

Ejercicios de la ecuación del calor y programación lineal

David Cabezas Berrido

1. Ecuación del calor

Debemos encontrar una solución del problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = \pi, & t \in [0, +\infty) \\ u(0, x) = x + \sin(x), & x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (1)$$

y estudiar entre qué clase de funciones podríamos afirmar que es única.

Consideramos primero el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in [0, +\infty) \\ u(0, x) = \sin(x), & x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (2)$$

Este es el problema que hemos estudiado en teoría (con $\varphi(x) = \sin(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$) y conocemos que la solución es

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad \forall (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \quad (3)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

Para $n > 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_n &= \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx = -\sin(nx) \cos(x) \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} \cos(x) \cos(nx) dx = \\ &= 0 + n \left(\sin(x) \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + n \int_0^{\pi} \sin(x) \sin(nx) dx \right) = 0 + n^2 \frac{\pi}{2} a_n \implies a_n = 0 \end{aligned}$$

Para $n = 1$, tenemos

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{2} dx = 1 - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi} = 1$$

No debe sorprendernos que el desarrollo en serie de Fourier de $\sin(x)$ sea $\sin(x)$.

Por tanto la solución de (2) es

$$u(t, x) = e^{-t} \sin(x) \quad \forall (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \quad (5)$$

Se comprueba rápidamente que $u_t = -u = u_{xx}$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ y $u(0, x) = \sin(x)$.

Tomamos ahora $v(t, x) = x + u(t, x) = x + e^{-t} \sin(x) \quad \forall (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi]$

Tenemos $v_t = u_t$ y $v_{xx} = u_{xx}$, por lo que v satisface la ecuación diferencial de (1).

También, $v(t, 0) = 0 + u(t, 0) = 0$ y $v(t, \pi) = \pi + u(t, \pi) = \pi$ para todo t en \mathbb{R}_0^+ . Y $v(0, x) = x + u(0, x) = x + \sin(x)$ para todo x en $[0, \pi]$.

Por tanto $v \in C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$ es solución de (1).

Ahora supongamos que $w \in C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$ es otra solución de (1), por tanto tendremos $w_t = w_{xx}$, $w(t, 0) = 0$ y $w(t, \pi) = \pi$ para todo t en \mathbb{R}_0^+ . Y $w(0, x) = x + \sin(x)$ para todo x en $[0, \pi]$.

Tomando $u = v - w$ obtenemos $u_t = u_{xx}$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ para todo t en \mathbb{R}_0^+ y $u(0, x) = 0$ para todo x en $[0, \pi]$.

Por tanto $u \in C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$ es solución del problema $(\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi])$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t, x) \in [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in [0, +\infty) \\ u(0, x) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (6)$$

El problema satisface claramente las hipótesis del teorema de unicidad, luego tiene (sabemos que la tiene porque u lo satisface) solución única en $C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$. Como la función constante 0 en $[0, +\infty) \times [0, \pi]$ también es solución, $u = 0$, por tanto $v = w$ y afirmamos que v es la única solución de (1) en $C^2([0, +\infty) \times [0, \pi])$.

Puesto que toda solución tiene que ser clase 2, esta es la clase de funciones más general en la que podemos asegurar que v es la única solución del problema.

2. Programación lineal

Una fábrica envasadora de alimentos recibe diariamente

- 1500 kg de café tipo A.
- 715 kg de café tipo B.
- 190 kg de café tipo C.

con ellos fabrica tres mezclas

- Mezcla tipo 1: 80 % café A y 20 % café B; beneficio de 0.2 €/kg.
- Mezcla tipo 2: 60 % café B y 40 % café C; beneficio de 0.3 €/kg.
- Mezcla tipo 3: 40 % café A, 44 % café B y 16 % café C; beneficio de 0.4 €/kg.

Queremos conocer la cantidad de mezcla de cada tipo que debemos producir para maximizar la ganancia.

Si denotamos x_1 , x_2 y x_3 a la cantidad en kg que fabricamos de mezcla de tipo 1, 2 y 3 respectivamente, el beneficio en € (función a maximizar) es

$$BE = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 \quad (1)$$

Hay ciertas restricciones, pues tenemos recursos limitados. La cantidad total en kg de café de tipo A utilizado es $0.8x_1 + 0.4x_3$ y no podrá exceder los 1500 kg. Del mismo modo la cantidad de tipo B ($0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.44x_3$) no podrá exceder 715 kg y la de tipo C ($0.4x_2 + 0.16x_3$) los 190 kg. Por tanto las restricciones que encontramos son

$$\begin{aligned} 0.8x_1 + 0.4x_3 &\leq 1500 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.44x_3 &\leq 715 \\ 0.4x_2 + 0.16x_3 &\leq 190 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.44 \\ 0 & 0.4 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1500 \\ 715 \\ 190 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Por tanto problema de gestión de recursos que debemos resolver es

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \text{máx } f(x) = < p, x > +m \end{cases} \quad (3)$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.44 \\ 0 & 0.4 & 0.16 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1500 \\ 715 \\ 190 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad m = 0$$

Llamando $h = (h_1, h_2, h_3)$ al vector de holguras, obtenemos el problema estándar asociado

$$\begin{cases} Ax + h = b \\ x \geq 0, \quad h \geq 0 \\ \text{máx } f(x) = < p, x > +m \end{cases} \quad (4)$$

Lo resolveremos por el método Simplex. Como no nos dicen nada, suponemos que el café sin mezclar no aporta ningún beneficio a la fábrica envasadora, luego en la matriz ampliada las holguras tendrán ceros en la última fila. La matriz ampliada queda de esta forma.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 0.8 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 0.2 & 0.6 & 0.44 & 0 & 1 & 0 & 715 \\ 0 & 0.4 & 0.16 & 0 & 0 & 1 & 190 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & f-0 \end{pmatrix}$$

Primero elegimos la primera columna para pivotar. Dividiendo la columna de b entre la de x_1 (sólo las dos primeras filas puesto que sólo consideramos entradas positivas y hay un 0 en la tercera fila) obtenemos $\frac{1500}{0.8} = 1875$, $\frac{715}{0.2} = 3575$. Para evitar obtener valores negativos en la columna b , hacemos un 1 en la primera fila (menor de los cocientes), para ello la dividimos entre 0.8. En las demás filas haremos un 0 en la primera columna, restandoles la primera fila (ya con un 1 en esa columna) multiplicada por el valor correspondiente a x_1 en esa fila. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 1 & 0 & 0.5 & 1.25 & 0 & 0 & 1875 \\ 0 & 0.6 & 0.34 & -0.25 & 1 & 0 & 340 \\ 0 & 0.4 & 0.16 & 0 & 0 & 1 & 190 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & -0.25 & 0 & 0 & f - 375 \end{pmatrix}$$

Ahora pivotamos sobre la segunda columna (debemos siempre elegir una con entrada positiva en la fila correspondiente a la función objetivo, la última). Para decidir si pivotar sobre las filas 2 ó 3 (la 1 tiene un 0, elegimos entradas positivas) calculamos los cocientes $\frac{340}{0.6} = 566.\bar{6}$ y $\frac{190}{0.4} = 475$; elegimos el menor de ellos, luego pivotaremos sobre la tercera fila. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 1 & 0 & 0.5 & 1.25 & 0 & 0 & 1875 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.25 & 1 & -1.5 & 55 \\ 0 & 1 & 0.4 & 0 & 0 & 2.5 & 475 \\ 0 & 0 & 0.18 & -0.25 & 0 & -0.75 & f - 517.5 \end{pmatrix}$$

Ahora pivotamos sobre la columna 3, la única posible. $\frac{1875}{0.5} = 3750$, $\frac{55}{0.1} = 550$ y $\frac{475}{0.4} = 1187.5$; así que pivotamos sobre la segunda fila obteniendo

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 1 & 0 & 0 & 2.5 & -5 & 7.5 & 1600 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & 10 & -15 & 550 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 8.5 & 255 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -1.8 & 1.95 & f - 616.5 \end{pmatrix}$$

Ahora pivotamos sobre la columna 4. $\frac{1600}{2.5} = 640$, $\frac{255}{1} = 255$. Fila 3. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 1 & -2.5 & 0 & 0 & 5 & -13.75 & 962.5 \\ 0 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 6.25 & 1187.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 8.5 & 255 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & -1 & 0.25 & f - 667.5 \end{pmatrix}$$

Pivotamos sobre la columna 6. $\frac{1187.5}{6.25} = 190$, $\frac{255}{8.5} = 30$. Fila 3. Obtenemos

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 1 & -0.8824 & 0 & 1.6176 & -1.4706 & 0 & 1375 \\ 0 & 1.7647 & 1 & -0.7353 & 2.9412 & 0 & 1000 \\ 0 & 0.1176 & 0 & 0.1176 & -0.4756 & 1 & 30 \\ 0 & -0.2294 & 0 & -0.2294 & -0.8824 & 0 & f - 675 \end{pmatrix}$$

No queda ningún peso positivo en la última fila, luego hemos llegado a una tabla terminal. Las tres variables básicas que hemos obtenido son x_1 , x_3 y h_3 . Mirando la posición de los 1s, concluimos que para maximizar el beneficio se deben fabricar **1375 kg de la mezcla 1**, **1000 kg de la mezcla 3** y **0 kg de la mezcla 2**. Sobrando 30 kg de café tipo C.

La cantidad de café A que se gasta es $0.8 \cdot 1375 + 0.4 \cdot 1000 = 1500$ kg, de café B se gastan $0.2 \cdot 1375 + 0.6 \cdot 0 + 0.44 \cdot 1000 = 715$ kg y de café C se gastan $0.4 \cdot 0 + 0.16 \cdot 1000 = 160$ kg (sobran 30 kg como sabíamos).

Fabricando estas cantidades, se obtiene un beneficio de $0.2 \cdot 1375 + 0.3 \cdot 0 + 0.4 \cdot 1000 = 675$ €