

Metaheurística: Práctica Alternativa al Examen Búsqueda Ramificada con Momentos

David Cabezas Berrido

20079906D

Grupo 2: Viernes

dxabezas@correo.ugr.es

14 de junio de 2021

Índice

1. Descripción de la Metaheurística	3
1.1. Idea general	3
1.2. Explicación del algoritmo	3
2. Implementación y benchmark	7
2.1. Detalles de implementación	7
2.2. Resultados del benchmark	7
2.3. Análisis de los resultados	11
3. Hibridación con Búsqueda Local	13
3.1. Resultados del benchmark	13
3.2. Análisis de los resultados	15
4. Intento de mejora	16
4.1. Estudio de convergencia	16
4.2. Cambios	21
4.3. Resultados del benchmark	21
4.4. Análisis de los resultados	25
4.5. Otras posibles mejoras	26
5. Conclusiones	26
5.1. Valoración de la metaheurística	26
5.2. Mi experiencia diseñando una metaheurística	26

1. Descripción de la Metaheurística

Nuestro problema es la optimización continua de una serie de funciones. Estamos limitados por el número de evaluaciones, que en nuestro caso será 10000 multiplicado por la dimensión del espacio de soluciones.

Diseñaremos nuestra propia metaheurística y la pondremos a prueba con el benchmark CEC'2017. Por tanto, nuestro objetivo es la optimización de parámetros reales. Con nuestra propuesta esperamos alcanzar un buen compromiso entre exploración y explotación aprovechando la naturaleza continua del espacio de soluciones.

1.1. Idea general

Nuestra metaheurística, **Búsqueda Ramificada con Momentos**, pretende “lanzar” soluciones que se muevan por el espacio como lo harían bombas lanzadas desde un avión bombardeos, fragmentos que se desprenden de un cuerpo celeste o el despliegue de una sonda de una nave espacial. Es decir, se explora el espacio ramificando o dividiendo las soluciones en otras de forma que las soluciones resultantes conserven la inercia de la solución de la que partieron.



Figura 1: Cuando se despliegan bombas desde un avión, las bombas mantienen la inercia del movimiento del avión. Fuente: <https://aoav.org.uk/wp-content/uploads/2013/07/B-1B-Lancer-unleashes-cluster-munitions.jpg>.

Para dar sentido a este fenómeno físico que es la conservación de la inercia ideamos una estrategia de explotación basada en momentos, similar a la Búsqueda Local salvo que se pondera el momento de la solución con la dirección de un vecino mejor.

Las soluciones pueden ser truncadas bajo ciertas condiciones, así que se van lanzando nuevas soluciones desde puntos aleatorios hasta agotar el número máximo de evaluaciones.

1.2. Explicación del algoritmo

El algoritmo comienza con una solución aleatoria, un vector aleatorio de flotantes, S . Cada solución tiene asociado otro vector aleatorio que es su momento, ν , que intuitivamente se puede interpretar como la dirección en la que se está moviendo la solución actualmente; también tiene un valor escalar positivo, λ que podría interpretarse como un impulso, la solución se desplaza usando su momento y su impulso: $S \leftarrow S + \lambda\nu$.

Cada solución tiene un número determinado de evaluaciones. En cada iteración, una solución puede hacer una de las siguientes acciones:

- La solución desaparece, es truncada.
- La solución se divide en dos, que “saldrán disparadas” en direcciones opuestas.

- La solución desvía su dirección hacia un vecino del entorno con mejor fitness y luego se actualiza usando su impulso y su momento: $S \leftarrow S + \lambda\nu$. La solución pierde una cantidad de impulso determinada por el éxito de la búsqueda de un vecino mejor en el entorno.

La acción a realizar en cada momento depende de la fitness de la solución respecto a la mejor fitness encontrada hasta el momento, del número de evaluaciones restantes y del impulso que le quede a la solución. Queremos truncar soluciones que no tengan muchas posibilidades de mejorar, ya sea porque estén muy lejos de la mejor hasta el momento y les queden pocas iteraciones o porque su impulso sea prácticamente nulo. Queremos dividir soluciones que sean de las mejores, tengan bastantes evaluaciones por delante y no acaben de ser lanzadas desde otras, para evitar que haya soluciones muy cercanas entre sí.

Estos objetivos pueden ser muy difíciles de lograr debido al número de factores a tener en cuenta, a continuación presentamos nuestro intento de lograr un equilibrio.

Decisión de la acción

En nuestro caso, primero tomaremos la diferencia entre la fitness de la solución y la mejor fitness encontrada hasta el momento: $D \leftarrow fitness - best$. Como estamos minimizando, será una cantidad no negativa. En principio tenemos $D \in [0, +\infty[$, para normalizar la escala utilizamos una función creciente que identifique este intervalo con el $[0, 1[$,

$$\hat{D} \leftarrow \frac{D}{1 + D}.$$

Decidimos truncar la solución cuando esta diferencia sea alta y las posibilidades de mejorarla sean escasas, ya sea por que la solución tenga pocas evaluaciones restantes o porque su impulso sea bajo.

Decidimos ramificar la solución en dos cuando esta diferencia sea baja, el impulso esté en un rango determinado (no queremos dividir ni muy pronto ni muy tarde) y el número de evaluaciones restantes sea suficiente para que las soluciones resultantes puedan prosperar.

En el resto de casos, la solución se limita a avanzar.

En nuestra implementación, hemos decidido dar esta estructura al bucle principal, que combina las ideas anteriores con una componente aleatoria.

Algorithm 1: BRANCH: Búsqueda Ramificada: Bucle Principal.

Input: Una solución: vector de flotantes S

Input: Su momento: vector de flotantes μ

Input: Su impulso: escalar positivo λ

Input: Evaluaciones a realizar: entero positivo $evals$

$fitness \leftarrow eval(S)$ // Supondremos la función de evaluación siempre disponible

$evals \leftarrow evals - 1$

$best \leftarrow \min(best, fitness)$

while $evals > 0$ **do**

$D \leftarrow fitness - best$ // Suponemos accesible la mejor fitness obtenida hasta el momento

$\hat{D} \leftarrow \frac{D}{1+D}$ // Diferencia normalizada en $[0, 1[$

$p \leftarrow U[0, 1]$ // Flotante aleatorio en $[0, 1]$, elegido según la distribución uniforme

if $(p < P_{vanish} \frac{\hat{D}}{\lambda}$ **and** $evals \leq MaxEvalsTruncate)$ **or** $\lambda < MinImpulse$ **then**

 └ La solución es truncada.

else if $p > P_{split} \frac{\hat{D}}{\lambda}$ **and** $MinImpulseSplit \leq \lambda \leq MaxImpulseSplit$ **and** $evals \geq MinEvalsSplit$ **then**

 └ La solución se divide en dos.

else

 └ La solución avanza.

Más adelante discutiremos los parámetros que han aparecido a lo largo del algoritmo. De momento nos centraremos en detallar cada una de las acciones que aparecen en el bucle.

Truncamiento de la solución

Cuando una solución es truncada, simplemente se corta el bucle con la orden **break**. Antes, hay que acumular las evaluaciones a realizar para que no se desperdicien, las llamadas restantes se acumulan para mejorar futuras

soluciones: $spareEvals \leftarrow spareEvals + evals$.

Ramificación de la solución

Cuando una solución se ramifica, se generan dos soluciones con empujes opuestos desde ella y se acumulan los momentos. Además, se recargan en cierta proporción del impulso perdido desde el inicial, λ_0 . Las evaluaciones pendientes se reparten equitativamente entre las dos soluciones generadas, como la división es entera, se rescata la evaluación sobrante en caso de que el número de evaluaciones sea impar. La solución es destruida, ya que se queda sin evaluaciones.

Algorithm 2: SPLIT: Ramificación de una solución S como la de entrada del Algoritmo 1.

```
modification  $\leftarrow$  vector aleatorio, las componentes se generan con una  $U[0,1]$ 
 $\mu_1 \leftarrow \mu + modification$  // Las soluciones salen en direcciones opuestas
 $\mu_2 \leftarrow \mu - modification$ 
 $\lambda_1 \leftarrow \lambda + SplitImpulse \cdot (\lambda_0 - \lambda)$  // Se recarga parcialmente el impulso
 $\lambda_2 \leftarrow \lambda + SplitImpulse \cdot (\lambda_0 - \lambda)$ 
 $S_1 \leftarrow S + \lambda_1 \mu_1$ 
 $S_2 \leftarrow S + \lambda_2 \mu_2$ 
clip( $S_1$ ) // Si alguna componente se sale del rango, se fija en el borde
clip( $S_2$ )
if evals % 2 = 1 then
    spareEvals  $\leftarrow$  spareEvals + 1 // Para evitar perder evaluaciones
branch( $S_1, \mu_1, \lambda_1, evals/2$ )
branch( $S_2, \mu_2, \lambda_2, evals/2$ )
break // Esta solución desaparece
```

Avance de la solución

Para el avance de la solución se buscan vecinos aleatorios en un entorno de la solución, para mí siempre se tiene $\lambda \in]0,1]$ y he escogido radio $\sqrt{\lambda}$. Si se encuentra un vecino mejor en un determinado número de intentos, se considera un éxito y se modifica el momento de la solución desviándolo hacia la dirección del vecino, la medida en la que se desvía depende de la mejora que aporte; después se desplaza la solución usando el momento y el impulso y se reduce el impulso ligeramente. Si se fracasa al encontrar un vecino mejor (se agotan los intentos) interpretamos que estamos en un máximo local (o se acabaron las evaluaciones) y se reduce más severamente el impulso.

Algorithm 3: ADVANCE: Avance de la solución S (la de entrada del Algoritmo 1).

```
while no se encuentre un vecino mejor and no se excedan ImproveLimit intentos and evals > 0 do
    modification  $\leftarrow$  vector aleatorio, las componentes se generan con una  $U[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]$ 
     $S' \leftarrow S + \textit{modification}$  // Vecino aleatorio
    clip( $S'$ )
    neighbor_fitness  $\leftarrow$  eval( $S'$ )
    evals  $\leftarrow$  evals - 1
if el vecino  $S'$  mejora la fitness de  $S$  then
    best  $\leftarrow$  min(best, neighbor_fitness)
     $D \leftarrow \textit{fitness} - \textit{neighbor\_fitness}$ 
     $\hat{D} \leftarrow \frac{D}{1+D}$  // Mejora normalizada en  $[0, 1[$ 
    neighbor_weight  $\leftarrow$  BaseWeight +  $(1 - \textit{BaseWeight}) \cdot \hat{D}$ 
     $\mu \leftarrow (1 - \textit{neighbor\_weight})\mu + \textit{neighbor\_weight} \cdot \textit{modification}$  // Se desvía la inercia de la
    solución hacia el vecino mejor
     $S \leftarrow S + \lambda\mu$  // La solución se desplaza en su dirección
    clip( $S$ )
    fitness  $\leftarrow$  eval( $S$ )
    evals  $\leftarrow$  evals - 1
    best  $\leftarrow$  min(best, fitness)
     $\lambda \leftarrow \textit{DecreaseSuccess} \cdot \lambda$  // Éxito: se reduce ligeramente el impulso
else
     $\lambda \leftarrow \textit{DecreaseFail} \cdot \lambda$  // Fracaso: se reduce severamente el impulso
```

Invocación del algoritmo

Para aprovechar las evaluaciones de las soluciones que son truncadas se vuelven a lanzar nuevas soluciones. Cada ejecución parte de una solución aleatoria con momento aleatorio y un impulso inicial λ_0 .

Algorithm 4: MAIN: Llamadas sucesivas al algoritmo de búsqueda Ramificada con Momentos hasta consumir todas las evaluaciones disponibles.

```
best  $\leftarrow$  un valor mayor que cualquiera que vaya a aparecer al evaluar posteriormente
spareEvals  $\leftarrow$  10000  $\cdot$  dimensión del espacio de soluciones
while spareEvals > 0 do
    evals  $\leftarrow$  spareEvals
    spareEvals  $\leftarrow$  0
     $S \leftarrow$  vector solución aleatorio, componentes generadas de forma uniforme en el rango:  $U[-100, 100]$ 
     $\mu \leftarrow$  vector momento aleatorio, componentes generadas con  $U[-1, 1]$ 
    branch( $S, \mu, \lambda_0, \textit{evals}$ ) // spareEvals puede verse incrementada durante la ejecución
```

2. Implementación y benchmark

2.1. Detalles de implementación

Como hemos comentado, nuestra explicación de la metaheurística es una forma de implementar las ideas que hemos ido comentando. Probablemente existan mejores alternativas para tomar las decisiones del Algoritmo 1, que se basen en las mismas ideas intuitivas que hemos comentado. Como otro ejemplo, la división de la solución podría ser en más de dos soluciones.

Además, fijada una implementación concreta (la que acabamos de describir), quedan por discutir un gran número de parámetros que han ido apareciendo a lo largo de la explicación del algoritmo. A continuación presentamos una tabla con los distintos parámetros, su papel en la metaheurística y el valor concreto que les damos en la ejecución.

Nota: Todos los parámetros toman valores positivos por naturaleza.

Parámetro	Tipo / Rango	Papel	Valor
λ_0	Real	Impulso inicial de las soluciones de partida	1
<i>MaxEvalsTruncate</i>	Entero menor que $10000 \cdot \text{dim}$	Máximo de evaluaciones restantes con las que una solución puede ser truncada	$1200 \cdot \text{dim}$
<i>MinImpulse</i>	Real menor que λ_0	Impulso por debajo del cual la solución es truncada	$0.01 \cdot \lambda_0$
<i>MinImpulseSplit</i>	Real menor que λ_0	Mínimo impulso con el que una solución se puede ramificar	$0.1 \cdot \lambda_0$
<i>MaxImpulseSplit</i>	Real en $] \text{MinImpulseSplit}, \lambda_0[$	Máximo impulso con el que una solución se puede ramificar	$0.7 \cdot \lambda_0$
<i>MinEvalsSplit</i>	Entero menor que $10000 \cdot \text{dim}$	Mínimo de evaluaciones restantes para dividir la solución	$400 \cdot \text{dim}$
<i>SplitImpulse</i>	Proporción (real en $[0,1]$)	Proporción del impulso perdido que recuperan las soluciones que surgen de una división	0.5
<i>ImproveLimit</i>	Entero menor que $10000 \cdot \text{dim}$	Máximo de intentos para encontrar un vecino mejor	$10 \cdot \text{dim}$
<i>BaseWeight</i>	Proporción en $[0, 1[$	Mínimo peso en el momento para el vecino que mejora	0.2
<i>DecreaseSuccess</i>	Proporción en $]0, 1[$	Reducción del impulso en caso de acierto	0.99
<i>DecreaseFail</i>	Proporción en $]0, \text{DecreaseSuccess}[$	Reducción del impulso en caso de fallo	0.9

Tabla 1: Tabla con los parámetros del modelo y sus valores concretos en la ejecución.

Basamos estas elecciones únicamente en nuestra intuición y en el comportamiento del algoritmo (número de veces que hace cada acción y en qué orden, y valores de las variables, no en los resultados) sobre la función con ID = 4 del benchmark en dimensión 10. De modo que seguramente habrá mejores valores para estos parámetros.

2.2. Resultados del benchmark

Ejecutamos nuestra metaheurística sobre el benchmark en dimensiones 10 y 30. Compararemos los resultados obtenidos con los de los algoritmos recomendados como referencias: DE, PSO, AEO y SSA. Esto lo conseguimos fácilmente gracias a la herramienta TACO. Nuestro algoritmo aparecerá con el nombre de BRANCH.

En las siguientes tablas mostramos los resultados obtenidos en el benchmark para cada algoritmo se calcula el error medio (respecto al mínimo) de varias ejecuciones con distintas semillas. Para nuestro algoritmo hacemos 10 ejecuciones, las 10 semillas que usamos son los números 42, 47, ..., 87, saltando de 5 en 5. En las tablas marcamos en rojo los resultados de los algoritmos de referencia que son superados por el nuestro, y en azul los resultados de nuestro algoritmo que superan a al menos uno de los otros.

Resultados en dimensión 10

	AEO	BRANCH	DE	PSO	SSA
F01	5.134e+06	7.229e+09	0.000e+00	5.255e+07	3.766e+03
F02	1.000e+00	1.278e+11	0.000e+00	1.000e+00	1.000e+00
F03	3.575e+02	1.026e+04	0.000e+00	1.989e+03	1.000e-10
F04	1.414e+01	3.442e+02	1.105e-04	4.684e+01	4.172e+00
F05	3.876e+01	1.179e+02	1.151e+02	3.212e+01	4.840e+01
F06	2.617e+01	6.685e+01	3.460e+01	1.001e+01	2.632e+01
F07	6.753e+01	5.108e+02	3.848e+01	4.275e+01	6.198e+01
F08	2.808e+01	1.213e+02	2.983e+01	2.203e+01	3.849e+01
F09	2.207e+02	1.598e+03	1.938e+02	5.686e+01	2.439e+02
F10	1.172e+03	9.274e+02	3.597e+02	1.077e+03	1.086e+03
F11	9.704e+01	4.915e+02	1.942e-02	3.843e+01	9.529e+01
F12	2.525e+05	8.217e+07	4.931e+00	2.517e+06	2.313e+04
F13	7.788e+02	8.596e+03	5.988e+00	8.409e+03	8.101e+03
F14	7.452e+01	1.522e+02	5.240e-02	9.993e+01	1.181e+02
F15	2.045e+02	4.323e+03	6.060e-02	2.066e+03	5.244e+02
F16	1.804e+02	4.741e+02	4.561e+02	1.415e+02	1.884e+02
F17	8.969e+01	1.302e+02	2.350e+01	6.497e+01	9.769e+01
F18	1.926e+03	3.714e+03	3.630e-02	1.484e+04	1.360e+04
F19	6.418e+01	4.044e+03	5.192e-03	3.220e+03	1.246e+02
F20	1.284e+02	2.448e+02	3.837e+02	8.444e+01	1.058e+02
F21	1.769e+02	2.515e+02	1.889e+02	1.320e+02	1.044e+02
F22	1.148e+02	1.176e+03	1.005e+02	7.740e+01	1.091e+02
F23	3.428e+02	4.920e+02	8.098e+02	3.304e+02	3.487e+02
F24	3.460e+02	3.889e+02	1.000e+02	1.810e+02	2.597e+02
F25	4.348e+02	8.673e+02	4.040e+02	4.478e+02	4.380e+02
F26	5.047e+02	1.338e+03	2.706e+02	3.729e+02	3.904e+02
F27	4.197e+02	5.046e+02	3.897e+02	4.134e+02	4.117e+02
F28	5.469e+02	6.612e+02	3.517e+02	4.698e+02	4.318e+02
F29	3.752e+02	4.914e+02	2.375e+02	3.193e+02	3.676e+02
F30	2.471e+06	4.232e+06	8.051e+04	6.352e+05	1.469e+06
Best	0	0	21	8	1

Tabla 2: Resultados de nuestra metaheurística comparados con los de otras metaheurísticas de referencia. Benchmark CEC’2017, dimensión 10.

Resultados en dimensión 30

	AEO	BRANCH	DE	PSO	SSA
F01	1.782e+08	8.644e+10	4.909e+04	4.175e+09	3.765e+03
F02	1.000e+00	2.047e+45	1.309e+19	1.000e+00	1.000e+00
F03	2.989e+04	1.099e+05	3.481e+03	5.453e+04	2.416e-05
F04	2.018e+02	2.197e+04	8.430e+01	1.183e+03	8.388e+01
F05	2.496e+02	4.406e+02	2.015e+02	2.170e+02	2.649e+02
F06	6.894e+01	7.619e+01	6.320e+00	3.694e+01	6.384e+01
F07	5.291e+02	2.486e+03	2.334e+02	3.596e+02	4.609e+02
F08	1.894e+02	3.691e+02	1.894e+02	1.745e+02	2.205e+02
F09	5.919e+03	1.078e+04	6.530e+01	2.842e+03	6.212e+03
F10	6.042e+03	4.096e+03	3.764e+03	6.938e+03	4.844e+03
F11	3.980e+02	6.695e+03	7.958e+01	1.207e+03	1.537e+02
F12	8.585e+07	1.129e+10	3.258e+05	3.586e+08	2.528e+06
F13	1.880e+06	5.992e+09	1.536e+02	4.508e+07	1.926e+05
F14	1.797e+04	1.379e+05	7.100e+01	3.059e+05	3.286e+03
F15	6.164e+04	4.986e+08	6.256e+01	2.737e+05	8.852e+04
F16	2.008e+03	2.188e+03	1.319e+03	1.568e+03	1.658e+03
F17	8.224e+02	9.191e+02	4.809e+02	4.725e+02	8.471e+02
F18	3.110e+05	2.281e+06	6.122e+01	2.170e+06	8.855e+04
F19	1.888e+06	1.196e+09	3.572e+01	1.260e+06	1.510e+05
F20	7.208e+02	8.590e+02	2.751e+02	4.621e+02	6.450e+02
F21	4.478e+02	5.949e+02	3.255e+02	4.113e+02	4.502e+02
F22	1.987e+03	4.641e+03	1.002e+02	1.027e+03	4.196e+03
F23	8.410e+02	1.277e+03	5.346e+02	6.404e+02	8.365e+02
F24	8.788e+02	1.141e+03	6.059e+02	7.095e+02	9.264e+02
F25	5.055e+02	6.590e+03	3.870e+02	6.864e+02	4.176e+02
F26	4.529e+03	8.125e+03	4.038e+02	3.369e+03	5.522e+03
F27	8.127e+02	1.550e+03	4.925e+02	8.068e+02	6.550e+02
F28	5.547e+02	5.036e+03	3.943e+02	1.105e+03	4.896e+02
F29	2.088e+03	2.593e+03	1.025e+03	1.409e+03	1.934e+03
F30	9.839e+06	5.358e+08	3.657e+03	1.359e+07	2.308e+06
Best	0	0	24	2	3

Tabla 3: Resultados de nuestra metaheurística comparados con los de otras metaheurísticas de referencia. Benchmark CEC’2017, dimensión 30.

Resultados en dimensión 10 para el 10 % de las evaluaciones

	AEO	BRANCH	DE	PSO	SSA
F01	2.957e+08	2.101e+10	3.136e+07	8.296e+08	6.760e+03
F02	1.000e+00	1.797e+17	6.047e+03	1.000e+00	1.000e+00
F03	3.929e+03	2.745e+04	1.393e+03	1.282e+04	4.704e+01
F04	5.167e+01	1.947e+03	9.800e+00	1.155e+02	1.059e+01
F05	4.284e+01	2.542e+02	1.170e+02	7.086e+01	5.216e+01
F06	2.755e+01	9.723e+01	5.058e+01	2.593e+01	3.431e+01
F07	7.271e+01	1.112e+03	7.779e+01	8.897e+01	7.048e+01
F08	3.200e+01	1.755e+02	3.085e+01	5.692e+01	4.280e+01
F09	2.538e+02	4.760e+03	8.095e+02	2.949e+02	6.473e+02
F10	1.230e+03	1.672e+03	1.365e+03	1.587e+03	1.248e+03
F11	1.318e+02	2.459e+04	2.453e+01	1.164e+02	1.317e+02
F12	7.641e+05	2.559e+09	4.774e+04	2.633e+07	3.842e+06
F13	1.111e+03	2.954e+08	4.175e+02	1.476e+05	1.419e+04
F14	7.643e+01	7.594e+03	3.499e+01	5.512e+02	2.729e+02
F15	2.257e+02	5.729e+07	1.496e+01	8.784e+03	3.688e+03
F16	1.998e+02	9.447e+02	4.618e+02	3.425e+02	2.700e+02
F17	9.435e+01	5.476e+02	5.306e+01	1.308e+02	1.463e+02
F18	2.804e+03	1.238e+09	1.129e+02	2.362e+05	2.386e+04
F19	6.931e+01	1.185e+07	9.461e+00	2.360e+04	1.019e+04
F20	1.349e+02	6.151e+02	3.909e+02	1.776e+02	1.602e+02
F21	1.842e+02	4.264e+02	2.093e+02	1.894e+02	1.810e+02
F22	1.520e+02	2.088e+03	1.139e+02	1.609e+02	1.133e+02
F23	3.485e+02	9.524e+02	8.284e+02	3.575e+02	3.638e+02
F24	3.550e+02	6.356e+02	1.109e+02	2.655e+02	3.840e+02
F25	4.669e+02	2.299e+03	4.121e+02	4.842e+02	4.414e+02
F26	6.372e+02	2.481e+03	3.281e+02	6.011e+02	5.164e+02
F27	4.263e+02	1.135e+03	4.005e+02	4.489e+02	4.180e+02
F28	5.872e+02	1.125e+03	4.104e+02	7.358e+02	5.410e+02
F29	3.851e+02	1.160e+03	3.252e+02	4.295e+02	4.288e+02
F30	2.763e+06	9.777e+07	1.226e+05	3.769e+06	3.269e+06
Best	6	0	17	1	5

Tabla 4: Resultados de nuestra metaheurística comparados con los de otras metaheurísticas de referencia. Benchmark CEC'2017, dimensión 10, al 10 % de las evaluaciones totales.

Resultados en dimensión 30 para el 10 % de las evaluaciones

	AEO	BRANCH	DE	PSO	SSA
F01	1.318e+10	1.095e+11	5.809e+09	1.387e+10	3.040e+04
F02	1.000e+00	1.587e+57	3.896e+32	1.000e+00	1.000e+00
F03	6.503e+04	1.510e+05	5.869e+04	1.176e+05	6.770e+03
F04	2.389e+03	4.093e+04	7.582e+02	3.356e+03	1.265e+02
F05	3.279e+02	7.001e+02	3.512e+02	3.232e+02	2.650e+02
F06	7.421e+01	9.798e+01	7.808e+01	6.372e+01	6.757e+01
F07	6.277e+02	3.924e+03	3.286e+02	5.148e+02	4.889e+02
F08	2.712e+02	6.540e+02	2.817e+02	2.888e+02	2.213e+02
F09	6.831e+03	1.982e+04	9.913e+03	7.073e+03	6.419e+03
F10	6.600e+03	5.316e+03	5.593e+03	7.890e+03	5.124e+03
F11	1.992e+03	1.830e+04	5.099e+02	3.214e+03	2.111e+02
F12	1.103e+09	2.499e+10	3.389e+08	1.859e+09	3.261e+07
F13	1.140e+08	1.301e+10	2.224e+07	1.023e+09	4.524e+05
F14	3.774e+04	2.843e+06	1.315e+03	1.013e+06	7.032e+04
F15	6.340e+04	3.587e+09	5.931e+04	1.199e+07	9.119e+04
F16	2.302e+03	4.187e+03	2.010e+03	2.506e+03	2.012e+03
F17	9.633e+02	2.080e+04	8.710e+02	9.467e+02	1.055e+03
F18	5.161e+05	1.238e+08	2.431e+05	1.344e+07	4.549e+05
F19	7.997e+06	4.007e+09	4.292e+05	2.149e+07	1.415e+06
F20	7.811e+02	1.392e+03	5.705e+02	9.208e+02	8.395e+02
F21	5.212e+02	8.756e+02	4.047e+02	5.185e+02	4.612e+02
F22	4.035e+03	5.760e+03	9.186e+02	2.334e+03	4.473e+03
F23	9.016e+02	2.284e+03	6.291e+02	7.584e+02	9.055e+02
F24	9.337e+02	1.669e+03	6.871e+02	8.109e+02	9.609e+02
F25	1.049e+03	1.180e+04	6.297e+02	1.156e+03	4.303e+02
F26	5.958e+03	1.242e+04	2.094e+03	4.601e+03	6.221e+03
F27	8.734e+02	4.504e+03	6.228e+02	1.077e+03	7.020e+02
F28	1.479e+03	8.194e+03	8.203e+02	1.837e+03	5.634e+02
F29	2.481e+03	7.734e+03	1.615e+03	2.236e+03	2.246e+03
F30	4.005e+07	1.937e+09	3.830e+06	6.123e+07	8.352e+06
Best	0	0	16	1	12

Tabla 5: Resultados de nuestra metaheurística comparados con los de otras metaheurísticas de referencia. Benchmark CEC'2017, dimensión 30, al 10 % de las evaluaciones totales.

2.3. Análisis de los resultados

Lo primero que observamos claramente en ambas tablas es que nuestro algoritmo es el peor con diferencia, sólo consigue superar a cada uno de los algoritmos de referencia en 3 ó 4 funciones como mucho, y no es el mejor en ninguna función.

El desempeño es algo mejor en dimensión 10 (Tabla 2), que en dimensión 30 (Tabla 3) donde supera a muy pocos valores. Esto podría deberse a que hemos ajustado los parámetros basándonos en un ejemplo de dimensión 10.

Parece que nuestra metaheurística ha obtenido resultados decentes en la función F10, donde supera en ambas dimensiones a todos los algoritmos de referencia salvo a DE. En dimensión 10, supera a PSO y SSA también en la función F18, y en 2 funciones a DE. Luego tampoco podemos considerar nuestra metaheurística como mala del todo, ya que consigue superar a algoritmos competitivos en algunos ejemplos.

Además, debemos tener en cuenta que hemos realizado pocos experimentos para perfilar nuestra idea, y que darle una forma concreta que funcione correctamente es una tarea muy complicada, debido a la cantidad de decisiones que tomamos y la cantidad de parámetros que hay que seleccionar.

Por tanto, para ser una primera aproximación los resultados son medianamente satisfactorios, y no podemos descartar que la idea tenga potencial.

A nivel teórico, utilizar momentos para que las soluciones se desplacen por el espacio tiene una clara desventaja: requiere el más evaluaciones que otro tipo de trayectorias como la Búsqueda Local o el Enfriamiento simulado, ya que los vecinos que evaluamos y solución a la que saltamos realmente son diferentes. Sin embargo, es normal que para cada salto se realicen un gran número de evaluaciones, sobre todo a partir de cierto número de saltos, cuando la calidad de la solución es medianamente decente y cuesta encontrar un vecino que mejore a la solución, de modo que una evaluación extra no supone mucha diferencia en estas etapas del algoritmo, sí que la puede suponer en las primeras etapas, cuando encontrar un vecino mejor es relativamente sencillo. Por otra parte, el uso de momentos puede ayudar a que la solución no quede atrapada en máximos locales.

El desempeño del algoritmo empeora mucho cuando se consideran menos evaluaciones. Podemos apreciar esto en las Tablas 4 y 5, que contienen la misma comparativa que las Tablas 2 y 3, pero con los mejores resultados obtenidos por cada algoritmo en el momento de consumir el 10 % de sus evaluaciones permitidas. En dimensión 10, nuestra metaheurística no supera a ninguno de los algoritmos de referencia en ninguno de los ejemplos; y en dimensión 30, tan solo en F10, donde supera a todos menos a SSA. Esto probablemente se deba a que muchos de los comportamientos de nuestro algoritmo tienen en cuenta el número de evaluaciones restantes, por lo que no se llegan a aplicar ciertas técnicas de nuestra metaheurística.

Como hemos comentado, aun se puede mejorar mucho esta metaheurística, a continuación probaremos a combinarla con la Búsqueda Local.

3. Hibridación con Búsqueda Local

Vamos a hibridar nuestra metaheurística con la Búsqueda Local Solis Wets que se nos ha proporcionado. La introducimos cambiando dos condiciones:

- Cuando una solución vaya a ser truncada, si consideramos que aun tienen posibilidades de superar a la mejor encontrada hasta el momento, invertimos el resto de sus evaluaciones en aplicarle esta búsqueda en lugar de truncarla y guardar las evaluaciones.

La pregunta ahora es: ¿Cuándo consideramos que puede superar a la mejor hasta el momento? En nuestro caso, le daremos una oportunidad a la solución cuando la diferencia de fitness respecto a la mejor sea baja y el número restante de evaluaciones sea alto. Concretamente, cuando se satisfaga la condición $\frac{evals}{fitness - best} \geq 1000$, lo que añade un parámetro más a la metaheurística (en este caso le hemos dado el valor 1000).

- Cuando una solución vaya a avanzar, si le quedan un número de evaluaciones menor o igual a $500 \cdot \text{dimensión}$ (otro parámetro al que hemos tenido que dar valor) en lugar del código del Algoritmo 3, se le aplica Solis Wets hasta consumir el resto de sus evaluaciones.

En todos los casos, aplicamos esta búsqueda con los parámetros por defecto en el código que nos proporcionaron, comenzando con $\delta = 0.2$. Para ajustar los nuevos parámetros que han aparecido, he procurado que aproximadamente el 40 % de las evaluaciones se inviertan en Solis Wets y el 60 % en la Búsqueda Ramificada con Momentos que venía haciendo inicialmente. Sin embargo, he observado que estos porcentajes varían mucho con la función a ejecutar e incluso con la semilla.

3.1. Resultados del benchmark

Volvemos a realizar el mismo experimento que antes, también con ayuda de la herramienta TACO. Comparamos con los mismo algoritmos. Esta vez nuestro algoritmo aparece como HYBRID.

Resultados en dimensión 10

	AEO	DE	HYBRID	PSO	SSA
F01	5.134e+06	0.000e+00	2.916e+07	5.255e+07	3.766e+03
F02	1.000e+00	0.000e+00	1.556e+13	1.000e+00	1.000e+00
F03	3.575e+02	0.000e+00	1.735e+03	1.989e+03	1.000e-10
F04	1.414e+01	1.105e-04	1.999e+01	4.684e+01	4.172e+00
F05	3.876e+01	1.151e+02	2.134e+02	3.212e+01	4.840e+01
F06	2.617e+01	3.460e+01	9.133e+01	1.001e+01	2.632e+01
F07	6.753e+01	3.848e+01	7.492e+02	4.275e+01	6.198e+01
F08	2.808e+01	2.983e+01	1.688e+02	2.203e+01	3.849e+01
F09	2.207e+02	1.938e+02	1.688e+03	5.686e+01	2.439e+02
F10	1.172e+03	3.597e+02	1.519e+03	1.077e+03	1.086e+03
F11	9.704e+01	1.942e-02	8.594e+01	3.843e+01	9.529e+01
F12	2.525e+05	4.931e+00	6.439e+06	2.517e+06	2.313e+04
F13	7.788e+02	5.988e+00	6.005e+03	8.409e+03	8.101e+03
F14	7.452e+01	5.240e-02	3.112e+03	9.993e+01	1.181e+02
F15	2.045e+02	6.060e-02	7.344e+03	2.066e+03	5.244e+02
F16	1.804e+02	4.561e+02	6.506e+02	1.415e+02	1.884e+02
F17	8.969e+01	2.350e+01	5.423e+02	6.497e+01	9.769e+01
F18	1.926e+03	3.630e-02	3.127e+03	1.484e+04	1.360e+04
F19	6.418e+01	5.192e-03	5.101e+03	3.220e+03	1.246e+02
F20	1.284e+02	3.837e+02	4.754e+02	8.444e+01	1.058e+02
F21	1.769e+02	1.889e+02	3.757e+02	1.320e+02	1.044e+02
F22	1.148e+02	1.005e+02	1.853e+03	7.740e+01	1.091e+02
F23	3.428e+02	8.098e+02	7.664e+02	3.304e+02	3.487e+02
F24	3.460e+02	1.000e+02	4.567e+02	1.810e+02	2.597e+02
F25	4.348e+02	4.040e+02	4.882e+02	4.478e+02	4.380e+02
F26	5.047e+02	2.706e+02	1.846e+03	3.729e+02	3.904e+02
F27	4.197e+02	3.897e+02	8.065e+02	4.134e+02	4.117e+02
F28	5.469e+02	3.517e+02	6.662e+02	4.698e+02	4.318e+02
F29	3.752e+02	2.375e+02	7.456e+02	3.193e+02	3.676e+02
F30	2.471e+06	8.051e+04	1.365e+06	6.352e+05	1.469e+06
Best	0	21	0	8	1

Tabla 6: Resultados de nuestra metaheurística (hibridada con LS) comparados con los de otras metaheurísticas de referencia. Benchmark CEC'2017, dimensión 10.

Resultados en dimensión 30

	AEO	DE	HYBRID	PSO	SSA
F01	1.782e+08	4.909e+04	5.245e+03	4.175e+09	3.765e+03
F02	1.000e+00	1.309e+19	8.197e+55	1.000e+00	1.000e+00
F03	2.989e+04	3.481e+03	9.248e+04	5.453e+04	2.416e-05
F04	2.018e+02	8.430e+01	1.860e+02	1.183e+03	8.388e+01
F05	2.496e+02	2.015e+02	6.714e+02	2.170e+02	2.649e+02
F06	6.894e+01	6.320e+00	9.445e+01	3.694e+01	6.384e+01
F07	5.291e+02	2.334e+02	2.786e+03	3.596e+02	4.609e+02
F08	1.894e+02	1.894e+02	6.387e+02	1.745e+02	2.205e+02
F09	5.919e+03	6.530e+01	1.030e+04	2.842e+03	6.212e+03
F10	6.042e+03	3.764e+03	5.067e+03	6.938e+03	4.844e+03
F11	3.980e+02	7.958e+01	2.277e+02	1.207e+03	1.537e+02
F12	8.585e+07	3.258e+05	1.205e+08	3.586e+08	2.528e+06
F13	1.880e+06	1.536e+02	1.532e+06	4.508e+07	1.926e+05
F14	1.797e+04	7.100e+01	2.542e+05	3.059e+05	3.286e+03
F15	6.164e+04	6.256e+01	6.247e+04	2.737e+05	8.852e+04
F16	2.008e+03	1.319e+03	6.381e+03	1.568e+03	1.658e+03
F17	8.224e+02	4.809e+02	1.506e+03	4.725e+02	8.471e+02
F18	3.110e+05	6.122e+01	1.317e+06	2.170e+06	8.855e+04
F19	1.888e+06	3.572e+01	2.513e+06	1.260e+06	1.510e+05
F20	7.208e+02	2.751e+02	1.366e+03	4.621e+02	6.450e+02
F21	4.478e+02	3.255e+02	7.407e+02	4.113e+02	4.502e+02
F22	1.987e+03	1.002e+02	5.540e+03	1.027e+03	4.196e+03
F23	8.410e+02	5.346e+02	1.859e+03	6.404e+02	8.365e+02
F24	8.788e+02	6.059e+02	1.246e+03	7.095e+02	9.264e+02
F25	5.055e+02	3.870e+02	4.262e+02	6.864e+02	4.176e+02
F26	4.529e+03	4.038e+02	8.712e+03	3.369e+03	5.522e+03
F27	8.127e+02	4.925e+02	1.608e+03	8.068e+02	6.550e+02
F28	5.547e+02	3.943e+02	4.043e+02	1.105e+03	4.896e+02
F29	2.088e+03	1.025e+03	3.549e+03	1.409e+03	1.934e+03
F30	9.839e+06	3.657e+03	2.539e+07	1.359e+07	2.308e+06
Best	0	24	0	2	3

Tabla 7: Resultados de nuestra metaheurística (hibridada con LS) comparados con los de otras metaheurísticas de referencia. Benchmark CEC'2017, dimensión 30.

3.2. Análisis de los resultados

Observamos que la Tabla 6 tiene algo más de color que la Tabla 2, y la diferencia es mucho mayor si comparamos las Tablas 7 y 3. Esto nos indica que el desempeño de nuestra metaheurística ha aumentado considerablemente.

De hecho, para dimensión 30 nuestro algoritmo empieza a comer terreno a PSO, superándolo en 11 de las 30 funciones. En F1 y F30, nuestro algoritmo obtiene el segundo mejor resultado. Quizá con algo más de esfuerzo pudiese llegar a ser competitivo.

La importante mejora que se produce al hibridar deja al descubierto una carencia de nuestro algoritmo. Aunque el uso de momentos pueda evitar que se atasque en mínimos locales, no permite al algoritmo converger del todo en sus últimas etapas. Concluimos por tanto que nuestra metaheurística se beneficia enormemente al añadir una componente puramente explotatoria como es la Búsqueda Local.

4. Intento de mejora

4.1. Estudio de convergencia

Antes de nada, deberíamos estudiar el equilibrio entre diversidad y convergencia de nuestro algoritmo. Nuestra metaheurística lanza multiples trayectorias que se dividen, por lo que medir la diversidad no es tan sencillo como en un algoritmo genético. Sin embargo, sí que podemos medir la convergencia sin mucho esfuerzo. Representaremos en gráficas el error de la mejor solución encontrada hasta el momento en función de las evaluaciones consumidas. Si las gráficas llegan al mínimo demasiado rápido, significa que el algoritmo encuentra su mejor solución demasiado rápido y merecería la pena aumentar la diversificación y tardar algunas iteraciones más a cambio de que el mínimo encontrado sea mejor. En cada gráfica representamos la evolución de las soluciones de 4 intentos con las semillas (42, 47, 52 y 57).

Si el error inicial es muy alto, se distorsiona demasiado la escala del eje y no se aprecian las diferencias al final, modo que acompañaremos algunas de las gráficas con versiones reescaladas en las que puede que no se aprecie toda la evolución de las soluciones, pero sí las diferencias de error en las últimas etapas de la ejecución.

Debido a la cantidad de gráficas, sólo expondremos el análisis de algunas. A modo de anexo, se adjuntan todas las gráficas generadas.

BRANCH. Dimensión 10

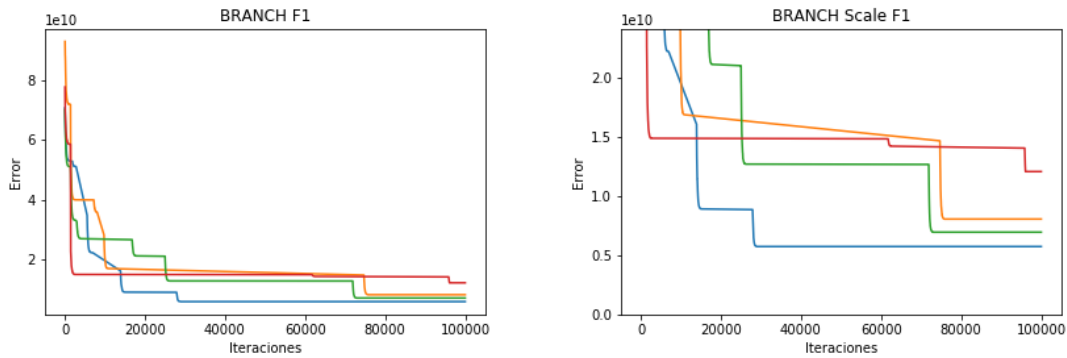
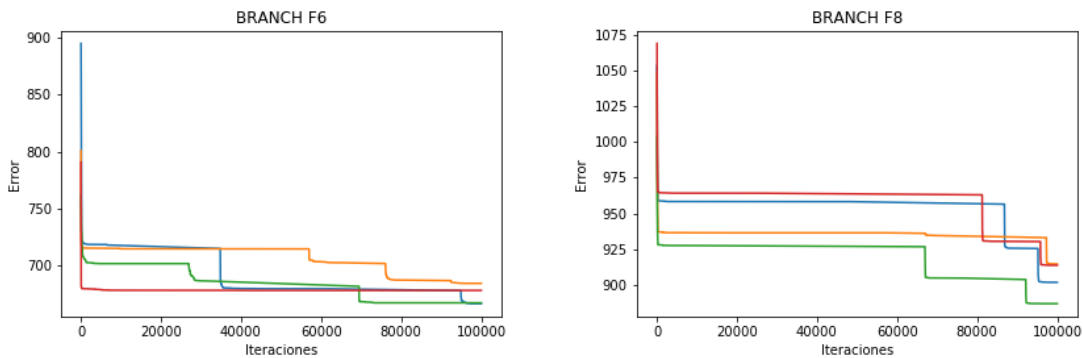


Figura 2: Gráfica de convergencia para F1.



(a) Gráfica de convergencia para F6.

(b) Gráfica de convergencia para F8.

Figura 3

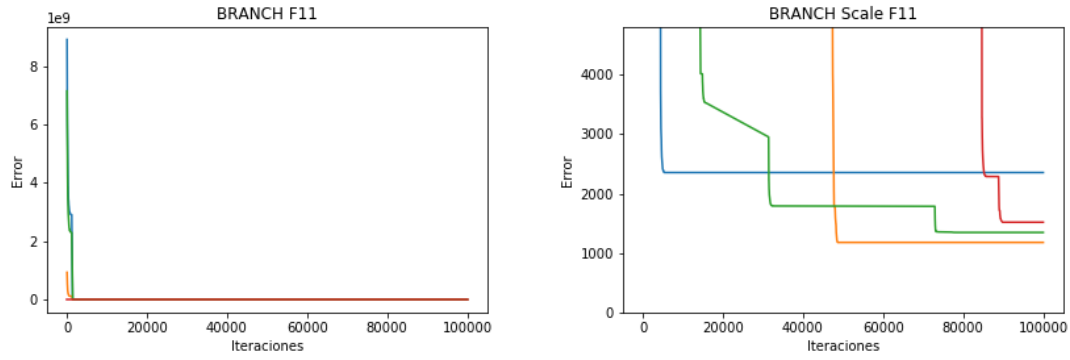


Figura 4: Gráfica de convergencia para F11.

La convergencia prematura que acabamos de comentar aparece en la ejecución azul de F1 (Figura 2), la roja de F6 (Figura 3(a)), la azul de F11 (Figura 4). En una fracción relativamente pequeña (menor que un tercio) de las evaluaciones, el algoritmo alcanza la mejor solución de toda la ejecución. También ocurre en menor medida a la ejecución amarilla de F11 (Figura 4).

BRANCH. Dimensión 30

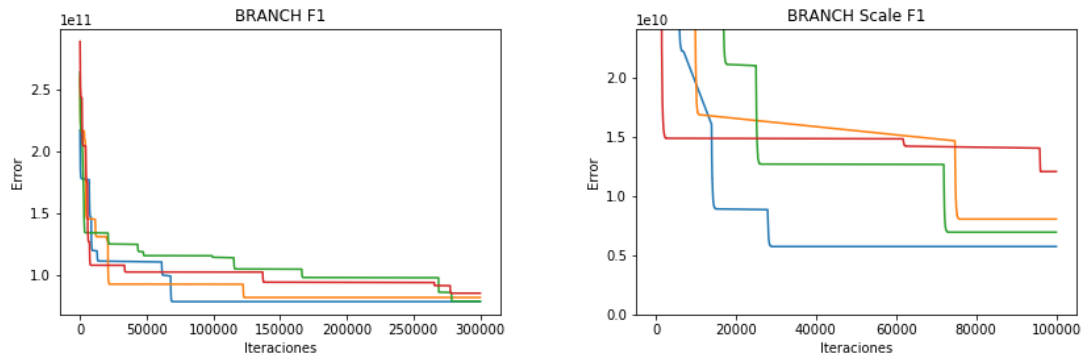
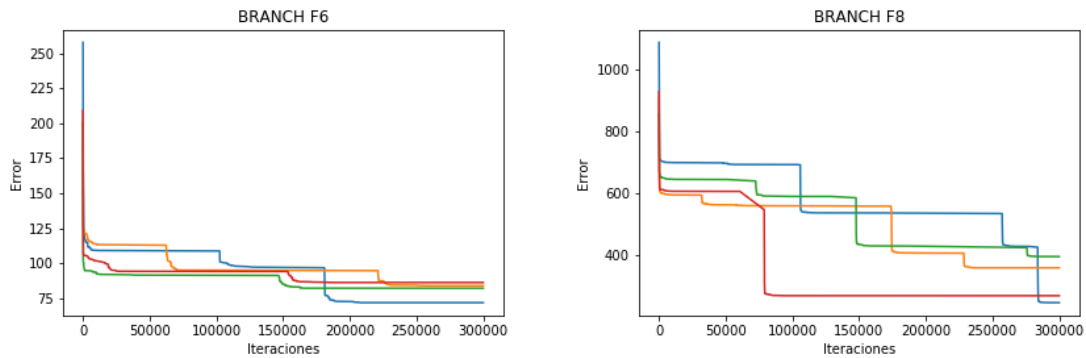


Figura 5: Gráfica de convergencia para F1.



(a) Gráfica de convergencia para F6.

(b) Gráfica de convergencia para F8.

Figura 6

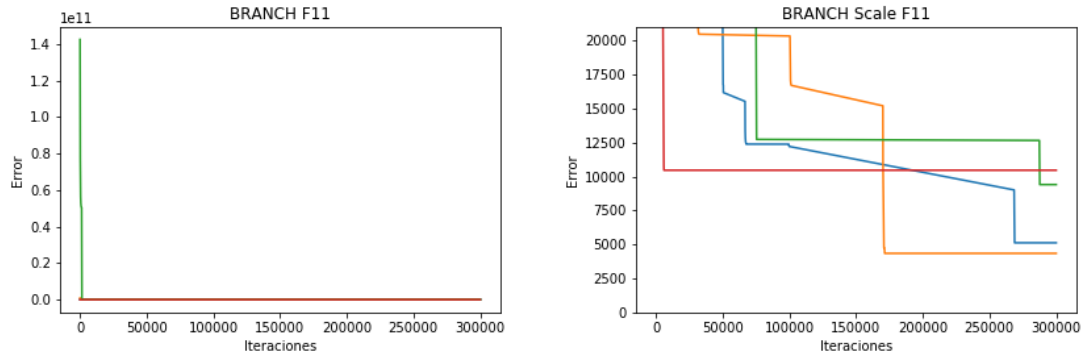


Figura 7: Gráfica de convergencia para F11.

En dimensión 30 también ocurre convergencia prematura en algunos casos, como la solución azul de F1 (Figura 5), la roja de F8 (Figura 6(b)) y la roja de F11 (Figura 7).

Sin embargo, el comportamiento de las soluciones varía con la semilla y la función a minimizar. Hay muchas ejecuciones en las que se necesitan casi todas las evaluaciones para llegar a la mejor solución. Además, muchas de las ejecuciones que alcanzan su mejor solución muy rápido superan al resto de ejecuciones.

Al ser un algoritmo que lanza múltiples trayectorias (independientemente de que estas se ramifiquen), es normal que la mejor solución se encuentre antes o después dependiendo de la semilla. Por tanto, no podemos concluir que la naturaleza de la metaheurística la haga susceptible de converger prematuramente.

HYBRID. Dimensión 10

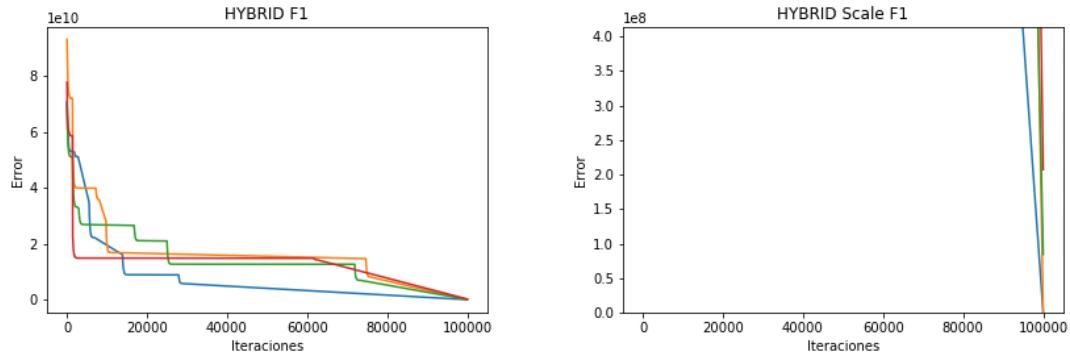


Figura 8: Gráfica de convergencia para F1.

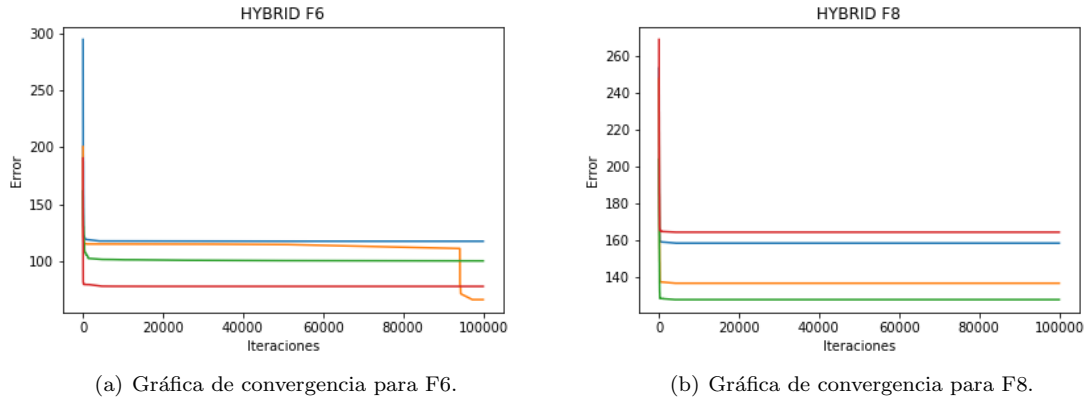


Figura 9

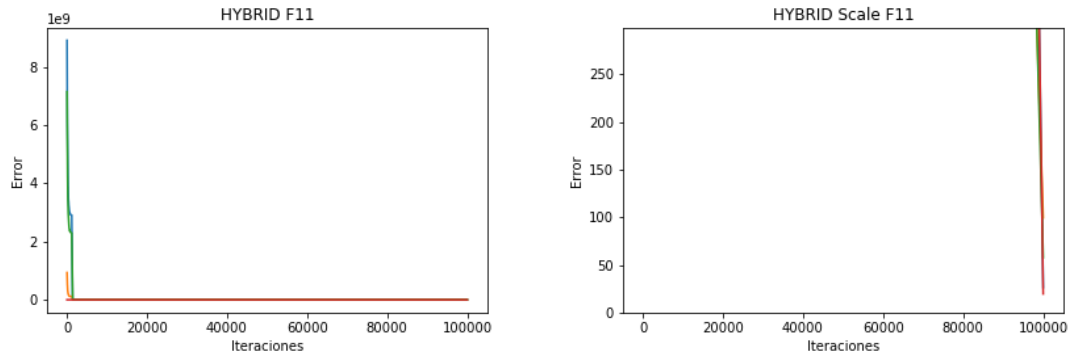


Figura 10: Gráfica de convergencia para F11.

Al hibridar el algoritmo con Búsqueda Local, hemos comprobado que nuestra metaheurística carecía de un método para “pulir” una solución una vez que alcanza una bondad determinada. Ahora podemos observar en estas gráficas que las últimas iteraciones son cruciales para el algoritmo, el error en las ejecuciones de F1 (Figura 8) y F11 (Figura 10) estaba decreciendo considerablemente cuando se agotaron las evaluaciones.

En cambio, en F6 (Figura 9(a)) y F8 (Figura 9(b)), las soluciones no mejoran a partir del primer óptimo local encontrado (exceptuando la amarilla en F6).

HYBRID. Dimensión 30

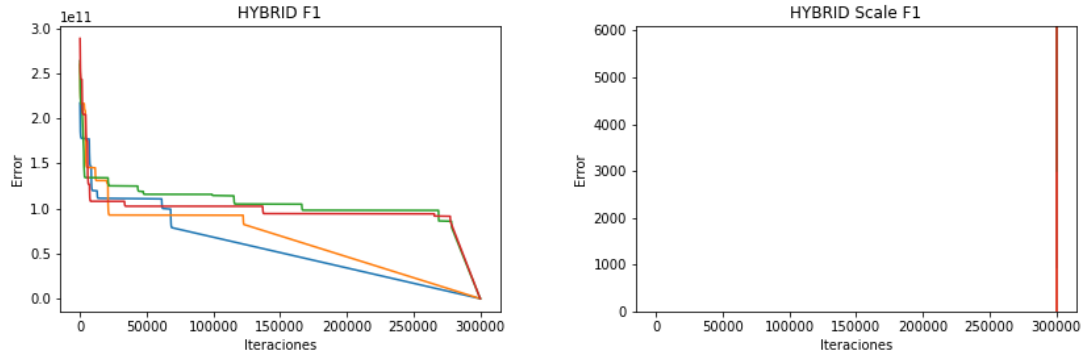
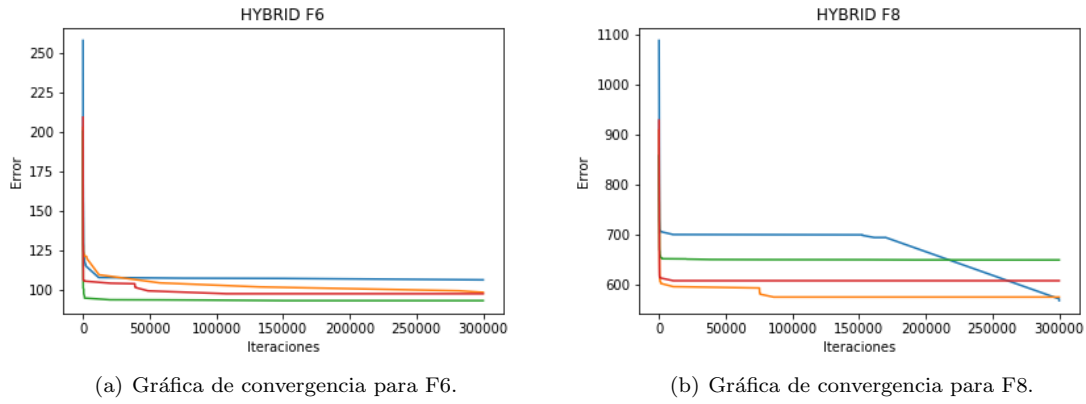


Figura 11: Gráfica de convergencia para F1.



(a) Gráfica de convergencia para F6.

(b) Gráfica de convergencia para F8.

Figura 12

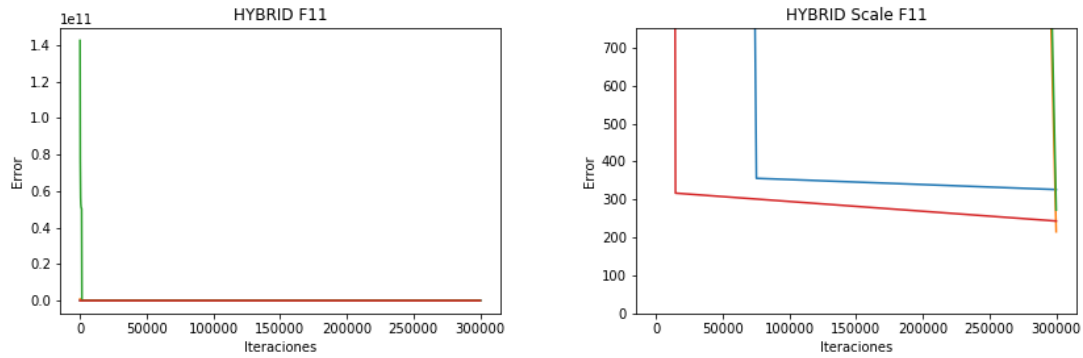


Figura 13: Gráfica de convergencia para F11.

En este caso, el comportamiento es similar al de dimensión 10. Las diferencias son que la excepción de F6 (amarilla en Figura 9(a)) ahora ocurre con la azul de F8 (Figura 12(b)).

4.2. Cambios

Realizaremos cambios para intentar mejorar el desempeño del algoritmo híbrido, que es la versión que mejor ha funcionado de las dos.

En base a lo observado en las gráficas de convergencia, parece que invertir más iteraciones en la Búsqueda Local podría mejorar los resultados del algoritmo. Las razones de nuestras sospechas son las siguientes.

1. No existe un problema de convergencia prematura generalizado, podemos permitirnos destinar a explotación algunas de las evaluaciones que ahora se usan para exploración.
2. En las últimas iteraciones, el error de la mejor solución estaba decreciendo de forma continua en lugar de escalonada, por lo que parece que es la Búsqueda Local la que estaba logrando tal mejora. Da la impresión de que las evaluaciones se agotan demasiado pronto y que podría mejorar aun más si se invirtiesen más evaluaciones en la Búsqueda Local.
3. Es cierto que en la mayoría de ejecuciones (no todas) de F6 y F8 se alcanza la mejor solución demasiado pronto. Sin embargo, como nuestra metahurística lanza múltiples trayectorias, incrementar la componente de intensificación podría hacer que esa mejor solución en la que nos quedamos “atascados” (no conseguimos superar) presentase mejor fitness.

Para aumentar el número de iteraciones destinadas a Búsqueda Local, modificaremos un parámetro. Antes, se sustituía el avance por Solis Wets cuando el número de evaluaciones restantes era menor o igual a 500 por la dimensión. Ahora pondremos 800 por la dimensión, de modo que la Búsqueda Local comenzará antes.

4.3. Resultados del benchmark

Volvemos a realizar los mismo experimentos y comparaciones, esta modificación aparecerá como HYBRID2. También incluimos una comparación entre la nueva versión y la antigua.

Resultados en dimensión 10

	AEO	DE	HYBRID2	PSO	SSA
F01	5.134e+06	0.000e+00	2.565e+06	5.255e+07	3.766e+03
F02	1.000e+00	0.000e+00	1.686e+18	1.000e+00	1.000e+00
F03	3.575e+02	0.000e+00	2.716e+02	1.989e+03	1.000e-10
F04	1.414e+01	1.105e-04	1.999e+01	4.684e+01	4.172e+00
F05	3.876e+01	1.151e+02	2.231e+02	3.212e+01	4.840e+01
F06	2.617e+01	3.460e+01	8.881e+01	1.001e+01	2.632e+01
F07	6.753e+01	3.848e+01	7.030e+02	4.275e+01	6.198e+01
F08	2.808e+01	2.983e+01	1.654e+02	2.203e+01	3.849e+01
F09	2.207e+02	1.938e+02	1.837e+03	5.686e+01	2.439e+02
F10	1.172e+03	3.597e+02	1.558e+03	1.077e+03	1.086e+03
F11	9.704e+01	1.942e-02	8.821e+01	3.843e+01	9.529e+01
F12	2.525e+05	4.931e+00	3.465e+06	2.517e+06	2.313e+04
F13	7.788e+02	5.988e+00	5.089e+03	8.409e+03	8.101e+03
F14	7.452e+01	5.240e-02	3.076e+03	9.993e+01	1.181e+02
F15	2.045e+02	6.060e-02	7.529e+03	2.066e+03	5.244e+02
F16	1.804e+02	4.561e+02	6.531e+02	1.415e+02	1.884e+02
F17	8.969e+01	2.350e+01	6.119e+02	6.497e+01	9.769e+01
F18	1.926e+03	3.630e-02	4.041e+03	1.484e+04	1.360e+04
F19	6.418e+01	5.192e-03	5.012e+03	3.220e+03	1.246e+02
F20	1.284e+02	3.837e+02	5.816e+02	8.444e+01	1.058e+02
F21	1.769e+02	1.889e+02	4.074e+02	1.320e+02	1.044e+02
F22	1.148e+02	1.005e+02	2.046e+03	7.740e+01	1.091e+02
F23	3.428e+02	8.098e+02	8.126e+02	3.304e+02	3.487e+02
F24	3.460e+02	1.000e+02	4.115e+02	1.810e+02	2.597e+02
F25	4.348e+02	4.040e+02	4.931e+02	4.478e+02	4.380e+02
F26	5.047e+02	2.706e+02	1.768e+03	3.729e+02	3.904e+02
F27	4.197e+02	3.897e+02	8.260e+02	4.134e+02	4.117e+02
F28	5.469e+02	3.517e+02	5.479e+02	4.698e+02	4.318e+02
F29	3.752e+02	2.375e+02	8.054e+02	3.193e+02	3.676e+02
F30	2.471e+06	8.051e+04	3.078e+06	6.352e+05	1.469e+06
Best	0	21	0	8	1

Tabla 8: Resultados de nuestra metaheurística (hibridada con LS) mejorada comparados con los de otras meta-heurísticas de referencia. Benchmark CEC'2017, dimensión 10.

	HYBRID	HYBRID2	Diferencia
F01	29156437.197134	2564792.06974	26591645.127394
F02	15561808639900	1.686090052E+018	-1.68607449019136E+018
F03	1734.885541	271.605917	1463.279624
F04	19.992518944	19.992518944	0
F05	213.4051	223.06287	-9.65777
F06	91.327386	88.810329	2.51705700000001
F07	749.1566	702.96501	46.19159
F08	168.78642	165.43157	3.35485
F09	1687.59405	1837.2592	-149.66515
F10	1519.4922	1558.39206	-38.89986
F11	85.938797	88.211905	-2.27310800000001
F12	6439314.527	3465351.917	2973962.61
F13	6004.7416	5089.19067	915.55093
F14	3112.08995	3075.873394	36.2165559999999
F15	7343.88438	7528.5839	-184.699519999999
F16	650.55484	653.1313	-2.57646
F17	542.263184	611.93223	-69.669046
F18	3126.6394	4041.4364	-914.797
F19	5101.26633	5012.12468	89.14165000000005
F20	475.36217	581.62901	-106.26684
F21	375.67745	407.38775	-31.7103
F22	1852.95438	2046.38838	-193.434
F23	766.38613	812.55522	-46.16909
F24	456.73483	411.53709	45.19774
F25	488.24801	493.06558	-4.81756999999999
F26	1846.37233	1768.49118	77.88114999999999
F27	806.47303	826.02984	-19.55681
F28	666.16845	547.9281	118.24035
F29	745.59173	805.37431	-59.78258000000001
F30	1365456.176	3077675.415	-1712219.239
Best	17	12	

Tabla 9: Comparación entre ambas versiones de HYBRID. Marcamos en azul el mejor de los dos en cada función, nótese que empatan en F4.

Resultados en dimensión 30

	AEO	DE	HYBRID2	PSO	SSA
F01	1.782e+08	4.909e+04	4.893e+03	4.175e+09	3.765e+03
F02	1.000e+00	1.309e+19	2.026e+63	1.000e+00	1.000e+00
F03	2.989e+04	3.481e+03	1.038e+05	5.453e+04	2.416e-05
F04	2.018e+02	8.430e+01	1.860e+02	1.183e+03	8.388e+01
F05	2.496e+02	2.015e+02	7.004e+02	2.170e+02	2.649e+02
F06	6.894e+01	6.320e+00	9.574e+01	3.694e+01	6.384e+01
F07	5.291e+02	2.334e+02	3.309e+03	3.596e+02	4.609e+02
F08	1.894e+02	1.894e+02	6.454e+02	1.745e+02	2.205e+02
F09	5.919e+03	6.530e+01	9.892e+03	2.842e+03	6.212e+03
F10	6.042e+03	3.764e+03	4.775e+03	6.938e+03	4.844e+03
F11	3.980e+02	7.958e+01	2.417e+02	1.207e+03	1.537e+02
F12	8.585e+07	3.258e+05	3.023e+08	3.586e+08	2.528e+06
F13	1.880e+06	1.536e+02	2.276e+05	4.508e+07	1.926e+05
F14	1.797e+04	7.100e+01	1.300e+05	3.059e+05	3.286e+03
F15	6.164e+04	6.256e+01	5.029e+04	2.737e+05	8.852e+04
F16	2.008e+03	1.319e+03	6.592e+03	1.568e+03	1.658e+03
F17	8.224e+02	4.809e+02	1.545e+03	4.725e+02	8.471e+02
F18	3.110e+05	6.122e+01	7.701e+05	2.170e+06	8.855e+04
F19	1.888e+06	3.572e+01	1.959e+06	1.260e+06	1.510e+05
F20	7.208e+02	2.751e+02	1.401e+03	4.621e+02	6.450e+02
F21	4.478e+02	3.255e+02	7.233e+02	4.113e+02	4.502e+02
F22	1.987e+03	1.002e+02	5.666e+03	1.027e+03	4.196e+03
F23	8.410e+02	5.346e+02	1.689e+03	6.404e+02	8.365e+02
F24	8.788e+02	6.059e+02	1.292e+03	7.095e+02	9.264e+02
F25	5.055e+02	3.870e+02	4.291e+02	6.864e+02	4.176e+02
F26	4.529e+03	4.038e+02	9.390e+03	3.369e+03	5.522e+03
F27	8.127e+02	4.925e+02	2.912e+03	8.068e+02	6.550e+02
F28	5.547e+02	3.943e+02	4.053e+02	1.105e+03	4.896e+02
F29	2.088e+03	1.025e+03	3.755e+03	1.409e+03	1.934e+03
F30	9.839e+06	3.657e+03	8.008e+06	1.359e+07	2.308e+06
Best	0	24	0	2	3

Tabla 10: Resultados de nuestra metaheurística (hibridada con LS) mejorada comparados con los de otras meta-heurísticas de referencia. Benchmark CEC'2017, dimensión 30.

	HYBRID	HYBRID2	Diferencia
F01	5244.7787035	4892.999302	351.7794015
F02	8.196708967E+055	2.026422436E+063	-2.02642235403291E+063
F03	92479.966	103784.785	-11304.819
F04	185.964964583	185.964964583	0
F05	671.44409	700.41859	-28.9745
F06	94.448734	95.743878	-1.29514399999999
F07	2786.4721	3309.1168	-522.6447
F08	638.73696	645.38355	-6.64659000000006
F09	10299.7596	9891.8819	407.877699999999
F10	5066.7682	4774.7527	292.0155
F11	227.679292	241.691532	-14.01224
F12	120471045.1	302287139.7	-181816094.6
F13	1532385.559	227602.783	1304782.776
F14	254208.6986	129981.489	124227.2096
F15	62466.099	50289.436	12176.663
F16	6380.6437	6591.8847	-211.241
F17	1506.317	1545.2759	-38.9589000000001
F18	1316895.828	770085.089	546810.739
F19	2512794.5	1958662.64	554131.86
F20	1366.2826	1401.2012	-34.9186
F21	740.70012	723.3123	17.3878199999999
F22	5540.2333	5665.8098	-125.5765
F23	1859.1977	1689.0527	170.145
F24	1246.27718	1291.752	-45.4748199999999
F25	426.23203	429.08889	-2.85685999999998
F26	8712.0072	9390.1142	-678.107
F27	1608.39028	2912.30768	-1303.9174
F28	404.28841	405.29655	-1.00814000000003
F29	3548.797	3754.8097	-206.0127
F30	25388462.68	8007585.35	17380877.33
Best	18	11	

Tabla 11: Comparación entre ambas versiones de HYBRID. Marcamos en azul el mejor de los dos en cada función, nótese que empatan en F4.

4.4. Análisis de los resultados

En las Tablas 9 y 11 observamos que la nueva versión del algoritmo híbrido ha empeorado con respecto a la original en casi dos terceras partes de las funciones del benchmark, lo que nos sugiere que el sacrificio de diversidad en pos de una mayor intensificación no ha merecido la pena.

Atendiendo a las Tablas 6 y 8 (dimensión 10), ahora nuestra metaheurística supera a AEO en F1 y en F3, pero ha dejado de superar a AEO y SSA en F30 y a DE en F23, por lo que tampoco podemos concluir que hayamos logrado ninguna mejora.

Respecto a las Tablas 7 y 10 (dimensión 30), la modificación sigue superando a todos los resultados que ya superaba la hibridación original. Además, ahora supera también a SSA en F10, a AEO en F15 y a AEO y PSO en F30.

Por tanto, concluimos que en dimensión 10 la modificación o ha supuesto ninguna mejora, incluso un ligero empeoramiento. Sin embargo, en dimensión 30, a pesar de empeorar en más de la mitad de las funciones, ha mantenido la superioridad sobre los algoritmos de referencia en los casos en los que la había conseguido. Además, las mejoras que ha conseguido han sido lo suficientemente significativas para superar en algunas ocasiones más a los algoritmos de referencia.

Si nos fijamos en la Tabla 11 podemos observar que las mejoras acostumbran a ser más significativas que los empeoramientos. Las mejoras más importantes se han logrado en las funciones F13, F14, F15, F18, F19 y F30, mientras que los mayores empeoramientos ocurren en F2 (donde ninguno de nuestros intentos ha logrado resultados

mínimamente decentes), F3, F12, F26 y F27. Hay muchos empeoramientos muy bajos, como en F6, F25 y F28. La excepción es F2, pero en esta función todos nuestros intentos obtienen errores muy altos. Esto sumado a que mejora a los algoritmos de referencia en más ocasiones nos sugiere que para dimensión 30 no ha sido una mala idea modificar el parámetro para aumentar la intensificación.

4.5. Otras posibles mejoras

Comentaremos otras posibles mejoras que podríamos intentar si dispusiésemos de más tiempo.

Obviamente, el ajuste de parámetros podría ser más preciso y teniendo en cuenta más información. También correríamos el riesgo de “sobreajustar” la metaheurística para este benchmark, y que su desempeño sobre otros problemas de optimización continua no fuese el esperado. Pero sin duda podríamos haber invertido más tiempo en razonar los valores de los parámetros incluso sin atender a los resultados de las ejecuciones.

Las transformaciones que aplicamos también podrían ajustarse. Por ejemplo cuando queremos convertir un valor no acotado (a priori) en la escala $[0, 1]$, la transformación $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ produce valores muy cercanos a 1 si x toma valores grandes. Podría intentarse $x \mapsto \frac{x}{M+x}$ para algún real positivo M más grande.

Además, se podrían estudiar otras alternativas a las decisiones que tomamos durante el diseño de la metaheurística, como la decisión de la acción a realizar en cada iteración (las condiciones de los *if*).

También comentamos que utilizar momentos requería una evaluación extra en cada actualización, ya que aparte de los vecinos hay que evaluar la solución a la que saltamos realmente. Esto no supone ninguna diferencia cuando la solución ya es medianamente decente (cada salto puede requerir evaluar muchos vecinos), pero sí en las primeras etapas, cuando se salta tras evaluar menos de 10 vecinos.

Una alternativa para solucionar este pequeño problema sería la siguiente: En lugar de partir de un momento aleatorio, construir el vector momento a partir de algunas iteraciones de Búsqueda Local. Además, el nuevo momento tiene más posibilidades de enviar a la solución en una dirección adecuada. Por el contrario, estamos sacrificando exploración para conseguir una mayor intensificación, lo que puede acarrear convergencia prematura.

5. Conclusiones

5.1. Valoración de la metaheurística

Tras realizar varios experimentos y razonar bastantes decisiones, hemos convertido una simple idea en una metaheurística funcional. Como era de esperar, nuestra metaheurística no logra igualar a los algoritmos de la competición. Sin embargo, en dimensión 30, hemos conseguido a hacerle sombra a PSO y a AEO (Tabla 10), por lo que podemos estar satisfechos con nuestro trabajo.

Además, es seguro que nuestra idea de utilizar momentos tenga mucho más potencial del que hemos conseguido extraerle.

5.2. Mi experiencia diseñando una metaheurística

Lo que más me ha llamado la atención durante todo el trabajo es la dificultad que tiene dar forma concreta a la intuición.

Con relativa facilidad, pensé una idea simple pero interesante, inspirada en un fenómeno físico como es la conservación del momento.

Sin embargo, durante el diseño de la metaheurística concreta he tenido que afrontar bastantes decisiones: “¿Cuándo una solución es prometedora?”, “¿Cuándo merece la pena ramificar una solución?”, “¿Cómo aumento la diversificación?”, etc. La verdad es que me parece muy divertido e interesante pensar funciones que intenten cuantificar estas propiedades tan complejas, empiezo con “Necesito que sea creciente con la fitness, decreciente con el número de evaluaciones, ...”, pero es muy difícil encontrar buenos equilibrios.

Por si fuese poco, cuando le he dado respuesta (no necesariamente buena) a estas cuestiones, han aparecido innumerables parámetros cuyos valores tenía que decidir (todos los de la Tabla 1 y los dos para decidir cuándo aplicar Solis Wets al hibridar).

En resumen, me he dado cuenta que no basta con tener una buena idea general, sino que además hay que saber dar forma matemática a la intuición, algo que he sufrido y disfrutado.