Relación de Ejercicios del Tema III

Métodos Numéricos I – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas – Universidad de Granada – Curso 2016/2017

En la resolución de los ejercicios que consideres conveniente puedes hacer uso de *Mathematica*.

1. Comprueba que la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ como

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3) + 7x_1 - x_2 + x_3,$$

alcanza su valor mínimo en un único punto y calcúlalos.

2. Halla la proyección ortogonal del vector $\mathbf{b} = (1, 2, -1, 3.4)$ sobre el subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$S := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \ 2x_1 - x_3 + 5.4x_4 = 0\right\}.$$

3. Considera los datos

$$(1, 2), (-2.17, 2), (1, 3.7), (3, 1/2), (0.56, -1) \in \mathbb{R}^2.$$

Determina las curvas de ecuaciones $y = mx + n$, $y = ax^2 + bx + c$ e $y = \alpha\sqrt{x} + \beta$ que mejor los aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados. Dibuja simultáneamente los puntos con cada curva.

4. Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo (real). Demuestra la conocida como *desigualdad de Cauchy–Schwarz*, i.e.,

$$x, y \in E \ \Rightarrow \ \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

(Idea: si $\langle y, y \rangle = 0$ no hay nada que probar, y en caso contrario solo hay que usar que

$$0 \leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle).$$

Concluye que la aplicación $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in E$ como

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

es una norma en E.

5. Calcula la proyección ortogonal de la función $f \in C([0,\pi])$,

$$f(x) = x + 2x^2, \quad (x \in [0,\pi])$$

sobre el subespacio S de $C([0,\pi])$

$$S = \operatorname{lin}\{x, \cos x, 1, e^{x/\pi}\}.$$

6. Sea $P = \{0 = x_0 < x_1 = 0.3 < x_2 = 0.9 < x_3 = 1.1 < x_4 = 1.5\}$ y sea $f : [0, 1.5] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función continua

$$f(x) = x^2, \quad (0 \le x \le 1.5).$$

Determina la mejor aproximación de f en el subespacio vectorial $\mathbb{S}_0^1(P)$ de $C([0, 1.5])$.

7. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_M$ $M+1$ números reales. Comprueba que

$$\det \begin{bmatrix} x_0^M & x_0^{M-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^M & x_1^{M-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_M^M & x_M^{M-1} & \cdots & x_M & 1 \end{bmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{M} (x_i - x_j).$$

Deduce que si $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ son tales que

$$i, j = 1, \ldots, M \ \Rightarrow \ x_i \neq x_j,$$

entonces existe una única función polinómica $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de grado menor o igual que M con

$$i = 0, 1, \ldots, M \ \Rightarrow \ p(x_i) = y_i.$$

8. Comprueba que el problema de interpolación anterior no está bien definido si el grado de la función polinómica p es distinto de M (número de datos menos 1).

9. Demuestra que si $a < b$, $f \in C^3([a,b])$ y $\mathbf{I}_2 f$ es el polinomio en $\mathbb{P}_2$ de forma que

$$\mathbf{I}_2 f(x_0) = f(x_0), \ \mathbf{I}_2 f(x_1) = f(x_1), \ \mathbf{I}_2 f(x_2) = f(x_2),$$

con los nodos igualmente espaciados $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ y $x_2 = b$, entonces el correspondiente error de interpolación $\mathbf{E}_2 f$ verifica

$$\|\mathbf{E}_2 f\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{9\sqrt{3}} h^3,$$

siendo $h = (b-a)/2$.

10. Calcula los 7 nodos de Chebyshev $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ del intervalo $[1.6, 3]$ y úsalos para resolver el problema de interpolación

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_6 : \ i = 0,1,2,3,4,5,6 \ \Rightarrow \ p(x_i) = \sqrt{|x_i - 2|}$$

mediante las fórmulas de Lagrange y Newton. Analiza el condicionamiento de este problema y obtén una estimación del error de interpolación.

11. Considera en el intervalo $[-1,1]$ 9 nodos x_i uniformemente distribuidos y los correspondientes 9 nodos de Chebyshev u_i. Estudia en cada caso el problema de interpolación

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_8 : \; i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 \;\Rightarrow\; p(x_i) = 2|x_i| + 1,$$

así como el análogo para los nodos u_i. Dibuja simultáneamente ambos interpolantes junto con la función $2|x| + 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

12. Resulve el problema de interpolación de Hermite: encontrar $p \in \mathbb{P}_7$ de forma que

$$p(0) = 0 = p'(0),\; p(1) = 0.4,\; p'(1) = 1,\; p(-1) = 0,\; p'(-1) = -1, p(-2) = 1,\; p'(-2) = 1.2.$$

13. Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1,1]$ determinada por 6 puntos y la función de Runge f, determina el spline s que verifica

$$i = 0,1,2,3,4,5 \;\Rightarrow\; s(-1 + 2i/5) = f(-1 + 2i/5),$$

siendo, o bien $s = \mathbf{S}_5^1 \in \mathbb{S}_0^1(P)$, o bien $s = \mathbf{S}_5^2 \in \mathbb{S}_3^2(P)$ con $s''(-1) = s''(1) = 0$ (natural). Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este último spline.