

Modelos de Computación:

Relación de problemas 6

David Cabezas Berrido

Ejercicio 13. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere siguiente lenguaje:

$$L = \{ucv : u, v \in \{0, 1\}^+ \text{ y } n^\circ \text{ subcadenas '01' en } u = n^\circ \text{ subcadenas '10' en } v\}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si la cadena 010c101 pertenece al lenguaje generado por la gramática.

$S \rightarrow XcY$	$X \rightarrow 1A$	$Y \rightarrow 0B$
$S \rightarrow AHB$	$X \rightarrow 0A'$	$Y \rightarrow 1B'$
$H \rightarrow 01ATB10$	$A \rightarrow 1A$	$B \rightarrow 0B$
$T \rightarrow H$	$A \rightarrow A'$	$B \rightarrow B'$
$T \rightarrow c$	$A' \rightarrow 0A'$	$B' \rightarrow 1B'$
	$A' \rightarrow \varepsilon$	$B' \rightarrow \varepsilon$

Una gramática en forma normal de Chomsky equivalente es:

$S \rightarrow D_{Xc}Y$	$X \rightarrow C_1A$	$D_{Xc} \rightarrow XC_c$
$S \rightarrow D_{AH}B$	$X \rightarrow C_0A'$	$D_{AH} \rightarrow AH$
$S \rightarrow AH$	$X \rightarrow 0$	$D_{01} \rightarrow C_0C_1$
$S \rightarrow HB$	$X \rightarrow 1$	$D_{10} \rightarrow C_1C_0$
$S \rightarrow E_{01AT}E_{B10}$	$A \rightarrow C_1A$	$D_{AT} \rightarrow AT$
$S \rightarrow E_{01AT}D_{10}$	$A \rightarrow C_0A'$	$D_{TB} \rightarrow TB$
$S \rightarrow E_{01TB}D_{10}$	$A \rightarrow 1$	
$S \rightarrow E_{01T}D_{10}$	$A \rightarrow 0$	$E_{01AT} \rightarrow D_{01}D_{AT}$
	$A' \rightarrow C_0A'$	$E_{B10} \rightarrow BD_{10}$
	$A' \rightarrow 0$	$E_{01TB} \rightarrow D_{01}D_{TB}$
$H \rightarrow E_{01AT}E_{B10}$		$E_{01T} \rightarrow D_{01}T$
$H \rightarrow E_{01AT}D_{10}$		
$H \rightarrow E_{01TB}D_{10}$	$Y \rightarrow C_0B$	
$H \rightarrow E_{01T}D_{10}$	$Y \rightarrow C_1B'$	$C_c \rightarrow c$
	$Y \rightarrow 1$	$C_0 \rightarrow 0$
	$Y \rightarrow 0$	$C_1 \rightarrow 1$
$T \rightarrow E_{01AT}E_{B10}$	$B \rightarrow C_0B$	
$T \rightarrow E_{01AT}D_{10}$	$B \rightarrow C_1B'$	
$T \rightarrow E_{01TB}D_{10}$	$B \rightarrow 0$	
$T \rightarrow E_{01T}D_{10}$	$B \rightarrow 1$	
$T \rightarrow c$	$B' \rightarrow C_1B'$	
	$B' \rightarrow 1$	

Ahora aplicaré el algoritmo CYK sobre la palabra 010c101:

0	1	0	c	1	0	1
X, A, A' Y, B, C_0	X, A, Y B, B', C_1	X, A, A' Y, B, C_0	T, C_c	X, A, Y B, B', C_1	X, A, A' Y, B, C_0	X, A, Y B, B', C_1
Y, B, D_{01}	X, A, D_{10}	D_{Xc}, D_{AT}	D_{TB}	X, A, D_{10}	Y, B, D_{01}	
E_{B10}	D_{Xc}, D_{AT}	S	\emptyset	\emptyset		
E_{01AT}	S	\emptyset	\emptyset			
\emptyset	\emptyset	\emptyset				
S, H, T	\emptyset					
S, D_{TB}						

S aparece en la última casilla, por tanto la palabra es generada.

Ejercicio 15. Encuentra una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky que genere los siguientes lenguajes sobre $\{a, 0, 1\}$:

$$L_1 = \{auava \mid u, v \in \{0, 1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow aHa & T \rightarrow 1T1 \\ H \rightarrow 1T1 & T \rightarrow 0T0 \\ H \rightarrow 0T0 & T \rightarrow a \end{array}$$

Gramática equivalente en forma normal de Chomsky:

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow D_{aH}C_a & T \rightarrow D_{1T}C_1 & D_{aH} \rightarrow C_aH & C_a \rightarrow a \\ H \rightarrow D_{1T}C_1 & T \rightarrow D_{0T}C_0 & D_{1T} \rightarrow C_1T & C_0 \rightarrow 0 \\ H \rightarrow D_{0T}C_0 & T \rightarrow a & D_{0T} \rightarrow C_0T & C_1 \rightarrow 1 \end{array}$$

Comprueba con el algoritmo CYK si $a0a0a$ pertenece a L_1 :

a	0	a	0	a
C_a, T	C_0	C_a, T	C_0	C_1, T
\emptyset	D_{0T}	\emptyset		
\emptyset	H	\emptyset		
D_{aH}	\emptyset			
S				

S aparece en la última casilla, por tanto la palabra pertenece al lenguaje.

$$L_2 = \{uvu \mid u \in \{0,1\}^+ \text{ y } u^{-1} = v\}$$

Este lenguaje no es independiente del contexto, lo probaré con el lema de bombeo. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

La palabra $z = 0^n 1^n 1^n 0^n 0^n 1^n$ pertenece a L_2 y tiene longitud $6n \geq n$. Tomaremos $c_1 = c_3 = 0^n 1^n$, $c_2 = 1^n 0^n$, luego $z = c_1 c_2 c_3$.

Para toda descomposición $z = uxvyw$, $\alpha = xvy$ con $|\alpha| \leq n$ y $|xy| \geq 1$.

- $\alpha = 0^k 1^l$ $n \geq k + l$, $k, l \geq 1$
 - Si son de c_1 , al hacer $ux^2vy^2w = z' = c'_1 c_2 c_3$ tendré $c'_1 \neq c_3$, luego $z' \notin L_2$.
 - Si son de c_3 , al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1 c_2 c'_3$ tendré $c_1 \neq c'_3$, luego $z' \notin L_2$.
- $\alpha = 1^k 0^l$ $n \geq k + l$, $k, l \geq 1$
 - Deben ser de c_2 , al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1 c'_2 c_3$ tendré $c_1^{-1} \neq c'_2$, luego $z' \notin L_2$.
- $\alpha = 1^k$ $n \geq k \geq 1$
 - Si alguno es de c_1 (aunque otros sean de c_2), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c'_1 c'_2 c_3$ tendré $c'_1 \neq c_3$, luego $z' \notin L_2$.
 - Si alguno es de c_2 (aunque otros sean de c_1), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c'_1 c'_2 c_3$ tendré $c'_2 \neq c_3^{-1}$, luego $z' \notin L_2$.
 - Si son de c_3 , al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1 c_2 c'_3$ tendré $c_1 \neq c'_3$, luego $z' \notin L_2$.
- $\alpha = 0^k$ $n \geq k \geq 1$
 - Si alguno es de c_2 (aunque otros sean de c_3), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1 c'_2 c'_3$ tendré $c_1^{-1} \neq c_2$, luego $z' \notin L_2$.
 - Si alguno es de c_3 (aunque otros sean de c_2), al hacer $ux^2vy^2w = z' = c_1 c'_2 c'_3$ tendré $c_1 \neq c'_3$, luego $z' \notin L_2$.
 - Si son de c_1 , al hacer $ux^2vy^2w = z' = c'_1 c_2 c_3$ tendré $c'_1 \neq c_3$, luego $z' \notin L_2$.

Ejercicio 21. Si L_1 y L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A , entonces se define el cociente $L_1/L_2 = \{u \in A^* \mid \exists w \in L_2 \text{ tal que } uw \in L_1\}$. Demostrar que si L_1 es independiente del contexto y L_2 regular, entonces L_1/L_2 es independiente del contexto.

Existirá un autómata no determinista con pila que acepte L_1 por el criterio de estados finales

$$M = (Q, A, B, \delta, q_0, R, F)$$

Defino el autómata

$$M' = (Q \cup \{q_f\}, A, B, \delta', q_0, R, \{q_f\})$$

Donde δ' es una extensión de δ , añadiendo transiciones a algunas configuraciones

$$\delta'(q, \varepsilon, H) = \delta(q, \varepsilon, H) \cup \{(q_f, H)\}$$

$\forall q \in Q, H \in B$ tales que $\exists w \in L_2$ cumpliendo $\delta^*(q, w, H) \cap F \times B^* \neq \emptyset$

En otras palabras, M' acepta (por estados finales) únicamente las palabras u que al leerse completamente llevan a una configuración para la que existe una palabra $w \in L_2$ que lleva esa configuración a un estado final de M . Es decir, palabras u tales que existe $w \in L_2$ cumpliendo $uw \in L_1$.

Ejercicio 22. Si L es un lenguaje sobre $\{0, 1\}$, sea $SUF(L)$ el conjunto de los sufijos de palabras de L : $SUF(L) = \{u \in \{0, 1\}^* \mid \exists v \in \{0, 1\}^*, \text{ tal que } vu \in L\}$. Demostrar que si L es independiente del contexto, entonces $SUF(L)$ también es independiente del contexto.

Existirá un autómata no determinista con pila que acepte L por el criterio de estados finales

$$M = (Q, A, B, \delta, q_0, R, F)$$

Defino el autómata

$$M' = (Q \cup \{q'_0\}, A, B, \delta', q'_0, R, F)$$

Donde δ' es una extensión de δ , añadiendo las siguientes transiciones:

$$\delta'(q'_0, \varepsilon, R) = \{(q, H) \mid \exists v \in \{0, 1\}^*, \text{ tal que } (q, H) \in \delta^*(q_0, v, R)\}$$

Las palabras u aceptadas por este autómata son las que llegan a un estado final partiendo de cualquier configuración accesible desde (q_0, R) por medio de una palabra $v \in \{0, 1\}^*$. Es decir, palabras u tales que existe v cumpliendo $vu \in L$.