# Mecánica Celeste: Problemas

David Cabezas Berrido

*Ejercicio* 5.

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (x, y) = (r \operatorname{ch} \theta, r \operatorname{sh} \theta)\end{aligned}$$

I) Imagen de $\Phi$.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ¿$\exists (\theta, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ : x = r \operatorname{ch} \theta,\ y = r \operatorname{sh} \theta$?

Esto equivale a $\operatorname{ch} \theta = \frac{x}{r},\ \operatorname{sh} \theta = \frac{y}{r}$, y la identidad $\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$ obliga a que

$$1 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow r = +\sqrt{x^2 - y^2} \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto necesitamos $x^2 > y^2$. Ahora

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc\,sh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva con $\operatorname{sh}^{-1} = \operatorname{arc\,sh}$. Sólo nos falta que $\operatorname{ch} \theta = \frac{x}{r}$, lo cual deducimos fácilmente de

$$\operatorname{ch}^2 \theta = 1 + \operatorname{sh}^2 \theta = 1 + \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2}$$

pero como $\operatorname{ch}$ sólo toma valores positivos, tendremos que imponer también $x \geq 0$. Tenemos por tanto

$$\Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \supset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$$

Pero la otra inclusión es inmediata, puesto que dado $(r \operatorname{ch} \theta, r \operatorname{sh} \theta) \in \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, se tiene por la desigualdad triangular:

$$r \operatorname{ch} \theta = r \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > r \frac{|e^\theta - e^{-\theta}|}{2} = |r \operatorname{sh} \theta|$$

II) Probar $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ difeomorfismo.

Claramente $\Phi$ es biyectiva, puesto que hemos construido su inversa en el anterior apartado.

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} : \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto \left( \operatorname{arc\,sh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \sqrt{x^2 - y^2} \right)\end{aligned}$$

Las funciones $\operatorname{ch}$, $\operatorname{sh}$ y $\operatorname{arc sh}$ son diferenciables en todo $\mathbb{R}$, y la función $\sqrt{\ }$ es diferenciable en $\mathbb{R}^+$, luego tanto $\Phi$ como $\Phi^{-1}$ son diferenciables en sus respectivos dominios.

III) Dibujar $\Phi(\theta, r_0)$ con $r_0$ fijo.

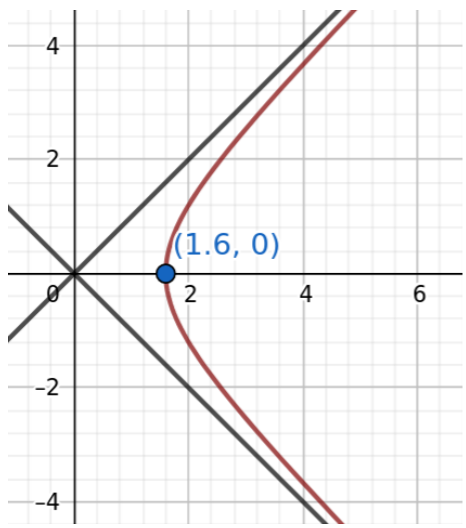
Tenemos $x = r_0 \operatorname{ch}\theta,\ y = r_0 \operatorname{sh}\theta$. La inyectividad de $\operatorname{sh}$ nos permite despejar $x = f(y) = r_0 \operatorname{ch}(\operatorname{arc sh}\frac{y}{r_0})$, luego obtendremos $x$ como función de $y$. Observamos que

$$x^2 - y^2 = r_0^2 \operatorname{ch}^2\theta - r_0^2 \operatorname{sh}^2\theta = r_0^2$$

luego tenemos la gráfica de una rama de hipérbola ($x \geq 0$). Observamos que $f$ es par y que para $\theta = 0$ tenemos $(x, y) = (r_0, 0)$, $y$ toma valores en todo $\mathbb{R}$ y $x$ a partir de $r_0$ (ya que $\operatorname{ch} \geq 1$). Por otra parte tenemos

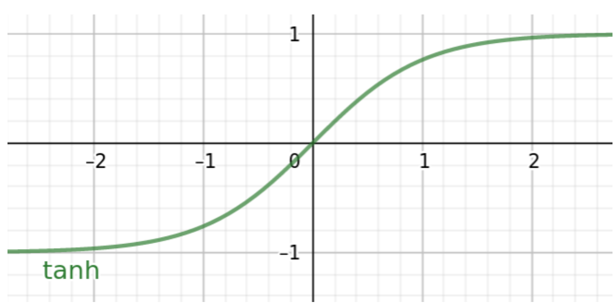
$$\lim_{\theta\to+\infty} \frac{x}{y} = \lim_{\theta\to+\infty} \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = 1, \qquad \lim_{\theta\to-\infty} \frac{x}{y} = -1.$$

Así que $x = y$ y $x = -y$ harán de asíntotas.

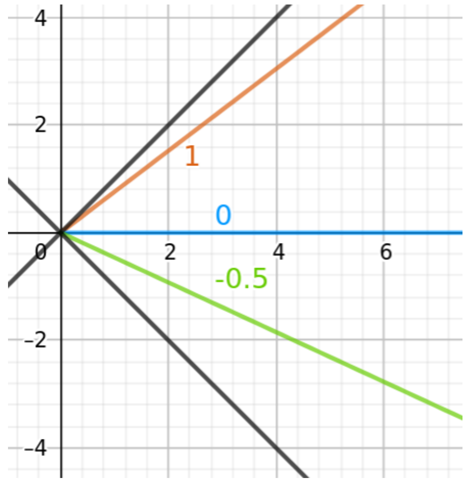



Dibujar $\Phi(\theta_0, r)$ con $\theta_0$ fijo.

Tenemos $x = r \operatorname{ch}\theta_0,\ y = r \operatorname{sh}\theta_0$ con $r \in \mathbb{R}^+$, que es la ecuación paramétrica de una semirecta que "pasa" (no llega a tocarlo porque $r > 0$) por el origen. La pendiente será $\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sh}\theta_0}{\operatorname{ch}\theta_0} = \tanh\theta_0 \in ]-1, 1[$. Y la pendiente será mayor cuanto mayor sea $\theta_0$, puesto que $\tanh$ tiene esta forma:

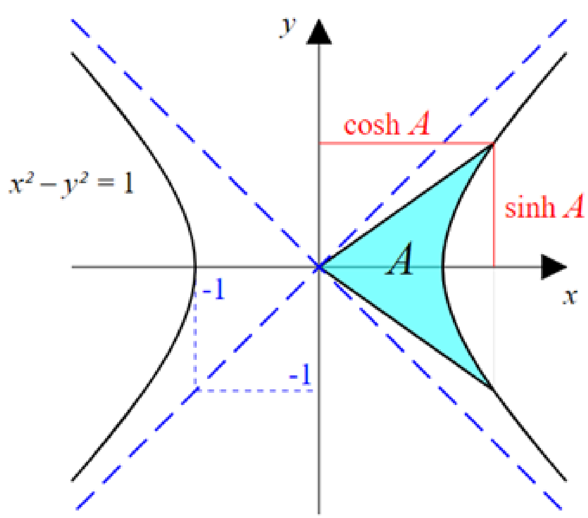


$\Phi(\theta_0, r)$ queda entonces de este modo (comparamos distintos valores de $\theta_0$).




IV) Interpretar $\operatorname{sh}$ y $\operatorname{ch}$ en términos de "trigonometría en la hipérbola".

Claramente $x = \operatorname{ch}\theta$ y $y = \operatorname{sh}\theta$ satisfacen la ecuación $x^2 - y^2 = 1$. $y$ toma valores en todo $\mathbb{R}$ y $x$ a patir de 1, luego $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametriza la rama derecha de la hipérbola equilátera. Dado $A \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch} A, \operatorname{sh} A)$ corresponderá a un punto de dicha rama, y recíprocamente todo punto de la rama se escribe como $(\operatorname{ch} A, \operatorname{sh} A)$ para algún $A \in \mathbb{R}$. Para darle a $\operatorname{sh}$ y $\operatorname{ch}$ cierto carácter "canónico" (¿Que tiene esta parametrización de la hipérbola de especial? ¿Por qué elegir ésta y no otra?) destacamos que el área azul de la figura es de $A$ unidades cuadradas.




Probaremos que el área azul por encima del eje vale $\frac{A}{2}$. El área bajo la recta $y = \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A}x$ (que pasa por el origen y $(\operatorname{ch} A, \operatorname{sh} A)$) entre 0 y $\operatorname{ch} A$ es

$$\int_0^{\operatorname{ch} A} \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A} x dx = \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\operatorname{ch} A} = \frac{\operatorname{sh} A \operatorname{ch} A}{2}$$

Hay que restarle el área bajo la hipérbola ($y = \sqrt{x^2-1}$), que es

$$\begin{aligned}
\int_1^{\operatorname{ch} A} \sqrt{x^2-1}dx &= \int_0^A \sqrt{\operatorname{ch} t^2 - 1}\operatorname{sh} t dt \qquad \text{(usando el cambio } x = \operatorname{ch} t\text{)} \\
&= \int_0^A \operatorname{sh}^2 t dt = \int_0^A \Big(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\Big)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^A e^{2t} + e^{-2t} - 2dt \\
&= \frac{1}{4}\bigg(\Big[\frac{e^{2t}}{2}\Big]_0^A - \Big[\frac{e^{-2t}}{2}\Big]_0^A - \Big[2t\Big]_0^A\bigg) = \frac{1}{4}\bigg(\frac{e^{2A}}{2} - \frac{1}{2} - \Big(\frac{e^{-2A}}{2} - \frac{1}{2}\Big) - 2A\bigg) \\
&= -\frac{A}{2} + \frac{1}{4}\frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto el área azul por encima del eje es

$$\frac{\operatorname{sh} A \operatorname{ch} A}{2} + \frac{A}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2} = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\frac{(e^A - e^{-A})}{2}\frac{(e^A + e^{-A})}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2} = \frac{A}{2}$$

*Ejercicio* 6. Se considera el grupo el grupo de rotaciones

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A^T A = AA^T = I,\ \det A > 0\}$$

a) Probar que la aplicación

$$\Phi : SO(3) \to T_1(\mathbb{S}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |x| = |y| = 1,\ < x, y >= 0\}$$

que a cada matriz $A \in SO(3)$ le hace corresponder sus dos primeras columnas es un homeomorfismo.

Dada una matriz $A = (a_1|a_2|a_3)$, tenemos que $A$ es ortogonal ($A^T A = AA^T = I$) si, y solo si $(a_1, a_2, a_3)$ forma una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$; y $\det A > 0$ si, y solo si la base define una orientación positiva (como los vectores son ortonormales, esto equivale a que $a_1 \times a_2 = a_3$). Por tanto si $A \in SO(3)$, sus dos primeras columnas son ortonormales: $(a_1, a_2) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, así que $\Phi$ está bien definida.

¿Es biyectiva? De existir $\Phi^{-1}$, tendría que ser de esta forma: para $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, $\Phi^{-1}(x, y) = A = (x|y|z)$. Para que esto sea una aplicación bien definida, tiene que existir un único $z$ que haga que $A$ sea ortogonal y preserve la orientación (tenga determinante positivo). $(x, y, z)$ será una base ortonormal si, y solo si $z \perp x, y$ y $|z| = 1$. Lo primero implica que $z \in \operatorname{Lin}\{x, y\}^\perp$, que es una recta, así que sólo hay dos posibilidades para $z$, $z = \pm x \times y$. Pero sólo $z = +x \times y$ hace que la orientación de la base ortonormal sea positiva ($\det A > 0$). Por tanto $\Phi$ es biyectiva con
$\Phi^{-1}(x, y) = (x|y|x \times y)$.

Claramente $\Phi$ es continua por ser la restricción a $SO(3)$ de la proyección de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ a $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Y $\Phi^{-1}$ lo es por serlo el producto vectorial, luego $\Phi$ homeomorfismo.

b) $e \in ]0, 1[$, $\mathcal{E}_*(e)$ espacio de órbitas keplerianas con excentricidad $e$. Es decir, el conjunto de pares $(V, E)$ con $V \subset \mathbb{R}^3$ plano vectorial orientado y $E \subset V$ elipse con foco en el origen y excentricidad $e$. Probar que existe una biyección entre $\mathcal{E}_*(e)$ y $SO(3) \times \mathbb{R}^+$.

Probamos algo equivalente: encontramos una biyección entre $\mathcal{E}_*(e)$ y $T_1(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^+$, ya que sabemos que $SO(3)$ es biyectivo con $T_1(\mathbb{S}^2)$.

Dado $\big((x, y), r\big) \in T_1(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^+$, le hacemos corresponder el plano vectorial $V = x^\perp$ orientado con la orientación inducida por cualquier base $(v_1, v_2)$ de $V$ que convierta a $(v_1, v_2, x)$ en una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, esto es: $\det(v_1, v_2, x) > 0$.

Para que esta definición sea correcta, debemos comprobar que la orientación de $V$ no depende de la base escogida. En efecto, si $(v_1, v_2)$ y $(u_1, u_2)$ son dos bases de $V$ que cumplen $\det(v_1, v_2, x), \det(u_1, u_2, x) > 0$, escribimos $v_1$ y $v_2$ en función de $(u_1, u_2)$,

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \qquad v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$$

La matriz de cambio de base $(v_1, v_2)$ a $(u_1, u_2)$ es

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

para probar que ambas bases definen la misma orientación en $V$ debemos comprobar que $\det M = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$. Usaremos para ello propiedades básicas de los determinantes.

$$\begin{aligned}
\det(v_1, v_2, x) &= \det(a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) \\
&= \det(a_{11}u_1, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) + \det(a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) \\
&= \det(a_{11}u_1, a_{21}u_1, x) + \det(a_{11}u_1, a_{22}u_2, x) + \det(a_{12}u_2, a_{21}u_1, x) + \det(a_{12}u_2, a_{22}u_2, x) \\
&= a_{11}a_{21}\det(u_1, u_1, x) + a_{11}a_{22}\det(u_1, u_2, x) + a_{12}a_{21}\det(u_2, u_1, x) + a_{12}a_{22}\det(u_2, u_2, x) \\
&= a_{11}a_{22}\det(u_1, u_2, x) + a_{12}a_{21}\det(u_2, u_1, x) \\
&= a_{11}a_{22}\det(u_1, u_2, x) - a_{12}a_{21}\det(u_1, u_2, x) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\det(u_1, u_2, x) = \det M \det(u_1, u_2, x)
\end{aligned}$$

Por tanto $\det M > 0$ y probamos que esta correspondencia está bien definida.

Como $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, $y \perp x \Rightarrow y \in x^\perp = V$, lo que nos permite usar $y$ como sentido para el eje de excentricidad de la elipse. $E$ será por tanto la elipse con parámetros $k = r$ y $\vec{e} = ey$.

Recíprocamente, dado $(V, E) \in \mathcal{E}_*(e)$ le hacemos corresponder $\big((x, y), r\big)$, donde $x$ será el vector unitario normal al plano $V$ (hay dos posibilidades, un vector y su opuesto) que respete la orientación en $V$, es decir, si $(v_1, v_2)$ es una base de $V$, $x$ será el vector unitario que cumple $x = \lambda \cdot v_1 \times v_2$ con $\lambda > 0$, o equivalentemente $\det(v_1, v_2, x) > 0$. Los argumentos anteriores también prueban que dos bases de $V$ que definan la misma orientación dan lugar al mismo $x$ (puesto que $\det M > 0$).

$y \in V$ será el vector unitario con el sentido del eje de excentricidad de $E$: $y = \dfrac{\vec{e}}{e}$. Como $x \in V^\perp$, tendremos $x \perp y$ y por tanto $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$. Finalmente, tomamos $r = k \in \mathbb{R}^+$, el parámetro de $E$.

Estas correspondencias son una inversa de la otra: $x$ y $V$ (respectivamente $y$ y $\vec{e}$; y $r$ y $k$) se definen unívocamente.

c) Caso $e = 0$.

Ahora $\mathcal{E}_*(e)$ está formado por circunferencias en planos orientados.

Las correspondencias entre $x$ y $V$ (plano orientado en el que está la circunferencia); y entre $r$ y $k$ (radio de la circunferencia) siguen siendo válidas. Pero $\vec{e} = 0$ independientemente de $y \in x^\perp = V$, luego la correspondencia anterior ya no es una biyección. Esto no descarta que exista otra biyección, probablemente la haya, aunque no sea tan fácil de interpretar.

*Ejercicio* 11. Dado un campo $C^\infty$, $V = (V_1, V_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cumpliendo $\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 1$, debemos encontrar $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$V = J\nabla F + V_* = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right) + V_* \tag{1}$$

donde $V_* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es fijo.

Dado $V$, supondremos que se puede expresar como en (??) para obtener condiciones sobre $F$ y $V_*$. Con estas condiciones obtendremos candidatos a $F$ y $V_*$, para después comprobar que efectivamente $V$ se puede expresar de esa forma.

Tomando divergencias en (??) y utilizando que la divergencia es un operador lineal, obtenemos

$$1 = \operatorname{div} V = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \operatorname{div} V_*$$

Utilizando que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, obtenemos $\operatorname{div} V_* = 1$. Observamos que si se cumpliese (??) para un $V_*$, existiría una $F_0$ tal que el campo $V_0(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, que tiene divergencia 1, se expresase como $V_0 = \left(-\frac{\partial F_0}{\partial y}, \frac{\partial F_0}{\partial x}\right) + V_*$. Por otra parte, dado cualquier $V$ con divergencia 1, existiría $F$ tal que $V = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right) + V_*$. Obtendríamos por tanto

$$V = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right) + V_0 - \left(-\frac{\partial F_0}{\partial y}, \frac{\partial F_0}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial (F - F_0)}{\partial y}, \frac{\partial (F - F_0)}{\partial x}\right) + V_0$$

Con esto hemos demostrado que no importa el $V_*$ que tomemos, ya que sólo hará que varíe la función $F$, pero no afectará a su existencia. Tomamos por tanto $V_* = V_0 = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$.

Discutamos ahora $F$. Dado $V = (V_1, V_2)$ con $\operatorname{div} V = 1$, (??) nos proporciona un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que tiene que cumplir $F$.

$$V_1 = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{x}{2} \tag{2}$$

$$V_2 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{2} \tag{3}$$

La existencia de $F$ dependerá de la existencia de solución para este sistema.

Tomando primitivas respecto de $y$ en (??) obtenemos:

$$F(x, y) = \frac{xy}{2} - \int_0^y V_1(x, s) ds + c(x), \tag{4}$$

ya que al tomar primitivas respecto de $y$ nos aparece una constante que puede depender de $x$ (constante respecto de $y$). Para determinar $F$, falta determinar $c(x)$, ya que el resto de sumandos son conocidos.

Considerando $y \in \mathbb{R}$ fijo, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $c(x) = F(x,y) - \frac{xy}{2} + \int_0^y V_1(x,s)ds$. Utilizando el Teorema de Derivación Bajo el Signo Integral, obtenemos que $c \in C^1(\mathbb{R})$ y se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2} - \int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,s)ds + c'(x)$$

Notemos que en (??) sólo aparece el gradiente de $F$, por lo que debemos determinar $F$ salvo constante. Así que nos basta con determinar $c'(x)$. Igualamos está ecuación con (??):

$$V_2(x,y) - \frac{y}{2} = \frac{y}{2} - \int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,s)ds + c'(x) \tag{5}$$

Primero resolveremos la integral, aplicando $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 1$ y utilizando la regla de Barrow:

$$\int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,s)ds = \int_0^y 1 - \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,s)ds = y - \big(V_2(x,y) - V_2(x,0)\big) \tag{6}$$

Sustituimos en (??):

$$V_2(x,y) - \frac{y}{2} = \frac{y}{2} - y + V_2(x,y) - V_2(x,0) + c'(x) \tag{7}$$

Simplificando $V_2$ e $y$, obtenemos $c'(x) = V_2(x,0)$ y tomamos $c(x) = \int_0^x V_2(t,0)dt$.

Recuperando (??), obtenemos finalmente:

$$F(x,y) = \frac{xy}{2} - \int_0^y V_1(x,s)ds + \int_0^x V_2(t,0)dt \tag{8}$$

Ya estamos en disposición de probar el enunciado del ejercicio. Dado un campo vectorial $V = (V_1, V_2)$ en las condiciones dadas, definimos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como en (??). Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe y es continua en todo $\mathbb{R}^2$, mientras que combinando el Teorema de Derivación Bajo el Signo Integral con el Teorema Fundamental del Cálculo, deducimos que $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe y es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, $F$ es $C^1(\mathbb{R}^2)$. Comprobamos ahora que efectivamente se cumple (??) obteniendo las derivadas parciales de $F$:

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right) = \left(-\frac{x}{2} + V_1(x,y), \frac{y}{2} - \int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,s)ds + V_2(x,0)\right)$$

Volvemos a utilizar $\operatorname{div} V = 1$ y la regla de Barrow para calcular el valor de la integral como en (??), y simplificamos:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}\right) &= \Big(-\frac{x}{2} + V_1(x,y), \frac{y}{2} - y + V_2(x,y) - V_2(x,0) + V_2(x,0)\Big) \\ &= \Big(-\frac{x}{2} + V_1(x,y), -\frac{y}{2} + V_2(x,y)\Big) = V - V_*\end{aligned}$$

Viendo ahora que las derivadas parciales de $F$ son $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, concluimos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

*Ejercicio* 13. Consideramos la ecuación de Kepler en el plano complejo

$$u - e\sin u = M, \qquad u \in \mathbb{C}$$

I) Dado $e \in ]0,1[,\ M = 0$, demostrar que existen soluciones no triviales de

$$u - e\sin u = 0 \tag{9}$$

Probaremos con $u = i\rho$ con $\rho \in \mathbb{R}$. Tenemos la ecuación $i\rho - e\sin i\rho = 0$, lo que usando una conocida propiedad del seno complejo, equivale a $i\rho - ei\,\mathrm{sh}\,\rho = 0$, donde sh denota la función seno hiperbólico. Simplificando obtenemos $\rho - e\,\mathrm{sh}\,\rho = 0$.

Tomamos $f(\rho) = \rho - e\,\mathrm{sh}\,\rho$, estudiaremos su monotonía. Tenemos $f'(\rho) = 1 - e\,\mathrm{ch}\,\rho$ (ch denota la función coseno hiperbólico), por lo que la derivada se anula si y solo si $\mathrm{ch}\,\rho = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \rho = \pm\,\mathrm{arc\,ch}\,\frac{1}{e}$ (arc ch denota la función arco coseno hiperbólico). Probando valores, observamos que $f$ es estrictamente decreciente en $]-\infty, -\mathrm{arc\,ch}\,\frac{1}{e}[$ y $]\mathrm{arc\,ch}\,\frac{1}{e}, \infty[$, y estrictamente creciente en el intervalo $]-\mathrm{arc\,ch}\,\frac{1}{e}, \mathrm{arc\,ch}\,\frac{1}{e}[$.

Además, es claro que

$$\lim_{\rho\to-\infty} f(\rho) = +\infty \qquad \lim_{\rho\to+\infty} f(\rho) = -\infty$$

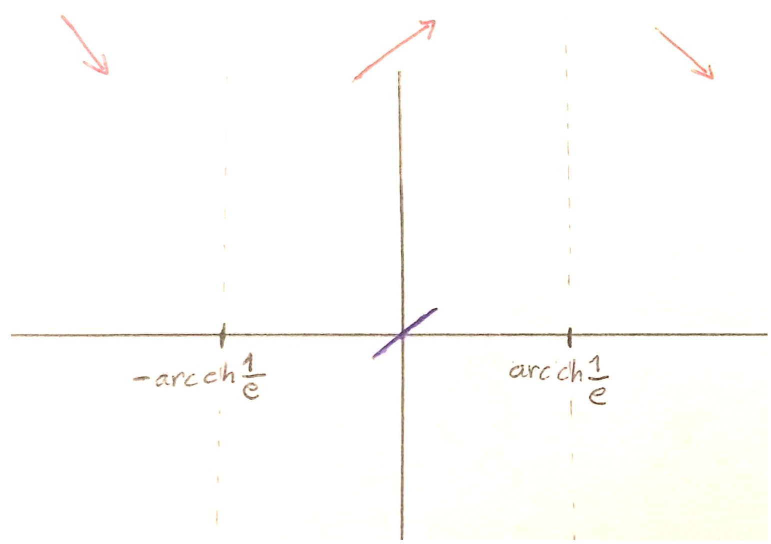



Figura 1: Monotonía de la función $f$.

De esto y de $f(0) = 0$, se deduce fácilmente (la Figura ?? ayuda) que $f$ tiene dos raíces más, una con $\rho > 0$ y otra para $\rho < 0$. Por tanto, la ecuación ?? tiene al menos dos soluciones no triviales.

II) Se supone $M = \frac{\pi}{2}$, y elegimos un disco

$$D_\rho = \{u \in \mathbb{C} : |u - M| \leq \rho\}$$

Demostrar que si $|e| < \frac{\rho}{\operatorname{ch}\rho}$, la ecuación

$$u - e\sin u = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

tiene una única solución en $D_\rho$. Utilizaremos el Teorema de Rouché, que es el siguiente:

Sean $f$ y $g$ dos funciones holomorfas en una región $K$ con frontera $\partial K$ cerrada y simple (sin autointersecciones). Si $|g(z)| < |f(z)|$ para todo $z$ en $\partial K$, entonces $f$ y $f+g$ tienen el mismo número de ceros dentro de $K$ (contando multiplicidades).

Tomaremos $f(u) = u - M$, que obviamente tiene un única raíz ($u = M$), $g(u) = -e\sin u$, y $K = D_\rho$. La frontera de $D_\rho$ es el conjunto

$$\partial D_\rho = \{u \in \mathbb{C} : |u - M| = \rho\}$$

claramente $|f(u)| = |u - M| = \rho$ en este conjunto. Para $g$ tenemos usando la hipótesis $|e| < \frac{\rho}{\operatorname{ch}\rho}$

$$|g(u)| = |e||\sin u| \leq |e| \operatorname{ch}|\operatorname{Im} u| \leq |e| \operatorname{ch}\rho < \rho = |f(u)|$$

Por tanto, hay tantas raíces de $f + g$ como raíces de $f$, luego $f + g$ tiene una única raíz en $D_\rho$. Como las raíces de $f + g$ coinciden con las soluciones de ??, obtenemos lo requerido.

[Ejercicio 2.20 del libro] Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación diferencial:

$$u' = \frac{1}{3 - \cos u - \sin(2u)} \tag{11}$$

a) Muestra que $u$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre sí mismo:

   $u$ es una función $C^1(\mathbb{R})$, ya que su derivada es continua. Claramente se cumple que $u'(t) \in [\frac{1}{5}, 1] \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (acotando el seno y el coseno), luego $u$ es estrictamente creciente y por tanto inyectiva. Como $u' > 0$, $u^{-1}$ será derivable en cada punto de $u(\mathbb{R})$ por la Regla de Derivación de la Función Inversa. Falta probar que $u$ es sobreyectiva y por tanto $u^{-1}$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Efectivamente, el hecho de que la pendiente de $u$ esté minorada por una constante positiva fuerza que

   $$\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty \qquad \lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$$

   Se puede formalizar esta idea utilizando por ejemplo el Lema de Barbalat.

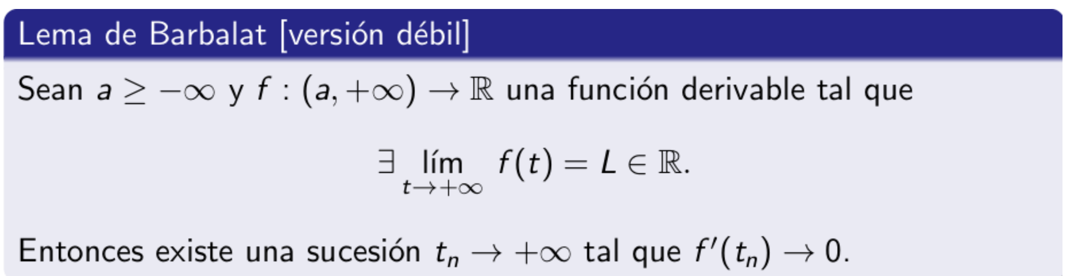



Figura 2: Lema de Barbalat. Fuente: Diapositivas de Ecuaciones Diferenciales II del profesor José Miguel Alonso Alonso.

   Como $u$ es monótona, debe diverger o tener límite cuando $t \to \pm\infty$, pero lo segundo es imposible, ya que el Lema de Barbalat (versión débil) contradice a $u'(t) \in [\frac{1}{5}, 1]$.

b) Muestra que existe $T > 0$ tal que $u(t + T) = u(t) + 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   Primero resolvemos la ecuación ?? (variables separadas) y obtenemos que $u$ cumple la ecuación:

   $$3u - \sin u + \frac{\cos(2u)}{2} = t + k \tag{12}$$

   para algún $k \in \mathbb{R}$. No conocemos una forma fácil de resolver esta ecuación para obtener $u$, pero es fácil despejar $t$ en función de $u$, obteniendo $u^{-1}$.

   $$t = u^{-1}(u) = 3u - \sin u + \frac{\cos(2u)}{2} - k \tag{13}$$

   Tenemos entonces

   $$u^{-1}\big(u(t) + 2\pi\big) = 3u(t) + 6\pi - \sin u(t) + \frac{\cos\big(2u(t)\big)}{2} - k = u^{-1}\big(u(t)\big) + 6\pi = t + 6\pi$$

   Y aplicando $u$ en ambos miembros, obtenemos lo requerido con $T = 6\pi$

   $$u(t) + 2\pi = u(t + 6\pi)$$

c) Muestra que $T$ es el periodo mínimo de la curva $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$x(t) = \big(\cos u(t), \sin u(t)\big)$$

Es claro que $T$ es un periodo de $x$, $x(t + T) = \big(\cos\big(u(t) + 2\pi\big), \sin\big(u(t) + 2\pi\big)\big) = \big(\cos u(t), \sin u(t)\big) = x(t)$.

Si $A > 0$ es un periodo de $x$, se tiene:

$$\cos u(t + A) = \cos u(t)$$
$$\sin u(t + A) = \sin u(t)$$

Por tanto $u(t + A) = u(t) + 2k(t)\pi$, con $k(t) \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos despejar

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}\big(u(t + A) - u(t)\big)$$

y vemos que $k$ es continua, luego constante por ser su imagen un conjunto discreto. Además, como $u$ es estrictamente creciente y $A > 0$, se tendrá $u(t + A) - u(t) > 0$, luego $k > 0$. Resumiendo:

$$u(t + A) = u(t) + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

Si $A < T$, por ser $u$ estrictamente creciente se llega a una contradicción:

$$u(t) + 2k\pi = u(t + A) < u(t + T) = u(t) + 2\pi$$

lo que impide que $k$ sea un entero positivo. De modo que se tendrá $A \geq T$, por lo que $T$ es el período mínimo.