

# Metaheurísticas: Práctica 1

## Búsqueda Local y Algoritmos Greedy para el Problema de la Máxima Diversidad

David Cabezas Berrido

20079906D

Grupo 2: Viernes

[dxabezas@correo.ugr.es](mailto:dxabezas@correo.ugr.es)

8 de abril de 2021

# Índice

<b>1. Descripción y formulación del problema</b>	<b>3</b>
<b>2. Aplicación de los algoritmos</b>	<b>4</b>
<b>3. Descripción de los algoritmos</b>	<b>6</b>
3.1. Búsqueda local . . . . .	6
<b>4. Algoritmo de comparación: Greedy</b>	<b>8</b>
<b>5. Desarrollo de la práctica</b>	<b>9</b>
5.1. Manual de usuario . . . . .	9
<b>6. Experimentación y análisis</b>	<b>10</b>
6.1. Casos de estudio y resultados . . . . .	10
6.2. Análisis de resultados . . . . .	13
6.2.1. Gráficas de convergencia . . . . .	14
<b>7. Trabajo voluntario</b>	<b>17</b>
7.1. Comparación Búsqueda Local: Mejor vs Primer Mejor . . . . .	17

# 1. Descripción y formulación del problema

Nos enfrentamos al **Problema de la Máxima Diversidad** (**Maximum Diversity Problem, MDP**). El problema consiste en seleccionar un subconjunto  $m$  elementos de un conjunto de  $n > m$  elementos de forma que se **maximice** la *diversidad* entre los elementos escogidos.

Disponemos de una matriz  $D = (d_{ij})$  de dimensión  $n \times n$  que contiene las distancias entre los elementos, la entrada  $(i, j)$  contiene el valor  $d_{ij}$ , que corresponde a la distancia entre el elemento  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo. Obviamente, la matriz  $D$  es simétrica y con diagonal nula.

Existen distintas formas de medir la diversidad, que originan distintas variantes del problema. En nuestro caso, la diversidad será la suma de las distancias entre cada par de elementos seleccionados.

De manera formal, se puede formular el problema de la siguiente forma:

Maximizar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n d_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= m \\ x_i &\in \{0, 1\}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Una solución al problema es un vector binario  $x$  que indica qué elementos son seleccionados, seleccionamos el elemento  $i$ -ésimo si  $x_i = 1$ .

Sin embargo, esta formulación es poco eficiente y para la mayoría de algoritmos proporcionaremos otra equivalente pero más eficiente.

El problema es **NP-completo** y el tamaño del espacio de soluciones es  $\binom{n}{m}$ , de modo que es conveniente recurrir al uso de metaheurísticas para atacarlo.

## 2. Aplicación de los algoritmos

Los algoritmos para resolver este problema tendrán como entradas la matriz  $D$  ( $n \times n$ ) y el valor  $m$ . La salida será un contenedor (vector, conjunto, ...) con los índices de los elementos seleccionados, y no un vector binario como el que utilizamos para la formulación. En nuestro caso utilizaremos conjuntos para representar soluciones.

Para representar las soluciones, usaremos conjuntos de enteros con los elementos seleccionados. La evaluación de la calidad de una solución se hará sumando la contribución de cada uno de los elementos, y dividiremos la evaluación en dos funciones. En lugar de calcular la función evaluación como en (1), lo haremos así:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \text{contrib}(i) \quad (2)$$

La diferencia es que contamos la distancia entre cada dos elementos  $i, j$  dos veces, distancia del elemento  $i$ -ésimo al  $j$ -ésimo y del  $j$ -ésimo al  $i$ -ésimo. Esto es obviamente más lento que con  $j > i$  en la sumatoria, pero nos permite factorizar la evaluación de la solución como suma de las contribuciones de los elementos, lo cuál será útil para reaprovechar cálculos al evaluar soluciones para la Búsqueda Local. Además, representar la solución como un vector de  $m$  índices y no un vector binario de longitud  $n$  presenta una clara ventaja: las sumatorias van hasta  $m$  en lugar de  $n$ . No tenemos que computar distancias para luego multiplicarlas por cero como sugería la formulación en (1).

Presentamos el pseudocódigo de la función para calcular la contribución de un elemento  $x_i$ .

---

**Algorithm 1:** CONTRIB calcula la contribución de un elemento en una solución.

---

**Input:** Un conjunto de índices  $S$ .

**Input:** La matriz de distancias  $D$ .

**Input:** Un entero  $e$  correspondiente al índice del elemento.

**Output:** La contribución del elemento  $e$ , como se describe en (2).

$\text{contrib} \leftarrow 0$

**for**  $s$  **in**  $S$  **do**

$\text{contrib} \leftarrow \text{contrib} + D[e, s]$                       // Sumo las distancias del elemento  $e$  a cada elemento de  $S$

**return**  $\text{contrib}$

---

Nótese que el elemento  $e$  no tiene que pertenecer al conjunto  $S$ . Esto obviamente no ocurrirá cuando se vaya a evaluar una solución al completo invocando esta función con la que describiremos a continuación. Pero, de esta forma, permite conocer cómo influirá en la evaluación el añadir un nuevo elemento sin necesidad de añadirlo realmente.

Ahora presentamos el pseudocódigo de la función para evaluar una solución completa.

---

**Algorithm 2:** FITNESS calcula la evaluación de una solución.

---

**Input:** Un conjunto de índices  $S$ .

**Input:** La matriz de distancias  $D$ .

**Output:** El valor de la función objetivo sobre la solución compuesta por  $S$ , como se describe en (2).

$\text{fitness} \leftarrow 0$

**for**  $e$  **in**  $S$  **do**

$\text{fitness} \leftarrow \text{fitness} + \text{contrib}(S, D, e)$                       // Sumo la contribución de cada elemento de la solución

**return**  $\text{fitness}/2$     // Hemos contado cada distancia dos veces

---

Podemos definir la distancia de un elemento  $e$  a un conjunto  $S$  como:

$$d(e, S) = \sum_{s \in S} d(e, s) \quad (3)$$

Esta expresión nos será de utilidad para la implementación de los algoritmos.

Gracias a la existencia del Algoritmo 1, podemos obtener esta expresión como  $\text{contrib}(S, D, e)$ .

En esta práctica, compararemos los algoritmos Greedy y Búsqueda Local con Primer Mejor. Como trabajo voluntario, incluimos también la comparación entre los criterios de búsqueda local *mejor* y *primer mejor*.

### 3. Descripción de los algoritmos

#### 3.1. Búsqueda local

Procedemos con la descripción del algoritmo de Búsqueda Local que se nos ha presentado en el seminario. Este algoritmo utiliza la técnica del Primer Mejor, en la que se van generando soluciones en el entorno de la actual y se salta a la primera con mejor evaluación. Para la implementación del algoritmo, necesitamos distintos elementos.

El primer elemento, es una función para generar una solución aleatoria de partida. Simplemente se eligen  $m$  elementos diferentes del conjunto. Por comodidad, también calculamos el complementario.

---

**Algorithm 3:** RANDOMSOL proporciona una solución válida aleatoria

---

**Input:** El entero  $m$ .

**Input:** El entero  $n$ .

**Output:** Una solución válida del MDP obtenida aleatoriamente.

**Output:** El complementario de la solución obtenida.

$E \leftarrow \{0, \dots, n-1\}$  // Conjunto con los elementos no seleccionados

$S \leftarrow \emptyset$  // La solución empieza vacía

**while**  $|S| < m$  **do**

$e \leftarrow$  elemento aleatorio de  $E$

$E \leftarrow E \setminus \{e\}$

$S \leftarrow S \cup \{e\}$

**return**  $S$

**return**  $E$  // El complementario

---

Lo siguiente que necesitamos es un método para generar las soluciones del entorno. Estas soluciones se consiguen sustituyendo el menor contribuyente de la solución actual por otro candidato. Presentamos el código para obtener el menor contribuyente.

---

**Algorithm 4:** LOWESTCONTRIB obtiene el elemento de  $S$  que menos contribuye en la valoración.

---

**Input:** Un conjunto de elementos  $S$ .

**Input:** La matriz de distancias  $D$ .

**Output:** El elemento de  $S$  que minimiza  $\text{contrib}(S, S, e)$  con  $e \in S$ .

**Output:** Su contribución, para la factorización de la función objetivo.

$\text{lowest} \leftarrow$  primer elemento de  $S$

$\text{min\_contrib} \leftarrow \text{contrib}(S, D, \text{lowest})$

**for**  $s$  **in**  $S$  **do**

$\text{contrib} \leftarrow \text{contrib}(S, D, s)$

**if**  $\text{contrib} < \text{min\_contrib}$  **then**

$\text{min\_contrib} \leftarrow \text{contrib}$

$\text{lowest} \leftarrow s$

    // Si encuentro un candidato con menor contribución, actualizo

**return**  $\text{lowest}$

**return**  $\text{min\_contrib}$ 

---

En el caso de que  $S$  se represente como un conjunto, no sabemos cuál será el primer elemento (depende de la implementación del iterador). Pero esto no es relevante, ya que vale cualquier elemento de  $S$ .

Finalmente, proporcionamos el algoritmo de Búsqueda Local para actualizar la solución por otra del entorno iterativamente hasta encontrar un máximo local (una solución mejor que todas las de su entorno) o llegar a un límite de evaluaciones de la función objetivo:  $LIMIT = 100000$ . Las soluciones del entorno se generan aleatoriamente.

---

**Algorithm 5:** LOCALSEARCH

---

**Input:** El entero  $m$ .

**Input:** La matriz de distancias  $D$ ,  $n \times n$ .

**Output:** Una solución válida del MDP por el algoritmo de BS que hemos descrito, junto con su evaluación.

```
 $S \leftarrow \text{randomSol}(m, n)$  // Comenzamos con una solución aleatoria
 $E \leftarrow \{0, \dots, n-1\} \setminus S$  // randomSol también devuelve el complementario
 $\text{fitness} \leftarrow \text{fitness}(S)$  // Diversidad de la solución
 $E \leftarrow \text{vector}(E)$  // No importa el orden, pero debe poder barajarse
 $\text{carryon} \leftarrow \text{true}$ 
 $\text{LIMIT} \leftarrow 100000$  // Límite de llamadas a la función de evaluación
 $\text{CALLS} \leftarrow 0$ 
while  $\text{carryon}$  do
   $\text{carryon} \leftarrow \text{false}$ 
   $\text{lowest} = \text{lowestContributor}(S, D)$ 
   $\text{min\_contrib} \leftarrow \text{contrib}(S, D, \text{lowest})$  // Se calcula dentro de lowestContributor
   $S \leftarrow S \setminus \{\text{lowest}\}$ 
   $E \leftarrow \text{shuffle}(E)$ 
  for  $e$  in  $E$  do
     $\text{contrib} \leftarrow \text{contrib}(S, D, e)$ 
     $\text{CALLS} \leftarrow \text{CALLS} + 1$  // He evaluado una posible solución
    if  $\text{contrib} > \text{min\_contrib}$  then
       $\text{fitness} \leftarrow \text{fitness} + \text{contrib} - \text{min\_contrib}$  // Diversidad de la nueva solución
       $\text{carryon} \leftarrow \text{true}$  // Toca saltar, lo que completa la iteración
       $S \leftarrow S \cup \{e\}$  // Saltamos a la nueva solución
       $E \leftarrow E \setminus \{e\}$ 
       $E \leftarrow E \cup \{\text{lowest}\}$ 
    if  $\text{carryon} == \text{true}$  or  $\text{CALLS} \geq \text{LIMIT}$  then
      break // Se cumple alguna de las condiciones de parada
if  $|S| < m$  then
   $S \leftarrow S \cup \{\text{lowest}\}$  // Si salimos porque no encontramos una mejor, recuperamos la solución
return  $S$ 
return  $\text{fitness}$ 
```

---

Cabe destacar que a diferencia del algoritmo Greedy (Algoritmo 7) en el que se evalúa la solución al final, en este algoritmo se calcula factorizando. Esto acelera mucho los cálculos, ya que hay que evaluar muchas soluciones diferentes.

## 4. Algoritmo de comparación: Greedy

Para comparar la eficacia de cada algoritmos, lo compararemos con el algoritmo **Greedy**. El algoritmo consiste en empezar por el elemento más lejano al resto e ir añadiendo el elemento que más contribuya hasta completar una solución válida.

Como elemento más lejano al resto se toma el elemento cuya suma de las distancias al resto sea la mayor. Y en cada iteración se introduce el elemento cuya suma de las distancias a los seleccionados sea mayor. Es decir, utilizamos la definición de (3).

Para calcular ambos valores, usamos la siguiente función, que permite obtener el de entre un conjunto de candidatos más lejano (en el sentido que acabamos de comentar) a los elementos de un conjunto dado. El código para calcularlo es similar al del algoritmo 4.

---

**Algorithm 6:** FARTHEST obtiene el candidato más lejano a los elementos de  $S$ .

---

**Input:** Un conjunto de candidatos  $C$ .

**Input:** Un conjunto de elementos  $S$ .

**Input:** La matriz de distancias  $D$ .

**Output:** El candidato más lejano en el sentido de (3).

$farthest \leftarrow$  primer elemento de  $C$

$max\_contrib \leftarrow contrib(S, D, farthest)$

**for**  $e$  **in**  $C$  **do**

$contrib \leftarrow contrib(S, D, e)$

**if**  $contrib > max\_contrib$  **then**

$max\_contrib \leftarrow contrib$

$farthest \leftarrow e$

        // Si encuentro un candidato con mayor contribución, actualizo

**return**  $farthest$

---

En el caso de que  $C$  se represente como un conjunto, no sabemos cuál será el primer elemento (depende de la implementación del iterador). Pero esto no es relevante, ya que vale cualquier elemento de  $C$ .

Ya estamos en condiciones de proporcionar una descripción del algoritmo Greedy.

---

**Algorithm 7:** GREEDY

---

**Input:** La matriz de distancias  $D$ .

**Input:** El entero  $m$ .

**Output:** Una solución válida del MDP obtenida como hemos descrito anteriormente, y su diversidad.

$C \leftarrow \{0, \dots, n-1\}$

// En principio los  $n$  elementos son candidatos

$S \leftarrow \emptyset$

// La solución empieza vacía

$farthest \leftarrow farthest(C, C, D)$

// Elemento más lejano al resto

$C \leftarrow C \setminus \{farthest\}$

$S \leftarrow S \cup \{farthest\}$

**while**  $|S| < m$  **do**

$farthest \leftarrow farthest(C, S, D)$

// Elemento más lejano a los seleccionados

$C \leftarrow C \setminus \{farthest\}$

$S \leftarrow S \cup \{farthest\}$

**return**  $S$

**return**  $fitness(S)$

---



## 5. Desarrollo de la práctica

La implementación de los algoritmos y la experimentación con los mismos se ha llevado a cabo de C++, utilizando la librería STL. Para representar las soluciones hemos hecho uso del tipo `unordered_set`, ya que se realizan pocas operaciones de consulta y muchas de inserción y borrado.

Para medir los tiempos de ejecución se utiliza la función `clock` de la librería `time.h`.

A lo largo de la práctica se utilizan acciones aleatorias. Utilizamos la librería `stdlib.h` para la generación de números pseudoaleatorios con `rand` y fijamos la semilla con `srand`. También se baraja el vector de candidatos en la búsqueda local con la función `random_shuffle` de la librería `algorithm`.

Se almacena la matriz de distancias completa (no sólo un triángulo) por comodidad de los cálculos.

### 5.1. Manual de usuario

A continuación detallamos instrucciones para lanzar los ejecutables.

Tenemos los siguientes ejecutables:

- **Greedy:** Implementación del algoritmo Greedy.
- **LocalSearch:** Implementación del algoritmo de Búsqueda Local (Primer Mejor).
- **LocalSearch2:** Implementación del algoritmo de Búsqueda Local (Mejor).
- **LocalSearch2nolim:** Implementación del algoritmo de Búsqueda Local (Mejor) sin límite de evaluaciones.

Todos ellos devuelven la evaluación de la solución obtenida y el tiempo de ejecución por salida estándar. Leen el fichero por entrada estándar, así que es conveniente redirigirla.

Ejemplo:

```
bin/greedy < datos/MDG-a_1_n500_m50.txt >> salidas/greedy.txt
```

Los programas correspondientes a la búsqueda local también devuelven el número de llamadas a la función de evaluación, para comparar cómo de cerca se quedan del límite.

Tenemos dos ejecutables más: **LocalSearchEvol** y **LocalSearch2Evol**, que son versiones equivalentes a **LocalSearch** y **LocalSearch2**, pero con la diferencia de que devuelven una lista con la fitness de la solución en cada iteración. Los usamos para estudiar la evolución de la solución a lo largo del proceso y obtener gráficas de convergencia.

Además, todos los archivos de búsqueda local reciben la semilla como parámetro. Ejemplo:

```
bin/localSearch 197 < datos/MDG-a_1_n500_m50.txt >> salidas/localSearch.txt
```

En la carpeta **software** se incluye el script usado para lanzar todas las ejecuciones, `run.sh`. También se incluye el `Makefile` que compila los ejecutables.

## 6. Experimentación y análisis

Toda la experimentación se realiza en mi ordenador portátil personal, que tiene las siguientes especificaciones:

- OS: Ubuntu 20.04.2 LTS x86\_64.
- RAM: 8GB, DDR4.
- CPU: Intel Core i7-6700HQ, 2.60Hz.

### 6.1. Casos de estudio y resultados

Tratamos varios casos con distintos parámetros  $n$  y  $m$ . En cada caso se utiliza una semilla diferente para Búsqueda Local. A continuación presentamos una tabla con los casos estudiados. Para cada caso indicamos los valores de  $n$  y  $m$  y la semilla que se utiliza para la búsqueda local.

Caso	$n$	$m$	Seed
MDG-a_10_n500_m50	500	50	13
MDG-a_1_n500_m50	500	50	19
MDG-a_2_n500_m50	500	50	25
MDG-a_3_n500_m50	500	50	31
MDG-a_4_n500_m50	500	50	37
MDG-a_5_n500_m50	500	50	43
MDG-a_6_n500_m50	500	50	49
MDG-a_7_n500_m50	500	50	55
MDG-a_8_n500_m50	500	50	61
MDG-a_9_n500_m50	500	50	67
MDG-b_21_n2000_m200	2000	200	73
MDG-b_22_n2000_m200	2000	200	79
MDG-b_23_n2000_m200	2000	200	85
MDG-b_24_n2000_m200	2000	200	91
MDG-b_25_n2000_m200	2000	200	97
MDG-b_26_n2000_m200	2000	200	103
MDG-b_27_n2000_m200	2000	200	109
MDG-b_28_n2000_m200	2000	200	115
MDG-b_29_n2000_m200	2000	200	121
MDG-b_30_n2000_m200	2000	200	127
MDG-c_10_n3000_m400	3000	400	133
MDG-c_13_n3000_m500	3000	500	139
MDG-c_14_n3000_m500	3000	500	145
MDG-c_15_n3000_m500	3000	500	151
MDG-c_19_n3000_m600	3000	600	157
MDG-c_1_n3000_m300	3000	300	163
MDG-c_20_n3000_m600	3000	600	169
MDG-c_2_n3000_m300	3000	300	175
MDG-c_8_n3000_m400	3000	400	181
MDG-c_9_n3000_m400	3000	400	187

Tabla 1: Tabla con los parámetros y semillas de cada caso. Ordenando los nombres de los ficheros por orden alfabético (el orden en el que los procesa el script), las semillas son números del 13 al 187 saltando de 6 en 6.

Ahora mostraremos para cada algoritmo una tabla con los estadísticos (Desviación y Tiempo) que han obtenido en cada caso.

Comenzamos con el algoritmo **Greedy**.

Caso	Coste obtenido	Desv	Tiempo (s)
MDG-a_1_n500_m50	7610.42	2.85	0.001375
MDG-a_2_n500_m50	7574.39	2.54	0.001293
MDG-a_3_n500_m50	7535.96	2.88	0.001304
MDG-a_4_n500_m50	7551.52	2.81	0.001281
MDG-a_5_n500_m50	7540.14	2.77	0.001284
MDG-a_6_n500_m50	7623.65	1.93	0.001278
MDG-a_7_n500_m50	7594.62	2.28	0.0014
MDG-a_8_n500_m50	7625.94	1.61	0.001367
MDG-a_9_n500_m50	7547.25	2.87	0.001351
MDG-a_10_n500_m50	7642.27	1.77	0.001893
MDG-b_21_n2000_m200	11099332.620328	1.77	0.319017
MDG-b_22_n2000_m200	11149879.733826	1.21	0.313017
MDG-b_23_n2000_m200	11119613.974858	1.6	0.303374
MDG-b_24_n2000_m200	11106996.970212	1.63	0.311278
MDG-b_25_n2000_m200	11114220.292214	1.61	0.306411
MDG-b_26_n2000_m200	11132801.799043	1.41	0.306542
MDG-b_27_n2000_m200	11130608.965587	1.55	0.310595
MDG-b_28_n2000_m200	11110673.520354	1.5	0.318429
MDG-b_29_n2000_m200	11156328.082493	1.25	0.306362
MDG-b_30_n2000_m200	11109767.818822	1.65	0.296905
MDG-c_1_n3000_m300	24617010	1.07	1.501668
MDG-c_2_n3000_m300	24547293	1.44	1.464132
MDG-c_8_n3000_m400	43056071	0.88	2.546235
MDG-c_9_n3000_m400	42958639	1.1	2.569214
MDG-c_10_n3000_m400	42959794	1.19	2.566065
MDG-c_13_n3000_m500	66493045	0.78	3.67213
MDG-c_14_n3000_m500	66449858	0.79	3.767131
MDG-c_15_n3000_m500	66468837	0.78	3.78725
MDG-c_19_n3000_m600	94929882	0.74	5.183856
MDG-c_20_n3000_m600	94979205	0.69	5.582157

Tabla 2: Evaluación de las soluciones y estadísticos *Desv* y *Tiempo* obtenidos por el algoritmo Greedy en cada caso de estudio.

Media de los estadísticos:

Desv	Tiempo (s)
1.63	1.19

Ahora pasamos al algoritmo de **Búsqueda Local**.

Caso	Coste obtenido	Desv	Tiempo (s)
MDG-a.1_n500_m50	7623.23	2.69	0.001809
MDG-a.2_n500_m50	7590.18	2.34	0.001391
MDG-a.3_n500_m50	7544.94	2.76	0.001204
MDG-a.4_n500_m50	7576.44	2.49	0.0012
MDG-a.5_n500_m50	7484.27	3.49	0.001308
MDG-a.6_n500_m50	7570.96	2.61	0.001297
MDG-a.7_n500_m50	7654.98	1.5	0.001608
MDG-a.8_n500_m50	7623.78	1.64	0.002379
MDG-a.9_n500_m50	7612.74	2.02	0.001494
MDG-a.10_n500_m50	7619.52	2.07	0.001959
MDG-b.21_n2000_m200	11181874.0007	1.04	0.099777
MDG-b.22_n2000_m200	11167876.184	1.05	0.092492
MDG-b.23_n2000_m200	11176568.0611	1.09	0.107634
MDG-b.24_n2000_m200	11188223.318	0.91	0.107425
MDG-b.25_n2000_m200	11181859.8196	1.01	0.090053
MDG-b.26_n2000_m200	11193478.832	0.88	0.122694
MDG-b.27_n2000_m200	11211629.6839	0.83	0.112468
MDG-b.28_n2000_m200	11151089.4629	1.14	0.079449
MDG-b.29_n2000_m200	11183039.6644	1.01	0.09833
MDG-b.30_n2000_m200	11159590.8213	1.21	0.090033
MDG-c.1_n3000_m300	24729057	0.62	0.601221
MDG-c.2_n3000_m300	24738675	0.67	0.584432
MDG-c.8_n3000_m400	43200330	0.55	1.264437
MDG-c.9_n3000_m400	43157977	0.64	1.241837
MDG-c.10_n3000_m400	43188306	0.66	1.195051
MDG-c.13_n3000_m500	66636142	0.56	2.304507
MDG-c.14_n3000_m500	66727635	0.38	2.430114
MDG-c.15_n3000_m500	66808383	0.28	2.78715
MDG-c.19_n3000_m600	95244690	0.41	3.572005
MDG-c.20_n3000_m600	95324379	0.33	3.598978

Tabla 3: Evaluación de las soluciones y estadísticos *Desv* y *Tiempo* obtenidos por el algoritmo de Búsqueda Local con Primer Mejor en cada caso de estudio.

Media de los estadísticos:

Desv	Tiempo (s)
1.3	0.69

Comparamos los estadísticos medios obtenidos por ambos algoritmos.

Algoritmo	Desv	Tiempo (s)
Greedy	1.63	1.19
BL	1.3	0.69

Tabla 4: Comparativa de los estadísticos medios obtenidos por el algoritmo Greedy y por el de Búsqueda Local.

## 6.2. Análisis de resultados

A la vista de la Tabla 4, intuimos que ambos algoritmos son adecuados para el problema. El algoritmo Greedy, en media, alcanza el 98.37 % de la diversidad de la mejor solución posible. Mientras que la Búsqueda Local alcanza el 98.7 %.

La BL resulta ser algo más efectiva, debido a que explora el espacio de soluciones con una mayor profundidad que Greedy.

En las Tablas 2 y 3, observamos que la desviación es menor en los casos con mayores valores de  $n$  y  $m$ . En general, es algo superior a 2 en los 10 ejemplos del grupo MDG-a, algo inferior a 2 para Greedy y cercana a 1 para BL en los 10 ejemplos del grupo MDG-b y algo inferior a 1 (entorno a 0.8 para Greedy y 0.55 para BL) en los 10 ejemplos del grupo MDG-c. En la gran mayoría de casos, mejor la Búsqueda Local.

Además, observamos que la mejora de la Búsqueda Local respecto a Greedy se acentúa en ejemplos con mayor número de elementos, al menos en términos relativos. Ya que una mejora del 0.25 % en la desviación cuando los algoritmos rondan desviaciones del 0.65 es bastante significativo, más que mejorar en 0.5 % cuando rondan desviaciones de 1.5 ó 2. Parece que cuanto mayor es el espacio de búsqueda, la mayor profundidad de exploración de BL cobra más relevancia.

En cuanto al tiempo, nos sorprende la rapidez de la Búsqueda Local, que de media tarda un poco más de la mitad que Greedy.

La mayor parte del tiempo de cómputo en el algoritmo Greedy se invierte en iterar sobre los elementos no seleccionados (prácticamente  $n$ ) para encontrar el más lejano a los seleccionados. En cambio, en la Búsqueda Local sólo se itera hasta encontrar un candidato mejor que el peor de los seleccionados, aunque se evalúan soluciones completas. En el algoritmo Greedy se evalúa la solución completa al final.

Otra fracción muy importante del tiempo de cómputo de Búsqueda Local se invierte también en barajar el vector de candidatos, que son  $n - m$ , para explorar los entornos de las soluciones de forma aleatoria. Hay que barajar por cada actualización de la solución.

El motivo por que el la Búsqueda Local sea mucho más rápida es la factorización de la función de evaluación. Aunque técnicamente estemos evaluando nuevas soluciones completas, ya conocemos la contribución de todos los candidatos menos el posible nuevo seleccionado. Esto hace que el cálculo sea equivalente al de probar un nuevo candidato de Greedy.

De todos modos, podemos considerar que ambos algoritmos son rápidos. Los tiempos de ejecución no han supuesto ningún impedimento en el desarrollo de la práctica, han sido prácticamente despreciables.

A continuación incluiremos gráficas de convergencia para analizar la evolución de las soluciones de BL a medida que el algoritmo avanza.

### 6.2.1. Gráficas de convergencia

Mostramos en gráficas el valor de la función de evaluación sobre la solución en cada actualización de la Búsqueda Local.

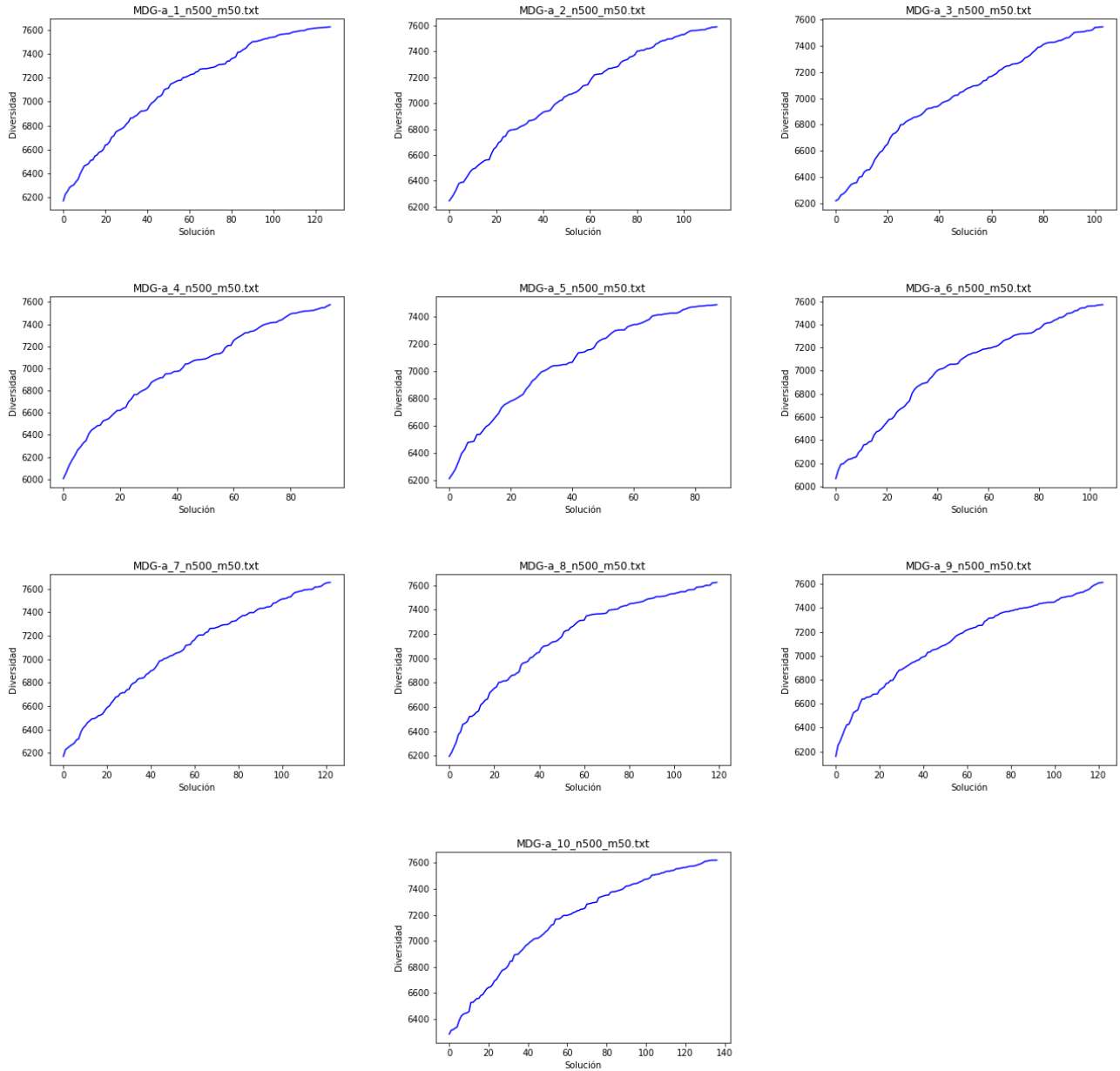


Figura 1: Gráficas de convergencia de BL con Primer Mejor en los ejemplos del grupo MDG-a.

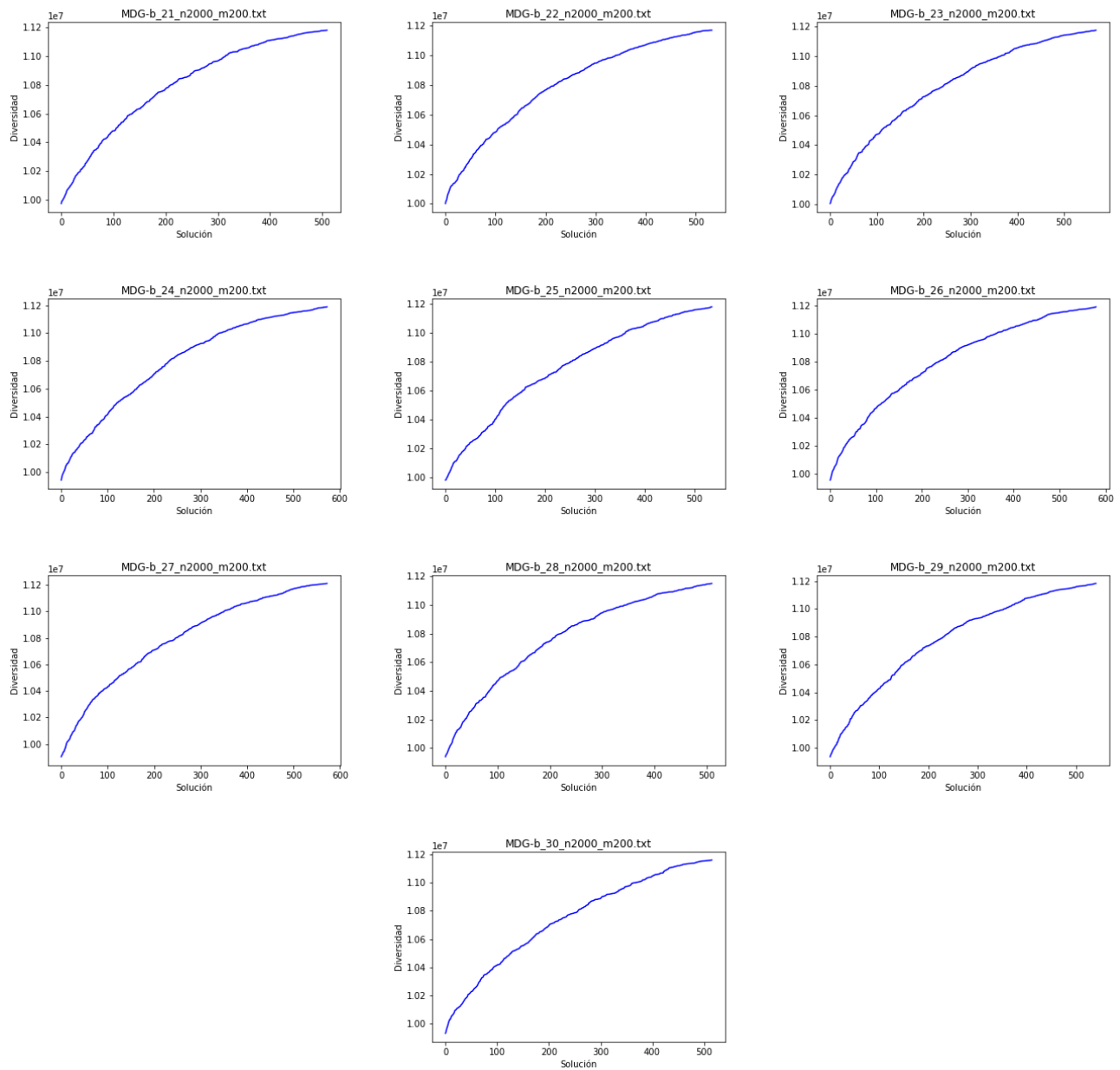


Figura 2: Gráficas de convergencia de BL con Primer Mejor en los ejemplos del grupo MDG-b.

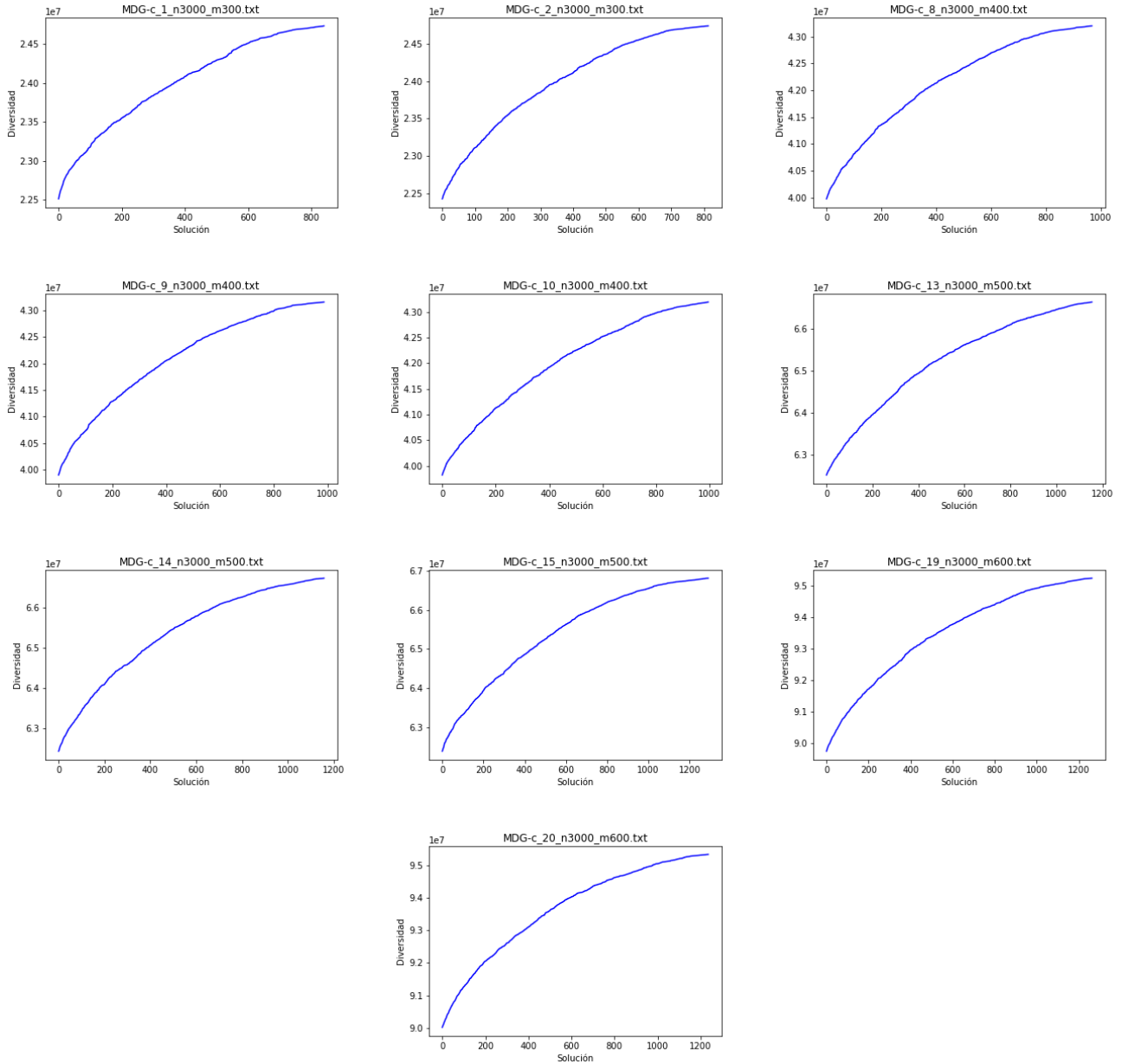


Figura 3: Gráficas de convergencia de BL con Primer Mejor en los ejemplos del grupo MDG-c.

En general, observamos que la mejora es mayor en las primeras iteraciones, lo que les da a las gráficas una característica forma creciente y cóncava.

En el eje de abscisas de cada gráfica podemos apreciar el número de actualizaciones que han tenido lugar durante el desarrollo del algoritmo. Es del orden de unas 100 para los ejemplos de MDG-a, 500-600 para los de MDG-b y entre 800 y 1000 para los de MDG-c. Hay que tener en cuenta que la estrategia del Primer Mejor da lugar a una gran cantidad de actualizaciones, con pequeña mejoría de una actualización a la siguiente.

En los ejes de ordenadas se observa la mejora de diversidad que consigue el algoritmo partiendo de la solución aleatoria. Esta mejora ronda el 20-25 % para los ejemplos del grupo MDG-a, es entorno al 12 % para los ejemplos del grupo MDG-b, y de ligeramente menos del 10 % para los del grupo MDG-c. Esto le resta importancia al hecho de que los algoritmos hayan conseguido desviaciones más bajas en los ejemplos grandes, pues una solución aleatoria también presenta menos desviación en los ejemplos grandes que en los pequeños.



## 7. Trabajo voluntario

### 7.1. Comparación Búsqueda Local: Mejor vs Primer Mejor

En el seminario se nos ha aconsejado la estrategia del Primer Mejor para la Búsqueda Local, que consiste en actualizar una solución cuando se encuentra una mejor en su entorno. La comparamos con la estrategia del Mejor, que explora todo el entorno de cada solución y salta a la mejor solución del entorno.

A priori, tenemos una ventaja y dos inconvenientes. Por una parte, saltar a la mejor solución posible del entorno hace que el valor de la función de evaluación crezca más rápido, lo que conlleva tener que realizar menos actualizaciones y menos barajamientos del vector de no seleccionados.

Por otra parte, exploramos una menor porción del espacio de soluciones y corremos un alto riesgo de atascarnos en el máximo local más cercano. También tenemos que evaluar todos los posibles candidatos para cada actualización.

Para este algoritmo, utilizamos la misma semilla en cada caso de estudio que usábamos en el algoritmo de BL con Primer Mejor.

Coste y estadísticos obtenidos en cada caso por este algoritmo.

Caso	Coste obtenido	Desv	Tiempo (s)
MDG-a_1_n500_m50	7605.85	2.91	0.001692
MDG-a_2_n500_m50	7650.91	1.55	0.001909
MDG-a_3_n500_m50	7627.05	1.71	0.001872
MDG-a_4_n500_m50	7628.28	1.83	0.00212
MDG-a_5_n500_m50	7443.78	4.02	0.001392
MDG-a_6_n500_m50	7519.01	3.28	0.001522
MDG-a_7_n500_m50	7602.72	2.17	0.002021
MDG-a_8_n500_m50	7527.51	2.88	0.001499
MDG-a_9_n500_m50	7605.79	2.11	0.001788
MDG-a_10_n500_m50	7625.84	1.99	0.001925
MDG-b_21_n2000_m200	10704537.121824	5.27	0.167474
MDG-b_22_n2000_m200	10729825.979899	4.93	0.157267
MDG-b_23_n2000_m200	10747061.106059	4.89	0.158778
MDG-b_24_n2000_m200	10697650.091284	5.25	0.154234
MDG-b_25_n2000_m200	10722432.780205	5.08	0.151428
MDG-b_26_n2000_m200	10712851.622844	5.13	0.151654
MDG-b_27_n2000_m200	10697966.587231	5.38	0.159407
MDG-b_28_n2000_m200	10704037.524274	5.11	0.16044
MDG-b_29_n2000_m200	10696542.050433	5.32	0.156025
MDG-b_30_n2000_m200	10687418.268475	5.39	0.16345
MDG-c_1_n3000_m300	23280092	6.45	0.391262
MDG-c_2_n3000_m300	23190732	6.88	0.384945
MDG-c_8_n3000_m400	40935884	5.76	0.504655
MDG-c_9_n3000_m400	40828623	6.01	0.509323
MDG-c_10_n3000_m400	40765886	6.23	0.501521
MDG-c_13_n3000_m500	63608646	5.08	0.607681
MDG-c_14_n3000_m500	63545017	5.13	0.604924
MDG-c_15_n3000_m500	63532837	5.16	0.583044
MDG-c_19_n3000_m600	91101174	4.74	0.712232
MDG-c_20_n3000_m600	91289378	4.55	0.718865

Tabla 5: Evaluación de las soluciones y estadísticos *Desv* y *Tiempo* obtenidos por el algoritmo de Búsqueda Local con Mejor en cada caso de estudio.

Comparativa de los estadísticos medios con la estrategia del Primer Mejor:

Estrategia	Desv	Tiempo (s)
Mejor	4.41	0.24
Primer Mejor	1.3	0.69

Tabla 6: Comparativa de estrategias de Búsqueda Local.

Observamos en las dos tablas anteriores que la estrategia del Mejor da lugar a una desviación mucho mayor que la del Primer Mejor, probablemente porque se quede atascado en el máximo local más cercano. Además, a diferencia de Primer Mejor y Greedy, este algoritmo obtiene mayor desviación en los ejemplos grandes, donde las soluciones aleatorias ya eran mejores. Por tanto la eficacia de este algoritmo es bastante baja en comparación con los que hemos visto antes, posiblemente debido a una exploración en menor profundidad del espacio de búsqueda cuyos inconvenientes se acentúan al ser este mayor.

Incorporamos ahora gráficas de convergencia de este algoritmo.

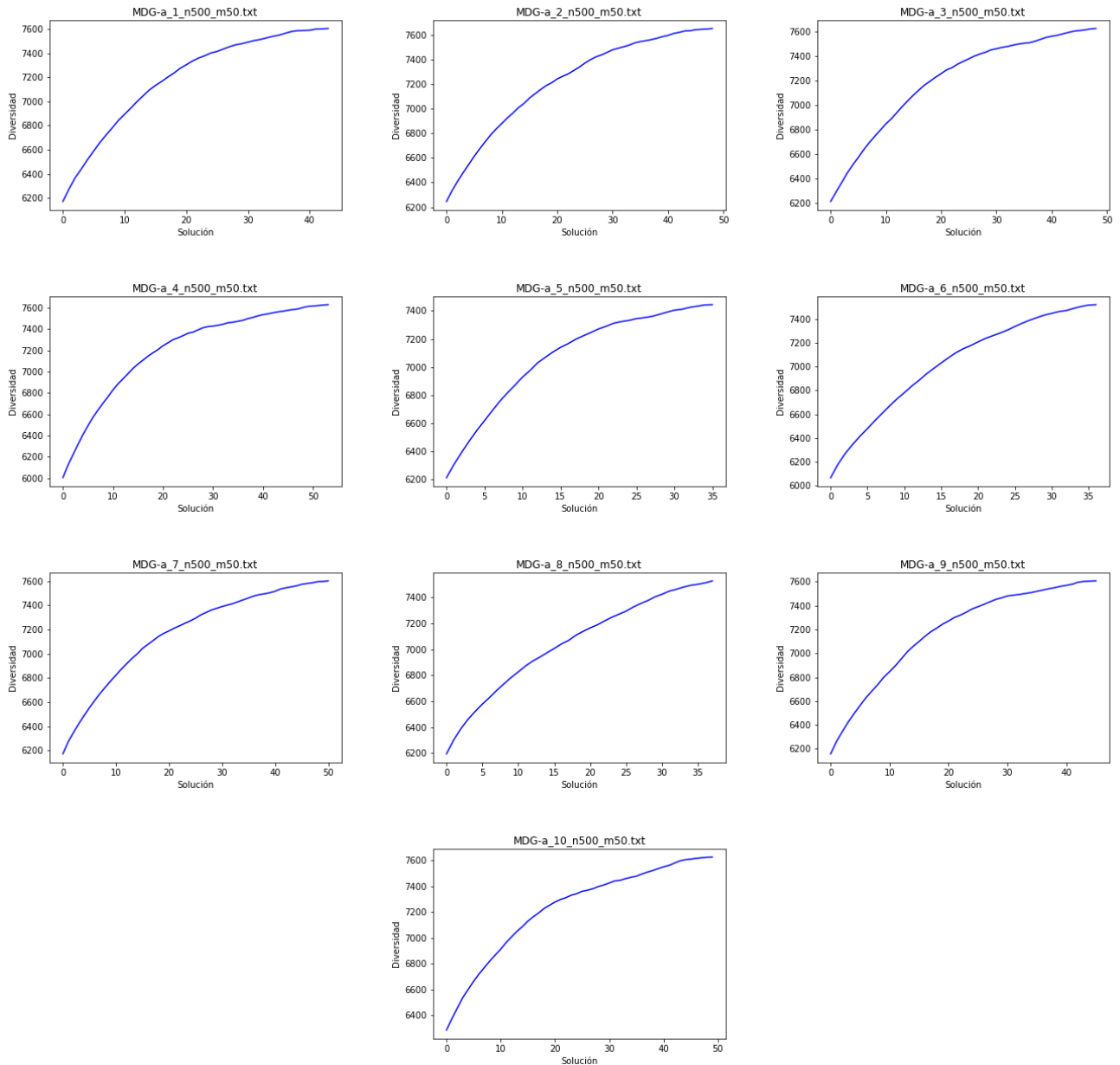


Figura 4: Gráficas de convergencia de BL con Mejor en los ejemplos del grupo MDG-a.

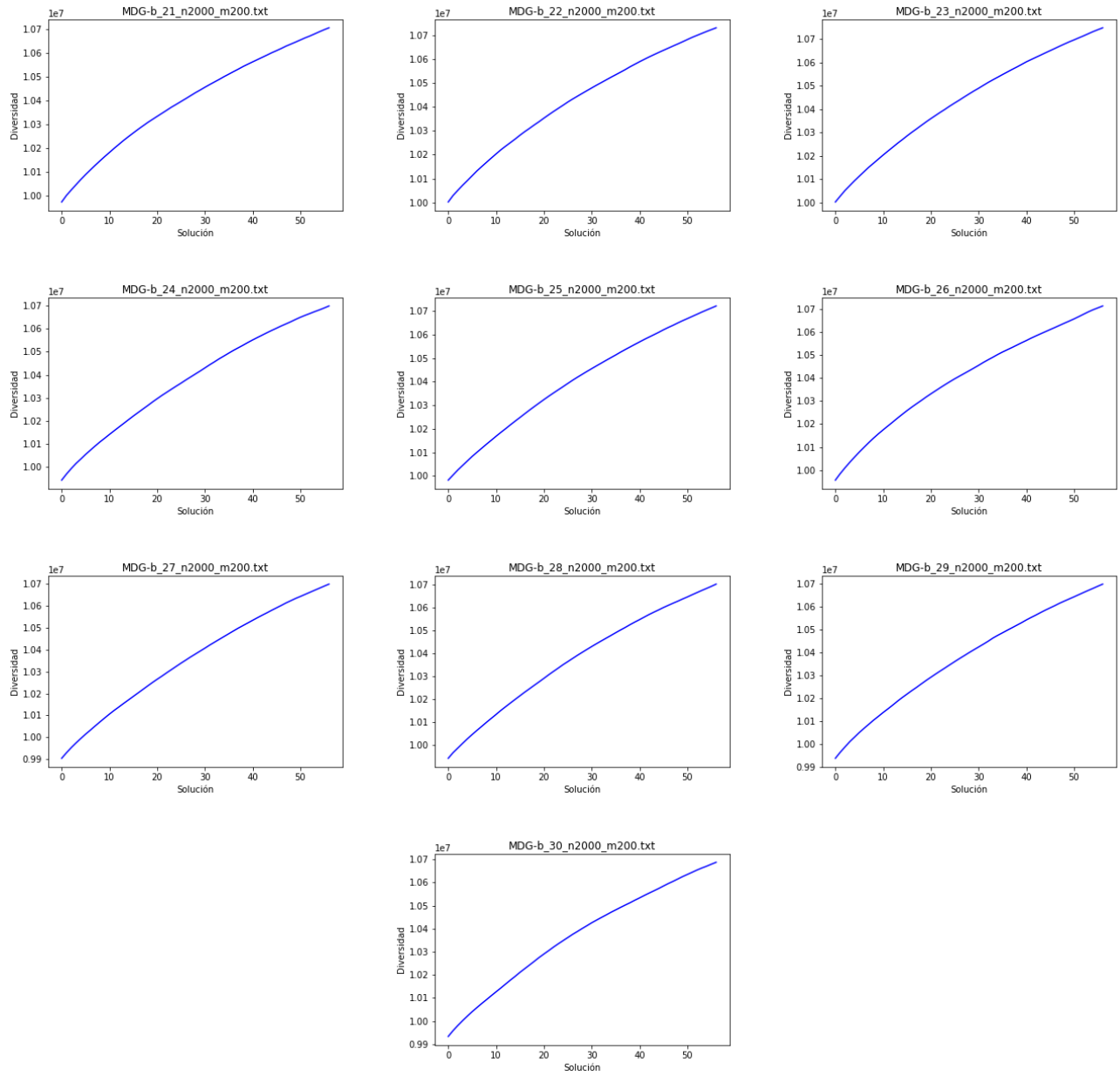


Figura 5: Gráficas de convergencia de BL con Mejor en los ejemplos del grupo MDG-b.

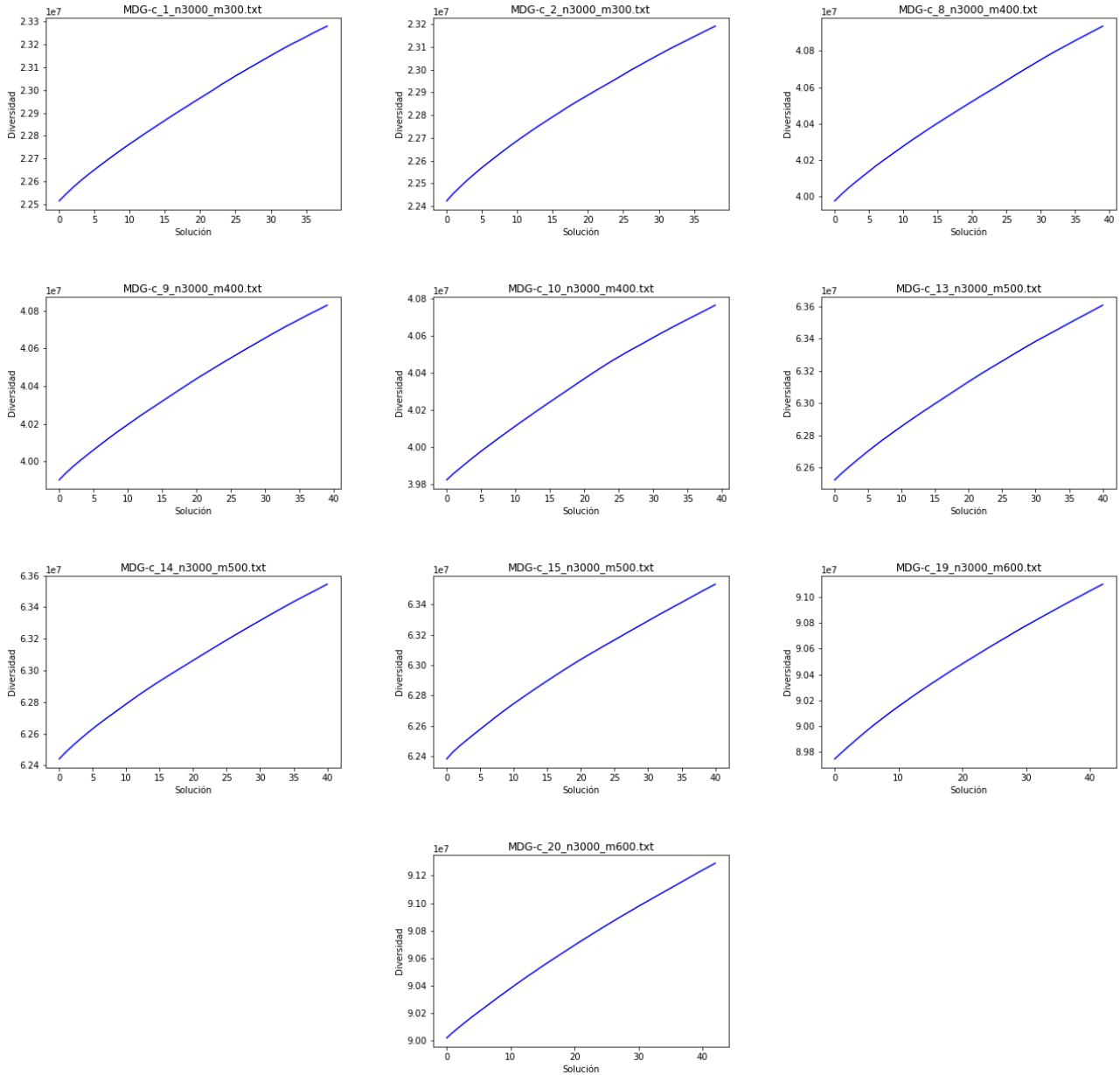


Figura 6: Gráficas de convergencia de BL con Mejor en los ejemplos del grupo MDG-c.

En los ejemplos del grupo MDG-a, la forma de las gráficas es similar a las que proporcionaba la estrategia del Primer Mejor, y la mejor también es similar. También es similar la mejora que consigue (eje de ordenadas) con respecto a la solución aleatoria.

En cambio, en los ejemplos de los grupos MDG-b y MDG-c, el crecimiento del valor de la función exponencial es prácticamente lineal, sobre todo en los ejemplos más grandes. Además, en el eje de ordenadas observamos que la mejora que consigue este algoritmo en estos ejemplos respecto a la solución aleatoria es mucho menor, en los ejemplos grandes no llega al 2 % de la diversidad.

En el eje de abscisas, observamos que el número de actualizaciones del algoritmo BL con primer mejor es de entorno a 50, independientemente del tamaño del problema. Esto podría significar que el algoritmo para antes de tiempo y no llega a explorar el espacio de soluciones todo lo que podría, así que obtenemos una tabla con las llamadas a la función de evaluación de cada estrategia.

La estrategia del Primer Mejor es capaz de parar en mitad de una iteración si se llega al límite de llamadas, mientras

que la estrategia del Mejor la he diseñado para que se detenga al final de la iteración. Por este motivo, el algoritmo del Mejor puede exceder el límite de llamadas, pero nunca en más de  $n$ , De modo que no tiene mucha importancia de cara a los tiempos de ejecución y al comportamiento del algoritmo.

Caso	Primer Mejor	Mejor
MDG-a.10_n500_m50	4933	22500
MDG-a.1_n500_m50	3533	19800
MDG-a.2_n500_m50	2664	22050
MDG-a.3_n500_m50	1522	22050
MDG-a.4_n500_m50	1843	24300
MDG-a.5_n500_m50	1869	16200
MDG-a.6_n500_m50	2330	16650
MDG-a.7_n500_m50	2776	22950
MDG-a.8_n500_m50	3439	17100
MDG-a.9_n500_m50	2246	20700
MDG-b.21_n2000_m200	29153	100800
MDG-b.22_n2000_m200	23745	100800
MDG-b.23_n2000_m200	28631	100800
MDG-b.24_n2000_m200	30061	100800
MDG-b.25_n2000_m200	22374	100800
MDG-b.26_n2000_m200	40168	100800
MDG-b.27_n2000_m200	31362	100800
MDG-b.28_n2000_m200	15585	100800
MDG-b.29_n2000_m200	25351	100800
MDG-b.30_n2000_m200	19936	100800
MDG-c.10_n3000_m400	34032	101400
MDG-c.13_n3000_m500	27872	100000
MDG-c.14_n3000_m500	47459	100000
MDG-c.15_n3000_m500	79989	100000
MDG-c.19_n3000_m600	34607	100800
MDG-c.1_n3000_m300	58816	102600
MDG-c.20_n3000_m600	44010	100800
MDG-c.2_n3000_m300	63615	102600
MDG-c.8_n3000_m400	60814	101400
MDG-c.9_n3000_m400	51098	101400

Tabla 7: Número de llamadas a la función de evaluación por las estrategias Mejor y Primer Mejor para cada ejemplo.

Efectivamente, comprobamos que la estrategia del Primer Mejor siempre alcanza un máximo local. En cambio, la del Mejor invierte demasiadas evaluaciones en cada iteración de los ejemplos grandes, lo que provoca que pare antes de alcanzar uno.

Por el contrario, el número de barajamientos de los candidatos que realiza la estrategia del Mejor es mucho menor, ya que actualiza la solución menos veces. Este algoritmo invierte prácticamente todo su tiempo de ejecución en llamadas a la función de evaluación.

Tras observar esto, es probable que al quizar o aumentar el límite de llamadas a la función de evaluación, el la estrategia del Mejor se asemeje en eficacia a la del Primer Mejor. No obstante, en los ejemplos del grupo MDG-a, donde ambos algoritmos se ejecutan al completo, la desviación que logra la estrategia del Primer Mejor es ligeramente menor. Además, la mejor que realiza el algoritmo Primer Mejor respecto al tiempo que tarda sugiere que la estrategia Mejor necesitaría más tiempo para alcanzar soluciones de la misma calidad.

Finalmente, hay que tener en cuenta que en otros problemas donde no sea posible la factorización de la función de evaluación, la estrategia del Mejor sería mucho más lenta que la del Primer Mejor. Debido a que la mayoría de su tiempo se dedica a evaluar esta función.

Por tanto, concluimos que la estrategia del Mejor no parece ser tan mala como muestra la Tabla 6, pero es más conveniente actualizar más a menudo la solución en lugar de realizar exhaustivas búsquedas por el entorno de cada

solución, sobre todo si no se pudiese factorizar la función de evaluación.

Para corroborar nuestras conclusiones, y como los ejemplos que estudiamos no son demasiado grandes, probamos a lanzar la BL con Mejor eliminando el límite de llamadas a la función de evaluación. Obtenemos los siguientes resultados.

Caso	Coste obtenido	Desv	Tiempo (s)
MDG-a_1_n500_m50	7605.85	2.91	0.001625
MDG-a_2_n500_m50	7650.91	1.55	0.001816
MDG-a_3_n500_m50	7627.05	1.71	0.001806
MDG-a_4_n500_m50	7628.28	1.83	0.001896
MDG-a_5_n500_m50	7443.78	4.02	0.001291
MDG-a_6_n500_m50	7519.01	3.28	0.001317
MDG-a_7_n500_m50	7602.72	2.17	0.001892
MDG-a_8_n500_m50	7527.51	2.88	0.001354
MDG-a_9_n500_m50	7605.79	2.11	0.001631
MDG-a_10_n500_m50	7625.84	1.99	0.001932
MDG-b_21_n2000_m200	11180058.750775	1.06	0.677438
MDG-b_22_n2000_m200	11155314.466742	1.16	0.555748
MDG-b_23_n2000_m200	11108124.604139	1.7	0.496808
MDG-b_24_n2000_m200	11153820.029699	1.21	0.542795
MDG-b_25_n2000_m200	11171185.53995	1.11	0.597482
MDG-b_26_n2000_m200	11188729.123865	0.92	0.634261
MDG-b_27_n2000_m200	11114584.701586	1.69	0.499422
MDG-b_28_n2000_m200	11179532.969364	0.89	0.610616
MDG-b_29_n2000_m200	11149615.9197	1.31	0.62679
MDG-b_30_n2000_m200	11157311.470229	1.23	0.588087
MDG-c_1_n3000_m300	24736454	0.59	3.828034
MDG-c_2_n3000_m300	24675066	0.92	3.003777
MDG-c_8_n3000_m400	43243999	0.44	5.740351
MDG-c_9_n3000_m400	43163449	0.63	6.146966
MDG-c_10_n3000_m400	42989641	1.12	4.425393
MDG-c_13_n3000_m500	66766340	0.37	8.536604
MDG-c_14_n3000_m500	66628488	0.52	7.471225
MDG-c_15_n3000_m500	66715761	0.41	7.363534
MDG-c_19_n3000_m600	95226472	0.43	9.204225
MDG-c_20_n3000_m600	95271298	0.39	9.370968

Tabla 8: Resultados y estadísticos obtenidos por el algoritmo de BL con Mejor eliminando el límite de llamadas.

Las desviaciones son bastante similares a las obtenidas con la estrategia del Primer Mejor, en cambio los tiempos son mucho mayores.

La desviación media es de 1.42 %, y el tiempo medio de 2.36 segundos. Aunque la desviación sea buena (mejor que Greedy, aunque ligeramente peor que la estrategia del Primer Mejor), el tiempo medio de ejecución es bastante mayor, más del triple que el de la estrategia Primer Mejor.