

## Problemas de Análisis Funcional Avanzado

### Tema 2: Espacios localmente convexos.

#### Teorema de Krein-Milman

David Cabezas Berrido

#### Ejercicio 1:

Sea  $X$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ ,  $X'$  su dual algebraico y  $X_{\mathbb{R}}, (X')_{\mathbb{R}}$  los correspondientes espacios reales subyacentes. Prueba que la aplicación  $f \mapsto \text{Ref}$  es una biyección  $\mathbb{R}$ -lineal de  $(X')_{\mathbb{R}}$  en  $(X_{\mathbb{R}})'$ .

#### Solución:

Si  $f \in (X')_{\mathbb{R}}$ , en particular  $f \in X'$  (son idénticos como conjuntos), luego  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$  para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $x, y \in X$ . Podemos escribir  $f$  como  $f = \text{Ref} + i\text{Imf}$ , de modo que  $\text{Ref}(\lambda x + y) + i\text{Imf}(\lambda x + y) = \lambda(\text{Ref}(x) + i\text{Imf}(x)) + \text{Ref}(y) + i\text{Imf}(y)$  para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $x, y \in X$ . En el caso de que  $\lambda$  sea real tendremos  $\text{Ref}(\lambda x + y) = \lambda \text{Ref}(x) + \text{Ref}(y)$ , lo que demuestra ( $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $x, y \in X$  son arbitrarios) que  $\text{Ref} \in (X_{\mathbb{R}})'$ .

Dado  $g \in (X_{\mathbb{R}})'$ , tomando  $f(x) := g(x) - ig(ix)$  para cada  $x \in X$  se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= g(\lambda x + y) - ig(i\lambda x + iy) = \lambda g(x) + g(y) - i(\lambda g(ix) + g(iy)) \\ &= \lambda g(x) - \lambda ig(ix) + g(y) - ig(iy) = \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

para  $x, y \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Esto demuestra que  $f$  es  $\mathbb{R}$ -lineal, pero además

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i(-i)g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$$

para cada  $x \in X$ . Concluimos que  $f$  es  $(\mathbb{C})$ -lineal y por tanto  $f \in X' = (X')_{\mathbb{R}}$  (como conjuntos). Como es claro que  $\text{Ref} = g$ , deducimos que la aplicación es sobreyectiva.

La identidad  $\text{Imf}(x) = \text{Re}(-if(x)) = -\text{Ref}(ix)$  sugiere que  $f$  viene unívocamente determinado por su parte real, luego en realidad tenemos una biyección.

Finalmente, es claro que la función parte real es  $\mathbb{R}$ -lineal.

#### Ejercicio 2:

Sean  $X$  e  $Y$  espacios vectoriales y  $g : X \rightarrow Y$  una aplicación. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $g$  es afín.
- Existe una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $f : X \rightarrow Y$  y un vector  $b \in Y$  tales que  $g(x) = f(x) + b$  para todo  $x \in X$ .

#### Solución:

Supongamos primero (ii). Dados  $x, y \in X$  y  $t \in [0, 1]$ , tenemos

$$\begin{aligned} g((1-t)x + ty) &= f((1-t)x + ty) + b = (1-t)f(x) + tf(y) + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(f(x) + b) + t(f(y) + b) = (1-t)g(x) + tg(y), \end{aligned}$$

lo que demuestra que  $g$  es afín.

Suponiendo (i), tomamos  $f : X \rightarrow Y$  dada por  $f(x) = g(x) - g(0)$ . Sólo necesitamos probar que  $f$  es  $\mathbb{R}$ -lineal. Primero comprobamos que  $f$  preserva el producto por escalares de  $[0, 1]$ , sean  $x \in X$  y  $t \in [0, 1]$ :

$$f(tx) = g(tx) - g(0) = g(tx + (1-t)0) - g(0) = tg(x) + (1-t)g(0) - g(0) = tg(x) - tg(0) = tf(x).$$

Ahora vemos que  $f$  separa sumas. Si  $x, y \in X$ , tenemos

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g\left(\frac{2x+2y}{2}\right) - g(0) = \frac{1}{2}g(2x) + \frac{1}{2}g(2y) - \frac{1}{2}g(0) - \frac{1}{2}g(0) \\ &= \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(2y) = f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado lo anterior para cancelar los  $\frac{1}{2}$  de fuera con los 2 de dentro de  $f$ .

Utilizando la aditividad un número arbitrario de veces podemos concluir que  $f(nx) = nf(x)$  para cada  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $x \in X$ . Todo real positivo  $r \in \mathbb{R}^+$  se puede escribir como  $r = n + t$  con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $t \in [0, 1]$ . Por tanto,

$$f(rx) = f(nx + tx) = f(nx) + f(tx) = nf(x) + tf(x) = rf(x),$$

lo que demuestra que  $f$  preserva homotecias de razón positiva. Finalmente, la igualdad

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

lleva a  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in X$ . Concluimos así que  $f$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.

### Ejercicio 3:

Sea  $X$  un espacio vectorial,  $n$  un natural,  $B_j$  con subconjunto convexo de  $X$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  y  $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$ . Prueba que

$$\text{co}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j x_j : t_j \in [0, 1], x_j \in B_j \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

Observa como consecuencia que si  $b_1, \dots, b_n$  son elementos de  $X$ ,

$$\text{co}(\{b_1, \dots, b_n\}) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j b_j : t_j \in [0, 1] \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

### Solución:

La segunda igualdad es un caso particular en la que cada  $B_j$  se reduce a un punto, por lo que basta con demostrar la primera. Además, la inclusión hacia la derecha ( $\supset$ ) es trivial por la Proposición 3.1.1, ya que cada  $B_j$  está contenido en  $B$ .

Dado  $x \in \text{co}(B)$ , podemos escribir  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$  con  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_i \in [0, 1]$ ,  $y_i \in B$  para cada  $i = 1, \dots, m$  (Proposición 3.1.1) y  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Nuestro objetivo es escribir  $x$  con  $n$  sumandos cada uno en un conjunto  $B_j$  y manteniendo la misma condición sobre los pesos (deben ser no negativos y sumar 1).

Supongamos que hubiese dos elementos  $y_i, y_{i'} \in B$  con  $i, i' \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i \neq i'$ , y  $y_i, y_{i'} \in B_j$  para algún  $j = 1, \dots, n$ . Reordenando y renombrando si es preciso, podemos suponer que son  $y_{m-1}, y_m \in B_j$ . Por la convexidad de  $B_j$  tenemos

$$y := \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_{m-1} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_m \in B_j \subset B,$$

y podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i y_i + (\lambda_{m-1} + \lambda_m) y.$$

Hemos expresado  $x$  utilizando un sumando menos y es obvio que se sigue cumpliendo la condición sobre los nuevos puntos y pesos.

Podemos repetir este proceso siempre que existan dos índices distintos tales que los puntos correspondientes están en un mismo  $B_j$ , de modo que en un número finito de pasos llegaríamos a expresar  $x$  como una combinación convexa en la que cada  $y_i$  pertenece a un único  $B_i$ , lo que forzaría a que esa combinación tuviese como máximo  $n$  sumandos. En caso de haber menos, podríamos añadir nuevos elementos a la combinación otorgándoles peso 0, de forma que todos los  $B_j$  tengan (como mínimo) un representante.

**Ejercicio 4:**

Sea  $X$  un espacio vectorial y  $\mathcal{B}$  una familia no vacía de subconjuntos absorbentes y equilibrados de  $X$  de modo que

- i)  $\forall U, V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V.$
- ii)  $\forall U \in \mathcal{B}, \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U.$

Prueba que existe una única topología vectorial en  $X$  con respecto a la cual  $\mathcal{B}$  es una base de entornos de cero.

**Solución:**

Definimos la topología  $\mathcal{T}$  como sigue. Un conjunto  $A \subset X$  será abierto cuando para cada  $a \in A$  exista  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $a + U \subset A$ . Es claro que la topología  $\mathcal{T}$  contiene al vacío, al total y que es estable por uniones arbitrarias. Si  $A, B \in \mathcal{T}$  y  $x \in A \cap B$ , sabemos que existen  $U, V \in \mathcal{B}$  cumpliendo  $x + U \subset A$  y  $x + V \subset B$ . La propiedad (i) nos da un  $W \in \mathcal{B}$  tal que  $W \subset U \cap V$ , luego  $x + W \subset A \cap B$  y  $A \cap B \in \mathcal{T}$ . Probamos así que  $\mathcal{T}$  es estable para intersecciones finitas y concluimos que es una topología.

Primero comprobaremos que efectivamente los elementos de  $\mathcal{B}$  son entornos de cero en dicha topología. Fijamos  $U \in \mathcal{B}$  y bastará comprobar que el conjunto  $A = \{x \in X : \exists V \in \mathcal{B}, x + V \subset U\}$  es abierto, puesto que  $0 \in A \subset U$ . Sea  $x \in A$ , existe  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $x + V \subset U$ . Por (ii) podemos tomar  $W \in \mathcal{B}$  tal que  $W + W \subset V$ , y la inclusión  $(x + W) + W \subset U$  asegura que  $x + W \subset A$ , luego  $A \in \mathcal{T}$ . Es claro que cualquier entorno de cero contiene un elemento de  $\mathcal{B}$ , luego  $\mathcal{B}$  es base de entornos de cero para  $\mathcal{T}$ . Además, es obvio que la definición de  $\mathcal{T}$  es la mínima para que  $\mathcal{B}$  sea base de entornos de cero, lo que garantiza la unicidad.

Veamos ahora que  $\mathcal{T}$  es una topología vectorial. Fijamos un punto  $(x, y) \in X \times X$ . Cualquier entorno de  $x + y$  contiene un conjunto de la forma  $x + y + U$  con  $U \in \mathcal{B}$ , tomamos  $V \in \mathcal{B}$  tal que  $V + V \subset U$ , que existe por (ii). Los conjuntos  $x + V$  e  $y + V$  son entornos de  $x$  e  $y$  respectivamente, y además  $(x + V) + (y + V) \subset x + y + U$ . Esto prueba la continuidad de la suma.

Para el producto por escalares fijamos un punto  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$ . Cualquier entorno del punto  $\lambda x$  contendrá un conjunto de la forma  $\lambda x + U$  con  $U \in \mathcal{B}$ . Asumiré que he encontrado  $V \in \mathcal{B}$  y  $\varepsilon > 0$  tales que  $(\lambda + \varepsilon \mathbb{D})(x + V) \subset \lambda x + U$  y veré qué tienen que cumplir. En caso de existir dichos  $V$  y  $\varepsilon$  quedará probada la continuidad del producto por escalares y concluiremos la demostración.

$$(\lambda + \varepsilon \mathbb{D})(x + V) \subset \lambda x + \lambda V + \varepsilon \mathbb{D}x + \varepsilon \mathbb{D}V,$$

luego necesito  $\lambda V + \varepsilon \mathbb{D}x + \varepsilon \mathbb{D}V \subset U$ . Utilizando (ii) inductivamente puedo conseguir  $V \in \mathcal{B}$  cumpliendo  $nV + V + V \subset \sum_{j=1}^{n+2} V \subset U$  para  $n \geq |\lambda|$ . Por ser  $V$  equilibrado tengo

$$\lambda V = \lambda \mathbb{D}V = |\lambda| \mathbb{D}V \subset n \mathbb{D}V = nV.$$

Por otra parte, si tomo  $\varepsilon \leq 1$  y uso que  $V$  es equilibrado obtengo  $\varepsilon \mathbb{D}V \subset \mathbb{D}V = V$ . Sólo falta ver si  $\varepsilon \mathbb{D}x \subset V$ . Como  $V$  es absorbente tengo  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $rx \in V$ , y siempre que  $\varepsilon \leq r$  tendremos

$$\varepsilon \mathbb{D}x \subset r \mathbb{D}x = \mathbb{D}rx \subset \mathbb{D}V = V.$$

**Ejercicio 5:**

Sea  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  una pseudonorma. Probar

- a)  $\varphi(0) = 0$ .
- b)  $\varphi(x) \geq 0$  para todo  $x \in X$ .
- c) Toda seminorma es pseudonorma.
- d) Existe una única topología vectorial  $\tau$  en  $X$  con respecto a la cual la familia  $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$  es base de entornos de cero, donde  $U_\varepsilon = \{x \in X : \varphi(x) < \varepsilon\}$  para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ .

**Solución:**

- a) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene  $\varphi(0) = \varphi(\frac{1}{n}0)$ . Por tanto,  $\varphi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\frac{1}{n}0) = 0$ , donde hemos usado (i) con  $x = 0$ .
- b) Tomando  $\alpha = -1$  en (iii) obtenemos  $\varphi(-x) \leq \varphi(x)$ , pero haciendo lo mismo para  $-x$  llegamos a  $\varphi(x) = \varphi((-1)(-x)) \leq \varphi(-x)$ , luego  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  para cada  $x \in X$ . De (a) y (ii) deducimos entonces que  $0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) \leq \varphi(x) + \varphi(-x) = 2\varphi(x)$  para cada  $x \in X$ .
- c) Supongamos ahora que  $\psi$  es una seminorma. La propiedad (ii) ya la cumple una seminorma. La propiedad  $\psi(\frac{1}{n} \cdot x) = \frac{1}{n}\psi(x)$  deja claro que  $\psi(\frac{1}{n} \cdot x)$  converge a 0 cuando  $n$  tiende a infinito, obteniendo así (i). Para (iii) usamos simplemente  $\psi(\alpha x) = |\alpha|\psi(x) \leq \psi(x)$ , ya que  $|\alpha| \leq 1$ . Por tanto,  $\psi$  es una pseudonorma.
- d) En vista de lo probado en el Ejercicio 4, basta comprobar que la familia  $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$  está formada por subconjuntos absorbentes y equilibrados de  $X$  que cumplen
- 1)  $\forall U, V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$ .
  - 2)  $\forall U \in \mathcal{B}, \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$ .

Empezamos probando que son equilibrados. Dado  $x \in U_\varepsilon \in \mathcal{B}$  y  $\lambda \in \mathbb{D}$ , tenemos  $\varphi(\lambda x) \leq \varphi(x) < \varepsilon$ , luego  $\lambda x \in U_\varepsilon$ . Por tanto,  $\mathbb{D}U_\varepsilon \subset U_\varepsilon$ .

Para ver que son absorbentes, sea  $U_\varepsilon \in \mathcal{B}$ . Dado cualquier  $x \in X$ , la condición (i) garantiza la existencia de  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\varphi(\frac{1}{n}x) < \varepsilon$ , luego  $\frac{1}{n}x \in U_\varepsilon$  y  $x \in nU_\varepsilon$ .

Dados ahora  $U_\varepsilon, U_\delta \in \mathcal{B}$ , tomando  $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$  es claro que  $U_\gamma \subset U_\varepsilon \cap U_\delta$ , lo que prueba (1).

Sólo falta probar (2). Dado  $U_\varepsilon \in \mathcal{B}$ , tomamos  $\delta = \varepsilon/2$ . Para cada  $x, y \in U_\delta$  tenemos  $\varphi(x), \varphi(y) < \delta$ , y la propiedad (ii) nos dice que  $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) < \delta + \delta = \varepsilon$ . Por tanto,  $x + y \in U_\varepsilon$ , y la arbitrariedad de  $x$  e  $y$  nos permite deducir que  $U_\delta \subset U_\varepsilon$ .