Problemas de Análisis Funcional Avanzado

Tema 2: Espacios localmente convexos.
Teorema de Krein-Milman

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1:

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, X' su dual algebraico y $X_{\mathbb{R}}$, $(X')_{\mathbb{R}}$ los correspondientes espacios reales subyacentes. Prueba que la aplicación $f \mapsto \mathrm{Re}f$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $(X')_{\mathbb{R}}$ en $(X_{\mathbb{R}})'$.

Solución:

Si $f \in (X')_{\mathbb{R}}$, en particular $f \in X'$ (son idénticos como conjuntos), luego $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. Podemos escribir f como $f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$, de modo que $\mathrm{Re}f(\lambda x + y) + i\mathrm{Im}f(\lambda x + y) = \lambda(\mathrm{Re}f(x) + i\mathrm{Im}f(x)) + \mathrm{Re}f(y) + i\mathrm{Im}f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. En el caso de que λ sea real tendremos $\mathrm{Re}f(\lambda x + y) = \lambda\mathrm{Re}f(x) + \mathrm{Re}f(y)$, lo que demuestra ($\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$ son arbitrarios) que $\mathrm{Re}f \in (X_{\mathbb{R}})'$.

Dado $g \in (X_{\mathbb{R}})'$, tomando $f(x) := g(x) - ig(ix)$ para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= g(\lambda x + y) - ig(i\lambda x + iy) = \lambda g(x) + g(y) - i(\lambda g(ix) + g(iy)) \\ &= \lambda g(x) - \lambda i g(ix) + g(y) - ig(iy) = \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto demuestra que f es $\mathbb{R}$-lineal, pero además

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i(-i)g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$$

para cada $x \in X$. Concluimos que f es ($\mathbb{C}$-)lineal y por tanto $f \in X' = (X')_{\mathbb{R}}$ (como conjuntos). Como es claro que $\mathrm{Re}f = g$, deducimos que la aplicación es sobreyectiva.

La identidad $\mathrm{Im}f(x) = \mathrm{Re}(-if(x)) = -\mathrm{Re}f(ix)$ sugiere que f viene unívocamente determinado por su parte real, luego en realidad tenemos una biyección.

Finalmente, es claro que la función parte real es $\mathbb{R}$-lineal.

Ejercicio 2: