Problema de la Mochila

Definición Recursiva

Para el problema de la mochila con objetos $\{1, \ldots, k\}$ y capacidad D:

$$m(k, D) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \text{ o } D = 0 \\ m(k-1, D) & \text{si } k > 0 \text{ y } p_k > D \\ \max\{m(k-1, D), b_k + m(k-1, D-p_k)\} & \text{si } k > 0 \text{ y } p_k \leq D \end{cases}$$

donde:

- p_k = peso del objeto k
- b_k = beneficio del objeto k
- $m(k, D)$ = máximo beneficio usando objetos $\{1, \ldots, k\}$ con capacidad D

Teorema

Theorem

$m(n, C)$ es el valor óptimo para el problema de la mochila con n objetos y capacidad C.

Estrategia de demostración

Demostrar por **inducción en** k que:

Para todo $k \geq 0$ y toda capacidad $D \geq 0$, $m(k, D)$ es el máximo beneficio posible usando únicamente los primeros k objetos con capacidad D.

Demostración - Casos Base

Demostración.

Caso $k = 0$: Sin objetos disponibles, el máximo beneficio es 0. Por tanto, $m(0, D) = 0$ es óptimo para cualquier D.

Demostración - Casos Base

Demostración.

Caso $k = 0$: Sin objetos disponibles, el máximo beneficio es 0. Por tanto, $m(0, D) = 0$ es óptimo para cualquier D.

Caso $D = 0$: Con capacidad cero, no podemos incluir ningún objeto. Por tanto, $m(k, 0) = 0$ es óptimo para cualquier k.

Demostración - Casos Base

Demostración.

Caso $k = 0$: Sin objetos disponibles, el máximo beneficio es 0. Por tanto, $m(0, D) = 0$ es óptimo para cualquier D.

Caso $D = 0$: Con capacidad cero, no podemos incluir ningún objeto. Por tanto, $m(k, 0) = 0$ es óptimo para cualquier k.

Hipótesis inductiva: Para algún $k' \geq 1$, supongamos que $m(j, D')$ es óptimo para todo $j < k'$ y toda capacidad $D' \geq 0$.

Objetivo: Demostrar que $m(k', D)$ es óptimo para cualquier $D > 0$.

$\square$

Demostración - Paso Inductivo: Caso 1

Caso: $p_{k'} > D$.

Si $p_{k'} > D$, el objeto k' no cabe en la mochila.

Demostración - Paso Inductivo: Caso 1

Caso: $p_{k'} > D$.

Si $p_{k'} > D$, el objeto k' no cabe en la mochila.
Cualquier solución factible usando objetos $\{1, \ldots, k'\}$ debe excluir el objeto k'.

Demostración - Paso Inductivo: Caso 1

Caso: $p_{k'} > D$.

Si $p_{k'} > D$, el objeto k' no cabe en la mochila.
Cualquier solución factible usando objetos $\{1, \ldots, k'\}$ debe excluir el objeto k'.
Por tanto, el problema se reduce a encontrar la solución óptima usando objetos $\{1, \ldots, k' - 1\}$ con capacidad D.

Demostración - Paso Inductivo: Caso 1

Caso: $p_{k'} > D$.

Si $p_{k'} > D$, el objeto k' no cabe en la mochila.
Cualquier solución factible usando objetos $\{1, \ldots, k'\}$ debe excluir el objeto k'.
Por tanto, el problema se reduce a encontrar la solución óptima usando objetos $\{1, \ldots, k' - 1\}$ con capacidad D.
Por hipótesis inductiva: $m(k' - 1, D)$ es óptimo.
Luego: $m(k', D) = m(k' - 1, D)$ es óptimo. $\square$

Demostración - Paso Inductivo: Caso 2

Lema clave

Si una solución es óptima, entonces al quitar cualquier objeto de ella, la solución restante debe ser óptima para el subproblema correspondiente.

Caso: $p_{k'} \leq D$.

Sea S^* una solución óptima para la instancia (k', D). Hay dos casos:

Demostración - Paso Inductivo: Caso 2

Lema clave

Si una solución es óptima, entonces al quitar cualquier objeto de ella, la solución restante debe ser óptima para el subproblema correspondiente.

Caso: $p_{k'} \leq D$.

Sea S^* una solución óptima para la instancia (k', D). Hay dos casos:
Caso 2a: $k' \notin S^*$ S^* usa solo objetos $\{1, \ldots, k' - 1\}$. Por el lema y la hipótesis inductiva: valor óptimo $= m(k' - 1, D)$.

Demostración - Paso Inductivo: Caso 2

Lema clave

Si una solución es óptima, entonces al quitar cualquier objeto de ella, la solución restante debe ser óptima para el subproblema correspondiente.

Caso: $p_{k'} \leq D$.

Sea S^* una solución óptima para la instancia (k', D). Hay dos casos:
Caso 2a: $k' \notin S^*$ S^* usa solo objetos $\{1, \ldots, k'-1\}$. Por el lema y la hipótesis inductiva: valor óptimo $= m(k'-1, D)$.
Caso 2b: $k' \in S^*$ $S^* \setminus \{k'\}$ usa objetos $\{1, \ldots, k'-1\}$ con capacidad $D - p_{k'}$. Por el lema y la hipótesis inductiva: valor óptimo $=$ $b_{k'} + m(k'-1, D - p_{k'})$.

Demostración - Paso Inductivo: Caso 2

Lema clave

Si una solución es óptima, entonces al quitar cualquier objeto de ella, la solución restante debe ser óptima para el subproblema correspondiente.

Caso: $p_{k'} \leq D$.

Sea S^* una solución óptima para la instancia (k', D). Hay dos casos:
Caso 2a: $k' \notin S^*$ S^* usa solo objetos $\{1, \ldots, k'-1\}$. Por el lema y la hipótesis inductiva: valor óptimo $= m(k'-1, D)$.
Caso 2b: $k' \in S^*$ $S^* \setminus \{k'\}$ usa objetos $\{1, \ldots, k'-1\}$ con capacidad $D - p_{k'}$. Por el lema y la hipótesis inductiva: valor óptimo $=$ $b_{k'} + m(k'-1, D - p_{k'})$.
Como no sabemos cuál caso da el óptimo, tomamos:
$m(k', D) = \max\{m(k'-1, D), b_{k'} + m(k'-1, D - p_{k'})\}$ $\square$

Conclusión

Resumen de la demostración

1. Los casos base ($k = 0$ y $D = 0$) son trivialmente correctos
2. Para el paso inductivo, usamos que toda solución óptima debe excluir o incluir el objeto k'
3. Si lo excluye: el problema se reduce al subproblema con $k' - 1$ objetos
4. Si lo incluye: obtenemos $b_{k'}$ y el problema se reduce al subproblema con $k' - 1$ objetos y capacidad $D - p_{k'}$
5. En ambos casos, por inducción, conocemos la solución óptima del subproblema
6. Tomamos el máximo entre ambas opciones

Por tanto, $m(n, C)$ computa correctamente el valor óptimo del problema de la mochila.