

Relación 1

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1. Abreviamos $\Sigma = \Sigma_X$

- a) Y sigue una DNM con vector de medias α y matriz de covarianzas $D\Sigma D' + \sigma^2 I$, utilizaremos la función característica para comprobarlo.

$$\Phi_Y(t) = E[e^{it'(\alpha + DX + Z)}] = E[e^{it'\alpha} e^{it'DX} e^{it'Z}],$$

sacamos la constante y utilizamos que $e^{it'DX}$ y $e^{it'Z}$ son independientes (funciones medibles de vectores aleatorios independientes) para separar las esperanzas,

$$\Phi_Y(t) = E[e^{it'\alpha} e^{it'DX} e^{it'Z}] = e^{it'\alpha} E[e^{it'DX}] E[e^{it'Z}] = e^{it'\alpha} \Phi_X(D't) \Phi_Z(t).$$

Sustituimos las funciones características de X y Z para obtener lo que queríamos:

$$\Phi_Y(t) = e^{it'\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{2}t'D\Sigma D't\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}t'\sigma^2 I t\right\} = \exp\left\{it'\alpha - \frac{1}{2}t'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)t\right\}.$$

Por tanto, $Y \sim N_p(\alpha, D\Sigma D' + \sigma^2 I)$.

- b) Utilizando que X y Z son independientes y siguen ambas una DNM no singular, obtenemos para cada $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+r}$

$$\begin{aligned} \Phi_{\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}}\left(\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right) &= \Phi_Z(t_1) \Phi_X(t_2) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t_1'\sigma^2 I t_1\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2}t_2'\Sigma t_2\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(\sigma^2 t_1' t_1 + t_2' \Sigma t_2)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} t_1' & t_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 I & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} \sim N_{p+r}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma^2 I & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}\right)$.

Utilizando, el Resultado para transformaciones lineales de rango máximo para DNM caso no singular, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + DX + Z \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

sigue una distribución normal multivariante con vector de medias $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ y matriz de co-

$$\text{varianzas} \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 I & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D' & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\Sigma D' + \sigma^2 I & D\Sigma \\ \Sigma D' & \Sigma \end{pmatrix}.$$

- c) $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ sigue una DNM con matriz de covarianzas definida positiva, usamos por tanto el Resultado 3 de DNM no singular. Obtenemos que la distribución condicionada de X a $Y = y$ sigue una DNM de la forma:

$$N_r\left(0 + \Sigma D'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)^{-1}(y - \alpha), \Sigma - \Sigma D'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)^{-1}D\Sigma\right)$$

Así, que $E[X|Y] = \Sigma D'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)^{-1}(Y - \alpha) = \Sigma D'\Sigma_Y^{-1}(Y - \alpha)$

- d) Utilizamos el mismo resultado, pero cambiamos los papeles de X e Y , obteniendo que Y condicionado a X sigue una DNM con vector de medias

$$\alpha + D\Sigma\Sigma^{-1}(X - 0)$$

y matriz de covarianzas

$$D\Sigma D' + \sigma^2 I - D\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma D'$$

Simplificando, obtenemos

$$Y|X \sim N_p\left(\alpha + DX, \sigma^2 I\right)$$

Ejercicio 2. Especificaremos los matices que cambian en los argumentos anteriores.

- a) El razonamiento es también válido para $\Sigma \geq 0$.
- b) Aunque transformación lineal que utilizamos sigue siendo de rango máximo, el Resultado sobre transformaciones lineales de rango no necesariamente máximo proporciona las mismas conclusiones también en el caso de que $\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}$ siga una DNM con matriz de covarianzas semidefinida positiva, lo que ocurre cuando Σ sólo es definida positiva.
- c) Ahora (caso singular) el resultado sobre condicionamiento nos da:

$$X|Y \sim N_r\left(0 + \Sigma D'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)^-(y - \alpha), \Sigma - \Sigma D'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)^-D\Sigma\right)$$

Ahora probaremos que $\Sigma_Y = D\Sigma D' + \sigma^2 I$ es regular: si $y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, $y'\Sigma_Y y = y'(D\Sigma D' + \sigma^2 I)y = y'D\Sigma D'y + y'\sigma^2 Iy = y'D\Sigma D'y + \sigma^2 \|y\|_2^2 > y'D\Sigma D'y \geq 0$, ya que $D\Sigma D'$ es semidefinida positiva. Por tanto, $\Sigma_Y^- = \Sigma_Y^{-1}$ y tenemos lo que queremos.

- d) Ahora el resultado sobre condicionamiento nos proporciona

$$Y|X \sim N_p\left(\alpha + D\Sigma\Sigma^{-1}X, D\Sigma D' + \sigma^2 I - D\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma D'\right)$$

Simplificando $\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma = \Sigma$, y cancelando $D\Sigma D'$ obtenemos

$$Y|X \sim N_p\left(\alpha + D\Sigma\Sigma^{-1}X, \sigma^2 I\right)$$

Ejercicio 3. Debemos tener en cuenta que $\alpha'(X - \mu)$ es una variable aleatoria unidimensional.

Si $k = 0$, el resultado es obvio: $E[1] = 1$, ya que $m = \frac{k}{2} = 0$ y $0! = a^0 = 1$ para cualquier número real a . Suponemos en adelante $k > 0$.

Si $\alpha = 0$, obtenemos otra trivialidad: $E[0] = 0$. De lo contrario, podemos ver α' como una matriz $1 \times p$ de rango máximo y aplicar el resultado sobre transformaciones lineales de rango máximo (Resultado 4 de DNM para $\Sigma > 0$) para concluir $Y \sim N(\alpha'\mu - \alpha'\mu, \alpha'\Sigma\alpha'') = N(0, \alpha'\Sigma\alpha)$.

El resultado auxiliar nos proporciona entonces $E[Y^k] = 0$ para k impar y $E[Y^k] = (\alpha'\Sigma\alpha)^{\frac{k}{2}}(k-1)!!$, sustituyendo $m = \frac{k}{2}$ obtenemos $E[Y^k] = (\alpha'\Sigma\alpha)^m(2m-1)!!$ y sólo queda probar $(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Esto lo haremos por inducción sobre m :

En el caso $m = 1$ basta desarrollar y obtenemos

$$(2 \cdot 1 - 1)!! = 1!! = 1; \quad \frac{(2 \cdot 1)!}{2^1 1!} = \frac{2}{2} = 1$$

Supuesta la igualdad para $m - 1$, es decir,

$$(2m - 3)!! = (2(m - 1) - 1)!! = \frac{(2(m - 1))!}{2^{m-1}(m-1)!} = \frac{(2m - 2)!}{2^{m-1}(m-1)!}.$$

Comprobamos para m ,

$$\begin{aligned} (2m - 1)!! &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \iff (2m - 1)(2m - 3)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!} \\ \xrightarrow[m-1]{\text{Caso}} (2m - 1) \frac{(2m - 2)!}{2^{m-1}(m-1)!} &= \frac{(2m)!}{2^m m!} \iff (2m - 1)! = \frac{(2m)!}{2m} \end{aligned}$$

y obtenemos lo que queríamos.

Ejercicio 4. De que H sea ortogonal, obtenemos

$$\begin{aligned} I_p &= HH' = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H'_1 \\ H'_2 \end{pmatrix} = H_1 H'_1 + H_2 H'_2 \\ I_p &= H'H = \begin{pmatrix} H'_1 \\ H'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_1 H_1 & H'_1 H_2 \\ H'_2 H_1 & H'_2 H_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

También sabemos que $\Sigma = H_1 D H'_1$.

a)

$$\Sigma \Sigma^+ \Sigma = H_1 D H'_1 H_1 D^{-1} H'_1 H_1 D H'_1$$

Usando que $H'_1 H_1 = I_k$,

$$\Sigma \Sigma^+ \Sigma = H_1 D D^{-1} D H'_1 = H_1 D H'_1 = \Sigma$$

b)

$$\Sigma^+ \Sigma \Sigma^+ = H_1 D^{-1} H'_1 H_1 D H'_1 H_1 D^{-1} H'_1$$

De nuevo usando $H'_1 H_1 = I_k$,

$$\Sigma^+ \Sigma \Sigma^+ = H_1 D^{-1} D D^{-1} H'_1 = H_1 D^{-1} H'_1 = \Sigma^+$$

c) Utilizamos que tanto Σ como Σ^+ son simétricas, y otra vez más que $H'_1 H_1 = I_k$:

$$(\Sigma^+ \Sigma)' = \Sigma \Sigma^+ = H_1 D H'_1 H_1 D^{-1} H'_1 = H_1 H'_1$$

Por otra parte

$$\Sigma^+ \Sigma = H_1 D^{-1} H'_1 H_1 D H'_1 = H_1 D^{-1} D H'_1 = H_1 H'_1$$

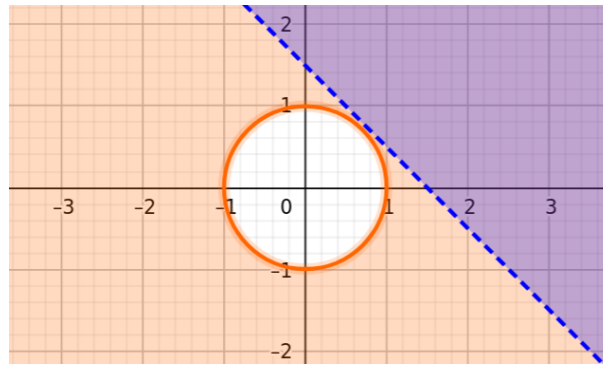
d) $(\Sigma \Sigma^+) = \Sigma^+ \Sigma$, que por el apartado anterior sabemos que coincide con $\Sigma \Sigma^+$.

Ejercicio 5.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

Los menores de orden 1 y 2 de la diagonal principal de Σ valen los dos $1 > 0$, luego Σ es definida positiva si, y solo si su determinante es positivo. Hemos de probar por tanto $0 \geq |\Sigma| = 1 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$, sabiendo que $\sigma_{13} + \sigma_{23} > \frac{3}{2}$. Por comodidad, renombramos $\sigma_{13} = x$, $\sigma_{23} = y$; queremos probar $x^2 + y^2 \geq 1$ para $x + y > \frac{3}{2}$.

Geométricamente, esto no es más que decir que el semiplano abierto $P : x + y > \frac{3}{2}$ está contenido en el complementario del disco abierto unidad $D : x^2 + y^2 < 1$, o lo que es lo mismo, $P \cap D = \emptyset$. En esta figura se ve claramente



Haremos una demostración analítica, la función $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ está minorada y por tanto tiene ínfimo no negativo en el conjunto P . Caben tres posibilidades:

- El ínfimo se alcanza en un punto interior donde se anula el gradiente, pero $\nabla f(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0)$ en P .

- El ínfimo se alcanza en la frontera de P , donde $y = \frac{3}{2} - x$. $f(x, \frac{3}{2} - x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{4}$, que es mínimo en $x = \frac{3}{4}$ y vale $1,125 > 1$.
- Existe una sucesión divergente cuya imagen por f converge al ínfimo, esto no puede darse puesto que f es el cuadrado de la norma euclídea.

De esto deducimos que $\inf\{f(x, y) : (x, y) \in P\} = 1,125$ y puesto que P no contiene a su frontera, $x^2 + y^2 > 1,125$ en todo P . Y por tanto $|\Sigma| \leq 0$, por lo que Σ no puede ser definida positiva.

Ejercicio 6. Dado $Z \sim_p (0, I_p)$, debemos encontrar una condición necesaria y suficiente para las dos matrices $k_i \times p$, C_i , con $k_i \leq p$ para $i = 1, 2$, que caracterice la independencia de $Y_1 = C_1 Z$ e $Y_2 = C_2 Z$.

Partimos de la caracterización de independencia por medio de la función característica: Y_1 e Y_2 son independientes si y solo si

$$\Phi_{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}}(t) = \Phi_{Y_1}(t_1)\Phi_{Y_2}(t_2), \quad \text{para todo } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1+k_2} \quad (1)$$

Utilizamos el resultado para transformaciones lineales de rango no necesariamente máximo para el caso $\Sigma \geq 0$, y obtenemos que

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} C_1 Z \\ C_2 Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

cumple

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_{k_1+k_2} \left(0, \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} I_p \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \end{pmatrix} \right)$$

Llamando

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} I_p \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 C'_1 & C_1 C'_2 \\ C_2 C'_1 & C_2 C'_2 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\Phi_{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}}(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} t' C t \right\}$$

De forma análoga, tenemos para $Y_i = C_i Z$ ($i = 1, 2$)

$$Y_i \sim N_{k_i}(0, C_i I C'_i),$$

por tanto

$$\Phi_{Y_i}(t_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} t'_i C_i C'_i t_i \right\}$$

(1) queda ahora así:

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} t' C t \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} t'_1 C_1 C'_1 t_1 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} t'_2 C_2 C'_2 t_2 \right\}, \quad \text{para todo } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1+k_2}$$

Y la inyectividad de la exponencial nos dice que la independencia entre Y_1 e Y_2 equivale a

$$t' C t = t'_1 C_1 C'_1 t_1 + t'_1 C_1 C'_2 t_2 \quad \text{para todo } t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1+k_2}$$

Desarrollando, obtenemos

$$t' C t = \begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 C'_1 & C_1 C'_2 \\ C_2 C'_1 & C_2 C'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = t'_1 C_1 C'_1 t_1 + t'_1 C_1 C'_2 t_2 + t'_2 C_2 C'_1 t_1 + t'_2 C_2 C'_2 t_2$$

Por tanto, Y_1 e Y_2 son independientes si y solo si

$$t'_1 C_1 C'_2 t_2 + t'_2 C_2 C'_1 t_1 = 0, \quad \text{para todo } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1+k_2}$$

Tenemos la suma de dos escalares, así que podemos trasponer uno: $t'_2 C_2 C'_1 t_1 = (t'_2 C_2 C'_1 t_1)' = t'_1 C_1 C'_2 t_2$. Obteniendo así

$$t'_1 C_1 C'_2 t_2 = 0, \quad \text{para todo } \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1+k_2} \quad (2)$$

Claramente esto se satisface cuando $C_1 C'_2 = 0$. Recíprocamente, si $C_1 C'_2 = (d_{ij})$ tuviese una entrada $d_{ij} \neq 0$ para algunos $i = 1, \dots, k_1$, $j = 1, \dots, k_2$, tomando $t_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

y $t_2(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ tendríamos $t'_1 C_1 C'_2 t_2 = d_{ij} \neq 0$, luego (2) equivale a que $C_1 C'_2 = 0$. Por tanto, Y_1 e Y_2 son independientes si y solo si $C_1 C'_2 = 0$.

Ejercicio 7. $Y \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$|\Sigma| = 144 > 0$ y Σ simétrica. Luego es definida positiva. La idea de los apartados a-e es escribir la variable que queremos estudiar como una transformada lineal de rango máximo de Y y aplicar el resultado de transformaciones lineales de rango máximo para $\Sigma > 0$.

a)

$$Z = 2Y_1 - Y_2 + 3Y_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} Y$$

Como la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, el resultado sobre transformaciones lineales de máximo rango para $\Sigma > 0$ nos asegura que $Z \sim N_1(B\mu, B\Sigma B') = N_1(17, 21)$.

b) (Z_1, Z_2) donde $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$, $Z_2 = Y_1 - Y_2 + 2Y_3$.

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Y = BY$$

Esta vez el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es 2, y el mismo resultado nos da

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \right).$$

c)

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y = BY$$

El rango de B sigue siendo máximo, por tanto $Y_2 \sim N_1(1, 13)$.

d)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Una vez más el mismo resultado nos dice que $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right)$.

e)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} Y$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix} \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{21}{4} \end{pmatrix} \right).$$

f) Encontrar Z tal que $Z = (T')^{-1}(Y - \mu) \sim N_3(0, I)$. Con T la matriz correspondiente a la factorización de Cholesky, $\Sigma = T'T$.

Utilizamos el algoritmo para la descomposición de Cholesky implementado en la herramienta [SageMath](#), y obtenemos que (redondeando)

$$\Sigma = T'T = \begin{pmatrix} 2,4495 & 0 & 0 \\ 0,4082 & 3,5824 & 0 \\ -0,8165 & 1,2096 & 1,3675 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,4495 & 0,4082 & -0,8165 \\ 0 & 3,5824 & 1,2096 \\ 0 & 0 & 1,3675 \end{pmatrix}$$

También con SageMath, calculamos la inversa:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4082 & -0,0465 & 0,2849 \\ 0 & 0,2791 & -0,2469 \\ 0 & 0 & 0,7312 \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z = \begin{pmatrix} 0,4082 & -0,0465 & 0,2849 \\ 0 & 0,2791 & -0,2469 \\ 0 & 0 & 0,7312 \end{pmatrix} (Y - \mu)$$

Como $T'T = \Sigma$, se tiene $Z \sim N_3(0, I)$.

g) Encontrar Z tal que $Z = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(Y - \mu) \sim N_3(0, I)$. Con $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ la inversa de la matriz correspondiente a la factorización raíz cuadrada, $\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}$.

Con la función `np.linalg.eigh`, obtenemos una matriz ortogonal

$$V = \begin{pmatrix} -0,4358 & 0,8996 & 0,0276 \\ 0,3268 & 0,1296 & 0,9362 \\ -0,8386 & -0,417 & 0,3505 \end{pmatrix}$$

que cumple

$$V'\Sigma V = \begin{pmatrix} 1,4018 & 0 & 0 \\ 0 & 7,0712 & 0 \\ 0 & 0 & 14,527 \end{pmatrix} = D$$

Tomando

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1,4018} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7,0712} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{14,527} \end{pmatrix}$$

tenemos usando que V es ortogonal,

$$\Sigma = VDV' = VD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V' = VD^{\frac{1}{2}}V'D^{\frac{1}{2}}V'$$

Por tanto debemos tomar $\Sigma^{\frac{1}{2}} = VD^{\frac{1}{2}}V' = \begin{pmatrix} 2,3798 & 0,2399 & -0,528 \\ 0,2399 & 3,5115 & 0,7823 \\ -0,528 & 0,7823 & 1,7633 \end{pmatrix}$, que es simétrica.

Calculamos su inversa también con ayuda de NumPy,

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0,465 & -0,0697 & 0,1702 \\ -0,0697 & 0,3265 & -0,1657 \\ 0,1702 & -0,1657 & 0,6916 \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z = \begin{pmatrix} 0,465 & -0,0697 & 0,1702 \\ -0,0697 & 0,3265 & -0,1657 \\ 0,1702 & -0,1657 & 0,6916 \end{pmatrix} (Y - \mu)$$

Como $\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma$, se tiene $Z \sim N_3(0, I)$.

Ejercicio 8. $Y \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz de covarianzas del vector Y es Σ , que es definida positiva. Es una matriz diagonal por bloques, por lo que el Resultado 2 del tema DNM caso $\Sigma > 0$ nos garantiza que los vectores $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ y (Y_3) son (mutuamente) independientes, y además

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \right), \quad Y_3 \sim N_1(4, 5)$$

Nos será útil el siguiente resultado: Si X e Y son vectores aleatorios independientes de m y n componentes respectivamente, para cada par de funciones medibles $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ se tiene que los vectores aleatorios $f(X)$ y $g(Y)$ son independientes.

- En la entrada (1, 2) de la matriz Σ , vemos que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -3 \neq 0$. Por tanto, estas variables no son incorreladas, luego no pueden ser independientes.
- Y_1 es una componente (una proyección) del vector $(Y_1, Y_2)'$. Como este vector es independiente de Y_3 y las proyecciones son funciones medibles, Y_1 e Y_3 son independientes.
- Son independiente por el mismo motivo, la proyección de la segunda componente también es una función medible.
- Lo son, es justo lo que garantiza el Resultado 2 que comento arriba.
- Si fuesen independientes, Y_1 sería independiente de Y_2 por ser una función medible (proyección) de un vector independiente. Por tanto, no lo son.

Ejercicio 9. Utilizaremos el Resultado 3 de DNM caso no singular (ya que $\Sigma > 0$). Nos dice que la distribución condicionada de Y dado $X = x$ sigue una DNM de la forma:

$$N_2 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(x - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 0 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

Simplificando,

$$(Y/X = x) \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-16}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{45}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{a) Por tanto } E[Y/X] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-16}{3} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{45}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \text{Cov}(Y/X) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. La función de distribución marginal de X es:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y)dydt = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^s f(t, y)dydt = \lim_{s \rightarrow +\infty} F(x, s) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \Phi(x)\Phi(s)[1 + \alpha(1 - \Phi(x))(1 - \Phi(s))] = \Phi(x) \end{aligned}$$

Donde en el último paso usamos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Phi(s) = 1$. Que por hipótesis es la función de distribución normal estándar.

La situación de Y es totalmente análoga.

Ejercicio 11. TODO

Ejercicio 12. Calculamos la distribución conjunta de

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 - X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X$$

utilizando que es una transformación lineal de rango máximo. Obtenemos que

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 - X_3 \end{pmatrix} \sim N_2 \left(0, \begin{pmatrix} 3 + 4\rho & -1 - 2\rho \\ -1 - 2\rho & 3 \end{pmatrix} \right),$$

su matriz de covarianzas es diagonal si $\rho = \frac{-1}{2}$, y para ese mismo valor la matriz Σ queda

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva: los determinantes menores de la diagonal principal son: 1, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$, todos positivos.

Para $\rho = \frac{-1}{2}$, $\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 - X_3 \end{pmatrix}$ sigue una DNM con matriz de covarianzas no singular y diagonal, así que sus componentes ($X_1 + X_2 + X_3$ y $X_1 - X_2 - X_3$) son independientes.