Práctica III: Interpolación polinómica. Aproximación por mínimos cuadrados

Métodos Numéricos I - Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas - Universidad de Granada - Curso 2016_2017

El bagaje alcanzado en las prácticas anteriores permite resolver las cuestiones que se plantean a continuación.

Ejercicios

- Halla la mejor aproximación del vector $\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$ en los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

  $S_1 = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \\ 2.3 \\ 3.4 \end{pmatrix}\right\}$ y $S_2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - y + 5.7\,z = 0,\ 2\,x + 4.2\,y - z - w = 0\right\}$.

  Comprueba que la solución obtenida en cada caso es correcta verificando la condición de ortogonalidad.

- Calcula la recta y la parábola de ecuaciones respectivas $y=mx+n$ e $y=ax^2 + bx + c$ que mejor aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos: (1,2), (0,0), (-1.1,3.2), (2,π/9), (0,4), (-19/2,4). Dibuja simultáneamente la recta, la parábola y los puntos. Para ello, deberás hacer uso del comando **ListPlot** combinado con **Show** (consulta la ayuda de *Mathematica*).

- Determina la proyección ortogonal de la función $f \in C[0,2\pi]$ definida como $f(x)=(x-2\pi)^2$ sobre el subespacio vectorial S=lin{1, x, sen x, cos 2x, e^x} y dibuja conjuntamente las gráficas de f y de su proyección.

- Programa la forma de Lagrange del polinomio $p\in \mathbb{P}_N$ que resuelve el problema de interpolación polinómica: dados (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,$(x_N,y_N)\in\mathbb{R}^2$, i,j=0,1,...,N $\Rightarrow$ $p(x_j)=y_j$. Para ello, calcula previamente los polinomios de Lagrange. Aplícalo al problema: encuentra $p\in \mathbb{P}_{10}$: j=0,1,...,10 $\Rightarrow$ p(j/10)=cos j - 1/6$\sqrt{j}$. Dibuja simultáneamente las gráficas de p y de $f(x)$=cos x-$1/6x$.

- Programa la forma de Newton del polinomio $p\in \mathbb{P}_N$ que resuelve el problema de interpolación polinómica: dados (x_0,y_0), (x_1,y_1),...,$(x_N,y_N)\in\mathbb{R}^2$, i,j=0,1,...,N $\Rightarrow$ $p(x_j)=y_j$. Para ello, calcula previamente los polinomios nodales y las diferencias divididas. Aplícalo al problema: encuentra $p\in \mathbb{P}_{10}$: j=0,1,...,10 $\Rightarrow$ p(j/10)=cos j - 1/6$\sqrt{j}$. Dibuja las gráficas de p y de $f(x)$=cos x-$1/6x$ conjuntamente. Comprueba que el resultado coincide con el del ejercicio anterior.

- Sea f la función en C[-1,1] definida como $f(x)=10.03\cos(2x/\pi)$. Considera los nodos $x_j=1-2j/21$, $(j=01,...,21)$, los datos $(x_j,f(x_j))$ y los datos perturbados (x_j,f_j), siendo $f_j=f(x_j)+(-1)^j10^{-3}$.
  - Halla $\max\{|f_j-f(x_j)|: j=0,1,...,21\}$.
  - Estima gráficamente (o de forma más precisa, mediante la sentencia **FindMaximum**, cuyo funcionamiento se recoge en la ayuda de *Mathematica*) la distancia (norma ∞) de los interpolantes obtenidos para las dos series de datos. ¿Qué se puede decir del condicionamiento del problema de interpolación anterior?
  - Calcula la constante de Lebesgue Λ_{21} (**FindMaximum**) o da una estimación de su valor gráficamente. Relaciona el valor de este número con el apartado anterior.
  - Determina los 22 nodos de Chebyshev en el intervalo [-1,1] y resuelve el problema de interpolación para esos nodos y la misma función f. Analiza el condicionamiento de este nuevo problema.
- Resuelve el problema de interpolación de Hermite: encuentra $p\in\mathbb{P}_9$: $p(j)=\log j$, $p'(j)=j/2.36$, $j=1,2,3,4,5$.
- Calcula la solución del problema de interpolación de Taylor: encuentra $p\in\mathbb{P}_5$: $p^{j)}(1.47)=\int_0^j x^j\,dx$, $j=0,1,2,3,4,5$.
- Considera un intervalo real cualquiera $[a,b]$, con $a<b$, y una partición suya $P=\{x_0, x_1,..., x_N\}$.
  - Halla una base del espacio de funciones splines $\mathbb{S}_1^0(P)$.
  - Utiliza la base anterior para encuentra el único elemento s de $\mathbb{S}_1^0(P)$ de forma que $s(x_j)=\alpha_j$, $(j=0,1,...,N)$, siendo los α_j's escalares dados.
  - Aplica lo anterior a la partición $P=\{x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=2.34, x_3=3.45, x_4=4.567, x_5=5.081, x_6=5.26\}$ del intervalo [0.4,5.26] para encuentra el único elemento s de $\mathbb{S}_1^0(P)$ de forma que $s(x_j)=1-x_j^2/20.78$, $(j=0,1,...,6)$. Dibuja conjuntamente las gráficas de s y de $f(x)=1-x^2/20.78$.
- Partiendo de una partición uniforme $P=\{x_0, x_1,..., x_N\}$ de un intervalo real cualquiera $[a,b]$,
  - halla el único spline natural de $\mathbb{S}_3^2(P)$ tal que $s(x_j)=\alpha_j$, $(j=0,1,...,N)$, siendo los α_j's escalares dados,
  - aplica lo anterior a la partición P del intervalo [-2.09,4,56] en 8 subintervalos iguales y con $s(x_j)=\log\sqrt{1+|x_j|}$, $(j=0,1,...,8)$ y
  - dibuja conjuntamente las gráficas de s y de $f(x)=\log\sqrt{1+|x|}$.