Parte 3: Teoría de conjuntos

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos totalmente determinada por sus elementos. Generalmente los conjuntos se escriben con una letra mayúscula: A, B, U, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$…

I Conceptos básicos

1/ Definiciones

Existe dos formas para definir los conjuntos:

Definición por extensión: Los elementos se escriben entre llaves, separados con comas, y no importa el orden en el cual están listados.

Ejemplos: *1/ El conjunto de los colores primarios es A = {rojo, amarillo, azul}.*
2/ El conjunto de las respuestas a una pregunta es B = {si, no}
3/ El conjunto de los números de un dado es C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

La **cardinalidad** de un conjunto finito A es el número de elementos en el conjunto. Se escribe **Card(A).** Para los ejemplos arriba Card (A) = 3, Card(B) = 2 y Card(C) = 6.

Si el conjunto contiene una infinidad de elementos pero se pueden listar se escribe los primeros elementos y se pone … después.

Ejemplos: *1/ El conjunto de los números naturales es* $\mathbb{N}$ *= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}*
2/ El conjunto de los números relativos es $\mathbb{Z}$ *= {…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}*

Si el conjunto contiene una infinidad de elementos que no se pueden listar, como lo son los intervalos del conjunto de los números reales, se escribe el intervalo cuando se puede.

Ejemplos: *1/ El conjunto de los números reales entre -2 y 3, -2 y 3 incluidos es* $D = [-2, 3]$
2/ El conjunto de los números reales menor que 3, 3 excluido es $E =]-\infty, 3[$

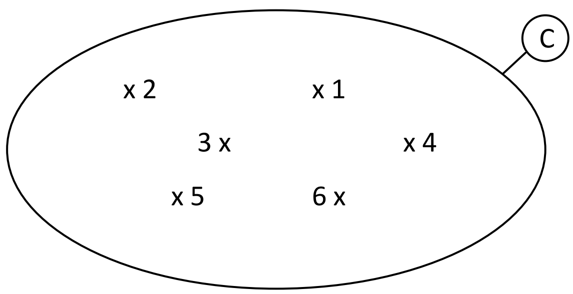
Se puede también definir los conjuntos con la propiedad que cumplen los elementos. Este tipo de definición se llama definición por comprensión.

Definición por comprensión: Si existe una propiedad (o predicado P(x)) satisfecha por todos los elementos x del conjunto A, y solo por ellos, entonces A se puede escribir por comprensión de la manera siguiente: $A = \{x \,/\, P(x)\}$ y esto quiere decir que A es el conjunto de **todos los x tal que P(x) es verdadero.**

Ejemplos: *1/* $A = \{x \,/\, x \text{ es un color primario}\}$
2/ $C = \{x \,/\, x \text{ es un número natural } \wedge 1 \leq x \leq 6\}$
3/ $D = \{x \,/\, x \text{ es un número real } \wedge -2 \leq x \leq 3\}$
4/ $E = \{x \,/\, x \text{ es un número real } \wedge \ x < 3\}$

2/ Diagrama de Venn

Un **diagrama de Venn** es una representación gráfica de los conjuntos. Por ejemplo el conjunto C puede ser representado mediante el diagrama de Venn siguiente.



3/ Pertenencia e inclusión

Cuando un elemento x pertenece a un conjunto A se escribe **x ∈ A** y se lee **x pertenece a A.** Se escribe también **A ∋ x** y se lee **A contiene x**. Si x no es un elemento de A se escribe **x ∉ A** o **A ∌ x** y se lee **x no pertenece a A** o **A no contiene x**.

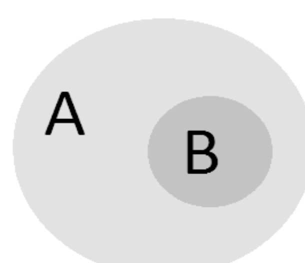
El conjunto que no tiene elementos se le conoce como **conjunto vacío** y se denota **{ }** o **∅.**

Definición: Se dice que B es un **subconjunto** de A y se denota **B ⊂ A** si todos los elementos de A son elementos de B. Es decir **B ⊂ A** $\Leftrightarrow \forall x,\ x \in B \Rightarrow x \in A$.

Se dice también que el conjunto B **está incluido** en A o que A **incluye** el conjunto B. Se puede escribir también **A ⊃ B.**

Si B no está incluido en A entonces se escribe B ⊄A o

A ⊅ B



Propiedades: $\forall$ A, B, C conjuntos,

1/ $\emptyset \subset A$ 2/ $A \subset A$ 3/ $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

4/ Conjunto potencia

Definición: Sea A un conjunto, **$\mathcal{P}$(A)** es el **conjunto potencia de A;** es el conjunto de todos los subconjuntos de A. $\mathcal{P}(A) = \{B \,/\, B \subset A\}$

Ejemplo: *Si A= {1, 2, 3} entonces* $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Teorema : $\text{Card}\,(\mathcal{P}(A)) = 2^{\text{Card}(A)}$

5/ Conjuntos de números

$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$ es el conjunto de los números naturales

$\mathbb{Z} = \{ x \,/\, x \in \mathbb{N} \vee -x \in \mathbb{N} \}$ es el conjunto de los números enteros

$\mathbb{Q} = \{ x \,/\, \exists\, p \in \mathbb{Z}, \exists\, q \in \mathbb{Z}, x = p/q\}$ es el conjunto de los números racionales

$\mathbb{R}$ = {todos los números posibles} es el conjunto de los números reales

$\mathbb{C} = \{x \,/\, \exists\, y \in \mathbb{Z}, \exists\, z \in \mathbb{Z}, x = y + i\,z\}$ con i tal que $i^2 = -1$.; es el conjunto de los números complejos (incluyendo los números imaginarios).

Para cada uno de estos conjuntos, se puede excluir 0 poniendo un * después de la letra. Por ejemplo $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}$ y $\mathbb{R}^*$ = {todos los números posibles excepto 0}.

Se puede hacer lo mismo para guardar solamente los números positivos o negativos. Por ejemplo $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^-$ = {todos los números negativos posibles}.

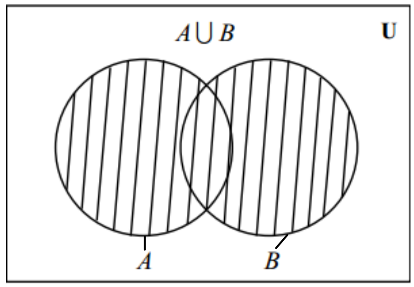
II Operaciones conjuntistas

Muchas veces es conveniente introducir un conjunto fijo **U** tal que todo conjunto considerado sea subconjunto de U. A este conjunto se le llama **conjunto universal**.

Por ejemplo, si estamos trabajando con los números reales, U = $\mathbb{R}$. Si se trabaja con las letras, entonces U es el alfabeto, etc.

1/ Unión

Definición: Sean A y B dos subconjuntos de U, la **unión** de A y B es el conjunto cuyos elementos **pertenecen a A o a B.** Es denotado **A ∪ B.** Tenemos $A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$

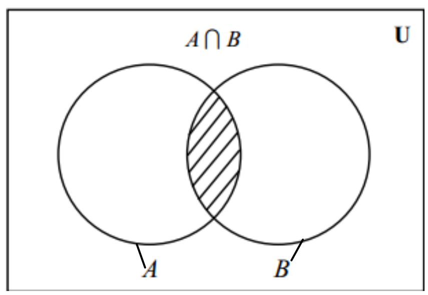


Si A y B están definidos por comprensión $A = \{x / P(x)\}$ y $B = \{x / Q(x)\}$, entonces

$$A \cup B = \{x \in U / P(x) \vee Q(x)\}$$

2/ Intersección

Definición: Sean A y B dos subconjuntos de U, la **intersección** de A y B es el conjunto cuyos elementos **pertenecen a A y a B.** Es denotado **A ∩ B.** Tenemos: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$



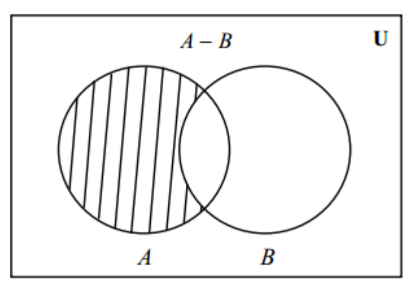
Si A y B están definidos por comprensión $A = \{x / P(x)\}$ y $B = \{x / Q(x)\}$, entonces

$$A \cap B = \{x \in U / P(x) \wedge Q(x)\}$$

Dos conjuntos A y B son **ajenos** o **disjuntos** si y solo si $A \cap B = \emptyset$, es decir que no tienen elementos en común.

3/ Diferencias

Definición: Sean A y B dos conjuntos, la **diferencia** de A y B es el conjunto cuyos elementos **pertenecen a A pero no a B**. Es denotado **A − B.** Tenemos: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

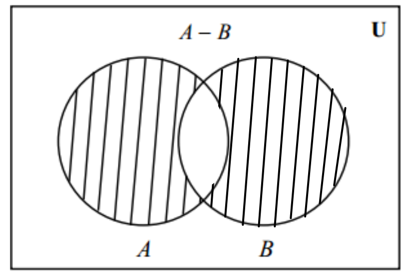


Definición: Sean A y B dos conjuntos, la **diferencia simétrica** de A y B es el conjunto cuyos elementos **pertenecen a A o a B pero no a ambos.** Es denotado **A Δ B**.

Tenemos: $A \,\Delta\, B = \{x \in U \,/\, x \in A \veebar x \in B\}$

Se verifica que $A \,\Delta\, B = \{x / x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B)$

y que $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

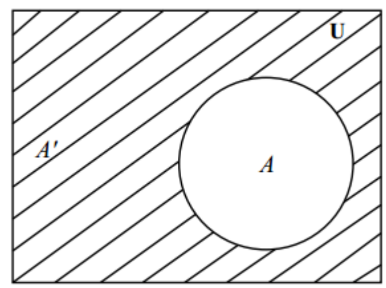


Si A y B están definidos por comprensión $A = \{x \,/\, P(x)\}$ y $B = \{x \,/\, Q(x)\}$, entonces $A - B = \{x \in U/\, P(x) \wedge \neg Q(x)\}$

y $A \,\Delta\, B = \{x \in U/\, P(x) \veebar Q(x)\}$

4/ Complemento

Definición: Sea A un subconjunto de U, el complemento de A es el conjunto cuyos elementos **no pertenecen a A.** Es denotado $\mathbf{A^c}$ o $\overline{\mathbf{A}}$ o **A'.** Tenemos: $A^c = \{x \in U / x \notin A\} = U - A$



Si A esta definido por comprensión $A = \{x \,/\, P(x)\}$, entonces

$A^c = \overline{A} = \{x \,/\, \neg P(x)\}$

5/ Propiedades

1. Propiedades de identidad:

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$
$$A \cap \phi = \phi$$

2. Propiedades de idempotencia:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

3. Propiedades de complemento:

$$A \cup A' = U$$
$$A \cap A' = \phi$$

4. Propiedades asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

5. Propiedades conmutativas

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

6. Propiedades distributivas

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

7. Leyes de Morgan: 1/ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2/ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

6/ Producto Cartesiano

Definición: El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \times B = \{(x,y) \ / \ x \in A \wedge y \in B\}$$

Ejemplo: *Si* $A=\{si, no\}$ *y* $B=\{1,2,3\}$ *entonces* $AxB=\{(no,1),(no,2),(no,3),(si,1),(si,2),(si,3)\}$

Los elementos de AxB son parejas **ordenadas**, por eso $A \times B \neq B \times A$.

Teorema : $Card(AxB)= Card(A) \times Card(B)$

En el ejemplo: $Card(A)=2$ *y* $Card(B)=3 \Rightarrow Card(AxB)= 2x3=6$

De la misma manera se puede definir el producto cartesiano de 3, 4, … conjuntos cuyos elementos son triples, cuadruples, etc.
Si todos los conjuntos son iguales, se escribe A^n en vez de AxAxAx…xA (producto n veces).

Ejemplos: $A=\{1,2\} \Rightarrow A^3=\{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2),(2,2,1), (2,2,2)\}$

$\mathbb{R}x\mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(x,y) \ / \ x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

<u>III Relaciones</u>

1/ Definiciones

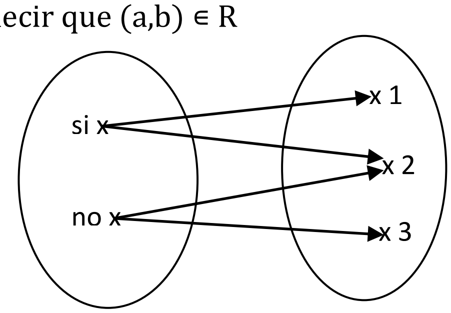
Definición: Sean A y B dos conjuntos, una **relación** R de A en B es un subconjunto de A x B.
Si A = B entonces se dice que R es una **relación binaria** en A.

Ejemplo: *Sean* $A=\{si, no\}$ *y* $B=\{1,2,3\}$, *el conjunto* $R=\{(no,2), (no,3), (si,1), (si,2)\}$ *es una relación de A en B.*

2/ Representación gráfica

Para representar una relación, se dibujan los dos conjuntos y se dibuja flechas que van de a hacia b cuando $(a, b) \in R$. Se escribe también a R b para decir que $(a,b) \in R$

Ejemplo anterior: *El gráfico de la relación R es*



Si R es una relación binaria, se dibuja un único conjunto A, y se dibuja flechas que van de a hacia b cuando $(a, b) \in R$ o $a R b$.

3/ Relaciones particulares

Definición: Sea R una relación binaria en A. Se dice que R es:

Reflexiva si y solo si $\forall x \in A, x R x$

Antireflexiva si y solo si $\forall x \in A, \neg(x R x)$

Simétrica si y solo si $\forall (x, y) \in A^2, x R y \Rightarrow y R x$

Anti simétrica si y solo si $\forall (x, y) \in A^2, x R y \Rightarrow \neg (y R x)$

Transitiva si y solo si $\forall (x, y, z) \in A^3, (x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow x R z$

Conexa si y solo si $\forall (x, y) \in A^2, (x R y) \vee (y R x) \vee (x = y)$

Definición: Sea R una relación binaria en A. Se dice que R es una **relación de orden** si y solo si R es reflexiva, antisimétrica, transitiva. Además, si R es conexa, se dice que R es una **relación de orden total**, sino se dice que R es una **relación de orden parcial**.

Ejemplos: *1/ La relación muy conocida $\leq$ es una relación de orden total en $\mathbb{R}$.*

2/ La relación de inclusión entre los subconjuntos de un conjunto U es una relación de orden parcial.

Definición: Sea R una relación binaria en A. Se dice que R es una **relación de equivalencia** si y solo si R es reflexiva, simétrica y transitiva. La **clase de equivalencia** de a es el conjunto de los elementos de A que están en relación con a. Se denota $[a]_R = \{x \in A / x R a\}$.

Propiedades: 1/ La relación R restringida a cada clase de equivalencia es conexa.

2/ Las clases de equivalencia de una relación binaria en A constituyen una **partición** de A. Esto quiere decir que a) ninguna clase de equivalencia es vacía, b) dos clases de equivalencia distintas son ajenas, c) la unión de todas las clases de equivalencia es A.

Ejemplos: *1/ La relación de equivalencia entre las proposiciones lógicas.*

2/ La relación de congruencia módulo 3 definida por $x R y \Leftrightarrow x - y$ es divisible entre 3. (Por ejemplo 5 R 17 porque $5 - 14 = -9 = 3 \times (-4)$).

IV Funciones

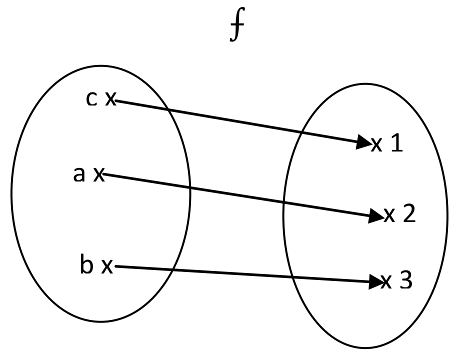
1/ Definiciones

Definición: Una **función** f de A en B es una relación de A x B que verifica:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, a f b$$

Notación: Sea f una función de A en B, como cada elemento de A esta en relación con un único elemento de B, se puede escribir $f(a) = b$ en vez de escribir $a f b$.

Una función f se denota: $f: A \to B$
$a \to f(a)=b$



Ejemplos: *1/ g :* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \to g(x) = x^2 + 1$
2/ f*:* $\{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$
$a \to f(a) = 2$
$b \to f(b) = 3$
$c \to f(c) = 1$

Definiciones: Una **función** f de A en B es:

1/ **inyectiva** (o **uno a uno**) si y solo si $\forall a \in A, \forall a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

o de manera equivalente: $\forall a \in A, \forall a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

2/ **sobreyectiva** (o **sobre**) si y solo si $\forall b \in A, \exists a \in A, f(a) = b$

3/ **biyectiva** si y solo si f es **inyectiva** y f es **sobreyectiva.** (Se dice que f es una **biyección**).

o de manera similar: $\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b$

Ejemplos anteriores: *1/ g es inyectiva, pero no es sobreyectiva.*
2/ f *es biyectiva.*

2/ Operación de composición de funciones

Definición: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos funciones, la **composición** de f y g es la función **gof** de A en C definida por $(gof)(a) = g(f(a))$, para $a \in A$.

Ejemplo: *Sean f :* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *y* *g :* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dos funciones definidas por:*
$x \to f(x) = 2x$ $x \to g(x) = x+1$

Entonces $(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1$

y $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2(x+1) = 2x+2$

Como se ve aquí, la composición de funciones no es una operación conmutativa.

Definición: La función de A en A definida por f(a) = a para todo $a \in A$ es llamada **función identidad** de A et es denotada **Id_A**.

Teorema: Sea $f : A \rightarrow B$ una función. La función f es biyectiva si y solo si existe una función $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que $(f^{-1} \text{ o } f) = Id_A$ y $(f \text{ o } f^{-1}) = Id_B$. f^{-1} es llamada **función inversa** de f.
Se verifica que $\forall a \in A, \forall b \in B$, $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$. Además Card (A) = Card(B).

Ejemplo: *$f : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definido anteriormente, entonces $f^{-1} : \{1,2,3\} \rightarrow \{a,b,c\}$ está definida por $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(3) = b$.*

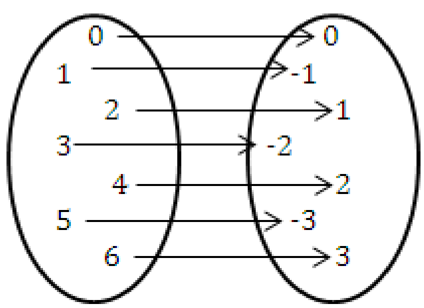
3/ Numerabilidad

Definición: Un conjunto A es **numerable** si y solo si existe una biyección de A en $\mathbb{N}$.

Ejemplo: *$\mathbb{Z}$ es numerable.*

Se define la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ por $f(n) = \frac{n}{2}$ si n es par y por $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

La gráfica siguiente ilustra esta función para los primeros números de $\mathbb{N}$



Con esta definición. f es una biyección, entonces $\mathbb{Z}$ es numerable.