# Problema del cambio de monedas

## Contexto

Recordemos que $f(s)$ es la función definida recursivamente:

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0 \\ \min_{i : a_i \leq s}\{1 + f(s - a_i)\} & \text{si existe } i \text{ tal que } a_i \leq s \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

# Problema del cambio de monedas

## Theorem

*Si $f(s) < \infty$, entonces $f(s)$ es el valor óptimo del problema del cambio para entregar $s$ centavos. Si $f(s) = \infty$, entonces el problema no tiene solución.*

## Estrategia de demostración

Demostraremos ambas direcciones:

1. Si $f(s) = \infty \Rightarrow$ no existe solución
2. Si $f(s) = q < \infty \Rightarrow q$ es el valor óptimo

# Demostración - Parte 1

## Afirmación 1

Si $f(s) = \infty$, entonces no existe solución al problema del cambio para $s$ centavos.

# Demostración - Parte 1

## Afirmación 1

Si $f(s) = \infty$, entonces no existe solución al problema del cambio para $s$ centavos.

## Demostración por contradicción

Supongamos que $f(s) = \infty$ pero **sí existe** una solución con $p$ monedas:

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$$

donde cada $b_j \in \{a_1, \ldots, a_k\}$ y $s = \sum_{j=1}^{p} b_j$.

# Demostración - Parte 1

## Afirmación 1

Si $f(s) = \infty$, entonces no existe solución al problema del cambio para $s$ centavos.

## Demostración por contradicción

Supongamos que $f(s) = \infty$ pero **sí existe** una solución con $p$ monedas:

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$$

donde cada $b_j \in \{a_1, \ldots, a_k\}$ y $s = \sum_{j=1}^{p} b_j$.

**Idea:** Si existe tal solución, entonces $f(s)$ debería ser finito, no infinito.

# Demostración - Parte 1

## Continuación

Como existe la solución $\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, entonces por definición de $f(s)$:

$$f(s) \leq 1 + f(s - b_1)$$

# Demostración - Parte 1

## Continuación

Como existe la solución $\{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, entonces por definición de $f(s)$:

$$f(s) \leq 1 + f(s - b_1)$$

Aplicando esto recursivamente:

$$\begin{aligned}
f(s) &\leq 1 + f(s - b_1) && (1)\\
&\leq 1 + 1 + f(s - b_1 - b_2) && (2)\\
&\leq 2 + f(s - b_1 - b_2) && (3)\\
&\leq \cdots && (4)\\
&\leq p + f\left(s - \sum_{j=1}^{p} b_j\right) && (5)
\end{aligned}$$

# Demostración - Parte 1

## Conclusión

Como $s = \sum_{j=1}^{p} b_j$, tenemos:

$$f(s) \leq p + f\left(s - \sum_{j=1}^{p} b_j\right) = p + f(s - s) = p + f(0) = p + 0 = p$$

# Demostración - Parte 1

## Conclusión

Como $s = \sum_{j=1}^{p} b_j$, tenemos:

$$f(s) \leq p + f\left(s - \sum_{j=1}^{p} b_j\right) = p + f(s - s) = p + f(0) = p + 0 = p$$

**Contradicción:** $f(s)$ no puede ser simultáneamente $\infty$ y $\leq p$.

**Conclusión:** Si $f(s) = \infty$, no puede existir ninguna solución al problema del cambio para $s$ centavos.

# Demostración - Parte 2

## Afirmación 2

Si $f(s) = q < \infty$, entonces $q$ es el valor óptimo del problema del cambio para $s$ centavos.

# Demostración - Parte 2

## Afirmación 2

Si $f(s) = q < \infty$, entonces $q$ es el valor óptimo del problema del cambio para $s$ centavos.

Si $f(s) = q$, entonces por la definición recursiva existe alguna moneda $c_1$ tal que: $f(s) = \min_{i:a_i \leq s}\{1 + f(s - a_i)\} = 1 + f(s - c_1)$

# Demostración - Parte 2

## Afirmación 2

Si $f(s) = q < \infty$, entonces $q$ es el valor óptimo del problema del cambio para $s$ centavos.

Si $f(s) = q$, entonces por la definición recursiva existe alguna moneda $c_1$ tal que: $f(s) = \min_{i:a_i \leq s}\{1 + f(s - a_i)\} = 1 + f(s - c_1)$
Desarrollando la recursión:
$f(s) = 1 + f(s - c_1) = 2 + f(s - c_1 - c_2) = \cdots = q + f(0) = q$

# Demostración - Parte 2

### Afirmación 2

Si $f(s) = q < \infty$, entonces $q$ es el valor óptimo del problema del cambio para $s$ centavos.

Si $f(s) = q$, entonces por la definición recursiva existe alguna moneda $c_1$ tal que: $f(s) = \text{mín}_{i:a_i \leq s}\{1 + f(s - a_i)\} = 1 + f(s - c_1)$
Desarrollando la recursión:
$f(s) = 1 + f(s - c_1) = 2 + f(s - c_1 - c_2) = \cdots = q + f(0) = q$
Hemos encontrado $q$ monedas $\{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ que suman exactamente $s$ y forman una solución válida.

# Demostración - Parte 2

## Afirmación 2

Si $f(s) = q < \infty$, entonces $q$ es el valor óptimo del problema del cambio para $s$ centavos.

Si $f(s) = q$, entonces por la definición recursiva existe alguna moneda $c_1$ tal que: $f(s) = \text{mín}_{i:a_i \leq s}\{1 + f(s - a_i)\} = 1 + f(s - c_1)$
Desarrollando la recursión:
$f(s) = 1 + f(s - c_1) = 2 + f(s - c_1 - c_2) = \cdots = q + f(0) = q$
Hemos encontrado $q$ monedas $\{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ que suman exactamente $s$ y forman una solución válida.
**¿Por qué es óptimo?** Si existiera una solución con menos de $q$ monedas, la definición de $f(s)$ como **mínimo** habría elegido esa solución en lugar de $q$.
Por tanto, $q$ es el mínimo número de monedas necesarias.