# Modelos de Computación:
# Relación de problemas 6

David Cabezas Berrido

***Ejercicio*** 13. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere siguiente lenguaje:

$$L = \{ucv \ : \ u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y nº subcadenas ‘01’ en u} = \text{nº subcadenas ‘10’ en v}\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena $010c101$ pertenece al lenguaje generado por la gramática.

$$\begin{array}{lll}
S \to XcY & X \to 1A & Y \to 0B \\
S \to AHB & X \to 0A' & Y \to 1B' \\
H \to 01ATB10 & A \to 1A & B \to 0B \\
T \to H & A \to A' & B \to B' \\
T \to c & A' \to 0A' & B' \to 1B' \\
 & A' \to \varepsilon & B' \to \varepsilon
\end{array}$$

Una gramática en forma normal de Chomsky equivalente es:

$$\begin{array}{lll}
S \to D_{Xc}Y & X \to C_1A & D_{Xc} \to XC_c \\
S \to D_{AH}B & X \to C_0A' & D_{AH} \to AH \\
S \to AH & X \to 0 & D_{01} \to C_0C_1 \\
S \to HB & X \to 1 & D_{10} \to C_1C_0 \\
S \to E_{01AT}E_{B10} & A \to C_1A & D_{AT} \to AT \\
S \to E_{01AT}D_{10} & A \to C_0A' & D_{TB} \to TB \\
S \to E_{01TB}D_{10} & A \to 1 & \\
S \to E_{01T}D_{10} & A \to 0 & E_{01AT} \to D_{01}D_{AT} \\
 & A' \to C_0A' & E_{B10} \to BD_{10} \\
H \to E_{01AT}E_{B10} & A' \to 0 & E_{01TB} \to D_{01}D_{TB} \\
H \to E_{01AT}D_{10} & & E_{01T} \to D_{01}T \\
H \to E_{01TB}D_{10} & Y \to C_0B & \\
H \to E_{01T}D_{10} & Y \to C_1B' & C_c \to c \\
 & Y \to 1 & C_0 \to 0 \\
T \to E_{01AT}E_{B10} & Y \to 0 & C_1 \to 1 \\
T \to E_{01AT}D_{10} & B \to C_0B & \\
T \to E_{01TB}D_{10} & B \to C_1B' & \\
T \to E_{01T}D_{10} & B \to 0 & \\
T \to c & B \to 1 & \\
 & B' \to C_1B' & \\
 & B' \to 1 &
\end{array}$$

Ahora aplicaré el algoritmo CYK sobre la palabra $010c101$:

| 0 | 1 | 0 | c | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X, A, A'$ <br> $Y, B, C_0$ | $X, A, Y$ <br> $B, B', C_1$ | $X, A, A'$ <br> $Y, B, C_0$ | $T, C_c$ | $X, A, Y$ <br> $B, B', C_1$ | $X, A, A'$ <br> $Y, B, C_0$ | $X, A, Y$ <br> $B, B', C_1$ |
| $Y, B, D_{01}$ | $X, A, D_{10}$ | $D_{Xc}, D_{AT}$ | $D_{TB}$ | $X, A, D_{10}$ | $Y, B, D_{01}$ | |
| $E_{B10}$ | $D_{Xc}, D_{AT}$ | $S$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | |
| $E_{01AT}$ | $S$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | | |
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | | | |
| $S, H, T$ | $\emptyset$ | | | | | |
| $S, D_{TB}$ | | | | | | |

$S$ aparece en la última casilla, por tanto la palabra es generada.

***Ejercicio*** 15. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere los siguientes lenguajes sobre $\{a, 0, 1\}$:

$$L_1 = \{auava \mid u, v \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

$$\begin{aligned} S &\to aHa & T &\to 1T1 \\ H &\to 1T1 & T &\to 0T0 \\ H &\to 0T0 & T &\to a \end{aligned}$$

Gramática equivalente en forma normal de Chomsky:

$$\begin{aligned} S &\to D_{aH}C_a & T &\to D_{1T}C_1 & D_{aH} &\to C_aH & C_a &\to a \\ H &\to D_{1T}C_1 & T &\to D_{0T}C_0 & D_{1T} &\to C_1T & C_0 &\to 0 \\ H &\to D_{0T}C_0 & T &\to a & D_{0T} &\to C_0T & C_1 &\to 1 \end{aligned}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si $a0a0a$ pertenece a $L_1$:

| a | 0 | a | 0 | a |
|---|---|---|---|---|
| $C_a, T$ | $C_0$ | $C_a, T$ | $C_0$ | $C_a, T$ |
| $\emptyset$ | $D_{0T}$ | $\emptyset$ | $D_{0T}$ | |
| $\emptyset$ | $H$ | $\emptyset$ | | |
| $D_{aH}$ | $\emptyset$ | | | |
| $S$ | | | | |

$S$ aparece en la última casilla, por tanto la palabra pertenece al lenguaje.

$$L_2 = \{uvu \mid u \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

Este lenguaje no es independiente del contexto, lo probaré con el lema de bombeo. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

La palabra $z = 0^n1^n1^n0^n0^n1^n$ pertenece a $L_2$ y tiene longitud $6n \geq n$. Tomaremos $c_1 = c_3 = 0^n1^n$, $c_2 = 1^n0^n$, luego $z = c_1c_2c_3$.

Para toda descomposición $z = uxvyw$, $\alpha = xvy$ con $|\alpha| \leq n$ y $|xy| \geq 1$.

- $\alpha = 0^k1^l \quad n \geq k + l,\ k, l \geq 1$
  - Si son de $c_1$, al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1'c_2c_3$ tendré $c_1' \neq c_3$, luego $z' \notin L_2$.
  - Si son de $c_3$, al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1c_2c_3'$ tendré $c_1 \neq c_3'$, luego $z' \notin L_2$.
- $\alpha = 1^k0^l \quad n \geq k + l,\ k, l \geq 1$
  - Deben ser de $c_2$, al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1c_2'c_3$ tendré $c_1^{-1} \neq c_2'$, luego $z' \notin L_2$.
- $\alpha = 1^k \quad n \geq k \geq 1$
  - Si alguno es de $c_1$ (aunque otros sean de $c_2$), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1'c_2'c_3$ tendré $c_1' \neq c_3$, luego $z' \notin L_2$.
  - Si alguno es de $c_2$ (aunque otros sean de $c_1$), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1'c_2'c_3$ tendré $c_2' \neq c_3^{-1}$, luego $z' \notin L_2$.
  - Si son de $c_3$, al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1c_2c_3'$ tendré $c_1 \neq c_3'$, luego $z' \notin L_2$.
- $\alpha = 0^k \quad n \geq k \geq 1$
  - Si alguno es de $c_2$ (aunque otros sean de $c_3$), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1c_2'c_3'$ tendré $c_1^{-1} \neq c_2$, luego $z' \notin L_2$.
  - Si alguno es de $c_3$ (aunque otros sean de $c_2$), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1c_2'c_3'$ tendré $c_1 \neq c_3'$, luego $z' \notin L_2$.
  - Si son de $c_1$, al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1'c_2c_3$ tendré $c_1' \neq c_3$, luego $z' \notin L_2$.

***Ejercicio*** 21. Si $L_1$ y $L_2$ son lenguajes sobre el alfabeto $A$, entonces se define el cociente $L_1/L_2 = \{u \in A^* \mid \exists w \in L_2 \text{ tal que } uw \in L_1\}$. Demostrar que si $L_1$ es independiente del contexto y $L_2$ regular, entonces $L_1/L_2$ es independiente del contexto.

Existirá un autómata no determinista con pila que acepte $L_1$ por el criterio de estados finales

$$M = (Q, A, B, \delta, q_0, R, F)$$

Defino el autómata

$$M' = (Q \cup \{q_f\}, A, B, \delta', q_0, R, \{q_f\})$$

Donde $\delta'$ es un extensión de $\delta$, añadiendo transiciones a algunas configuraciones

$$\delta'(q, \varepsilon, H) = \delta(q, \varepsilon, H) \cup \{(q_f, H)\}$$

$\forall q \in Q,\ H \in B$ tales que $\exists w \in L_2$ cumpliendo $\delta^*(q, w, H) \cap F \times B^* \neq \emptyset$

En otras palabras, $M'$ acepta (por estados finales) únicamente las palabras $u$ que al leerse completamente llevan a una configuración para la que existe una palabra $w \in L_2$ que lleva esa configuración a un estado final de $M$. Es decir, palabras $u$ tales que existe $w \in L_2$ cumpliendo $uw \in L_1$.

***Ejercicio*** 22. Si $L$ es un lenguaje sobre $\{0,1\}$, sea $SUF(L)$ el conjunto de los sufijos de palabras de L: $SUF(L) = \{u \in \{0,1\}^* \mid \exists v \in \{0,1\}^*,\ \text{tal que } vu \in L\}$. Demostrar que si $L$ es independiente del contexto, entonces $SUF(L)$ también es independiente del contexto.

Existirá un autómata no determinista con pila que acepte $L$ por el criterio de estados finales

$$M = (Q, A, B, \delta, q_0, R, F)$$

Defino el autómata

$$M' = (Q \cup \{q_0'\}, A, B, \delta', q_0', R, F)$$

Donde $\delta'$ es una extensión de $\delta$, añadiendo las siguientes transiciones:

$$\delta'(q_0', \varepsilon, R) = \{(q, H) \mid \exists v \in \{0,1\}^*,\ \text{tal que } (q, H) \in \delta^*(q_0, v, R)\}$$

Las palabras $u$ aceptadas por este autómata son las que llegan a un estado final partiendo de cualquier configuración accesible desde $(q_0, R)$ por medio de una palabra $v \in \{0,1\}^*$. Es decir, palabras $u$ tales que existe $v$ cumpliendo $vu \in L$.