$$

20) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(-1,-7), y es paralela a la recta

$$s = -9x + 3y + 2 = 0.$$

21) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es perpendicular a la recta

$$s = -x + 3y + 8 = 0.$$

22) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(4,-7), y es perpendicular a la recta

$$s = 5x + 2y + 12 = 0.$$

23) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(-1,1), y es paralela a la recta

$$S = -3x + 8y + 1 = 0.$$

24) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(9,4), y es perpendicular a la recta

$$s = -2x - 5y + 3 = 0.$$

25) De un paralelogramo ABCD conocemos A(1, 3), B(5, 1), C(-2, 0). Halla las coordenadas del vértice D(x,y).

26) Clasificar el triángulo determinado por los puntos: A(6, 0), B(3,0) y C(6, 3).

27) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta  $3x + 2y - 7 = 0$ .

II) Estudiar la posición relativa (paralelas entre si, perpendiculares entre si) de las rectas de ecuaciones:

1)  $2x + 3y - 4 = 0$

2)  $x - 2y + 1 = 0$

3)  $3x - 2y - 9 = 0$

4)  $4x + 6y - 8 = 0$

5)  $2x - 4y - 6 = 0$

6)  $2x + 3y + 9 = 0$

III) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es paralela a la recta  $s = 2x + y + 2 = 0$ .

IV) Se tiene el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A(3, 0), B(1, 4), C(-3, 2) y D(-1, -2). Comprueba que es un paralelogramo y determina su centro.

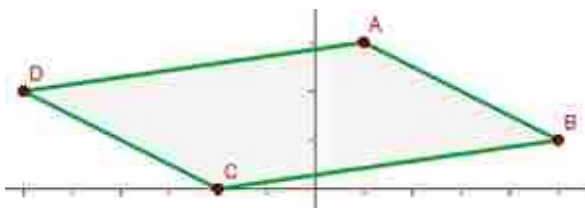
V) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1) y (-2, 2).

VI) Los puntos A (-1, 3) y B (3, -3), son vértices de un triángulo isósceles ABC que tiene su vértice C en la recta  $2x - 4y + 3 = 0$  siendo AC y BC los lados iguales. Calcular las coordenadas del vértice C.

VII) La recta  $r = 3x + n y - 7 = 0$  pasa por el punto A(3,2) y es paralela a la recta  $s = m x + 2y - 13 = 0$ . Calcula m y n.

VIII) Dado el triángulo ABC, de coordenadas A(0, 0), B(4, 0) y C(4, 4); calcula la ecuación de la mediana que pasa por el vértice B.

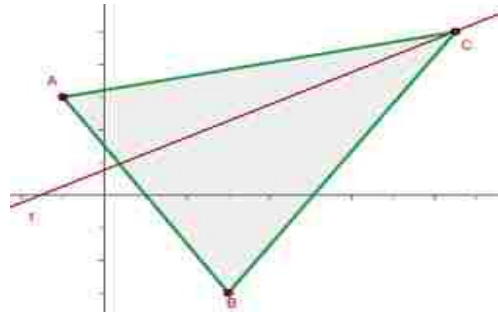
IX) De un paralelogramo ABCD conocemos A(1, 3), B(5, 1), C(-2, 0). Halla las coordenadas del vértice D.



X) Hallar la ecuación de la recta r, que pasa por A(1,5), y es paralela a la recta  $s = 2x + y + 2 = 0$ .

XI) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -3) y es paralela a la recta que une los puntos (4, 1) y (-2, 2).

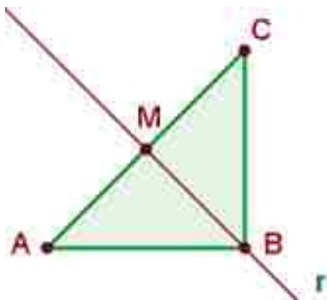
- XII) Los puntos  $A(-1, 3)$  y  $B(3, -3)$ , son vértices de un triángulo isósceles  $ABC$  que tiene su vértice  $C$  en la recta  $2x - 4y + 3 = 0$  siendo  $AC$  y  $BC$  los lados iguales.



Calcular las coordenadas del vértice  $C$ .

- XIII) La recta  $r = 3x + n y - 7 = 0$  pasa por el punto  $A(3, 2)$  y es paralela a la recta  $s = m x + 2y - 13 = 0$ . Calcula  $m$  y  $n$ .

- XIV) Dado el triángulo  $ABC$ , de coordenadas  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 0)$  y  $C(4, 4)$ ; calcula la ecuación de la mediana que pasa por el vértice  $B$ .



## 2.5 ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de todos puntos quienes Equidistan de un punto central.

### DEFINICIONES RESPECTO A LA CIRCUNFERENCIA

**Un arco:** una línea curva comprendida entre dos puntos de la circunferencia.

**Una cuerda:** un segmento de línea recta que está en contacto con dos puntos de la circunferencia.

**La circunferencia:** es la frontera o límite alrededor de un círculo.

**El diámetro:** la distancia más larga desde un punto de la circunferencia hacia el otro y pasando por el centro.

**El centro** es un punto ubicado en el mismo centro x.

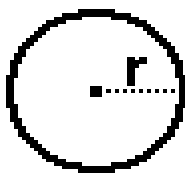
$\pi = 3.141592...$ , numero irracional que se origina de la relación (la circunferencia) / (el diámetro) de un círculo.

**El radio:** la distancia desde el centro de una circunferencia hasta cualquier punto de ella.

**Un sector circular:** es una porción del círculo (como rebanada de un pastel circular).

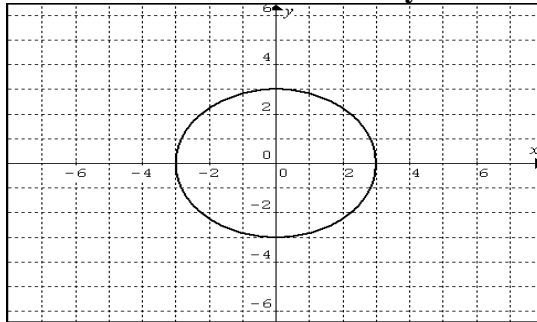
**La tangente de un círculo:** una línea, perpendicular a un radio de la circunferencia, que toca en solamente un punto al círculo.

Diámetro = 2 x radio del círculo,      radio =  $\frac{\text{diámetro}}{2}$





### Gráfica la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$



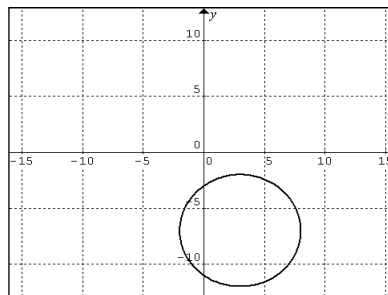
Puede observar que el centro de la circunferencia aquí está en el origen (0,0).

### ECUACION DE UNA CIRCUNFERENCIA QUE TIENE CENTRO EN EL PUNTO (H, K) y radio r

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

#### Ejemplos:

- 1) Hallar la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (3,-7) y cuyo radio mide 5 cms.



#### Datos

$$h = 3$$

$$k = -7$$

$$r = 5$$

fórmula  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-3)^2 + (y-(-7))^2 = 5^2$$

$$(x-3)^2 + (y+7)^2 = 5^2$$

$$x^2 - 2(3)x + (3)^2 + y^2 + 2(7)(y) + (7)^2 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49 = 25$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 14y + 49 - 25 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 14y + 9 + 49 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 33 = 0$$

- 2) Hallar la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (-2, 5) y pasa por el punto (1, 1).

#### Datos

**Observas** que no tenemos el radio, pero podemos buscarlo encontrando la distancia entre los dos puntos dados

$$X_1 = -2$$

$$Y_1 = 5$$

$$X_2 = 1$$

$$Y_2 = 1$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{Radio} = D_{p_1p_2} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - 5)^2}$$

$$\text{Radio} = D_{p_1p_2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (4)^2}$$

$$\text{Radio} = D_{p_1p_2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$\text{Radio} = 5$$

$$H = -2$$

$$K = 5$$

fórmula  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-(-2))^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

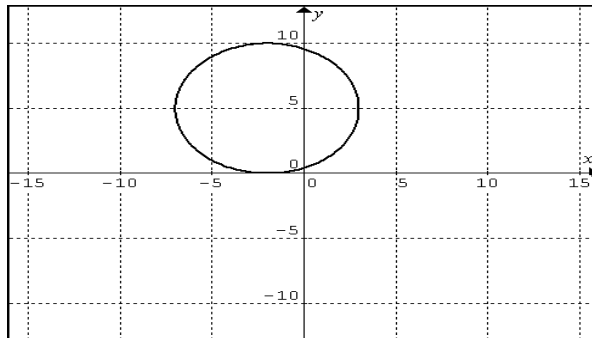
$$x^2 + 2(x)(2) + (2)^2 + y^2 + 2(y)(5) + (5)^2 = 25$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 25$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 - 25 = 0$$

$$x^2 + 4x + y^2 + 10y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 4 = 0$$



3) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (2, 1) y (-4, 9)

En este ejercicio no tenemos radio, ¿Cómo lo hallamos?

---

No tenemos El centro (h, k), ¿Cómo lo hallamos?

---

Si buscamos la distancia entre los dos puntos estamos encontrando la longitud del diámetro

$$X_1 = 2$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$Y_1 = 1$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (9 - 1)^2}$$

$$X_2 = -4$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$$

$$Y_2 = 9$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{36 + 64}$$

$$D_{p_1p_2} = \sqrt{100}$$

$D = 10$  como la distancia es 10, esa es la longitud del diámetro de ahí que el radio = 5, ¿Por qué? \_\_\_\_

Para obtener el centro  $(h, k)$  debemos encontrar las coordenadas del punto medio puesto que el centro está ubicado en el punto medio de un diámetro

$$PM\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right), PM\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{1+9}{2}\right), PM\left(\frac{-2}{2}, \frac{10}{2}\right)$$

$$P_m(-1, 5), \text{ entonces, } h = -1 \text{ y } k = 5$$

Ahora buscamos la ecuación de la circunferencia con los datos

$$h = -1 \text{ y } k = 5 \text{ y radio} = 5$$

$$\text{Fórmula } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

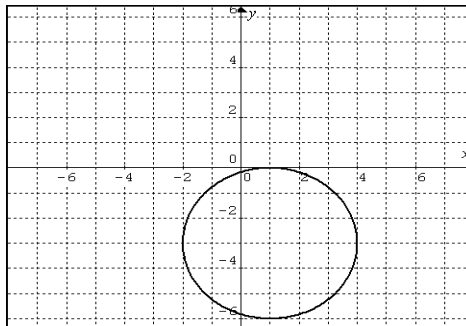
Hágalo

4) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto  $(1, -3)$  y que es tangente al eje  $x$

Vamos a graficar esta circunferencia

$$h = 1$$

$k = -3$  Como es tangente al eje  $x$ , eso nos dice que toca al eje  $x$  en un punto por lo tanto el valor absoluto de  $k$  es el valor del radio



$$h = 1 \quad k = -3 \quad r = 3 \quad \text{fórmula } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Sustituya los datos en la fórmula y encuentre la ecuación

Ejemplo 5): Encontremos la ecuación de una circunferencia que tiene centro  $C(-2, 3)$  y contiene el punto  $D(4, 5)$ .

Puesto que  $D$  está en la circunferencia, el radio  $r$  es  $d(C; D)$ . Por la fórmula de la distancia,

$$r^2 = (4 + 2)^2 + (5 - 3)^2 = 36 + 4 =$$

$$r = \sqrt{40}$$

Escribiendo la ecuación estándar de una circunferencia con  $h = -2, k = 3$  y

$$r = \sqrt{40}.$$

Obtenemos

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{40})^2$$

Equivalentemente,

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0$$

Obsérvese del ejemplo anterior que al elevar al cuadrado los términos de una

Ecuación de la forma  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

y simplificar lleva a una ecuación

del tipo  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

### **Ejemplo:**

Encontrar el centro y radio del circunferencia cuya ecuación es:  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

*Debemos agrupar los términos que tienen x, y los términos que tiene y para completar cuadrados*

$$(x^2 - 4x + \underline{\quad}) + (y^2 + 6y + \underline{\quad}) = 3:$$

*El tercer termino en x es  $(4/2)^2 = (2)^2 = 4$*

*El tercer termino en y es  $(6/2)^2 = (3)^2 = 9$*

*Completando cada cuadrado tenemos y sumando en ambos lados  $4 + 9$  tenemos*

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 3 + 4 + 9,$$

factorizamos cada paréntesis obtenemos:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \text{ comparando con la ecuación de la circunferencia}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \text{ de ahí que } h = 2, k = -3, r^2 = 16, r = \sqrt{16}$$

$r = 4,$  El centro es  $(2, -3)$  y el radio es 4

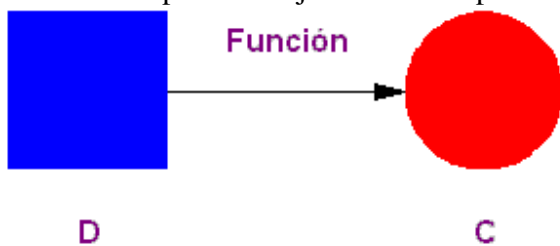
### **Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene**

- d) Centro en el punto (2,9) y radio 7
  - e) Centro en el punto (-2,5) y radio 3
  - f) Centro en el punto (8,-9) y radio 6
  - g) Centro en el punto (4,9) y radio 8
  - h) Centro en el punto (2,-3) y radio 2
  - i) Centro en el punto (1,0) y radio 5
  - j) Centro en el punto (0,9) y radio 4
- 1) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(5,-7) y que es tangente al eje y
  - 2) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(3,-3) y que es tangente a ambos ejes.
  - 3) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (3, 1) y ( 4, 2)
  - 4) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(1,6) y que es tangente al eje x
  - 5) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(5,2) y que es tangente al eje y
  - 6) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (4, 1) y (1,-3)
  - 7) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (8,7) y ( 1, -3)
  - 8) Hallar la ecuación de una circunferencia con centro en el punto (2, -5) y pasa por el punto(7, 7)
  - 9) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (2, 1) y ( 4, 3)
  - 10) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(2,2) y que es tangente a ambos ejes

- 11) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(5,4) y que es tangente al eje x
- 12) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (1,9) y ( -4, -3)
- 13) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(-5,-2) y que es tangente al eje y
- 14) Hallar la ecuación de una circunferencia cuyos extremos de un diámetro son (-2, - 1) y (6,3)
- 15) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto(-4,4) y que es tangente a ambos ejes

### **LAS FUNCIONES:**

Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.



Hay varias formas de expresar una función:

Al primer conjunto (el conjunto D) se le da el nombre de dominio.

Al segundo conjunto (el conjunto C) se le da el nombre de rango, codominio o imagen.

### **Ejemplo:**

Una función se puede concebir también como un aparato de cálculo. La entrada es el dominio, los cálculos que haga el aparato con la entrada son en sí la función y la salida sería el rango, codominio o la imagen.

Esta forma de concebir la función facilita el encontrar su dominio.



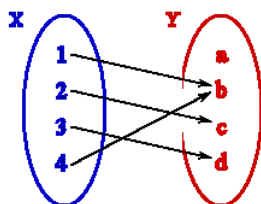
**Notación:** al número que "entra" a la máquina usualmente lo denotamos con la letra,  $x$  .  
Al número que "sale" de la máquina lo denotamos con el símbolo  $f(x)$  ó  $y$ .



### Definición alternativa:

En matemáticas, una función, aplicación o mapeo  $f$  es una relación entre un conjunto dado  $X$  (el dominio) y otro conjunto de elementos  $Y$  (el rango o codominio) de forma que a cada elemento  $x$  del dominio le corresponde un elemento único del codominio o rango se denota por  $F(x)$ .

### Funciones por extensión



Esta función se puede representar así:

$$F = \{ (1,b), (2,c), (3,d), (4,b) \}$$

### Observas que:

De cada par ordenado no se repite el primer elemento, mientras que el 1 y 4 tienen la misma imagen  $b$ .

Si el primer elemento de un par ordenado se repite en otro par ordenado como primer elemento entonces no es una función.

Como una función es una relación entre dos variables, de forma que a cada valor de la variable independiente  $x$ , le asocia un único valor de la variable dependiente  $y$ , que llamaremos imagen de  $x$ .

Decimos que  $y$  es función de  $x$ , y lo representamos o denotamos por:

$$Y = f(x)$$

$Y = f(x)$ , se lee “ $Y$  es igual a  $f$  de  $x$ ”

### Significados de $Y = f(x)$

- 1)  $X$  se transforma en  $Y$  al operar mediante  $f$  (por medio del enunciado de  $f$ )
- 2)  $X$  se relaciona con  $y$  mediante  $f$

- 3) Y es una función de x, o sea que, el valor de Y depende del valor de X
- 4) Y es la imagen de x por medio de la función f.
- 5) X es variable independiente, Y es variable dependiente

los valores de X no dependen de Y, los valores de x serán todos los valores que puede tomar la operación que define la función para que se pueda realizar dicha operación, este conjunto de valores se llama **dominio** de la función.

Los valores de Y serán todos los valores que puedan ser resultados de trabajar con los valores de x en la operación que define la función, estos valores de Y forman el **rango**.

### **FUNCIONES ALGEBRAICAS**

Estas funciones tienen como mandato o mapeo una expresión algebraica.

#### **Ejemplos:**

a)  $F(x) = 2x - 5,$

b)  $F(x) = 2x^2 + 8x - 3$

c)  $F(x) = x^3 + 7x + 1$

#### **Ejemplo 1:**

**en la función  $F(x) = 2x^2 + 8x - 3$  hallar su dominio**

Como F es una función polinómica (un polinomio) su dominio es todo el conjunto de los números reales, porque x acepta cualquier valor y la operación se realiza sin ninguna restricción.

**Ejemplo 2:** en la función  $F(x) = \sqrt{x}$  hallar su dominio y su rango

Como a F la define “la operación raíz cuadrada de x”, y la radicación es una operación que tiene restricciones cuando el índice es un número par el dominio de f es el conjunto de todos los números reales no negativos  $\text{dom } F = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\},$

¿si x tomara valores negativo qué sucedería con los resultados de F?\_\_\_\_\_

---



---

El Rango de F serán todos los resultados que se puedan obtener al usar los valores del dominio, aquí solo se obtienen numero reales cero o positivos.

Rango números reales no negativos

Rango de  $F = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\},$

#### **Ejemplo 3.**



Encuentre el dominio de  $F(x) = \frac{3}{x-2}$

Observas la operación que define a  $F(x)$

¿Cuál es? \_\_\_\_\_

¿Qué restricciones numéricas tiene esa operación?

Si  $x = 2$ , que sucede con el denominador \_\_\_\_\_

¿Qué valor toma? \_\_\_\_\_ ¿es posible? \_\_\_\_\_

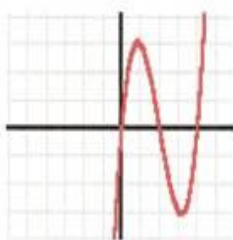
Eso significa que la división tiene restricción cuando el denominador es cero y por tal motivo los valores que hacen cero el denominador de una división no pueden pertenecer al dominio de esa función

**dom  $f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$**

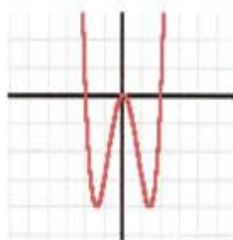
Observas cada gráfico en el eje  $x$  y en el eje  $y$

### Polinómicas

1  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

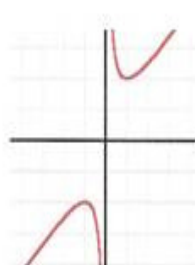


2  $y = x^4 - 4x^2$

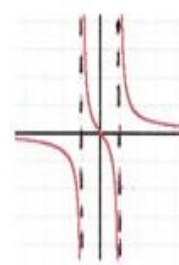


### Racionales

3  $y = \frac{x^2+1}{x}$

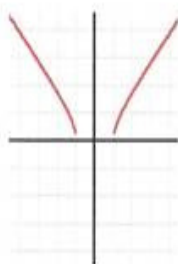


4  $y = \frac{x}{x^2-1}$

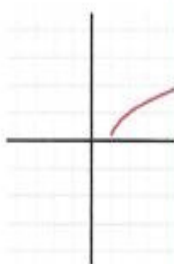


### Irracionales

5  $y = \sqrt{x^2-1}$

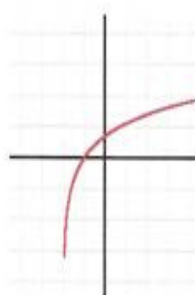


6  $y = \sqrt{x-1}$

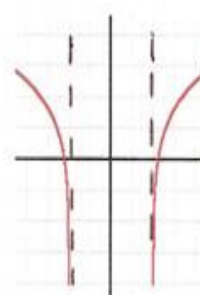


### Logarítmicas

7  $y = L(x+2)$



8  $y = L(x^2-4)$



Los valores que recorre cada gráfica en el eje  $x$  forman el dominio de esa gráfica,

Los valores que recorre cada gráfica en el eje  $y$  forman los valores del rango de esa gráfica.

## Ejemplos Resueltos

### Encuentra el dominio de cada función

1.  $f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $\mathbb{R} - \{1\}$

2.  $f(x) = \frac{2}{x^2+2x+1} \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $\mathbb{R} - \{-1\}$

3.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$  sin solución.  $\Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $\mathbb{R}$

4.  $f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $[-1, \infty)$

5.  $f(x) = \sqrt{x^2-6x+8} \Rightarrow x^2-6x+8 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

6.  $f(x) = \log x^2 - 6x + 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) > 0 \Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$   
\*\*\* El 2 y el 4 no los incluimos, el logaritmo daría 0 y no existe.

7.  $f(x) = \log(x+1) \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow$  Dominio  $f(x)$ :  $(-1, \infty)$   
\*\*\* El -1 no lo incluimos, el logaritmo daría 0 y no existe.

8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Denominador irracional, el dominio sería desde } [1, \infty) \\ \text{Como también es racional para } x=1 \text{ no existe} \end{cases} \Rightarrow$  Dom  $f(x)$ :  $(1, \infty)$

9.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Denominador irracional, el dominio sería } (-\infty, -2] \cup [2, \infty) \\ \text{Para } x = \pm 2 \text{ la función } \nexists \end{cases} \Rightarrow$  Dom  $f(x)$ :  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

10.  $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} \Rightarrow \frac{x+3}{x-2} \geq 0$   
Resolvemos la inecuación  $\Rightarrow$  tiene sentido para:  $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$   
Como es racional para  $x=2$   $\nexists \Rightarrow$  Dom  $f(x)$ :  $(-\infty, -3] \cup (2, \infty)$

**Hallar el dominio de las siguientes funciones, opcional recuerda que: (la gráfica te puede ayudar)**

- 1)  $F(x) = 2x - 3$
- 2)  $F(x) = 3x + 5$
- 3)  $F(x) = x^2 + 6x - 1$
- 4)  $F(x) = x^2 + 4x + 3$

$$5) f(x) = \frac{2x}{x+5}$$

$$6) f(x) = \frac{7}{x-3}$$

$$7) f(x) = \frac{x}{x^2-9}$$

$$8) f(x) = \frac{3x}{x^2+9}$$

$$9) f(x) = \frac{x+1}{x^2-25}$$

$$10) f(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$$

$$11) f(x) = \frac{5x+2}{x^2-16}$$

$$12) f(x) = \sqrt{2x-1}$$

$$13) f(x) = \sqrt[3]{2x+6}$$

$$14) f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$15) f(x) = 5 + \sqrt{x-10}$$

$$16) f(x) = 3 - \sqrt{2x+8}$$

$$17) f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

$$18) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x-12}}$$

$$19) f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{2x+8}}$$

$$20) f(x) = \sqrt{\frac{2}{x-4}}$$

$$21) f(x) = \sqrt{\frac{-2}{x+6}}$$

## VALORES FUNCIONALES

Ejercicios si  $F(x) = 2x - 3$  hallar el valor de:

- a)  $F(5)$
- b)  $F(0)$
- c)  $F(-1)$
- d)  $F(1/4)$

Basta con sustituir la variable  $x$  de la función por el valor que se te pide y realiza la operación en cuestión.

- a)  $F(5) = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$
- b)  $F(0) = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$
- c)  $F(-1) = 2(-1) - 3 = -2 - 3 = -5$
- d)  $F(1/4) = 2(1/4) - 3 = 1/2 - 3 = -5/2$

1) Dado  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$  hallar el valor de:

- a)  $F(2) = \frac{2}{2^2 - 9} = \frac{2}{4 - 9}$        $f(x) = -\frac{2}{5}$
- b)  $F(3) = \frac{3}{(3)^2 - 9} = \frac{3}{9 - 9}$        $f(x) = \frac{3}{0}$  la división entre cero es indefinida
- c)  $F(-3) = \frac{3}{(-3)^2 - 9} = \frac{3}{9 - 9}$        $f(x) = \frac{3}{0}$  la división entre cero es indefinida
- d)  $F(0) = \frac{0}{0^2 - 9} = \frac{0}{0 - 9},$        $f(x) = \frac{0}{-9} = 0$

Ejercicios : Dadas las funciones  $F(x) = x^2 + 6x - 1$ ,  $G(x) = \frac{6}{x - 3}$ ,

$H(x) = 3 - \sqrt{2x + 9}$ ,  $P(x) = -x^2 + 2x + 4$  Hallar los valores de:

- a)  $F(2)$
- b)  $F(-2)$
- c)  $F(0)$
- d)  $F(1)$
- e)  $F(-1)$
- f)  $G(5)$

- g)  $G(-3)$
- h)  $G(0)$
- i)  $G(3)$
- j)  $G(-1)$
- k)  $P(3)$
- l)  $P(-4)$
- m)  $P(0)$
- n)  $P(7)$
- o)  $P(-1)$
- p)  $H(8)$
- q)  $H(-2)$
- r)  $HF(0)$
- s)  $H(1)$
- t)  $H(-5)$
- u)  $P(x + 3)$
- v)  $F(x - h)$
- w)  $P(x + h) + P(x)$
- x)  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0.$
- y)  $\frac{p(x+h) - p(x)}{h}, h \neq 0.$
- z)  $\frac{G(x+h) - G f(x)}{h}, h \neq 0.$

## Funciones pares e impares

Una función es par si  $f(-x) = f(x)$ , y la función es impar si  $f(-x) = -f(x)$ .

### Ejemplos 1:

Diga si la función  $f(x) = x$  es par, impar o ninguna de las dos

Buscamos  $f(-x)$

$$f(-x) = -x$$

Entonces:  $f(-x) = -f(x)$  la función es impar

### Ejemplos 2: Diga si la función $f(x) = x^2$ es par, impar o ninguna de las dos

Buscamos  $f(-x) =$  y  $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

Entonces:  $f(-x) = f(x)$ .

la función es par.

### Ejemplos 3: Diga si la función $f(x) = 5x^2 + 3x$ es par, impar o ninguna de las dos

Buscamos  $f(-x) = 5(-x)^2 + 3(-x)$ ,  $f(-x) = 5x^2 - 3x$  ni par ni impar

Las funciones pares son simétrica con respecto al eje y.

Las funciones impares son simétricas con respecto al origen.

(Para graficarla basta con calcular una parte de la grafica y la otra parte la realizamos por simetría)

## EJERCICIOS:

Diga si la función dada es par, impar, o ninguna de las dos

1)  $F(x) = 3x^3 - 2x$

2)  $F(x) = 5x^5 + 3x^2 - 1$

3)  $F(x) = 7x^3 - 4x + 3$

4)  $F(x) = 2x^4 + 9x^2$

5)  $F(x) = 5x^4 + 2x^2 - 6$

6)  $F(x) = 2x^6 + 5x^4 - 3x^2$

## Gráficas de funciones:

Es muy interesante para observar el comportamiento de una función representarla gráficamente.

## La Gráfica de una función:

### Definición:

“sea  $f$  una función, entonces la gráfica de  $f$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  en el plano (en  $\mathbb{R}^2$ ) para los cuales  $(x, y)$  es un par ordenado en  $f$ ”

La técnica para graficar una función depende en gran medida del tipo de función. Es conveniente hacer una tabla de valores donde estén representados los valores dados a  $x$  y los correspondientes hallados para  $y$ .

Estudiaremos algunos ejemplos de gráficas de funciones, la observaremos, y la analizaremos

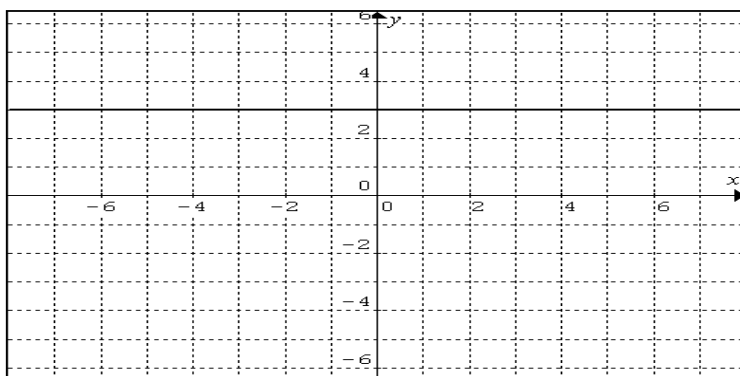
### EJEMPLO DE GRAFICAS DE FUNCIONES:

La función Constante  $F(x) = a_0$ , donde  $a_0$  es un numero real

**Ejemplo:**

**Gráfica  $F(x) = 3$  hacemos una tabla de valores**

|          |           |           |          |          |          |
|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| <b>X</b> | <b>-2</b> | <b>-1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> |
| <b>Y</b> | <b>3</b>  | <b>3</b>  | <b>3</b> | <b>3</b> | <b>3</b> |



Observas que es una recta horizontal que pasa por  $y = 3$ , no sube, no baja por eso se llama constante, sus valores no cambian en el rango que solo es 3.

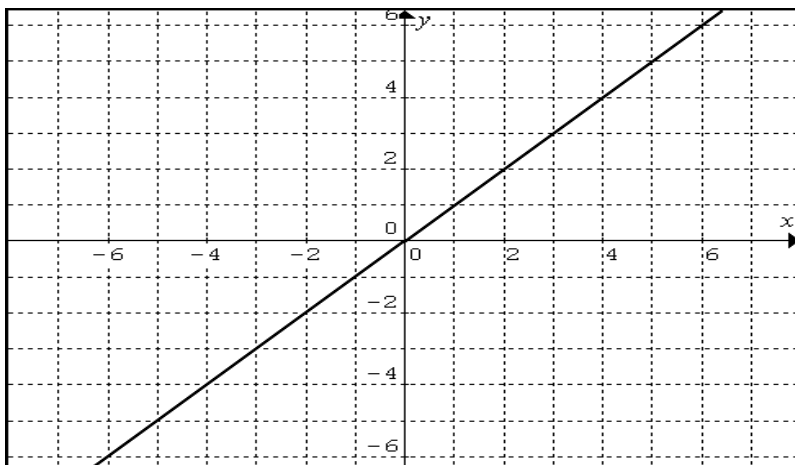
### La función identidad: $F(x) = x$

es llamada la función identidad ( $y = x$ ) en donde los valores de  $x$  son los mismos valores que toma  $y$  o  $F(x)$ , el dominio y el rango son iguales al conjunto  $R$ .

Hacemos una tabla de valores

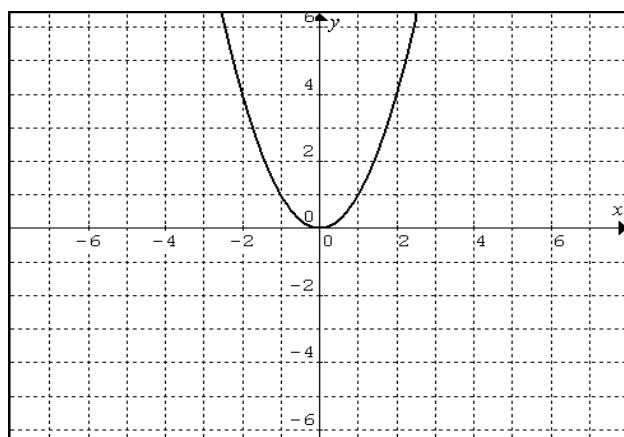
|          |           |           |          |          |          |
|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|
| <b>X</b> | <b>-2</b> | <b>-1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> |
| <b>Y</b> | <b>-2</b> | <b>-1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> |

Su gráfica es:



**Grafique  $F(x) = x^2$  hacemos una tabla de valores**

|   |    |    |   |   |   |
|---|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 |



## **FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO**

La función valor absoluto asocia a cada número su valor absoluto decir esta función se puede escribir descompuesta en dos tramos:

$$y = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

por la definición de valor absoluto

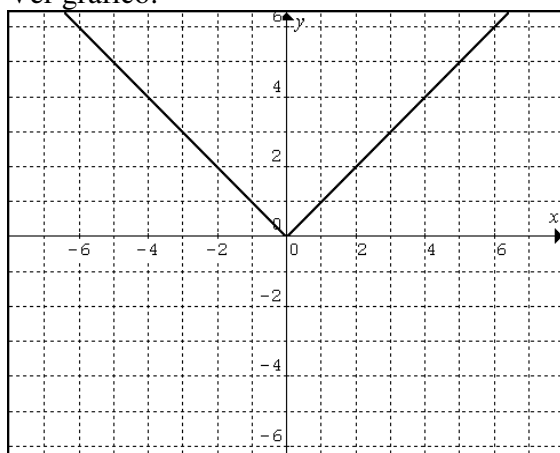
Observa la gráfica siguiente y comprueba que el valor absoluto de una función se puede obtener transformando la parte negativa en positiva.

**GRAFICAR  $F(X) = |X|$**

|   |    |    |   |   |   |
|---|----|----|---|---|---|
| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| Y | 2  | 1  | 0 | 1 | 2 |



Ver grafico:



.- Modifica el valor de la abscisa,  $x$ , y observa cómo se obtiene la función valor absoluto al transformar simétricamente el valor negativo de  $y$  en su correspondiente valor positivo.

1.- Modifica el parámetro  $a$  y comprueba cómo se van obteniendo las distintas funciones valor absoluto.

2.- Expresa cada una de las funciones que obtienes al modificar  $a$  como una función a trozos (debes calcular el punto de corte con el eje de abscisas).

La función valor absoluto de una función de primer grado es continua, decreciente en el primer tramo y creciente en el segundo.

### Función signo

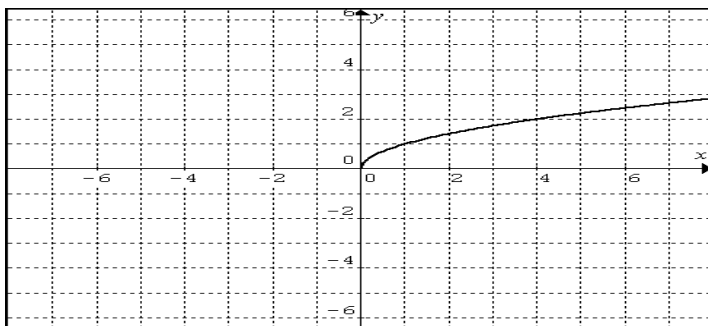
La función signo se define como  $y = x/|x|$ , de forma que hace corresponder el valor 1 a los números positivos y -1 a los negativos. Se puede expresar:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Esta función no está definida en el punto 0, ya que el cociente  $0/0$  es indeterminado.

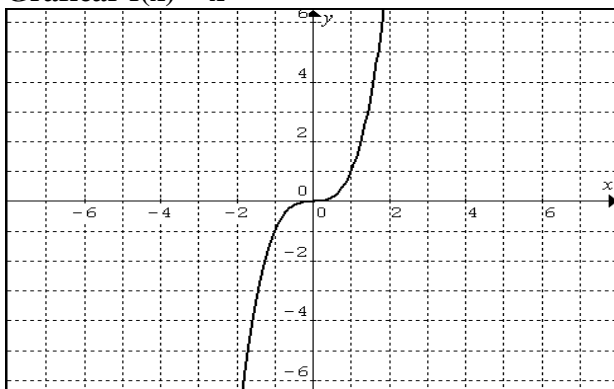
**Función Raíz cuadrada**  $f(x) = \sqrt{x}$

Graficar  $f(x) = \sqrt{x}$



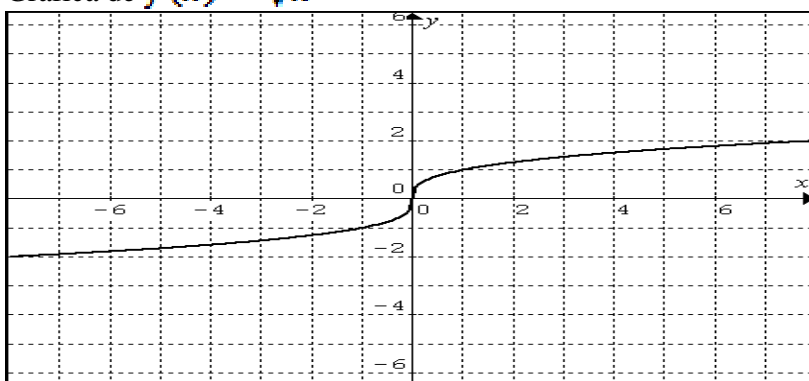
**FUNCION CÚBICA  $F(X) = X^3$**

**Graficar  $f(x) = x^3$**



**Función raíz cubica**

Gráfica de  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

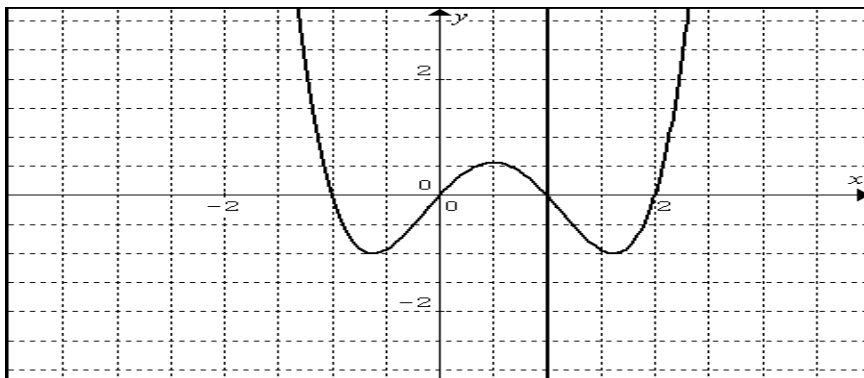


**PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL PARA LA GRAFICA DE UNA FUNCIÓN:**

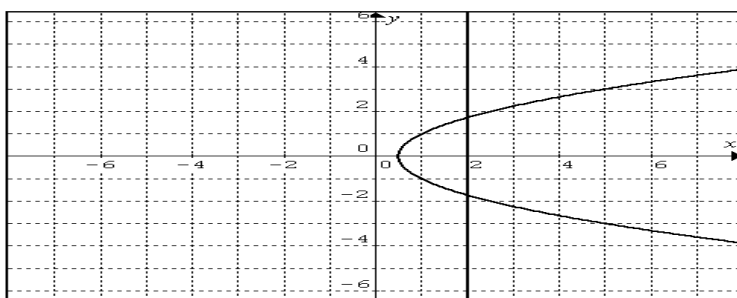
Si tenemos una gráfica y queremos saber si pertenece a una función basta con trazar una recta vertical y si pudiera tocar dos puntos de la gráfica entonces no es una función, si por el contrario no existiera lugar alguno en donde la recta vertical trazada nunca pueda tocar dos o mas puntos de la gráfica entonces el gráfico corresponde a una función

Ejemplo:

Tracemos la gráfica de:  $F(x) = (x-2)(x+1)(x-1)(x)$



Observas que: la gráfica no posee ningún valor a lo largo del eje x en donde se pueda tocar más de un punto y por tal motivo trazamos la recta vertical  $x=1$  para ver que solo toca un punto del gráfico



La gráfica de la parábola  $y^2 = 2x - 1$  No es una función puesto que la vertical  $x=2$  toca dos puntos de la gráfica.

### GRÁFICAS TRASLADADAS:

Las gráficas de algunas funciones se pueden trasladar o mover en los ejes coordenados.  
Por ejemplos:

#### a) MOVIMIENTO EN EL EJE Y

La función  $F(x) + K$  sube  $K$  unidades a la gráfica de  $F(x)$

La función  $F(x) - K$  baja  $K$  unidades a la gráfica de  $F(x)$

#### b) MOVIMIENTO EN EL EJE X

La función  $F(x - h)$  mueve  $h$  unidades a la derecha a la gráfica de  $F(x)$

La función  $F(x + h)$  mueve  $h$  unidades a la izquierda a la gráfica de  $F(x)$

#### c) MOVIMIENTO SIMULTÁNEO EN AMBOS EJES ( EL EJE X, EL EJE Y)

La función  $F(x-h) + K$  mueve  $h$  unidades a la derecha y sube  $K$  unidades a la gráfica de  $F(x)$

La función  $F(x-h) - K$  mueve  $h$  unidades a la derecha y baja  $K$  unidades a la gráfica de  $F(x)$

La función  $F(x+h) + K$  mueve  $h$  unidades a la izquierda y sube  $K$  unidades a la gráfica de  $F(x)$

La función  $F(x+h) - K$  mueve  $h$  unidades a la izquierda y baja  $K$  unidades a la gráfica de  $F(x)$

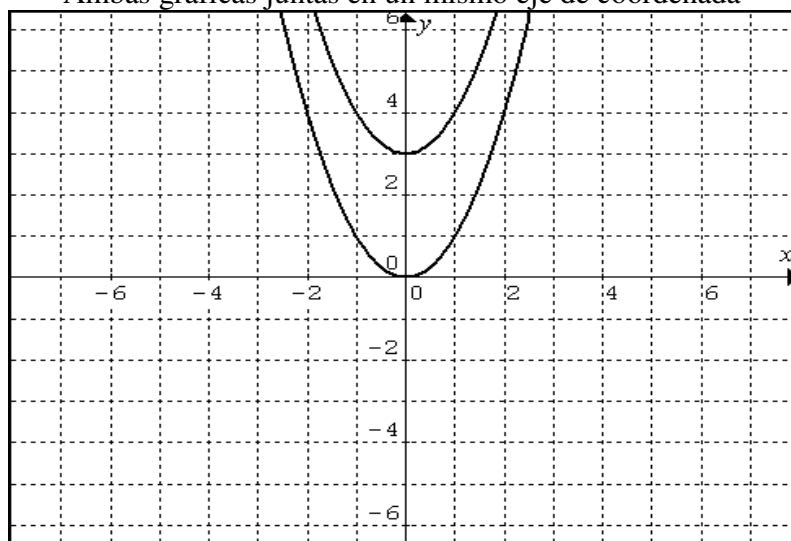
**Ejemplo: a partir del gráfico de  $F(x) = x^2$  grafique**

a)  $F(x) = x^2 + 3$

Observa que la gráfica de  $F(x) = x^2 + 3$

la gráfica va a ser la misma de  $F(x) = x^2$ , pero 3 unidades mas arriba,  
Fijaste el punto que está en el origen en  $F(x) = x^2$  que esta 3 unidades mas arriba en el gráfico de  $F(x) = x^2 + 3$

Ambas graficas juntas en un mismo eje de coordenada



b)  $F(x) = x^2 - 4$

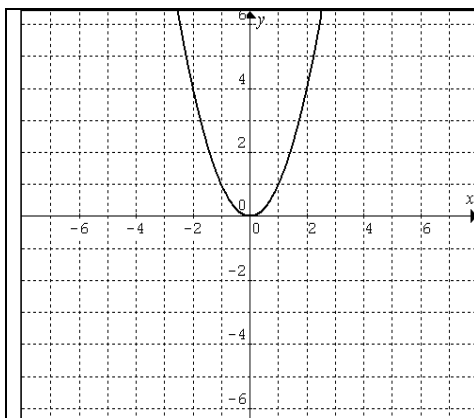
c) ¿Qué sucederá con la gráfica de  $F(x) = x^2 - 4$ ?

---

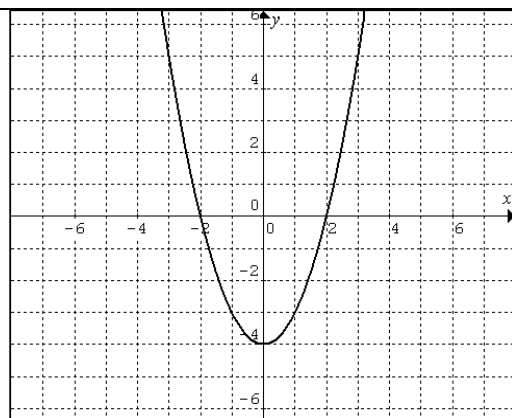


---

Veamos:

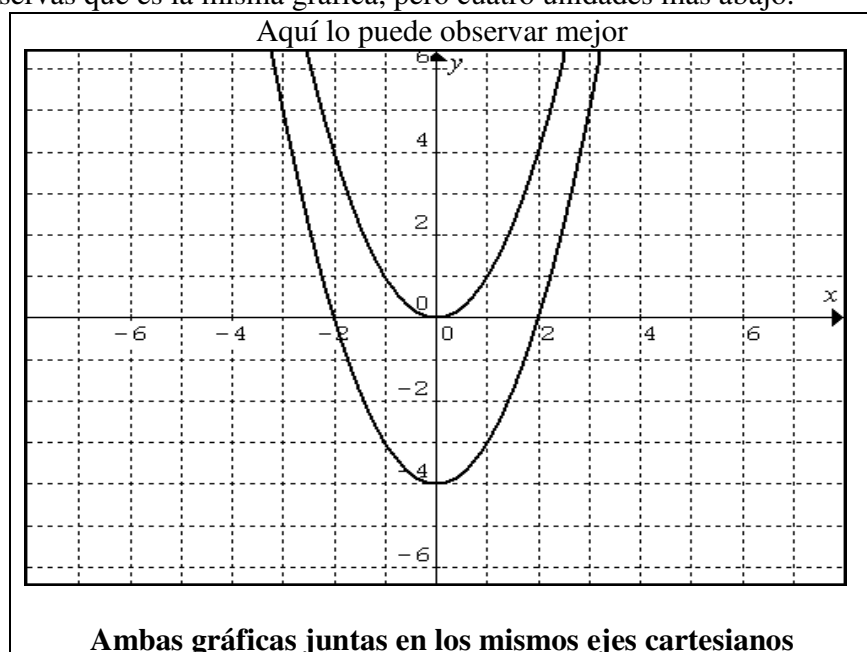


Gráfica de  $f(x) = x^2$



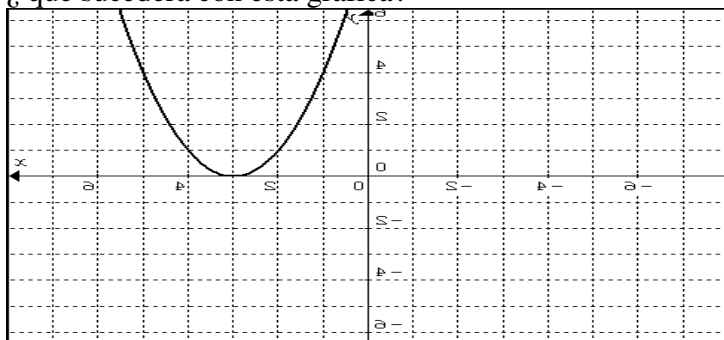
Gráfica de  $f(x) = x^2 - 4$

Observas que es la misma gráfica, pero cuatro unidades mas abajo.



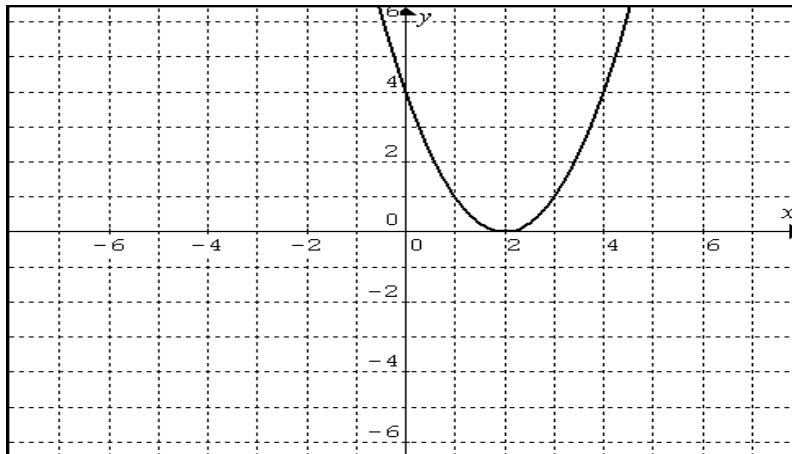
d)  $F(x) = (x + 3)^2$

¿ que sucederá con esta gráfica?



e)  $F(x) = (x - 2)^2$

¿ que sucederá aquí? \_\_\_\_\_



2) Haga las gráficas siguientes partiendo de la gráfica de  $f(x) = x^2$

f)  $F(x) = (x - 1)^2 + 2$

g)  $F(x) = (x+3)^2 - 4$

3) A partir de la gráfica de  $F(x) = |x|$ , haga los siguientes gráficos

a)  $F(X) = |x| + 2$

b)  $F(X) = |x| - 3$

c)  $F(X) = |x - 1|$

d)  $F(X) = |x + 4|$

e)  $F(X) = |x-2| + 3$

f)  $F(X) = |x+1| - 4$

4) A partir de la gráfica de  $F(x) = \sqrt{x}$ , haga los siguientes gráficos

a)  $F(x) = \sqrt{x} + 4$

b)  $F(x) = \sqrt{x} - 2$

c)  $F(x) = \sqrt{x+1}$

d)  $F(x) = \sqrt{x+2} - 5$

4) A partir del gráfico de  $F(x) = x^3$ , grafique

a)  $F(x) = x^3 - 2$

b)  $F(x) = x^3 + 2$

c)  $F(x) = (x-4)^3$

d)  $F(x) = (x+1)^3$

e)  $F(x) = (x+3)^3 - 1$

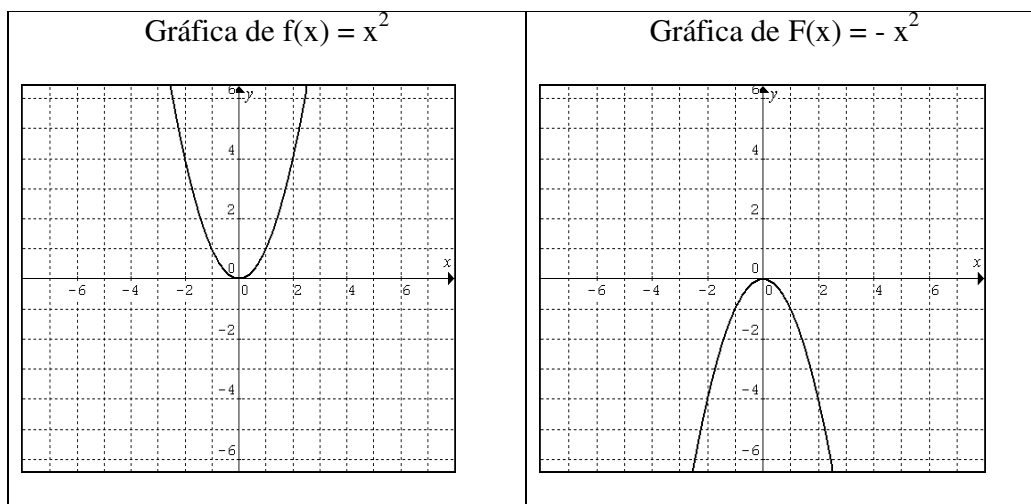
### LAS REFLEXIONES

-  $f(x)$  invierte la gráfica de  $f(x)$ , o sea que se observa la grafica como en el espejo.

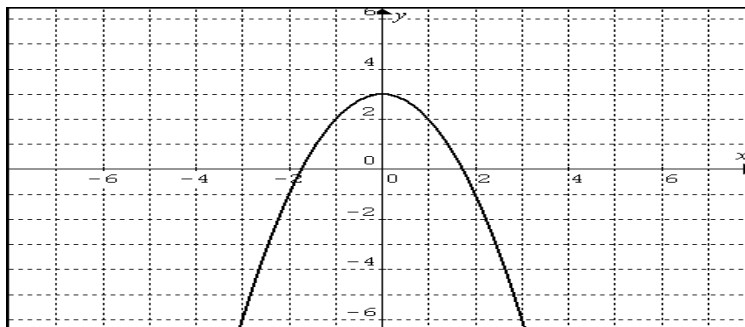
Esto significa que a partir de la gráfica de  $f(x)$  se puede graficar  $-f(x)$  y usar el traslado en los ejes.

Ejemplos: a partir de  $f(x) = x^2$  grafique:

a)  $f(x) = -x^2$



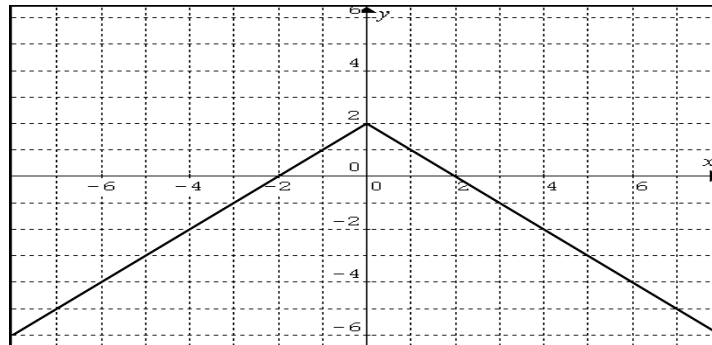
b)  $f(x) = -x^2 + 3$



Observas que se cumple igual la regla para el traslado en los ejes x, y.

## EJEMPLO 2

g) A partir de la gráfica de  $F(x) = |x|$ , grafique  $F(x) = -|x| + 2$



## EJERCICIOS:

1) A partir de la gráfica de  $F(x) = |x|$ , grafique

a)  $F(x) = -|x| + 2$

b)  $F(x) = -|x| - 3$

c)  $F(x) = -|x| + 1$

d)  $F(x) = -|x+1| - 2$

2) A partir del gráfico de  $F(x) = x^3$ , grafique

f)  $F(x) = -x^3 - 1$

g)  $F(x) = -x^3 + 2$

h)  $F(x) = -(x-4)^3$

i)  $F(x) = -(x+1)^3$

j)  $F(x) = -(x+2)^3 + 3$

3) A partir de la gráfica de  $F(x) = \sqrt{x}$ , haga los siguientes gráficos

e)  $F(x) = -\sqrt{x} + 2$

f)  $F(x) = -\sqrt{x} - 1$



g)  $F(x) = -\sqrt{(x)} + 1$

h)  $F(x) = -\sqrt{(x)} + 2 - 3$

## FUNCIONES A TROZOS O FUNCIONES POR INTERVALOS

Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren, Por ejemplo:

Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

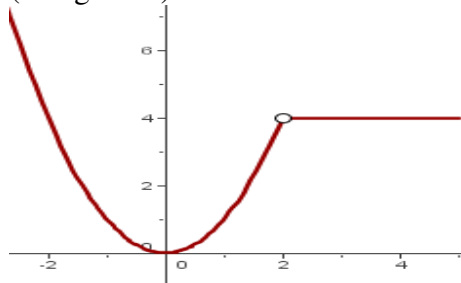
Vemos que esta función está definida por dos funciones y en dos intervalos  
 $F(x) = x^2$  cuando los valores de  $x$  sean menor que 2

$F(x) = 4$  es una función constante cuando los valores de  $x$  sean mayor que 2.

Observas que  $x = 2$  no esta en el dominio de la función cuyo dominio incluye todos los números reales menores que 2 y mayores que 2.

El rango incluye todos los números reales positivos.

(Ver gráfica)



## EJERCICIOS

1) Dada la función definida a trozos por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Encuentre  $F(2)$ ,  $f(-1)$ ,  $F(0)$ ,  $F(7)$ ,  $f(1)$

a) Haga la gráfica de  $F(x)$

2) Dada la función definida a trozos por:

$$\begin{cases} -3, & \text{si } x < -4 \\ x^2 & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ 1-x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

b) Encuentre  $F(-7)$ ,  $f(-1)$ ,  $F(0)$ ,  $F(7)$ ,  $f(4)$ ,  $F(3)$

c) Dominio de  $f$

d) Haga la gráfica de  $F(x)$

3) Dada la función definida a trozos por

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si } x \leq -3 \\ -x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

e) Encuentre  $F(3)$ ,  $f(-1)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-7)$ ,  $f(1)$

f) Dominio de  $f$

g) Haga la gráfica de  $F(x)$

4) Dada la función definida a trozos por

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

h) Encuentre  $F(5)$ ,  $f(-4)$ ,  $F(0)$ ,  $F(-7)$ ,  $f(1)$

i) Dom de  $f$  y rango de  $f$

j) Haga la gráfica de  $F(x)$

5) Dada la función definida a trozos por

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \leq -4 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encuentre  $F(2)$ ,  $f(-1)$ ,  $F(5)$ ,  $F(3)$ ,  $f(1)$

i) Dom de  $f$  y rango de  $f$

j) Haga la gráfica de  $F(x)$

### **FUNCIÓN PARTE ENTERA**

La función parte entera  $y = E(x)$ , o  $F(x) = E(x)$ , Asigna a cada número real  $x$ , su parte entera.

Todo número real (no entero) está comprendido entre dos números enteros, la parte entera de un número es el menor de los números enteros entre los que está comprendido:

(Es una función que a cada número real hace corresponder el número entero inmediatamente inferior)

## EJEMPLOS

a) la parte entera de 1,25 es 1, está comprendido entre 1 y 2,

pero  $1 < 2$ .

b) -1,25 es -2, ya que -1,25 está comprendido entre -1 y -2

Pero  $-2 < -1$ .

## EJERCICIOS

1) Hallar el valor de  $f(x) = E(x)$  si

|      |      |      |      |       |     |      |     |      |     |
|------|------|------|------|-------|-----|------|-----|------|-----|
| X    | 1.05 | -2.8 | -5.3 | 4.105 | 8.2 | 0.08 | 3.9 | 5.75 | 0.8 |
| F(x) |      |      |      |       |     |      |     |      |     |

## Operaciones con funciones: (Álgebra de funciones):

Con las funciones podemos realizar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y (composición de funciones).

Veamos:

Consideras las funciones  $f$  y  $g$ , la suma  $f + g$ , la diferencia  $f - g$ , el producto  $f \cdot g$ , y el cociente  $f/g$  siempre que  $g \neq 0$  se definen como sigue:

a)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

b)  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

c)  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

d)  $(f / g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  siempre que  $g(x) \neq 0$ .

El dominio, en cada caso consiste en la intersección de los dominios  $f$  y  $g$ , y en el caso del cociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  además se excluyen también los valores para los que  $g(x) \neq 0$ .

**Ejemplo dados  $F(x) = 2x-3$ ,  $G(x) = 3x^2 + 1$ ,  $H(x) = x^2 - 5x + 7$  Hacer las operaciones:**

(a)  $(F+G)(x)$  tomamos y aplicamos la definición y

$$(F+G)(x) = F(x) + G(x)$$

$(F+G)(x) = (2x-3) + (3x^2 + 1) = 3x^2 + 2x - 2$  se realiza la operación de forma algebraica.

Y así se procede en el caso de la resta (en donde hay que restar)

En la multiplicación (en donde se debe multiplicar)

Y en la división en donde se debe dividir.

En el caso b que tiene un número se debe evaluar las funciones en ese valor y debemos encontrar los valores funcionales

$$(b) (F + G)(2) = F(2) + G(2)$$

$$F(2) = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{aligned} G(2) &= 3(2)^2 + 1 \\ &= 3(4) + 1 \\ &= 12 + 1 \\ &= 13 \end{aligned} \text{ entonces tenemos que:}$$

$$(F + G)(2) = F(2) + G(2)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + 13 \\ &= 14 \end{aligned}$$

### **REALIZA LA OPERACIÓN QUE SE TE PIDE EN CADA CASO**

$$(c) (F+G)(-3)$$

$$(d) (F+H)(x)$$

$$(e) (F+H)(1)$$

$$(f) (F+H)(0)$$

$$(g) (G+H)(x)$$

$$(h) (G+H)(-5)$$

$$(i) (G+H)(-4)$$

$$(j) (F-G)(x)$$

$$(k) (F - G)(2)$$

$$m) (F-G)(-3)$$

$$n) (F-H)(x)$$

- o)  $(F-H)(1)$
- p)  $(F-H)(0)$
- q)  $(G-H)(x)$
- r)  $(G-H)(-5)$
- s)  $(G-H)(-4)$
- t)  $(F.G)(x)$
- u)  $(F.G)(2)$
- v)  $(F.G)(-3)$
- w)  $(F/G)(x)$  (esta operación puede dejarla expresada, solo planteada)
- x)  $(F.H)(1)$
- y)  $(F/H)(0)$
- z)  $(G/H)(x)$  (esta operación puede dejarla expresada, solo planteada)
- aa)  $(G/H)(-5)$
- bb)  $(G/H)(-4)$

### Composición de funciones:

Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , la función compuesta denotada por  $(f \circ g)$  se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de la función compuesta  $(f \circ g)$  es el conjunto de todos los elementos  $x$  que pertenecen al dominio de  $g$ , tales que  $g(x)$  está en el dominio de  $f$ .

Dadas  $f(x) = x^2 - 1$  y  $g(x) = \sqrt{x+3}$ , hallar  $f \circ g$  y  $g \circ f$  y determinar los dominios respectivos.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x+3}^2 - 1 = x + 3 - 1;$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = x + 2$$

El  $\text{dom}g = [-3, \infty)$  y el  $\text{dom}f = (-\infty, \infty)$ ; por lo tanto  $\text{dom}(f \circ g) = [-3, \infty)$ .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(x^2 - 1) + 3};$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

El  $\text{dom}f = (-\infty, \infty)$  y el  $\text{dom}g = [-3, \infty)$ ; por lo tanto  $\text{dom}(g \circ f) = (-\infty, \infty)$ .

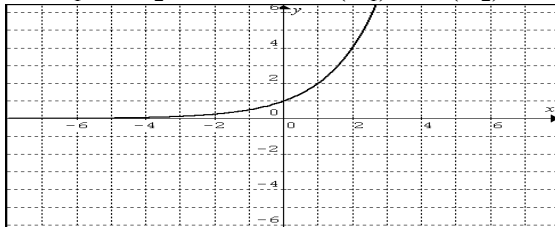
**Ejemplo dados  $F(x) = 2x-3$ ,  $G(x) = 3x^2 + 1$ ,  $H(x) = x^2 - 5x + 7$  Hacer las Funciones compuestas**

- a)  $(f \circ g)(x)$
- b)  $(f \circ g)(2)$
- c)  $(g \circ f)(x)$
- d)  $(g \circ f)(-7)$
- e)  $(f \circ g)(-2)$
- f)  $(g \circ f)(2)$
- g)  $(h \circ f)(x)$
- h)  $(f \circ h)(3)$
- i)  $(f \circ g)(0)$
- j)  $(f \circ g)(-5)$
- k)  $(g \circ h)(x)$
- l)  $(h \circ g)(-4)$
- m)  $(h \circ f)(1)$
- n)  $(h \circ g)(2)$

### **Función creciente y función decreciente**

#### **Función Creciente:**

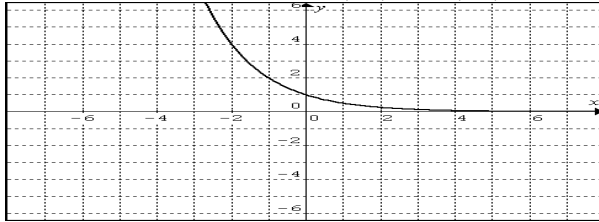
Una función es creciente en un intervalo  $(a, b)$  si para dos valores cualesquiera del intervalo  $X_1$  y  $X_2$  se cumple que:  
si  $X_1 < X_2$  entonces  $f(X_1) < f(X_2)$ .



#### **Función Decreciente:**

Una función es decreciente en un intervalo si para dos valores cualesquiera del mismo  $X_1$  y  $X_2$  se cumple que:

si  $X_1 < X_2$  entonces  $f(X_1) > f(X_2)$



### Funciones cuadráticas:

La función  $f(x) = a_0$  es la función constante,  $a_0$  es cualquier número real

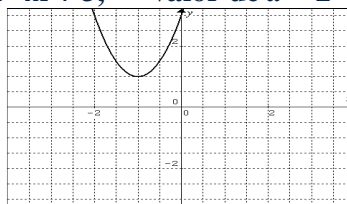
La función  $f(x) = ax + b$  es la llamada función lineal,  $a \neq 0$ ,  $a$  es la pendiente y  $b$  es el intersección con el eje y.

La función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  es la llamada función cuadrática si  $a \neq 0$ .

El gráfico de toda función cuadrática es una parábola

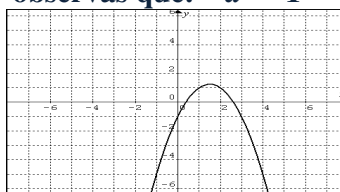
a) Si el valor de  $a > 0$  (Si  $a$  es positivo) la parábola abre hacia arriba

**Ejemplo: Graficar  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ , valor de  $a = 2$**



b) Si el valor de  $a < 0$  (Si  $a$  es negativo) la parábola abre hacia abajo

**Graficar  $F(x) = -x^2 + 3x - 1$ , observas que:  $a = -1$**



**El vértice de una parábola es el punto central de la misma,**

si  $a$  es positivo el vértice es el punto más bajo de la parábola y el valor de  $y$  en el vértice  $y_v$  es el valor mínimo que tomará la parábola.

si  $a$  es negativo el vértice es el punto más alto de la parábola y el valor de  $y$  en el vértice  $y_v$  es el valor máximo que tomará la parábola.

**Valor de  $x$  en el vértice ( $x_v$ ):**

el valor del eje  $x$  en el vértice se busca con la fórmula:

$$X_v = -\frac{b}{2a}$$

Valor de y en el vértice ( $y_v$ ): el valor del eje x en el vértice se busca con la fórmula:  
 $Y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$  o como  $Y_v$  es la imagen de  $X_v$  en el vértice, se puede buscar así  $Y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

**Ejemplos:**

**1) Hallar el vértice de la parábola  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$**

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$c = 3 \quad \text{el vértice es el punto}(X_v, Y_v)$$

el valor del eje x en el vértice es  $X_v = -\frac{b}{2a}$

$$\text{sustituyendo } X_v = -\frac{4}{2(2)} = -1, \quad X_v = -1$$

El valor de y en el vértice es:  $Y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$  o

$$Y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \text{ de ahí que:}$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) + 3$$

$$Y_v = 2(1) - 4 + 3$$

$$Y_v = 2 - 4 + 3 = 1, \text{ el vértice esta en el punto } (-1, 1)$$

**2) Encuentra el vértice de la parábola  $F(x) = -x^2 + 3x - 2$**

$$a = -1$$

$$b = 3$$

$$c = -2$$

**El rango de la parábola:**

El rango de toda parábola es el alcance que tiene la misma en el eje y (de donde sale y hasta donde llega en el eje y) es un intervalo

Si  $a > 0$  (si a es positivo) el rango se desplaza desde el valor del eje y en el vértice hasta el infinito  $[Y_v, \infty)$ .

**En el ejemplo 1 como a es positivo en rango es  $[1, \infty)$**

Si  $a < 0$  (si a es negativo) el rango se desplaza desde menos infinito hasta el valor del eje y en el vértice  $(-\infty, Y_v]$



### Mayor intervalo donde una parábola crece y mayor intervalo donde decrece

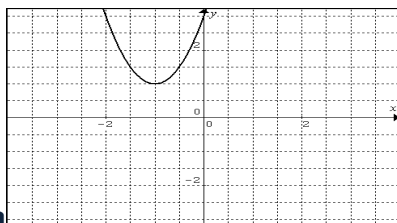
El valor de  $x$  en el vértice divide a la parábola en dos partes y también al eje  $x$  en dos intervalos  $(-\infty, X_v]$  y  $[X_v, \infty)$  en uno crece y en el otro decrece o en uno decrece y en el otro crece.

Si  $a > 0$  (si  $a$  es positivo) la parábola decrece en el intervalo  $(-\infty, X_v]$  y crece en el intervalo  $[X_v, \infty)$

Si  $a < 0$  (si  $a$  es negativo) la parábola crece en el intervalo  $(-\infty, X_v]$  y decrece en el intervalo  $[X_v, \infty)$

1) Ejemplo: encuentre el mayor intervalo donde la parábola

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 3 \text{ crece y donde decrece}$$



Ver la gráfica

Como el valor de  $a = 2$  es positivo, esta parábola decrece en el intervalo

$(-\infty, x_v]$  y crece en el intervalo  $[x_v, \infty)$

$X_v = -1$  decrece en  $(-\infty, -1]$  y crece en  $[-1, \infty)$

### ECUACION ESTANDAR DE LA PARABOLA

Si  $F(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , al completar el cuadrado la función cambia a la forma  $F(x) = a(x-h)^2 + k$

Ejemplo: Si  $F(x) = 2x^2 - 8x + 5$ , exprésela de la forma  $F(x) = a(x-h)^2 + k$

$$F(x) = 2x^2 - 8x + 5$$

$$F(x) = 2(x^2 - 4x \quad) + 5$$

$$F(x) = 2(x^2 - 4x + 4) + 5 - 8$$

$$F(x) = 2(x - 2)^2 - 3$$

Enunciado

Factorizar

Completando el cuadrado

Ecuación equivalente, con  $a=2$ ,  $h = 2$ ,  $k = -3$

### ECUACION ESTANDAR DE UNA PARABOLA CON EJE VERTICAL

La grafica de la ecuación  $y = a(x-h)^2 + k$

Para  $a \neq 0$  es una parábola que tiene el vértice  $V(h,k)$  y un eje vertical.

**La parábola abre hacia arriba si  $a > 0$  y hacia abajo si  $a < 0$**

**Encuentre la ecuación estándar de la parábola  $y = -x^2 - 3x + 6$**

$$y = -x^2 - 3x + 6$$

**Enunciado**

$$y = -(x^2 + 3x) + 6$$

**Factorizando – 1 factor común**

$$y = -(x^2 + 3x + 9/4) + 6 + 9/4$$

**Completando el cuadrado**

$$y = -(x + 3/2)^2 + 33/4$$

**Ecuación estándar con  $a = -1$ ,  $h = -3/2$ ,  $k = 33/4$**

**Ejercicios:**

**a cada una de estas funciones cuadráticas encuentre en vértice, el rango, mayor intervalos donde crece y decrece, los intersecciones con x si existen, el intersección con y, el valor máximo o mínimo según sea y además su gráfica.**

1)  $F(x) = x^2 + 8x - 5$

2)  $F(x) = -x^2 + 4x - 1$

3)  $F(x) = x^2 - 2x + 1$

4)  $F(x) = -2x^2 + 4x - 3$

5)  $F(x) = x^2 + 6x + 2$

6)  $F(x) = 3x^2 - 6x + 1$

7)  $F(x) = -x^2 + 6x - 3$

**Encuentre la ecuación estándar de la parábola**

1.  $y = 3x^2 + 6x - 2$

2.  $y = 2x^2 - 8x - 4$

3.  $y = -3x^2 + 9x - 7$

4.  $y = -4x^2 - 8x + 3$

$y = x^2 + 2x + 4$  **INVERSA DE UNA FUNCIÓN**

Si tenemos la función  $f = \{ (1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, -2) \}$  Se nos puede ocurrir la idea de invertir los pares ordenados y tratar de obtener así una nueva función.

Veamos que sucede:

$g = \{ (2, 1), (4, 2), (-1, 3), (-2, 4) \}$

Hemos obtenido una nueva función, sin embargo, esto no funciona siempre.

Tomemos ahora como  $f$  el conjunto:  $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, -1), (4, 2)\}$

Si invertimos los pares ordenados, entonces,  $g$  será:

$$g = \{(2, 1), (4, 2), (-1, 3), (2, 4)\}$$

Que no es una función,

$g(2)$  no está determinado de forma única;

es decir,  $g$  no cumple la condición de función porque Existen dos pares ordenados en  $g(x)$ ,  $(2, 1)$  y  $(2, 4)$ ,

que tienen la misma primera coordenada y la segunda coordenada es distinta.

**a) ¿Cuál es la diferencia entre estos dos ejemplos?**

Sencillamente, que en el segundo ejemplo:

$f(1) = f(4) = 2$  y al invertir los pares ordenados,

$g(2)$  no está determinado de forma única; con lo cual  $g$  no es una función.

**En el primer ejemplo, para valores diferentes de la "x" se obtienen valores diferentes de la "y".**

Las funciones que se comportan como la del primer ejemplo se llaman funciones inyectivas o funciones uno a uno.

**DEFINICIÓN:**

Una función  $f$  es inyectiva o función uno a uno si se cumple cualquiera de estas dos afirmaciones:

- a) Si  $a \neq b$  y tenemos que  $f(a) \neq f(b)$  esto es que  $f(a)$  es distinto de  $f(b)$  cuando  $a$  es distinto de  $b$ . (es decir que valores distintos del dominio obtienen imágenes diferentes en el rango):
- b) Si ocurre  $f(a) = f(b)$ , entonces  $a = b$

**Cuando al invertir los pares ordenados de que consta una función se obtiene otra función, decimos que dicha función tiene inversa.**

**Ejemplo1**

La función  $f(x) = x^2$  no es uno a uno, ya que  $-3 \neq 3$  y  $f(-3) = f(3) = 9$ . En otras palabras, la función  $f$  no es uno a uno porque el número 9 en su rango le corresponde dos números  $-3$  y  $3$  en su dominio.

---

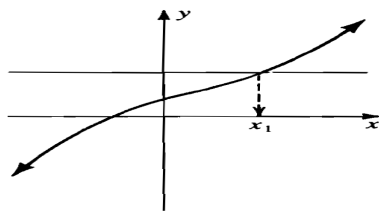
Antes de tratar de hallar la inversa de una función, debe determinar si la función dada es uno a uno. A pesar de que hay una serie de técnicas para hacerlo, trataremos a continuación sólo uno de tales métodos.

**Solamente las funciones uno a uno tienen función inversa**

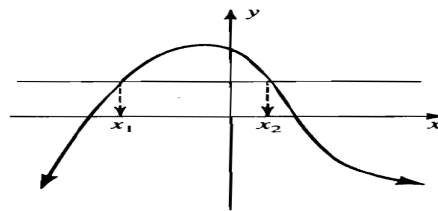
Una función que no sea uno a uno la podemos convertir en funciones uno a uno si restringimos su dominio y exceptuamos los números que impiden que sea uno a uno

**PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL:** Si tenemos la gráfica de una función y por algún punto podemos trazar una recta horizontal que toque más de un punto de la gráfica, entonces la función no es inyectiva.

si solamente puede tocar en un solo punto de la gráfica es porque la función es inyectiva



(a)  $f$  es uno a uno



(b)  $f$  no es uno a uno

Ejemplo 2:

Determine si la función  $f(x) = x^2 - 2x$  es uno a uno.

**Solución.** En la figura 110 vemos que una recta horizontal interseca la gráfica de la función  $x$  en más de un punto. Se deduce, por la prueba de recta horizontal, que  $f$  no es uno a uno.

Suponga que  $f$  es una función uno a uno con dominio  $X$  y rango  $Y$ . Entonces, para un número  $x$  en  $X$ ,  $y = f(x)$  es un número en  $Y$ . No hay otro número  $x$  en  $X$  correspondiente a ese número  $y$ . Por tanto, la correspondencia inversa  $g$  de  $Y$  a  $X$  es una función que debe dar

$$g(f(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } X$$

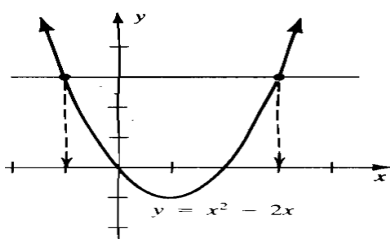
Pero si  $f(x) = y$  y  $x = g(y)$ , entonces debemos tener también

$$f(g(y)) = y \quad \text{para cada } y \text{ en } Y$$

Pero renombrando a  $y$  como  $x$  en el enunciado anterior, tenemos

$$f(g(x)) = x \quad \text{para cada } x \text{ en } Y$$

Sintetizamos este análisis con una definición de la inversa de una función  $f$ .



La función inversa de  $f$  la denotamos por  $f^{-1}(x)$ , el  $-1$  aquí no es un exponente,

No debemos confundir dicha notación, por lo que  $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

### DEFINICIÓN:

Si  $f$  es una función uno a uno, llamamos función inversa de  $f$  y la representamos por  $f^{-1}$  al conjunto:  $f^{-1} = \{(a, b) / (b, a) \in f(x)\}$

Es decir,  $f^{-1} = \{(x, y) / x = f(y), \text{ si } y \text{ es del dominio de } f\} = \{(f(y), y) / \text{ si } y \text{ es del dom. de } f\}$

Utilizando la composición de funciones podemos escribir:

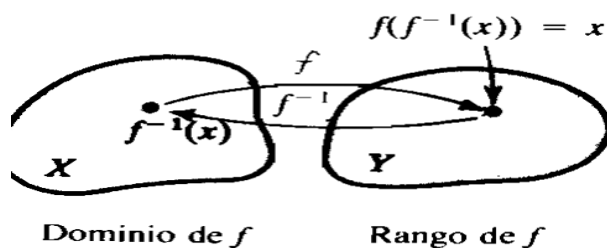
$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \quad \text{si } x \text{ está en el rango de } f.$$

Está afirmación expresa que la función compuesta de una función y su función inversa da  $x$  como resultado.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \quad \text{si } x \text{ está en el dominio de } f.$$

Está afirmación expresa que la función compuesta de la función inversa y su función da  $x$  como resultado.

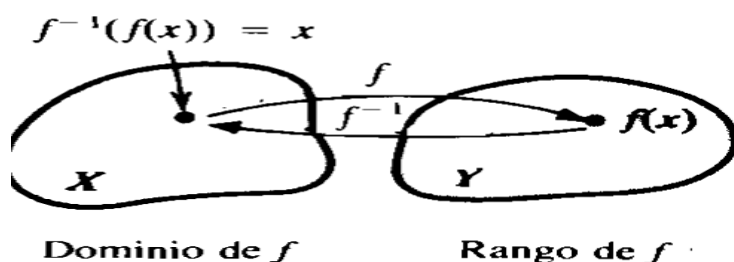
De la definición se sigue inmediatamente que el dominio de la función inversa  $f^{-1}$



es el rango de  $f$ .

(a)

Recíprocamente, el rango de  $f^{-1}$  es el dominio de  $f$ .



(b)

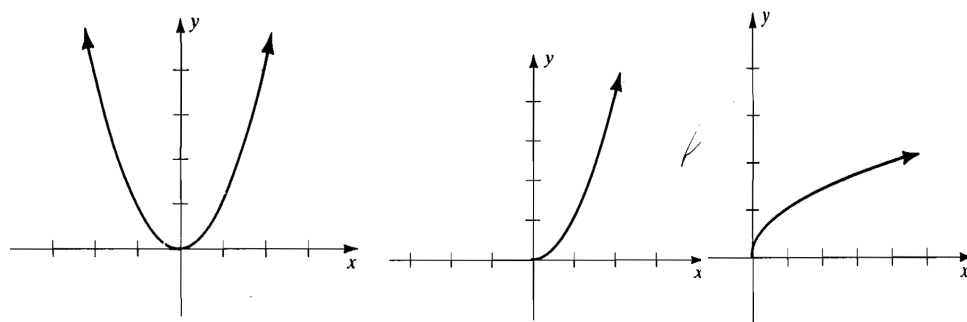
También es fácil observar que:

$f^{-1}(a) = b$  es equivalente a decir que  $f(b) = a$ .

Utilizando la "x" y la "y"

$f^{-1}(x) = y$  es equivalente a decir que  $f(y) = x$ .

En el ejemplo 1 vimos que  $f(x) = x^2$  no es una función uno a uno. El dominio de  $f$  es  $(-\infty, \infty)$ . Ahora, definiendo  $f(x) = x^2$  solamente en  $[0, \infty)$ , vemos en las figuras 114(a) y (b) que  $F$  es uno a uno y, por tanto, tiene una inversa. La gráfica de  $F^{-1}$  se muestra en la figura 114(c). Observe que  $f$  y  $F$  tienen el mismo rango.



$F(x) = x^2$  para todo  $x$      $f(x) = x^2$  para  $x \geq 0$      $f(x) = \sqrt{x}$  para  $x \geq 0$

## Para calcular la función inversa usaremos el método alternativo

### Sugerencias para el cálculo de la función inversa

- 1) Se escribe la ecuación de la función  $y = f(x)$ .
- 2) Se intercambian las variables. (la  $x$  se cambia por  $y$ , la  $y$  se cambia por  $x$ )
- 3) Se despeja la variable  $y$  en función de la variable  $x$ .
- 4)  $Y = f^{-1}(x)$

**Ejemplos:** Calcular la función inversa de las siguientes funciones que son uno a uno:

a)  $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$  el dominio de  $f$  son todos los números reales excepto el 1

1)  $y = \frac{2x+3}{x-1}$  Hacemos  $y = f(x)$ ,

2)  $x = \frac{2y+3}{y-1}$  luego intercambiamos los nombres de las variables

3)  $x = \frac{2y+3}{y-1}$  despejamos para  $y$ , multiplicando ambos lados por  $(y-1)$

$$x(y-1) = \frac{2y+3}{y-1}(y-1)$$

$x(y-1) = 2y+3$  agrupamos los términos que poseen  $y$ , en un solo lado

$xy - 2y = x + 3$  factor común en el lado izquierdo de la igualdad

$y(x-2) = x+3$  :

$\frac{y(x-2)}{x-2} = \frac{x+3}{x-2}$  dividiendo ambos lados entre  $x-2$  tenemos

$y = \frac{x+3}{x-2}$  que es la función inversa  $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$

El dominio de la función inversa son todos los números reales excepto el 2

( Este es el rango de  $f$  y el dominio de  $f$  es el rango de la función inversa hallada)

### Vamos a comprobar el resultado para $x = 2$

$F(2) = \frac{2(2)+3}{2-1} = \frac{7}{1}$   $f(2) = 7$ ,  $f^{-1}(7) = \frac{7+3}{7-2} = \frac{10}{5}$ ,  $f^{-1}(7) = 2$

### 2) Hallar la función inversa de: $f(x) = 3x - 1$

b)  $f(x) = 3x - 1$   $y = f(x)$

$y = 3x - 1$  cambiando  $x$  por  $y$ , cambiando  $y$  por  $x$  tenemos

$x = 3y - 1$  **despejando  $y$ , sumamos 1 en ambos miembros**

$x + 1 = 3y - 1 + 1$

$x + 1 = 3y$  dividiendo ambos miembros entre 3

$$\frac{x+1}{3} = \frac{3y}{3}$$

$$\frac{x+1}{3} = y \quad f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3} \quad \text{que es la función inversa}$$

Tanto como el dominio de  $f(x)$  como de su inversa  $f^{-1}(x)$  es todo  $\mathbb{R}$ .

### EJERCICIOS

Las funciones siguientes son inyectivas o funciones uno a uno encuentre las funciones inversa de cada una y diga el dominio y el rango de  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$

$$1) f(x) = \sqrt[3]{4x-5}$$

$$2) f(x) = \frac{2x^5+7}{9}$$

$$3) f(x) = \frac{x+4}{5x}$$

$$4) f(x) = 2x^5 + 3$$

$$5) f(x) = \sqrt[3]{9x-4}$$

$$6) f(x) = \sqrt[3]{7x-2}$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt[5]{7x-2}}{9}$$

$$8) f(x) = \frac{2x+7}{x-2}$$

$$9) f(x) = \frac{5x^5+4}{2}$$

$$10) f(x) = x^2 \text{ si } x \geq 0 \text{ (el dominio se restringe para que sea uno a uno)}$$

$$11) f(x) = \frac{2x - 7}{4}$$

$$12) f(x) = \frac{2x + 5}{3}$$

$$13) f(x) = \frac{3x - 2}{5x}$$

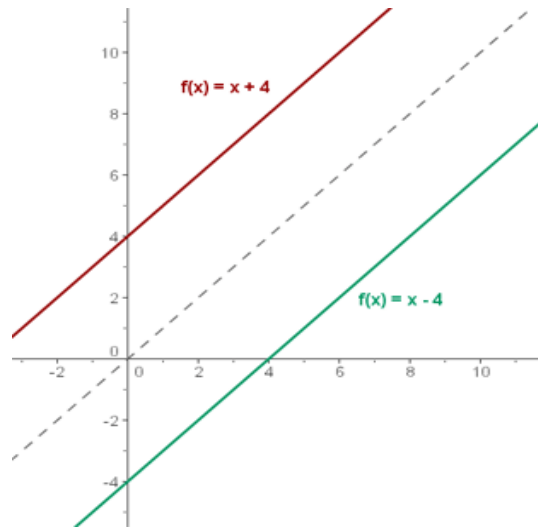
$$14) f(x) = \frac{2x + 5}{3x}$$

$$15) f(x) = \frac{2x - 3}{5}$$

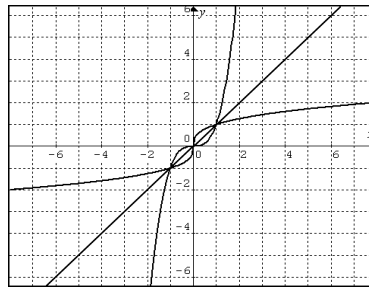
Las gráficas de  $f$  y  $f^{-1}$  son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



$F(x) = x + 4$  es la función inversa de  $g(x) = x - 4$



Esto es lo mismo que decir que los puntos de la grafica de una función y de la grafica de la función inversa están ubicados a la misma distancia de la grafica función identidad



La gráfica anterior corresponde a las funciones  $f(x) = x^3$  y  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  que son funciones inversas entre si.

### Ejercicio:

En los problemas 1 al 10, determine si la función dada es uno a uno, examinando su gráfica. Si  $f$  es uno a uno, halle  $f^{-1}$ .

9.  $f(x) = \frac{1}{x-3}$

10.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1.  $f(x) = 3x$

2.  $f(x) = -2x + 1$

3.  $f(x) = x^4$

4.  $f(x) = x^2 - 2$

5.  $f(x) = x^3$

6.  $f(x) = (x-2)(x+1)$

7.  $f(x) = x^2 - 6x$

8.  $f(x) = \frac{2}{x}$

En los problemas 11 al 20, la función dada es uno a uno. Halle  $f^{-1}$ .

11.  $f(x) = 3x - 9$

12.  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

13.  $f(x) = \frac{2}{5x+8}$

14.  $f(x) = \frac{7x}{2x-3}$

$$15. f(x) = \frac{1}{x} + 4$$

$$17. f(x) = x^3 + 2$$

$$19. f(x) = \sqrt{x}$$

$$16. f(x) = \frac{1-x}{x+2}$$

$$18. f(x) = 1 - x^3$$

$$20. f(x) = 6 - 9\sqrt{x}$$

En los problemas 21 al 24, verifique que las funciones dadas sean inversas entre sí.

$$21. f(x) = \frac{1}{4}x + 2, g(x) = 4x - 8$$

$$22. f(x) = x^5 + 6, g(x) = \sqrt[5]{x-6}$$

$$23. f(x) = \frac{x-2}{x+2}, g(x) = \frac{2(1+x)}{1-x}$$

$$24. f(x) = \frac{x}{4x+3}, g(x) = \frac{3x}{1-4x}$$

En los problemas 25 y 26, determine el dominio y el rango de  $f^{-1}$ , sin hallar la inversa.

$$25. f(x) = \sqrt{x-3}$$

$$26. f(x) = 2 + \sqrt{x}$$

En los problemas 27 al 30, la función dada es uno a uno. Sin hallar  $f^{-1}$ , halle, en el valor  $x$  indicado, el punto correspondiente en la gráfica de  $f^{-1}$ .

$$27. f(x) = 2x^3 + 2x; x = 2$$

$$28. f(x) = 8x - 3; x = 5$$

$$29. f(x) = x + \sqrt{x}; x = 9$$

$$30. f(x) = \frac{4x}{x+1}; x = \frac{1}{2}$$

5.

### Proporcionalidad o las variaciones

**La proporcionalidad o variación:** es una relación entre magnitudes medibles. Es uno de los escasos conceptos matemáticos ampliamente difundido en la población. Esto se debe a que es intuitiva y de uso muy común, se usa en algunas investigaciones científicas para describir relaciones entre cantidades variables.

Ejemplo: Un carro que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme (la velocidad es constante) y la distancia y el tiempo son las variables.

$D = V T$  hágase de cuenta que  $v = k(\text{constante de proporcionalidad})$ .

Veamos la tablita si  $v = 10 \text{ m/s}$

|   |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| T | 1 s    | 2 s    | 3 s    | 4 s    | 5 s    |
| D | 10 m/s | 20 m/s | 30 m/s | 40 m/s | 50 m/s |

Observa que si  $t = 1$  s, la distancia es 10m, pero si  $t = 2$  s, o sea que, se duplica también  $d$  se duplica de 10m/s a  $d = 20$  m y así sucesivamente.

Observa que la razón entre  $d$  y  $t$   $\frac{10}{1} = 10m/s$ ,  $\frac{20}{2} = 10m/s$ ,  $\frac{30}{3} = 10m/s$ ,  $\frac{40}{4} = 10m/s$ ,  $\frac{50}{5} = 10m/s$  es un valor constante  $\frac{d}{t} = v$

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida respectivamente por el mismo número

Ejemplo: Un automóvil consume 4 galones de gasolina por 120 km de recorrido ¿Cuántos kilómetros recorre con 12 galones? La variable independiente es  $x$  la cantidad de gasolina y  $y$  el kilometraje dado el rendimiento por galón.

Datos  $X = 4$  g  $Y = 120$  km.  $k = \frac{y}{x}$

$K = \frac{120km}{4g} = 30km/g$  Observamos que las magnitudes son directas Si la razón o cociente entre ellas es un valor constante. La constante de proporcionalidad es  $k = 30$  km/galón 30 km/g es la constante de proporcionalidad y podemos elaborar una tabla de valores hasta llegar a 12 galones o realizar la formula para variables que son directamente proporcionales.

$Y = kx$ ,  $y = 30 \text{ km/g} \cdot 12 \text{ g}$   
 $Y = 360 \text{ km}.$

|           |    |    |    |     |     |     |     |
|-----------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| galones   | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   | 8   | 12  |
| kilometro | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 | 240 | 360 |

Con 12 galones de gasolina, el auto recorre 360 kilómetros: Mientras más kilómetros se recorran, mas galones de gasolina de consumen.

El número de kilómetros recorridos es directamente proporcional (D.P) al número de galones de gasolina. Siempre que las demás condiciones se mantuvieran constantes. Esto es, que no se modificaran las condiciones climáticas o geográficas que modificaran el consumo.

Sean  $x$ ,  $y$  dos variables para las cuales a cada valor de  $x$  le corresponde un único valor de  $y$  decimos que  $y$  varia directamente con  $x$  si y solo si  $k = \frac{y}{x}$   $k \neq 0$

Ejemplos:

a) el área de un circulo varia con el cuadrado del radio  $k = \frac{A}{r^2}$   $k = \pi$ .

b) La fuerza varia con la aceleración  $F = m \cdot a$  donde la constante es  $m$ .

c) El volumen de un esfera varia con el cubo del radio  $v = \frac{4}{3} \pi r^3$ , y la constante

$$K = \frac{4}{3} \pi$$

**La proporcionalidad directa:** es un caso particular de las variaciones lineales. El factor constante de proporcionalidad  $k$  puede utilizarse para expresar la relación entre cantidades. Si “ $y$  es directamente proporcional a  $x$ ” se escribe  $y = k x$ , de ahí que  $k = \frac{y}{x}$   $k \neq 0$ ,

$$y \propto x \Leftrightarrow \frac{y}{k} = k \quad \text{por lo tanto} \quad y \propto x \Leftrightarrow y = k x$$

Esto significa que “en la misma proporción que crece  $x$  así mismo crece  $y$ , o que en la misma proporción que decrece  $x$  así mismo decrece  $y$ ”.

**Ejemplos:: para cada una de la siguiente proposición escriba la ecuación correspondiente en forma de cociente  $k = ?$**

- La longitud  $C$  de una circunferencia es directamente proporcional a su diámetro  $d$  la constante  $k$  es  $\pi$
- El peso  $p$  de cualquier liquido varia directamente con el volumen  $v$
- El área de un triangulo equilátero es directamente proporcional al cuadrado de su lado
- El volumen de un cubo varia directamente con el cubo de su arista
- El volumen  $v$  del cono circular recto de altura constante es directamente proporcional al área de la base

### Ejercicios:

- Si la variable  $A$  es directamente proporcional a una variable  $B$ , y  $A = 20$  cuando  $B = 10$

Hallar la constante de proporcionalidad.

- hallar el valor de  $A$  cuando  $B = 2.5$ .

- Si la variable  $M$  es directamente proporcional a una variable  $N + 3$ , y  $M = 12$  cuando  $N = 3$

Hallar la constante de proporcionalidad.  $k$

- Hallar el valor de  $M$  cuando  $N = 5$

- Si la variable  $A$  es directamente proporcional a una al cuadrado de  $B$  sumándole 1  $B$ , y  $A = 15$  cuando  $B = 2$

Hallar la constante de proporcionalidad. k

a) Hallar el valor de A cuando  $B = 3$

5) Si la variable L es directamente proporcional a  $3G - 5$ , y  $L = 21$  cuando

$$G = 4$$

Hallar la constante de proporcionalidad. k

a) Hallar el valor de L cuando  $G = 6$

6) Si la variable S es directamente proporcional a una variable Q, y  $S = 4$  cuando  $Q = 8$

Hallar la constante de proporcionalidad.

a) Hallar el valor de L cuando  $Q = 68$

### RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Para el pago de transporte de una excursión se dispone de \$6,000. La cantidad aportada por persona depende del número de persona que asistan a la excursión

| Número de personas            | 1      | 2       | 3       | 4       | 5       | 6      |
|-------------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|
| Cantidad aportada por persona | \$6000 | \$3,000 | \$2,000 | \$1,500 | \$1,200 | \$1000 |

Observa que:

$$1 \times 6,000 = 6,000,$$

$$2 \times 3,000 = 6,000,$$

$$3 \times 2,000 = 6,000$$

$$4 \times 1,500 = 6,000$$

$$5 \times 1,200 = 6,000$$

$$6 \times 1,000 = 6,000$$

Es claro que el número de persona que asistirá a la excursión multiplicado por la cantidad de dinero aportada por cada uno tiene que ser igual a \$ 6,000

Si el número de persona aumenta, el pago por persona disminuye en la misma proporción.

#### Se denomina relación de proporcionalidad inversa:

a la proporcionalidad que se establece entre una variable independiente x y una variable dependiente y, de tal forma que el producto de ambas es siempre igual a una constante k.

$$y \propto \frac{1}{x} \quad k \Leftrightarrow \quad y = \frac{k}{x} \quad \text{por tanto} \quad x y = k \quad k \neq 0$$

**Esta relación expresa que:**

cuando x se duplica el valor de y queda dividido entre 2,

si se x triplica, el valor de y queda dividido entre 3,

si x se cuadruplica el valor de y queda dividido entre 4 y así sucesivamente

Si x se divide entre 2, el valor de y queda multiplicado por 2,

Si x se divide entre 3, el valor de y queda multiplicado por 3,

Si x se divide entre 4, el valor de y queda multiplicado por 4 y así sucesivamente.

**Cuando dos cantidades son inversamente proporcionales, una disminuye al aumentar la otra y viceversa.**

**Ejemplos:**

1. El volumen de un gas a temperatura constante es directamente proporcional a su presión.
2. En igualdad de fuerza la aceleración que adquiere un cuerpo es inversamente proporcional a su masa.
3. En un triángulo de área constante la longitud de la altura es inversamente proporcional a la longitud de la base
4. La iluminación I, de un objeto por un foco luminoso varía inversamente con el cuadrado de la distancia d entre ellos

**Ejercicios:**

ESCRIBA UNA ECUACIÓN QUE ESTABLEZCA LA RELACIÓN ESPECIFICADA ENTRE LAS VARIABLES DADAS

- a) X es inversamente proporcional con el cuadrado de y
- b) A varía inversamente con el duplo de la raíz cúbica de b
- c) M varía inversamente con el triple del cuadrado de n
- d) P varía inversamente con el cociente de el cuadrado de q entre 5

la fórmula para el área de un rectángulo. Si A es el área, L la longitud y H el ancho,  
 $A = L \cdot H$

Supongamos que se comparan varios rectángulos, todos de la misma área pero de longitudes y anchos variables. Entonces

$LH = A$  tiene la misma forma que  $x y = k$ , donde  $A$  y  $k$  son las constantes.  
Así,  $L$  es inversamente proporcional a  $H$ , y  $H$  es inversamente proporcional a  $L$ ,

Si el área constante es  $12 \text{ cm}^2$  esta relación se transforma

$LH = 12$  la constante  $k = 12$

Si la longitud es 4 cm, el ancho se determina como sigue:  $y = \frac{k}{x}$ ,  $y = \frac{12}{4} = 3$ ,  
y  $x = k$ , Si el área constante es 12,

Es el ancho de un rectángulo disminuye de 3 a 2 cuando la longitud aumenta de 4 a 6,  
pero si la longitud varía de 4 a 2 el ancho se duplicaría de 3 a 6.

Otro ejemplo de variación inversa se encuentra en el estudio de la electricidad.

La corriente que circula en un circuito eléctrico a potencial constante varía inversamente a la resistencia del circuito.

Supongamos que la corriente es 10 amperes cuando la resistencia  $R$  es 11 ohms y que se desea determinar la corriente cuando la resistencia es 5 ohms.

Puesto que  $I$  y  $R$  varían inversamente, la ecuación para la relación es  $IR = k$ , donde  $k$  es el voltaje constante. Por tanto,  $(10)(11) = k$ .  $k = 110$ , Además, cuando la resistencia es 5 ohms,  $(5)(22) = k$ .

La corriente es 22 amperes cuando la resistencia es 5 ohms. Cuando la resistencia disminuye de 11 a 5 ohms, la corriente aumenta de 10 a 22 amperes.

Un problema típico de variación que tiende a confundir al principiante es el que implica relaciones de velocidad o relaciones de trabajo. Por ejemplo, si 7 hombres pueden completar un trabajo en 20 días, ¿cuánto requerirán 50 hombres para realizar el mismo trabajo? La aproximación estrictamente mecánica a este problema daría como resultado la siguiente solución falsa, al relacionar hombres a hombres y días a días:

$$\frac{7 \text{ hombres}}{50 \text{ hombres}} = \frac{20 \text{ días}}{T}$$

**PROBLEMAS:**

Expresa la ecuación para hallar  $k$  como constante de proporcionalidad en función de las variables especificadas

1) La razón,  $r$ , a la cual un buque se desplaza cierta distancia  $d$ , varía inversamente con el tiempo  $t$ .

2) El volumen  $V$ , de un gas, varía inversamente a la presión,  $p$ .

### Resuelve este problema

- 3) Un barco que se mueve a una velocidad de 15 nudos necesita 10 horas para trasladarse a determinada distancia. Si la velocidad se aumenta a 25 nudos ¿cuánto requerirá para atravesar la misma distancia?

### Ejercicios:

- 4) Si la variable  $A$  es inversamente proporcional a una variable  $B$ , y  $A = 20$  cuando  $B = 10$ , Hallar la constante de proporcionalidad.
- a) Hallar el valor de  $A$  cuando  $B = 2.5$ .
- 5) Si la variable  $M$  es inversamente proporcional con  $N + 4$ , si  $M = 12$  cuando  $N = 2$  Hallar la constante de proporcionalidad  $k$ .
- b) Hallar el valor de  $M$  cuando  $N = 5$
- 6) Si la variable  $A$  es inversamente proporcional con el cuadrado de  $B$ , restándole 1,  $A = 12$  cuando  $B = 3$ , Hallar la constante de proporcionalidad  $k$ .
- b) Hallar el valor de  $A$  cuando  $B = 2$
- 7) Si la variable  $L$  varía inversamente proporcional con el duplo de la raíz cuadrada de  $G$ , si  $L = 16$  cuando  $G = 9$  Hallar la constante de proporcionalidad  $k$ .
- b) Hallar el valor de  $L$  cuando  $G = 25$
- 8) Si la variable  $S$  es inversamente proporcional al cuadrado de  $Q$ , si  $S = 14$  cuando  $Q = 3$  Hallar la constante de proporcionalidad  $k$ .
- b) Hallar el valor de  $S$  cuando  $Q = 6$ .

### VARIACIONES COMBINADAS (variación conjunta)

Si  $y$  varía conjuntamente con  $x$ ,  $z$  entonces  $y = k \times x \times z$

#### Ejemplo 1:

1. El volumen de un cono varía conjuntamente con el cuadrado de su radio y su altura
2. El costo  $c$  de un trabajo varía conjuntamente con el número de trabajadores que los realizan y el número de días en que se realiza



Si y varía directamente con x e inversamente con z, entonces

$$y = k \frac{x}{z}$$

Ejemplo1:

1. El número N de obreros necesarios para realizar un trabajo, si tienen igual rendimiento, es directamente proporcional a la cantidad de trabajo por hacer c, e inversamente proporcional al tiempo t estipulado para realizarlo.

$$N = k \frac{c}{t}$$

2. Una variable w varía directamente proporcional con el producto de a y b e inversamente proporcional con el cuadrado de f,  
a) exprese la fórmula

Solución

Como a y b son directamente proporcional a w deber ir multiplicando en el numerador y el cuadrado de f debe ir en el denominador

$$w = k \frac{ab}{f^2} \text{ de ahí que el valor de } k \text{ se encuentra con la fórmula}$$

$$k = \frac{wf^2}{ab}$$

**Observas en la ecuación que:**

W y el cuadrado de f son inversamente proporcional, a y b son inversamente proporcional, w y a son directamente proporcional, w y b son directamente proporcional.

- a) Hallar el valor de k si cuando  $w=8$ ,  $f=4$ ,  $a=2$   $b=32$
- b) Hallar el valor de w usando el valor de k encontrado si  $a=9$ ,  $b=6$  y  $f=3$ .

**Ejercicios:**

- 1) Una variable A es directamente proporcional con el producto de B y C e inversamente proporcional al cubo de d, escribe la formula.

Si  $A=16$ ,  $B=6$ ,  $C=4$  y  $D=2$  hallar el valor de k.

- a) Hallar el valor de A cuando  $B=32$ ,  $C=12$ ,  $D=4$ .

- 2) Una variable A varía directamente con el producto de B y C e inversamente proporcional al cuadrado de d,

escribe la formula.

Si A=6, B =1 5, C =24 y D=3 hallar el valor de k.

b) Hallar el valor de A cuando B=4, C=20, D=2.

3) Una variable M es directamente proporcional con el producto de N y P e inversamente proporcional L, escribe la formula.

Si M=36, N =12, P =3 y L=2 hallar el valor de k.

c) Hallar el valor de M cuando N=3, C=15, D=5.

## UNIDAD 4

### División de polinomios:

Recuerde la propiedad de los exponentes  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$  para  $m \geq n$

Ejemplos: aplica la propiedad anterior y divide

$$1. \frac{x^6}{x^2} = x^4$$

$$2. \frac{-8a^5b^6}{4a^3b^2} =$$

$$3. \frac{11m^6n^5}{-2m^3n^2} =$$

**Dividendo = cociente x divisor + residuo**

Los polinomios se pueden dividir

Dividir  $P(x) = 6x^3 - 9x^2 + 5$  entre  $Q(x) = 2x^2 + x$

**La división larga:**

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 9x^2 + 5 \quad + 5 \quad \overline{) 2x^2 + x} \\
 \underline{-6x^3 - 3x^2} \phantom{+ 5} \quad 3x - 6 \\
 -12x^2 \phantom{+ 5} \quad + 5 \\
 \underline{12x^2 + 6x} \\
 6x + 5
 \end{array}$$

**El DIVIDENDO es P(x), Divisor: Q(x), Cociente: 3x - 6, Residuo: 6x+5**

**Algoritmo de la división:**

**Ejemplo 2.**

**Dividir:  $(\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3})$  entre  $(\frac{1}{2}x^2 - 1)$**

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \quad -\frac{2}{3} \quad \left| \frac{1}{2}x^2 - 1 \right. \\
 -\frac{1}{2}x^3 \quad \quad +x \quad \quad x+4 \\
 \hline
 2x^2 + x - \frac{2}{3} \\
 -2x^2 \quad \quad +4 \\
 \hline
 x + \frac{10}{3}
 \end{array}$$

Dividir  $4x^3 + x^2 - 5x + 2$  entre  $x - 3$

$$\begin{array}{r}
 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 \quad \left| x - 3 \right. \\
 -4x^3 + 12x^2 \\
 \hline
 15x^2 - 5x + 2 \\
 -15x^2 + 45x \\
 \hline
 40x + 2 \\
 -40x + 120 \\
 \hline
 122
 \end{array}$$

### Ejercicios

1) Si  $P(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$  y  $Q(x) = x^2 + 2x$

Realiza la división de:  $P(x)$  entre  $Q(x)$

2) Si  $P(x) = -2x^5 + 3x^3 - x + 4$  y  $Q(x) = x^2 + 2x$

Realiza la división del Primer polinomio entre el segundo polinomio

1)  $(-6a^4 + a^3 - 2a + 1) : (a - 3)$

2)  $(y^5 - 3y^4 + 2y^3 - y + 1) : (y^2 - 2y + 2)$

3)  $(-x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 2) : (x^2 - x + 3)$

4)  $(-2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 3) : (x + 5)$

5)  $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

6)  $(n^4 - 2n^3 + n^2 - 3n + 4) : (n^2 - n + 2)$

$$7) (x^3 + 2x^2 - 3x + 4) : (x + 2)$$

$$8) (z^4 - 2z^3 + 5z - 1) : (3z^2 - z + 6)$$

### LA DIVISIÓN SINTÉTICA:

**Cuando se divide un polinomio entre un binomio de la forma  $x - c$**  el procedimiento para realizar la división se puede reducir gracias a la división sintética o regla de Ruffini

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  de grado  $n$ , esto es  $a_n \neq 0$ , entre un polinomio lineal  $x - c$ .

El procedimiento para realizar esta división es muy simple, primero se toman todos los coeficientes del polinomio  $P(x)$  y la constante  $c$ , con estos se construye una especie de "tablita" que ayudará en el proceso

$$\begin{array}{cccccc|c} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & & c \\ \hline \end{array}$$

Lo primero es "bajar" el coeficiente  $a_n$ , a este coeficiente se denota por  $b_{n-1}$ , luego se multiplica por la constante  $c$ , el resultado se coloca en la segunda columna y se suma al siguiente coeficiente  $a_{n-1}$ , al resultado lo denotamos  $b_{n-2}$

$$\begin{array}{cccccc|c} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & & c \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \hline a_n & cb_{n-1} & & & & & \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{cb_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}} & & & & & \end{array}$$

Este último resultado se multiplica nuevamente por  $c$  y se le suma al coeficiente  $a_{n-2}$  y el proceso se repite hasta llegar a  $a_0$ .

Los resultados parciales que se obtienen se denotan por  $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$  (se inicia con  $b_{n-1}$  pues el cociente tiene un grado menos que el dividendo), y el último valor obtenido se denota por  $r$ , que es el residuo de la división, de esta manera lo que se obtiene es

$$\begin{array}{cccccc|c} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & & c \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \hline a_n & cb_{n-1} & \dots & cb_1 + a_1 & cb_0 + a_0 & & \\ \hline \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{cb_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}} & \dots & \underbrace{cb_1 + a_1}_{b_0} & \underbrace{cb_0 + a_0}_r & & \end{array}$$

Así, el cociente de la división de  $P(x)$  por  $x - c$  es  $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$  con un residuo  $r$ , en donde los coeficientes se detallan como

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$$

$$b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}$$



**Teorema del factor:**

si  $f(a) = 0$ , entonces  $x - a$  es un factor del polinomio porque el residuo es cero.

Cuando se encuentra un valor de  $x$  para el cual  $f(x) = 0$  se ha encontrado una raíz del polinomio, en el supuesto anterior,  $a$  es una raíz del polinomio.

**Teorema del factor**

Si  $a$  es una raíz de  $f(x)$ , entonces  $(x - a)$  es un factor del polinomio, donde  $a$  es un número real.

Es importante conocer el valor del residuo, ya que si éste es igual a cero, nos va a indicar que hemos encontrado una raíz y además un factor del polinomio.

(una solución a la ecuación polinomial  $f(x) = 0$ ).

**Ejercicios:****1) Realiza la división de:**

- a)  $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 8x + 10$  entre  $p(x) = 2x^2 - 4x$
- b)  $f(x) = 12x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 6$  entre  $p(x) = 2x^2 - 2$
- c)  $f(x) = 12x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 3$  entre  $p(x) = 3x^2 - 6x$
- d)  $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - 4x + 1$  entre  $p(x) = x^2 - 4x - 2$
- e)  $f(x) = 9x^4 + 3x^2 - 6x + 12$  entre  $p(x) = 3x^2 + 3x - 6$

**2) Encuentra el cociente y el residuo usando división sintética**

- a)  $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 8x + 10$  entre  $p(x) = x - 3$
- b)  $f(x) = 6x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$  entre  $p(x) = x + 3$
- c)  $f(x) = 2x^5 - x^3 + 4x^2 - 5x + 3$  entre  $p(x) = x - 2$
- d)  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 5$  entre  $p(x) = x + 1$
- e)  $f(x) = 4x^4 - 3x + 2$  entre  $p(x) = x + 2$
- f)  $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 10$  entre  $p(x) = x - 1$

**3) Hallar el residuo que resultaría al dividir  $f(x)$  entre  $p(x)$  sin realizar la división.**

- a)  $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 8x + 10$  entre  $p(x) = x - 2$
- b)  $f(x) = 6x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1$  entre  $p(x) = x + 1$
- c)  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 3$  entre  $p(x) = x - 3$

d)  $f(x) = x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 5$  entre  $p(x) = x + 1$

e)  $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$  entre  $p(x) = x + 3$

f)  $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 10$  entre  $p(x) = x + 2$

**4) Diga si  $p(x)$  es un factor de  $f(x)$**

g)  $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x + 10$  entre  $p(x) = x - 2$

h)  $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$  entre  $p(x) = x + 3$

i)  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 8x - 3$  entre  $p(x) = x - 1$

**5) Hallar el valor de  $k$  para que  $f(x)$  sea divisible entre  $p(x)$**

a)  $f(x) = 2x^4 - kx^3 + 4x^2 - kx + 10$  entre  $p(x) = x - 2$

**6) Hallar el valor de  $k$  para que  $p(x)$  sea un factor de  $f(x)$**

a)  $f(x) = x^4 - 2x^3 + kx^2 - 8x + 10$  entre  $p(x) = x + 1$

### **CEROS O RAÍCES DE UN POLINOMIO:**

Son los valores que Hacen cero el valor del polinomio.

Ejemplo: Calcular las raíces del polinomio  $P(x) = x^2 - 5x + 6$

Si  $a_n = 1$ , trabajamos con los factores del termino independiente

Los factores de 6 son  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Por teorema del residuo buscamos:

$$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0, \text{ entonces } 2 \text{ es una raíz}$$

$$P(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0, \text{ entonces } 3 \text{ es una raíz.}$$

$x = 2$  y  $x = 3$  son raíces o ceros del polinomio:  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ , porque  $P(2) = 0$  y  $P(3) = 0$ .

$$P(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

Si  $a_n \neq 1$  entonces buscamos sus factores primos  $s = (1)(3)$  factores primos de 3

$P = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  p son los factores primos de  $a_0$  (el termino independiente)

**Las posibles raíces racionales son los cocientes  $p/s$**

$$\frac{p}{s} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \frac{\pm 1}{3}, \pm \frac{2}{3},$$

**Hacemos la división sintética entre cada uno de estos términos hasta que encontremos las raíces**

### **Propiedades de las raíces y factores de un polinomio**

- a) Los ceros o raíces son divisores del término independiente del polinomio.
- b) A cada raíz del tipo  $x = a$  le corresponde un binomio del tipo  $(x - a)$  que es un factor del polinomio.
- c) Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo  $(x - a)$ , que se correspondan a las raíces,  $x = a$ , que se obtengan.

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

- d) La suma de los exponentes de los binomios debe de ser igual al grado del polinomio.
- e) Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz  $x = 0$ , ó lo que es lo mismo, admite como factor  $x$ .

$$x^2 + 5x = x \cdot (x + 5) \quad \text{Raíces: } x = 0 \text{ y } x = -5$$

- f) Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.

### **Hallar las raíces y descomponer en factores el polinomio**

$$Q(x) = x^2 - x - 6$$

Los divisores del término independiente son:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ .

Usando el teorema del residuo

$$Q(1) = 1^2 - 1 - 6 \neq 0$$

$$Q(-1) = (-1)^2 - (-1) - 6 \neq 0$$

$$Q(2) = 2^2 - 2 - 6 \neq 0$$

$$Q(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

$$Q(3) = 3^2 - 3 - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

Las raíces son:  $x = -2$  y  $x = 3$ .



Los factores son:  $Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 3)$

## FACTORIZACIÓN DE POLINOMIO DE GRADO MAYOR QUE 2

A veces resulta práctico descomponer un polinomio complejo en el producto de otros más sencillos (factorización), esto se basa en la aplicación de la división sintética, y los teoremas del residuo y del factor.

### SUGERENCIA PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO:

- Se escribe una lista con todos los divisores del término independiente (que son las posibles raíces racionales del polinomio).
- Se determina cuáles de estos divisores son raíces del polinomio, aplicando a cada uno de ellos la división sintética y seleccionando aquellos cuyo residuo sea cero.
- Se toma el polinomio resultante de dividir el original por el binomio con la primera raíz, y se vuelven a repetir los dos pasos anteriores.
- Cuando se llega a una situación en que ninguno de los divisores es raíz (real) del polinomio, éste se considera irreducible.
- Se escribe el polinomio original como el producto del polinomio .

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

### TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA:

Un polinomio de grado  $n$  tiene  $n$  raíces complejas, no necesariamente todas diferentes, algunas se pueden repetir.

**MULTIPLICIDAD DE RAÍCES:** si un número  $a$  es raíz de un polinomio  $k$  veces, entonces decimos que  $a$  es raíz del polinomio de multiplicidad  $k$ .

$K$  es la cantidad de veces que  $a$  se repite como raíz y el factor será  $(x - a)^k$

#### Ejemplos:

1)  $F(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ , tiene 4 raíces complejas

2)  $F(x) = 8x^5 + 3x^4 - 6x^2 + 4x - 2$ , tiene 5 raíces complejas

3)  $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ , tiene 3 raíces complejas

“Recuerdas que diga raíces compleja, no le impide que sean raíces reales”.

### EJERCICIOS:

#### 1) CONSTRUYE UNPOLINOMIO CUYAS RAICES SEAN

a) 2, -1 y 3 cuyo coeficiente principal  $a = 1$

Si 2 es una raíz, entonces  $(x-2)$  es un factor

Si -1 es una raíz, entonces  $(x+1)$  es un factor

Si 3 es una raíz, entonces  $(x-3)$  es un factor

**El polinomio que buscamos tiene factores  $P(x) = a(x-2)(x+1)(x-3)$**

**Si los multiplicamos  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$**

b) Pruebe mediante división sintética que 2, -1, 3 son raíces del polinomio

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

#### 2) CONSTRUYE UNPOLINOMIO CUYAS RAICES SEAN

a) -2, -1, 3 coeficiente principal 3

b) 5, -1, 1 coeficiente principal 2

c) 4, -3, 1 coeficiente principal 5

d) 2, -2, 4  $a = 1$

e) 5, 3, 1, -2  $f(4) = 15$

f) -2, 1, 2, -3  $F(3) = 24$

### REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

René Descartes encontró un método para indicar el número de raíces positivas en un polinomio, Esta regla dice lo siguiente:

"El número de raíces reales positivas de un polinomio  $f(x)$  es igual al número de cambios de signo de término a término de  $f(x)$  o esta cantidad disminuida en un entero par"

Hay que recordar que los polinomios los tenemos que escribir en orden decreciente conforme al grado de cada término.

**Ejemplo 1 el polinomio:  $f(x) = \underbrace{2x^5 - 7x^3}_{\text{Cambio de Signo de } + \text{ a } -} - \underbrace{4x^2 + x}_{\text{Cambio de Signo de } - \text{ a } +} - 18$**

**Tiene 3 cambios de signo, entonces tiene 3 raíces positivas o 1 raíz positiva.**

**Ejemplo 2:**

el polinomio  $f(x) = \underline{x^4 - 2x^3} + \underline{4x^2 - x} + 5$

tiene 4 cambios de signo, por lo tanto tiene: 4, ó 2, o cero raíz positiva.

**Ejemplo 3:**

el polinomio  $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 2x^2 + x + 1$

No tiene cambios de signo, por lo tanto no tiene raíces reales positivas.

**1) Ejercicios: encuentra el numero de raíces reales de los polinomios dados y exprésalo factorizados**

**RAICES COMPLEJAS DE POLINOMIOS**

**Una raíz compleja y su conjugada**

Los polinomios pueden tener también raíces complejas, y sus respectivas conjugadas también serán raíces del mismo polinomio.

Las raíces complejas aparecen en pares (el complejo que es raíz y su complejo conjugado que también será raíz).

El caso más simple es el de la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  que tiene una raíz compleja  $i$  y su correspondiente complejo conjugado  $-i$

**Sea el polinomio  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 25x - 39$  prueba que tiene las siguientes raíces exactas:  $3$ ,  $2 - 3i$ ,  $2 + 3i$ .**

a  $f(x)$  Primero le buscamos todas las posibles raíces racionales por división sintética y cada vez que encontramos una raíz  $c$ , se obtiene el cociente que tendrá un grado menos que  $f(x)$  y  $(x-c)$  es un factor si  $c$  es una raíz.

Tomamos el nuevo cociente y le seguimos buscando raíces racionales y cada vez que encontramos una raíz el cociente baja un grado y tenemos un nuevo factor hasta que el polinomio cociente sea de 2do grado y luego buscamos las dos raíces restantes usando la formula general.

**Ejemplo:**  $x^3 - 7x^2 + 25x - 39 = 0$

$a_n = 1$  y los factores o divisores de  $a_n$  son  $s = \pm 1$

$a_0 = 39$  y los factores o divisores de  $a_0$  son  $p = \pm 3, \pm 13, \pm 39$

Recuerda usar la regla de los cambios de signos de Descartes para saber cuántas raíces positivas tiene la ecuación dada.

**$f(x)$  tiene 3 cambios de signos eso significa que tiene 3 ó 1(una) raíz positiva.**

$F(-x) = -x^3 - 7x^2 - 25x - 39$  no tiene cambio de signo, eso significa que  $f(x)$  no tiene raíz negativa.

Las posibles raíces racionales son:

$\frac{p}{s} = \pm 3, \pm 13, \pm 39$  Realizaremos divisiones sintética entre las cantidades positivas porque ya sabemos por la regla de Descartes que no hay raíces negativa

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -7 & 25 & -39 & \\ & +3 & -12 & +30 & \\ \hline 1 & -4 & +13 & 0 & \end{array}$$

3 es una raíz cociente  $1x^2 - 4x + 13$  el residuo es cero y  $(x-3)$  es un factor,

Ahora usamos la formula general para hallar las raíces del cociente

$x^2 - 4x + 13 = 0$  como ecuación cuadrática

$a=1, \quad b = -4 \quad c = +13$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{buscaremos el discriminante primero}$$

$$\begin{aligned} &b^2 - 4ac \\ &(-4)^2 - 4(1)(13) \\ &16 - 52 = -36 \quad \text{raíces complejas y conjugadas} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-36}}{2(1)} = \frac{4 \pm 6i}{2} \quad \text{usamos la propiedad distributiva y}$$

$$x = \frac{4}{2} \pm \frac{6i}{2} = 2 \pm 3i \quad \text{aquí vemos que las dos raíces son complejas y conjugadas}$$

$$\text{Factores: } (x - 3)(x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^3 - 7x^2 + 25x - 39$$

### Ejercicios

**ENCUENTRA TODAS LAS RAÍCES DEL POLINOMIO DADO O DE LA ECUACIÓN QUE SE TE DA**

1)  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$

2)  $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

3)  $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$

4)  $P(x) = x^3 - 7x - 6 = 0$

5)  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$

6)  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = 0$

7)  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = 0$

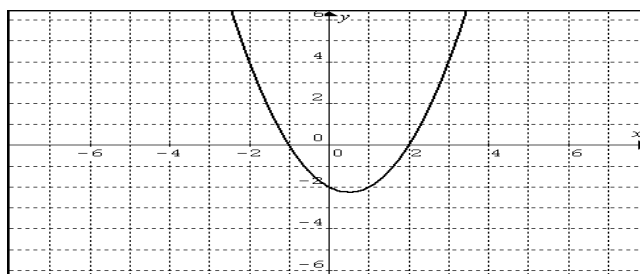
8)  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

- 9)  $P(x) = x^4 - 11x^2 + 18 = 0$   
 10)  $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4 = 0$   
 11)  $P(x) = 6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$

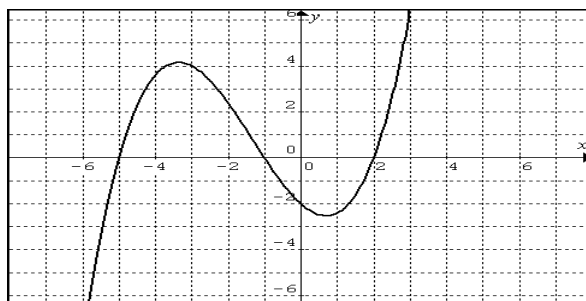
### Funciones polinómicas de grado mayor que 3

Las funciones polinómicas de una variable (x), se corresponden con diversas curvas planas, que se pueden representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas x y.

Por ejemplo: Veamos los siguientes gráficos correspondientes a algunas funciones polinómicas

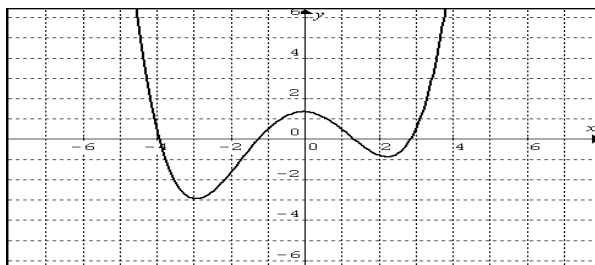


a) Gráfica de un Polinomio de grado 2:  $f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

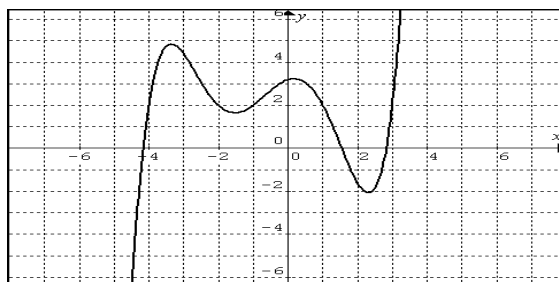


b) Gráfica de un Polinomio de grado 3:

$$f(x) = x^3/5 + 4x^2/5 - 7x/5 - 2 = 1/5 (x+5)(x+1)(x-2)$$

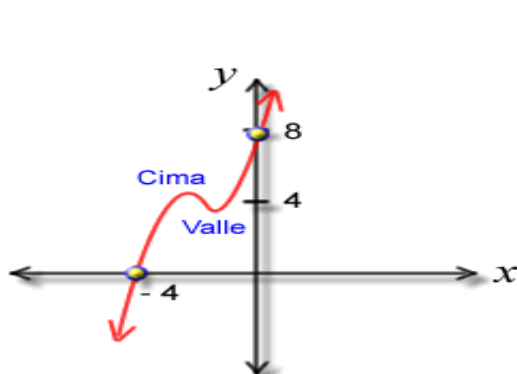


c) Gráfica de un Polinomio de grado 4:  $f(x) = 1/14 (x+4) (x+1) (x-1) (x-3) + 0.5$

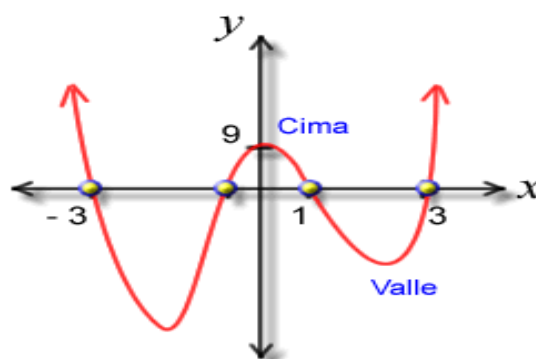


d) Gráfica de un Polinomio de grado 5:  $f(x) = 1/20(x+4) (x+2) (x+1) (x-1) (x-3)+2$

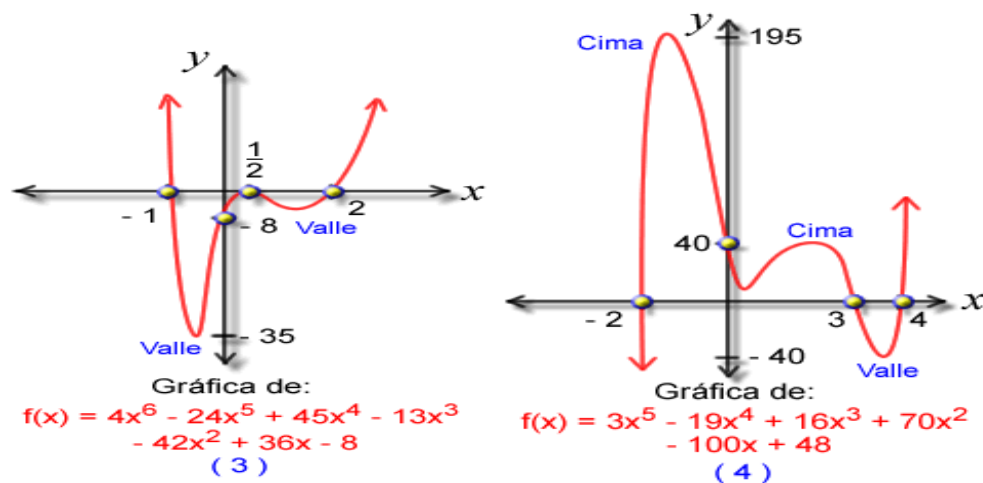
### OTRAS GRÁFICAS CORRESPONDIENTES A FUNCIONES POLINOMICAS



Gráfica de:  
 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8$   
 ( 1 )



Gráfica de:  
 $f(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$   
 ( 2 )



## INTERSECTOS DE UNA GRAFICA;

Un elemento clave en el dibujo de la gráfica de una función polinómicas lo constituye la obtención de los intersectos con los ejes x e y; en particular, los intersectos con el eje x.

INTERSECTO CON EL EJE X: aquí el eje  $y = 0$ ,

Para obtener éstos últimos debemos resolver la ecuación polinómicas correspondiente según el grado que tenga, recurriendo a los métodos ya estudiados previamente (teorema del factor y la división sintética).

Recuerda que en el intersecto con el eje x,  $y = 0$ ,

INTERSECTO CON EL EJE Y: aquí el eje  $x = 0$

en el intersecto con y,  $x = 0$ .

## EJEMPLO 1:

### REALIZAREMOS LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE TERCER GRADO

Grafique la función  $f(x) = x(x - 2)(x + 1)$  sin realizar tabla de valores

Observa que la función está factorizada

a) Intersecto con el eje y,  $x = 0$

$$y = 0(0 - 2)(0 + 1) = 0(-2)(1) \quad y = 0$$

b) Intersectos con el eje x,  $y = 0 \quad x(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 0$ , ó  $x - 2 = 0$ , ó  $x + 1 = 0$  teorema del factor cero

$x = 0$ ,  $x = 0 + 2$   $x = 0 - 1$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

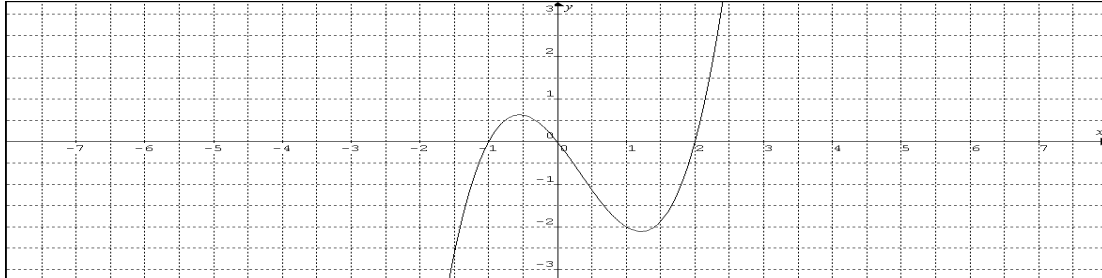
Colocamos estos valores sobre la recta numérica para ver los intervalos en que esta se divide



Hacemos una tabla de los signos de cada factor en cada intervalo

|                    | intervalos        |            |          |               |
|--------------------|-------------------|------------|----------|---------------|
| Factores           | $(-\infty, -1)$   | $(-1, 0)$  | $(0, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|                    | $x = -2$          | $x = -0.5$ | $x = 1$  | $x = 3$       |
| $x$                | -                 | -          | +        | +             |
| $x - 2$            | -                 | -          | -        | +             |
| $x + 1$            | -                 | +          | +        | +             |
| $x (x - 2)(x + 1)$ | -                 | +          | -        | +             |
|                    | Grafica bajo de x | sobre x    | debajo x | sobre x       |

Gráfica de:  $F(x) = x (x - 2)(x + 1)$



## EJEMPLO 2:

**GRAFICAR LA FUNCIÓN  $F(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$**

Podemos resolverla por agrupación de términos para factorizar y encontrar los intersecciones en  $x$ ,

a) Factoricemos

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

Expresión dada

$$F(x) = (x^3 + 3x^2) - (4x + 12)$$

Agrupando para sacar factor común en cada paréntesis

$$F(x) = x^2(x + 3) - 4(x + 3)$$

factor común

$$F(x) = (x+3)(x^2 - 4)$$

factor común polinomio



$$F(x) = (x+3)(x-2)(x+2)$$

factorizando la diferencia de cuadrados

**factores de la función,**

$F(x)$  está factorizada,

b) busquemos los intersecciones con el eje  $x$ ,  $y = 0$

$$0 = (x+3)(x-2)(x+2),$$

aplicar teorema de factor cero,

$$x+3 = 0 \quad \text{ó} \quad x-2 = 0, \quad \text{ó} \quad x+2 = 0,$$

los intersecciones con el eje  $x$  son  $x = -3$ ,  $x = 2$ ,  $x = -2$ .

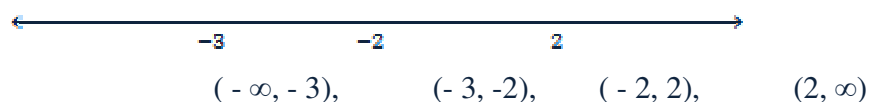
Los intersecciones con el eje  $y$ ,  $x = 0$ ,

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

sustituyendo la  $x$  por cero

$$f(x) = (0)^3 + 3(0)^2 - 4(0) - 12 \quad y = -12$$

c) coloquemos estos números en una recta real para ver los intervalos en que se divide la misma



e) Hagamos una tabla de signos

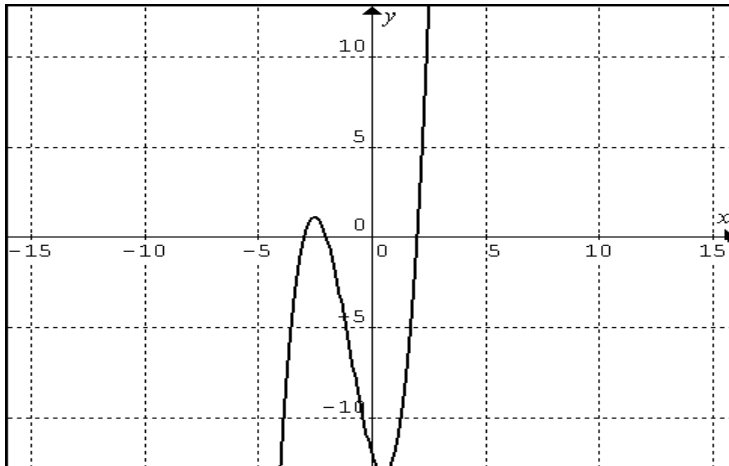
|          | Intervalos      |             |           |               |
|----------|-----------------|-------------|-----------|---------------|
|          | $(-\infty, -3)$ | $(-3, -2)$  | $(-2, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|          | Valor de        | Valor de    | Valor de  | Valor de      |
| Factores | prueba -4       | prueba -2.5 | prueba 0  | prueba 3      |
| $x+3$    | -               | +           | +         | +             |
| $x-2$    | -               | -           | -         | +             |
| $x+2$    | -               | -           | +         | +             |
| $F(x)$   | -               | +           | -         | +             |

En el intervalo donde  $f(x)$  es negativo significa que la gráfica está por debajo del eje  $x$ ,

En el intervalo donde  $f(x)$  es positiva significa que la gráfica está por encima del eje  $x$

**Tomando en cuenta los intersecciones con los ejes  $x$ ,  $y$  más esta tabla de signos, graficamos sin necesidad de tener una tabla de valores**

Observa la gráfica:



Si la función no es factorizable debe realizar una tabla de valores.

### **Sugerencia para graficar una función polinomial de grado mayor que 2 factorizables**

- 1) Para graficar la función hacer  $Y = f(x)$
- 2) Factorice la función dada, si se la presentan factorizada mucho mejor.
- 3) Busque los intersecciones con el eje  $x$ ,  $y = 0$ , y el intersección con el eje  $y$ .
- 4) Coloque los intersecciones con  $x$  sobre la recta numérica y busque los intervalos en que dividen el eje  $x$ .
- 5) Busque el signo de cada factor en cada intervalo, para luego obtener los signos de  $f(x)$  (si da + (positivo), significa que la gráfica está por encima del eje  $x$  en ese intervalo,  
Si da - (negativo), significa que la gráfica está por debajo del eje  $x$  en ese intervalo)  
Esto puede hacerlo usando una tabla y tomando un valor que pertenezca a cada intervalo y sustituir la variable  $x$  para hallar el valor del intervalo +, - ..
- 6) **Trace la gráfica tomando en cuenta cada uno de los pasos anteriores.**

**Ejercicios: Trace la gráfica de cada una de las funciones dadas (no realice cálculo usando tabla de valores)**

- 1)  $(x) = (x - 4)(x - 2)(x + 2)$
- 2)  $F(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
- 3)  $f(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 2)$
- 4)  $F(x) = (x - 2)(x - 4)(x + 1)(x + 2)$
- 5)  $F(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

$$6) f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$$

$$7) f(x) = x(x + 2)(x - 1)(x + 3)$$

$$8) F(x) = (x)(x - 1)(x + 1)(x - 5)$$

$$9) F(x) = -(x - 1)(x - 3)(x + 1)(x + 2)$$

$$10) F(x) = -(x)(x - 1)(x + 1)(x - 5)$$

$$11) F(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

**Ejercicios: Usando una tabla de valores grafique**

$$12) F(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$13) F(x) = x^4 + x - 3$$

$$14) F(x) = x^3 + x - 1$$

$$15) F(x) = x^4 - x + 2$$

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

Un sistema de ecuaciones es no lineal, cuando al menos una de las variables de sus ecuaciones no es de primer grado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Ni x, ni y son de primer grado en la primera ecuación, se puede observar que son ecuaciones de segundo grado y en la segunda ecuación si observamos que es de primer grado.

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución o por el método de igualación.

### Método de sustitución

#### Pasos:

1º Se despeja una incógnita x o y en una de las ecuaciones, preferentemente en la parte que sea común en ambas ecuaciones a veces en la ecuación de primer grado.

2º luego Se sustituye el valor de la incógnita despejada(en este caso y) en el lugar que ocupa en la otra ecuación.

Ejemplo: resuelva el sistema de ecuaciones por el método de sustitución

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \text{Despejando la y en la primera ecuación, } y = 7 - x$$

Y sustituyendo la y en la segunda ecuación por 7-x

De modo que se convierte en:

$$\begin{aligned} x^2 + (7 - x)^2 &= 25 \\ x^2 + 49 - 14x + x^2 - 25 &= 0 \\ 2x^2 - 14x + 24 &= 0 \quad \text{dividiendo entre 2 tenemos } x^2 - 7x + 12 = 0 \end{aligned}$$

Resolvemos esta ecuación usando la formula general

$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 12$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 3 \end{matrix}$$

Cada uno de los valores de x obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita y,

En la segunda ecuación  $x = 3$        $y = 7 - 3$        $y = 4$  solución (3, 4)

$x = 4$        $y = 7 - 4$        $y = 3$  solución (4, 3)

### Método de Igualación;

#### Pasos

1) consiste en despejar la misma variable en las dos ecuaciones

2) y luego se igualan los dos despejes y se resuelve la ecuación resultante

Ejemplo: resuelva el sistema de ecuaciones por el método de sustitución

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \text{despejamos y en ambas ecuaciones}$$

$$Y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$Y = 7 - x \quad \text{ahora igualamos estos dos despejes}$$

$$\sqrt{25 - x^2} = 7 - x \quad \text{eliminando el radical, elevando ambos lados al cuadrado tenemos:}$$

$$25 - x^2 = (7 - x)^2 \text{ de ahí que } 25 - x^2 = 49 - 14x + x^2$$

$$25 - x^2 - 49 + 14x - x^2 = 0 \quad -2x^2 + 14x - 24 = 0 \text{ si resolvemos usando la formula general}$$

$$X = 3 \quad x = 4 \text{ luego con estos dos valores encontramos los valores de y.}$$

## Método grafico

### Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

Los sistemas de ecuaciones de grado superior a uno (generalmente no se suelen resolver de grado mayor que 2), se resolverán gráficamente y donde se corten las graficas serán los puntos soluciones para las variables de la ecuación..

### Ejemplo 1.

Resolver el sistema formado por las ecuaciones:

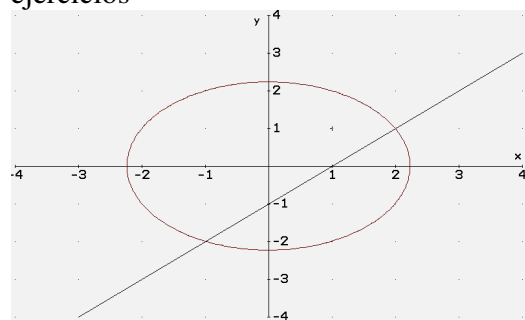
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Puede usar una tabla para cada ecuación y hacemos la grafica de ambas ecuaciones, pero observas que: la primera ecuación  $x^2 + y^2 = 5$  es una circunferencia de radio  $= \sqrt{5}$   
Y la segunda ecuación  $x - y = 1$  es una línea recta y podemos graficarla uniendo los dos intersechos  $x = 1$ ,  $y = -1$

Observas en las gráficas de estas ecuaciones que los puntos de corte de ambas gráficas son  $(2, 1)$  y  $(-1, -2)$ , las soluciones que has debido de obtener para  $x$  e  $y$  son:

$$\begin{array}{lll} x = 2 & y & x = -1 \\ y = 1 & y & y = -2 \end{array}$$

ejercicios



Ejercicios

Use el método de sustitución para realizar estos sistemas de ecuaciones y haga la grafica de c/u.

a)  $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y^2 = x - 1 \end{cases}$

- b)  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2y = x^2 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} y = 4x^3 \\ x - y^3 = 1 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} 2x = 9y^2 + 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
- e)  $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$
- f)  $\begin{cases} 3x + 2y + 8 = 0 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$
- g)  $\begin{cases} 2x^2 - 3y = 17 \\ 3x - 4y + 23 = 0 \end{cases}$
- h)  $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$

## SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

un sistema de ecuaciones lineal es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.

Una solución para el sistema debe proporcionar un valor para cada incógnita, de manera que en ninguna de las ecuaciones del sistema se llegue a una contradicción.

En otras palabras los valores que sustituimos o reemplazamos en el lugar de las incógnitas deben hacer cumplir la igualdad del sistema.

Las incógnitas se suelen representar utilizando las últimas letras del alfabeto latino, x , y , z, a, b, c, d etc.

La forma genérica de un sistema de ecuaciones y incógnitas es la siguiente:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Donde son funciones de las incógnitas.

La solución, será tal que el resultado de evaluar cualquier expresión con los valores de dicha solución, verifique la igualdad en cada ecuación.

Los sistemas de 2 o 3 incógnitas admiten representaciones gráficas cuando las funciones son continuas.

En cada ecuación se representa como una recta. La existencia de soluciones en ese caso puede deducirse a partir de la existencia de intersecciones comunes a dichas rectas.

### Clasificación de los sistemas

Un sistema de ecuaciones sobre puede clasificarse de acuerdo con el número de soluciones en:

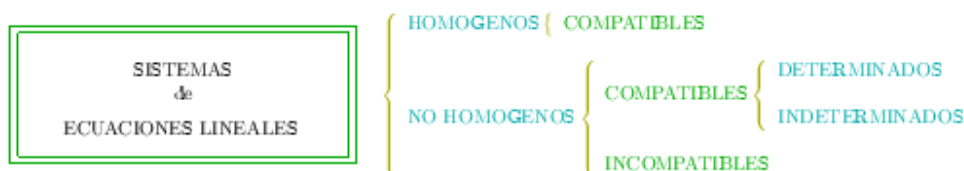
Sistema incompatible cuando no admite ninguna solución.

Sistema compatible cuando admite alguna solución que a su vez pueden dividirse en:

Sistemas compatibles indeterminados cuando existe un número infinito de soluciones que forman una variedad continua.

Sistemas compatibles determinados cuando admiten un conjunto finito de soluciones únicas,

Un sistema de ecuaciones es homogéneo cuando todos sus términos independientes son cero.



Estas ecuaciones se pueden resolver usando métodos analíticos y métodos gráficos

### Métodos analíticos

Métodos de Sustitución, Métodos de Igualación, Métodos de Reducción

#### a) RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Sea el sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

1) Primero en una de las ecuaciones se despeja una de las incógnitas.  
Ejemplo: Hallemos la  $y$  en la primera ecuación supuesto conocido el valor de  $x$

$$y = 11 - 3x$$

2) Se sustituye en la otra ecuación el valor anteriormente hallado  $5x - (11 - 3x) = 13$

Ahora tenemos una ecuación con una sola incógnita;

$$\text{Resolvemos } 5x - 11 + 3x = 13, \quad 5x + 3x = 13 + 11, \quad 8x = 24, \quad x = 3$$

Luego de encontrar en valor  $x$  lo sustituimos en la expresión despejada al principio de  $y$ .

$$y = 11 - 3x, \quad y = 11 - 9 \quad y = 2.$$

Así la solución al sistema de ecuaciones propuesto será  $x = 3$  e  $y = 2$ .

#### b) RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

para resolver el sistema por el metodo de igualacion

1) Se despeja la misma variable (la misma incógnita) en las dos ecuaciones  
Por ejemplo despejemos  $y$

$$\begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = -13 + 5x \end{cases}$$

Luego tomamos los dos despejes e Igualamos ambas ecuaciones

$$11 - 3x = -13 + 5x \quad \text{y resolvemos la ecuación}$$

$$-3x - 5x = -13 - 11$$

$$-8x = -24 \quad \text{dividiendo entre } -8 \quad \text{obtenemos que } x = 3$$

Luego el valor de  $x$  lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones despejada de  $y$

$$y = 11 - 3x, \quad y = 11 - 3(3), \quad y = 11 - 9 \quad \text{entonces } y = 2.$$

#### RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método trata de reducir el sistema a una sola variable y para esto podemos

a) sumar o restar las ecuaciones entre si



- b) multiplicar una ecuación por un número y la otra ecuación por otro número de manera que una misma variable tenga el mismo coeficiente pero con signo distinto en ambas ecuaciones para cuando sean sumadas se pueda eliminar esta incógnita.

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción 
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

observa el sistema dado, 
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

observa que  $y$ , tiene el mismo coeficiente y con signo distinto

Sumaremos miembro a miembro las dos ecuaciones que componen el sistema

$$3x + y = 11$$

$$5x - y = 13$$

$$8x + 0 = 24$$

$$8x = 24 \quad \text{dividiendo en ambos lados entre 8} \quad x = 3.$$

### REALIZA CADA SISTEMA DE ECUACION USANDO LOS METODOS DE IGUALACION, SUSTITUCION Y REDUCCION

1) 
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = -19 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 2y - 11x = 67 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 6) & \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 7x + 8y = -2 \end{cases} \\
 7) & \begin{cases} 4x - y = -2 \\ 10x + 2y = 13 \end{cases} \\
 8) & \begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x - y = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

RESUELVE CADA SISTEMA DE ECUACIONES (REDUZCA A DOS ECUACIONES CON DOS VARIABLES CADA UNA)

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} X + Y + Z = 6 \\ 3X + 2Y - Z = 9 \\ 2X + Y - 3Z = 1 \end{cases} \\
 2) & \begin{cases} 2X + 3Y + Z = 10 \\ 3X + 2Y - Z = 3 \\ X + Y - 3Z = 9 \end{cases} \\
 3) & \begin{cases} X + Y + Z = 12 \\ 3X + 2Y - Z = 18 \\ 2X + Y - 3Z = -5 \end{cases}
 \end{aligned}$$