**Problemas de Análisis Funcional Avanzado**

**Tema 2: Espacios localmente convexos.**
**Teorema de Krein-Milman**

David Cabezas Berrido

**Ejercicio 1:**

Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, $X'$ su dual algebraico y $X_{\mathbb{R}}$, $(X')_{\mathbb{R}}$ los correspondientes espacios reales subyacentes. Prueba que la aplicación $f \mapsto \mathrm{Re} f$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $(X')_{\mathbb{R}}$ en $(X_{\mathbb{R}})'$.

**Solución:**

Si $f \in (X')_{\mathbb{R}}$, en particular $f \in X'$ (son idénticos como conjuntos), luego $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. Podemos escribir $f$ como $f = \mathrm{Re} f + i \mathrm{Im} f$, de modo que $\mathrm{Re} f(\lambda x + y) + i \mathrm{Im} f(\lambda x + y) = \lambda(\mathrm{Re} f(x) + i \mathrm{Im} f(x)) + \mathrm{Re} f(y) + i \mathrm{Im} f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. En el caso de que $\lambda$ sea real tendremos $\mathrm{Re} f(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{Re} f(x) + \mathrm{Re} f(y)$, lo que demuestra ($\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$ son arbitrarios) que $\mathrm{Re} f \in (X_{\mathbb{R}})'$.

Dado $g \in (X_{\mathbb{R}})'$, tomando $f(x) := g(x) - i g(ix)$ para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= g(\lambda x + y) - i g(i\lambda x + iy) = \lambda g(x) + g(y) - i(\lambda g(ix) + g(iy)) \\ &= \lambda g(x) - \lambda i g(ix) + g(y) - i g(iy) = \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto demuestra que $f$ es $\mathbb{R}$-lineal, pero además

$$f(ix) = g(ix) - i g(-x) = i(-i) g(ix) + i g(x) = i(g(x) - i g(ix)) = i f(x)$$

para cada $x \in X$. Concluimos que $f$ es ($\mathbb{C}$-)lineal y por tanto $f \in X' = (X')_{\mathbb{R}}$ (como conjuntos). Como es claro que $\mathrm{Re} f = g$, deducimos que la aplicación es sobreyectiva.

La identidad $\mathrm{Im} f(x) = \mathrm{Re}(-i f(x)) = -\mathrm{Re} f(ix)$ sugiere que $f$ viene unívocamente determinado por su parte real, luego en realidad tenemos una biyección.

Finalmente, es claro que la función parte real es $\mathbb{R}$-lineal.

**Ejercicio 2:**

Sean $X$ e $Y$ espacios vectoriales y $g : X \to Y$ una aplicación. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $g$ es afín.

ii) Existe una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f : X \to Y$ y un vector $b \in Y$ tales que $g(x) = f(x) + b$ para todo $x \in X$.

**Solución:**

Supongamos primero (ii). Dados $x, y \in X$ y $t \in [0, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned} g((1-t)x + ty) &= f((1-t)x + ty) + b = (1-t) f(x) + t f(y) + (1-t) b + t b \\ &= (1-t)(f(x) + b) + t(f(y) + b) = (1-t) g(x) + t g(y), \end{aligned}$$

lo que demuestra que $g$ es afín.

Suponiendo (i), tomamos $f : X \to Y$ dada por $f(x) = g(x) - g(0)$. Sólo necesitamos probar que $f$ es $\mathbb{R}$-lineal. Primero comprobamos que $f$ preserva el producto por escalares de $[0, 1]$, sean $x \in X$ y $t \in [0, 1]$:

$$f(tx) = g(tx) - g(0) = g(tx + (1-t)0) - g(0) = t g(x) + (1-t) g(0) - g(0) = t g(x) - t g(0) = t f(x).$$

Ahora vemos que $f$ separa sumas. Si $x, y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g\Big(\frac{2x + 2y}{2}\Big) - g(0) = \frac{1}{2} g(2x) + \frac{1}{2} g(2y) - \frac{1}{2} g(0) - \frac{1}{2} g(0) \\ &= \frac{1}{2} f(2x) + \frac{1}{2} f(2y) = f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado lo anterior para cancelar los $\frac{1}{2}$ de fuera con los 2 de dentro de $f$.

Utilizando la aditividad un número arbitrario de veces podemos concluir que $f(nx) = nf(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Todo real positivo $r \in \mathbb{R}^+$ se puede escribir como $r = n + t$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in [0,1]$. Por tanto,

$$f(rx) = f(nx + tx) = f(nx) + f(tx) = nf(x) + tf(x) = rf(x),$$

lo que demuestra que $f$ preserva homotecias de razón positiva. Finalmente, la igualdad

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

lleva a $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in X$. Concluimos así que $f$ es $\mathbb{R}$-lineal.

**Ejercicio 3:**

Sea $X$ un espacio vectorial, $n$ un natural, $B_j$ con subconjunto convexo de $X$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Prueba que

$$\operatorname{co}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j x_j : t_j \in [0,1],\ x_j \in B_j\ \forall j = 1, \ldots, n,\ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}.$$

Observa como consecuencia que si $b_1, \ldots, b_n$ son elementos de $X$,

$$\operatorname{co}(\{b_1, \ldots, b_n\}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j b_j : t_j \in [0,1]\ \forall j = 1, \ldots, n,\ \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}.$$

**Solución:**

La segunda igualdad es un caso particular en la que cada $B_j$ se reduce a un punto, por lo que basta con demostrar la primera. Además, la inclusión hacia la derecha ($\supset$) es trivial por la Proposición 3.1.1, ya que cada $B_j$ está contenido en $B$.

Dado $x \in \operatorname{co}(B)$, podemos escribir $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i$ con $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in [0,1]$, $y_i \in B$ para cada $i = 1, \ldots, m$ (Proposición 3.1.1) y $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Nuestro objetivo es escribir $x$ con $n$ sumandos cada uno en un conjunto $B_j$ y manteniendo la misma condición sobre los pesos (deben ser no negativos y sumar 1).

Supongamos que hubiese dos elementos $y_i, y_{i'} \in B$ con $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq i'$, y $y_i, y_{i'} \in B_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$. Reordenando y renombrando si es preciso, podemos suponer que son $y_{m-1}, y_m \in B_j$. Por la convexidad de $B_j$ tenemos

$$y := \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_{m-1} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_m \in B_j \subset B,$$

y podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i y_i + (\lambda_{m-1} + \lambda_m) y.$$

Hemos expresado $x$ utilizando un sumando menos y es obvio que se sigue cumpliendo la condición sobre los nuevos puntos y pesos.

Podemos repetir este proceso siempre que existan dos índices distintos tales que los puntos correspondientes están en un mismo $B_j$, de modo que en un número finito de pasos llegaríamos a expresar $x$ como una combinación convexa en la que cada $y_i$ pertenece a un único $B_i$, lo que forzaría a que esa combinación tuviese como máximo $n$ sumandos. En caso de haber menos, podríamos añadir nuevos elementos a la combinación otorgándoles peso 0, de forma que todos los $B_j$ tengan (como mínimo) un representante.

**Ejercicio 4:**

Sea $X$ un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos absorbentes y equilibrados de $X$ de modo que

i) $\forall U, V \in \mathcal{B},\ \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$.

ii) $\forall U \in \mathcal{B},\ \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$.

Prueba que existe una única topología vectorial en $X$ con respecto a la cual $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero.

**Solución:**

Definimos la topología $\mathcal{T}$ como sigue. Un conjunto $A \subset X$ será abierto cuando para cada $a \in A$ exista $U \in \mathcal{B}$ tal que $a + U \subset A$. Es claro que la topología $\mathcal{T}$ contiene al vacío, al total y que es estable por uniones arbitrarias. Si $A, B \in \mathcal{T}$ y $x \in A \cap B$, sabemos que existen $U, V \in \mathcal{B}$ cumpliendo $x + U \subset A$ y $x + V \subset B$. La propiedad (i) nos da un $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$, luego $x + W \subset A \cap B$ y $A \cap B \in \mathcal{T}$. Probamos así que $\mathcal{T}$ es estable para intersecciones finitas y concluimos que es una topología.

Primero comprobaremos que efectivamente los elementos de $\mathcal{B}$ son entornos de cero en dicha topología. Fijamos $U \in \mathcal{B}$ y bastará comprobar que el conjunto $A = \{x \in X : \exists V \in \mathcal{B},\ x + V \subset U\}$ es abierto, puesto que $0 \in A \subset U$. Sea $x \in A$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset U$. Por (ii) podemos tomar $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$, y la inclusión $(x + W) + W \subset U$ asegura que $x + W \subset A$, luego $A \in \mathcal{T}$. Es claro que cualquier entorno de cero contiene un elemento de $\mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}$ es base de entornos de cero para $\mathcal{T}$. Además, es obvio que la definición de $\mathcal{T}$ es la mínima para que $\mathcal{B}$ sea base de entornos de cero, lo que garantiza la unicidad.

Veamos ahora que $\mathcal{T}$ es una topología vectorial. Fijamos un punto $(x, y) \in X \times X$. Cualquier entorno de $x + y$ contiene un conjunto de la forma $x + y + U$ con $U \in \mathcal{B}$, tomamos $V \in \mathcal{B}$ tal que $V + V \subset U$, que existe por (ii). Los conjuntos $x + V$ e $y + V$ son entornos de $x$ e $y$ respectivamente, y además $(x + V) + (y + V) \subset x + y + U$. Esto prueba la continuidad de la suma.

Para el producto por escalares fijamos un punto $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$. Cualquier entorno del punto $\lambda x$ contendrá un conjunto de la forma $\lambda x + U$ con $U \in \mathcal{B}$. Asumiré que he encontrado $V \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(\lambda + \varepsilon\mathbb{D})(x + V) \subset \lambda x + U$ y veré qué tienen que cumplir. En caso de existir dichos $V$ y $\varepsilon$ quedará probada la continuidad del producto por escalares y concluiremos la demostración.

$$(\lambda + \varepsilon\mathbb{D})(x + V) \subset \lambda x + \lambda V + \varepsilon\mathbb{D}x + \varepsilon\mathbb{D}V,$$

luego necesito $\lambda V + \varepsilon\mathbb{D}x + \varepsilon\mathbb{D}V \subset U$. Utilizando (ii) inductivamente puedo conseguir $V \in \mathcal{B}$ cumpliendo $nV + V + V \subset \sum_{j=1}^{n+2} V \subset U$ para $n \geq |\lambda|$. Por ser $V$ equilibrado tengo

$$\lambda V = \lambda\mathbb{D}V = |\lambda|\mathbb{D}V \subset n\mathbb{D}V = nV.$$

Por otra parte, si tomo $\varepsilon \leq 1$ y uso que $V$ es equilibrado obtengo $\varepsilon\mathbb{D}V \subset \mathbb{D}V = V$. Sólo falta ver si $\varepsilon\mathbb{D}x \subset V$. Como $V$ es absorbente tengo $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $rx \in V$, y siempre que $\varepsilon \leq r$ tendremos

$$\varepsilon\mathbb{D}x \subset r\mathbb{D}x = \mathbb{D}rx \subset \mathbb{D}V = V.$$

**Ejercicio 5:**

Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una pseudonorma. Probar

a) $\varphi(0) = 0$.

b) $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

c) Toda seminorma es pseudonorma.

d) Existe un única topología vectorial $\tau$ en $X$ con respecto a la cual la familia $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ es base de entornos de cero, donde $U_\varepsilon = \{x \in X : \varphi(x) < \varepsilon\}$ para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

**Solución:**

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\varphi(0) = \varphi\left(\frac{1}{n}0\right)$. Por tanto, $\varphi(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}0\right) = 0$, donde hemos usado (i) con $x = 0$.

b) Tomando $\alpha = -1$ en (iii) obtenemos $\varphi(-x) \leq \varphi(x)$, pero haciendo lo mismo para $-x$ llegamos a $\varphi(x) = \varphi((-1)(-x)) \leq \varphi(-x)$, luego $\varphi(x) = \varphi(-x)$ para cada $x \in X$. De (a) y (ii) deducimos entonces que $0 = \varphi(0) = \varphi(x - x) \leq \varphi(x) + \varphi(-x) = 2\varphi(x)$ para cada $x \in X$.

c) Supongamos ahora que $\psi$ es una seminorma. La propiedad (ii) ya la cumple una seminorma. La propiedad $\psi\left(\frac{1}{n} \cdot x\right) = \frac{1}{n}\psi(x)$ deja claro que $\psi\left(\frac{1}{n} \cdot x\right)$ converge a 0 cuando $n$ tiende a infinito, obteniendo así (i). Para (iii) usamos simplemente $\psi(\alpha x) = |\alpha|\psi(x) \leq \psi(x)$, ya que $|\alpha| \leq 1$. Por tanto, $\psi$ es una pseudonorma.

d) En vista de lo probado en el Ejercicio 4, basta comprobar que la familia $\mathcal{B} = \{U_\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ está formada por subconjuntos absorbentes y equilibrados de $X$ que cumplen

   1) $\forall U, V \in \mathcal{B},\ \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$.

   2) $\forall U \in \mathcal{B},\ \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$.

   Empezamos probando que son equilibrados. Dado $x \in U_\varepsilon \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{D}$, tenemos $\varphi(\lambda x) \leq \varphi(x) < \varepsilon$, luego $\lambda x \in U_\varepsilon$. Por tanto, $\mathbb{D}U_\varepsilon \subset U_\varepsilon$.

   Para ver que son absorbentes, sea $U_\varepsilon \in \mathcal{B}$. Dado cualquier $x \in X$, la condición (i) garantiza la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi\left(\frac{1}{n}x\right) < \varepsilon$, luego $\frac{1}{n}x \in U_\varepsilon$ y $x \in nU_\varepsilon$.

   Dados ahora $U_\varepsilon, U_\delta \in \mathcal{B}$, tomando $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$ es claro que $U_\gamma \subset U_\varepsilon \cap U_\delta$, lo que prueba (1).

   Sólo falta probar (2). Dado $U_\varepsilon \in \mathcal{B}$, tomamos $\delta = \varepsilon/2$. Para cada $x, y \in U_\delta$ tenemos $\varphi(x), \varphi(y) < \delta$, y la propiedad (ii) nos dice que $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y) < \delta + \delta = \varepsilon$. Por tanto, $x + y \in U_\varepsilon$, y la arbitrariedad de $x$ e $y$ nos permite deducir que $U_\delta \subset U_\varepsilon$.

**Ejercicio 6:**

Sea $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia no vacía de pseudonormas en un espacio vectorial $X$. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $F \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$, sea $U_{\varepsilon,F} = \{x \in X : \varphi_\lambda(x) < \varepsilon\ \forall \lambda \in F\}$. Prueba que existe una única topología vectorial $\tau$ en $X$ tal que la familia $\mathcal{B} = \{U_{\varepsilon,F} : \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ F \in \mathcal{P}_f(\Lambda)\}$.

**Solución:**

De nuevo en vista de lo probado en el Ejercicio 4, basta comprobar que la familia $\mathcal{B}$ está formada por subconjuntos absorbentes y equilibrados de $X$ que cumplen

1) $\forall U, V \in \mathcal{B},\ \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$.

2) $\forall U \in \mathcal{B},\ \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$.

Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $F \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$, es claro que se tiene

$$U_{\varepsilon,F} = \bigcap_{\lambda \in F} U_{\varepsilon,\lambda} = \bigcap_{\lambda \in F} \{x \in X : \varphi_\lambda(x) < \varepsilon\}.$$

El Ejercicio 5d asegura que para cada $\lambda \in \Lambda$, los conjuntos $U_{\varepsilon,\lambda}$ con $\varepsilon > 0$ cumplen las condiciones requeridas. Nuestra familia $\mathcal{B}$ está formada por intersecciones finitas de subconjuntos de esta forma. Por tanto, basta comprobar que las propiedades absorbente y equilibrado se preservan por intersecciones finitas. Podemos suponer intersecciones de dos elementos, ya que un razonamiento inductivo muy sencillo extiende el razonamiento a intersecciones de cualquier número de subconjuntos.

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos equilibrados, tenemos $\mathbb{D}(A \cap B) \subset \mathbb{D}A \cap \mathbb{D}B = A \cap B$. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{D}$ y $a \in A \cap B$, se tiene $\alpha a \in \mathbb{D}A$ y $\alpha a \in \mathbb{D}B$. Esto prueba que la intersección de equilibrados lo sigue siendo.

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos absorbentes y equilibrados, para cada $x \in X$ tenemos $rx \in A$ y $sx \in B$ para algunos $r, s \in \mathbb{R}^+$. Sea $\rho = \min\{r, s\}$, tenemos

$$\rho x = \frac{\rho}{r} rx \in \mathbb{D}A = A,$$

$$\rho x = \frac{\rho}{s} sx \in \mathbb{D}B = B,$$

luego $\rho x \in A \cap B$. Por tanto, $A \cap B$ es absorbente.

Dados $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ y $F, G \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$, tomando $\gamma = \min\{\varepsilon, \delta\}$ y $H = G \cup F$, se comprueba rutinariamente que $U_{\gamma,H} \subset U_{\varepsilon,F} \cap U_{\delta,G}$. Por tanto, se satisface (1).

Finalmente, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $F \in \mathcal{P}_f(\Lambda)$, se tiene que $U_{\varepsilon/2,F} + U_{\varepsilon/2,F} \subset U_{\varepsilon,F}$. En efecto, para cada $\lambda \in F$, $x, y \in U_{\varepsilon/2,F}$, tenemos $\varphi_\lambda(x + y) \leq \varphi_\lambda(x) + \varphi_\lambda(y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Obtenemos así (2).

**Ejercicio 7:**

Sea $n$ un natural, $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ espacios topológicos y, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $f_j : X_j \to Y_j$ una aplicación. Consideremos además la aplicación $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\big), \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1, \ldots, X_n.$$

Prueba que $f$ es continua (con respecto a las topologías producto de los espacios $X_1 \times \cdots \times X_n$ e $Y_1 \times \cdots \times Y_n$) si, y solo si, $f_j$ es continua para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

**Solución:**

Una implicación es clara. Como la topología producto hace continuas a las proyecciones, si $f$ es continua está claro que cada $f_j = \pi_j \circ f$ es continua para cada $j = 1, \ldots, n$. Donde $\pi_j : Y_1 \times \cdots \times Y_n \to Y_j$ denota la proyección natural sobre $Y_j$ para cada $j$.

Para la otra implicación, supongamos que cada $f_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ es continua. Tomemos un abierto $A$ de $Y_1 \times \cdots \times Y_n$, que podemos suponer básico: $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ con $A_j$ abierto de $Y_j$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Nuestro objetivo es demostrar que $f^{-1}(A)$ es abierto en $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Es claro que $f^{-1}(A) = f^{-1}(A_1 \times \cdots \times A_n) = f_1^{-1}(A_1) \times \cdots \times f_n^{-1}(A_n)$. Pero como cada $f_j$ es continua por hipótesis, obtenemos que $f_j^{-1}(A_j)$ es abierto en $X_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, $f^{-1}(A)$ es abierto en $X_1 \times \cdots \times X_n$ como producto de abiertos.