# Sucesiones en Topología

David Cabezas Berrido

## Introducción

Las sucesiones son herramientas muy usadas en el análisis matemático, tanto en la formulación y demostración de resultados como en la resolución de problemas concretos. Casi todas las propiedades analíticas y topológicas tienen una caracterización a través de sucesiones, como la continuidad de una función o la adherencia de un conjunto.

Sin embargo, su uso en espacios topológicos generales es menos frecuente. A continuación veremos algunos ejemplos de comportamientos indeseables de sucesiones en espacios topológicos por los cuales, a diferencia de los métricos, preferimos evitarlas. Así como las propiedades que deben cumplir los espacios para que las sucesiones sean una herramienta útil.

## Sucesiones en espacios topológicos

### Definición: Sucesión

Una **sucesión** es una aplicación que tiene como dominio el conjunto de los naturales y cuyo codominio es un conjunto cualquiera, en este caso trabajaremos sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow (X, \mathcal{T}) \\ n &\longrightarrow a_n \end{aligned}$$

La aplicación $a$ asigna a cada número natural un elemento $a_n$ cualquiera de $X$, a estos elementos se les llama términos de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siempre tiene infinitos términos (uno por cada elemento de $\mathbb{N}$), pero el conjunto de términos de la sucesión $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no tiene porqué ser infinito, ya que los términos pueden repetirse.

### Definición: Convergencia

Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **convergente** a un punto $x \in X$ cuando todo entorno de $x$ contiene todos los términos de la sucesión a partir de un $m \in \mathbb{N}$. Es decir:

$$\forall U \in \mathcal{U}^x,\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ cumpliendo } a_n \in U \ \ \forall n \geq m$$

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$, decimos que $x$ es el límite de la sucesión lo notaremos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$

En un espacio métrico $(E, d)$, podemos simplificar esta definición refiriéndonos a los entornos básicos. Tomamos $\beta^x = \{B(x, r) \mid r \in \mathbb{R}_0^+\}$ como base de entornos de un punto $x \in E$, la definición quedería de la siguiente forma:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ cumpliendo } a_n \in B(x, \varepsilon)\ \ \forall n \geq m$$

En un espacio métrico tenemos entornos tan pequeños como queramos, por lo que el hecho de que la sucesión converja nos permite "acercarnos" al punto $x$ tanto como queramos. Pero en general, esto no es posible, ya que existen espacios topológicos en los que los entornos están más limitados y permiten que la sucesión converja sin "acercarse" al límite. Además, en un espacio métrico, el límite de una sucesión convergente es único, propiedad que tampoco podemos asegurar en un espacio topológico general.

# Unicidad del límite

Ilustremos con un ejemplo como una sucesión puede tener, no sólo más de un límite, si no que converja a todos los puntos del espacio a la vez.

Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera, definimos la topología $\mathcal{T}_{x_0}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}_{x_0} = \{\mathcal{O} \subseteq X \mid x_0 \in \mathcal{O}\} \cup \emptyset$$

No es difícil comprobar que esta familia determina una topología en $X$. Se conoce como la topología del punto incluido.

Tomemos en $(X, \mathcal{T}_{x_0})$ la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como la constante $x_0$. Es decir, $x_n = x_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Probemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow y \ \ \forall y \in X$.

Sea $y \in X$ arbitrario, todo entorno $U$ de $y$ debe contener un abierto $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_{x_0}$ cumpliendo $y \in \mathcal{O} \subseteq U$. Como $\mathcal{O}$ es abierto, entonces $x_0 \in \mathcal{O}$ y por tanto $x_n \in \mathcal{O} \subseteq U \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow y$ como queríamos.

Ante semejante problema, es natural preguntarse qué propiedades tiene que cumplir un espacio para que toda sucesión converjente de elementos del mismo tenga un único límite.

## Definición: Espacio de Hausdorff

Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio de Hausdorff** (o $T_2$) si satisface la **propiedad de Hausdorff** (también llamada **axioma de separación** $T_2$). Esto es, para cada par de puntos distintos de $X$, existen entornos disjuntos de cada uno.

$$\forall x, y \in X \text{ cumpliendo } x \neq y,\ \exists U \in \mathcal{U}^x, V \in \mathcal{U}^y \text{ con } U \cap V = \emptyset$$

Cuando Felix Hausdorff enunció la definición de espacio topológico en 1914, consideró esta propiedad como un cuarto axioma que todo espacio topológico debía cumplir. Aunque posteriormente se modificó la definición debido a que algunos espacios que no poseían esta propiedad también eran objeto de interés entre los topólogos.

A continuación probaremos que **en un espacio de Hausdorff, el límite de una sucesión convergente es único.**

Consideremos en el espacio de Hausdorff $(X, \mathcal{T})$, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumpliendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x \in X$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow y \in X$. Llegaremos a un absurdo suponiendo $x \neq y$.

Como $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, $\exists U \in \mathcal{U}^x, V \in \mathcal{U}^y$ con $U \cap V = \emptyset$. Como la sucesión converge a $x$ se tiene

$$\exists m_x \in \mathbb{N} \text{ cumpliendo } a_n \in U \ \ \forall n \geq m_x$$

Del mismo modo, como la sucesión también converge a $y$ obtenemos

$$\exists m_y \in \mathbb{N} \text{ cumpliendo } a_n \in V \ \ \forall n \geq m_y$$

Tomamos $M = \max\{m_x, m_y\} \in \mathbb{N}$, entonces $a_M \in U \cap V$, llegando así a una contradicción ya que $U \cap V = \emptyset$.

# Caracterización de la adherencia de un conjunto

## Definición: Adherencia

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, consideramos un subconjunto $A \subseteq X$. Se llama adherencia o cierre de $A$ al conjunto

$$\{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}^x,\ U \cap A \neq \emptyset\}$$

y lo notamos $\overline{A}$.