Modelos de Computación:
Relación de problemas 4

David Cabezas Berrido

Ejercicio 14. Dar gramáticas idependientes del contexto que generen los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{0, 1\}$.

a) L_1: palabras que si empiezan por 0, tienen el mismo número de 0s que de 1s.

$$G_1 = (\{S, D, B, C\}, A, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to 0D|1B|\varepsilon, \\ D &\to C1C, \\ C &\to C0C1C|C1C0C|\varepsilon, \\ B &\to 0B|1B|\varepsilon\} \end{aligned}$$

b) L_2: palabras que si terminan por 1, tienen un número de 1s mayor o igual que el número de 0s.

$$G_2 = (\{S, X, Y, Z\}, A, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to X1|Y0|\varepsilon, \\ X &\to Z0Z|Z, \\ Z &\to Z1Z|Z0Z1Z|Z1Z0Z|\varepsilon, \\ Y &\to 0Y|1Y|\varepsilon\} \end{aligned}$$

c) $L_1 \cap L_2$.

$$G_3 = (\{S, B, C, D, X, Y, Z\}, A, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to 0C|1X|\varepsilon, \\ C &\to D1D, \\ D &\to D0D1D|D1D0D|\varepsilon, \\ X &\to Y1|B0|\varepsilon, \\ Y &\to Z0Z0Z|Z0Z|Z, \\ Z &\to Z1Z|Z0Z1Z|Z1Z0Z|\varepsilon, \\ B &\to 0B|1B|\varepsilon\} \end{aligned}$$

Ejercicio 16. Una gramática independiente del contexto generalizada es una gramática en la que las producciones son de la forma $A \to \mathbf{r}$ donde $\mathbf{r}$ es una expresión regular de variables y símbolos terminales. Demostrar que un lenguaje es independiente del contexto si y sólo si se puede generar por una gramática generalizada.

($\Longrightarrow$) Si L es un lenguaje independiente del contexto, existe una gramática independiente del contexto que lo genera.

$$G = (V, T, P, S)$$

donde todas las reglas son de la forma $A \to \alpha$ con $\alpha \in (V \cup T)^*$. Estos α son expresiones regulares (concatenaciones de variables y símbolos), luego G es una gramática independiente del contexto generalizada.

($\Longleftarrow$) Sea L es un lenguaje generado por una gramática independiente del contexto generalizada.

$$G = (V, T, P, S)$$

donde todas las reglas son de la forma $A \to \mathbf{r}$ con $\mathbf{r}$ una expresión regular de variables y símbolos terminales. Para probar que existe una gramática de tipo 2 que genera L, debo probar que cada regla $A \to \mathbf{r}$ puede sustituirse por un número finito de reglas de producción de la forma $A \to \alpha$ con $\alpha \in (V \cup T)^*$. Haremos el mismo razonamiento que el que se hizo en teoría para probar que el lenguaje asociado a una expresión regular puede expresarse con un autómata, construir el conjunto finito de reglas de producción de forma recursiva.

- $A \to \emptyset$ puede eliminarse.
- $A \to \alpha \quad (\alpha \in (V \cup T)^*)$ ya está en la forma deseada.
- $A \to (r_1 + r_2)$ puede sustituirse por dos reglas: $A \to r_1$, $A \to r_2$.
- $A \to (r_1 r_2)$ puede sustituirse por las reglas: $A \to BC$, $B \to r_1$, $C \to r_2$.
- $A \to r^*$ puede sustituirse por: $B \to AB|\varepsilon$, $A \to r$.

Hemos probado que cada regla $A \to \mathbf{r}$ puede sustituirse por un número finito de reglas $A \to \alpha$. Luego toda gramática libre de contexto generalizada tiene una gramática libre de contexto equivalente.

Ejercicio 17. Demostrar que los siguientes lenguajes son independientes del contexto:

a) $L_1 = \{u\#w | u^{-1} \text{ es una subcadena de } w;\ u, w \in \{0,1\}^*\}$

Es generado por la gramática libre de contexto

$$G = (\{S, A, B\}, \{0, 1, \#\}, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to S0|S1|A,\\ A &\to 0A0|1A1|B,\\ B &\to B0|B1|\#\} \end{aligned}$$

b) $L_2 = \{u_1\#u_2\#\ldots\#u_k \mid k \geq 1,\ \text{cada } u_i \in \{0,1\}^*,\ \text{y para algún } i \text{ y } j,\ u_i = u_j^{-1}\}$

Es generado por la gramática libre de contexto

$$G = (\{S, A, C\}, \{0, 1, \#\}, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to \varepsilon|A|C\#A\#C|A\#C|C\#A, \\ A &\to 0A0|1A1|\#C\#|\#, \\ C &\to 0C|1C|C\#C|\varepsilon\} \end{aligned}$$

Ejercicio 19. Probar que $L = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^*,\ u \neq v\}$ es un lenguaje libre de contexto.

Debo encontrar una gramática libre de contexto que lo genere.

$$G = (\{S, A, X, Y, C, H, T, H_0, H_1, K\}, \{0, 1, \#\}, P, S)$$

$$\begin{aligned} P = \{S &\to A|C, & \\ A &\to KAK|XK|KY, & (|u| \neq |v|) \\ X &\to XK|\#, & (|u| < |v|) \\ Y &\to KY|\#, & (|u| > |v|) \\ C &\to HT, & (|u| = |v|) \\ T &\to KT|\varepsilon & \\ H &\to H_0 0|H_1 1 & \\ H_0 &\to KH_0K|1T\# & \\ H_1 &\to KH_1K|0T\# & \\ K &\to 0|1\} & \end{aligned}$$

Ejercicio 21. Dar gramáticas independientes del contexto no ambiguas para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

a) Palabras w tales que en todo prefijo de w, el número de 0s es mayor o igual que el de 1s.

$$G = (\{S, X, Y\}, \{0, 1\}, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to S0|SX|\varepsilon \\ X &\to Y1 \\ Y &\to YY1|0\} \end{aligned}$$

b) Palabras w en las que el número de 0s es mayor o igual que el número de 1s.

$$G = (\{S, A, B, C, D, H, T\}, \{0, 1\}, P, S)$$

Donde

$$\begin{aligned} P = \{S &\to H|T \\ H &\to AH|CH|\varepsilon \\ T &\to 0S|CT \\ A &\to 0B \\ B &\to 0BB|1 \\ C &\to 1D \\ D &\to 1DD|0\} \end{aligned}$$