Problemas de Análisis Funcional Avanzado
Tema 1: Principios fundamentales del Análisis Funcional (repaso)

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1: Sean X e Y espacios de Banach y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\ker(T) = \{0_X\}$ y $T(X)$ es cerrado en Y.
(2) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\alpha \|x\| \leq \|T(x)\|$ para todo $x \in X$.

Solución:
Supongamos (1) y consideremos T como una aplicación sobreyectiva sobre su imagen, $T : X \to T(X)$. Además, la condición $\ker(T) = \{0_X\}$ nos dice que T es inyectiva, luego tenemos una biyección. Por otra parte, al ser $T(X)$ un subespacio cerrado de un espacio completo Y, deducimos que $T(X)$ es también un espacio de Banach.

Aplicando el teorema de los isomorfismos de Banach concluimos que $T : X \to T(X)$ es un isomorfismo, por tanto $T^{-1} : T(X) \to X$ es continua. Esto equivale a que exista $M > 0$ tal que

$$\|T^{-1}(y)\| \leq M\|y\| \quad \forall y \in T(X).$$

Como $T : X \to T(X)$ es una biyección, decir $y \in T(X)$ es tan arbitrario como decir $T(x)$ con $x \in X$, luego tenemos

$$\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq M\|T(x)\| \quad \forall x \in X.$$

Tomando $\alpha = M^{-1} > 0$ obtenemos la condición deseada, (2).

Para la implicación inversa, la desigualdad en (2) nos dice que si $x \in \ker(T)$, entonces $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| = 0$, lo que fuerza (por ser $\alpha > 0$) que $x = 0$. Concluimos que $\ker(T) = \{0\}$ y que $T : X \to T(X)$ es una biyección.

Ahora tomamos una sucesión convergente cualquiera $\{y_n\} \to y \in Y$ de elementos de $T(X)$, nuestro objetivo es probar que $y \in T(X)$. Sea $\{x_n\}$ la sucesión de elementos de X definida por $x_n = T^{-1}(y_n)$, la condición (2) nos dice que

$$\|x_n - x_m\| \leq \alpha^{-1}\|T(x_n - x_m)\| = \alpha^{-1}\|y_n - y_m\| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $\{y_n\}$ es convergente y por tanto de Cauchy, luego la desigualdad anterior nos asegura que $\{x_n\}$ también es de Cauchy. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $\{x_n\} \to x$. Finalmente, la continuidad de T nos permite deducir que

$$T(x) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Concluimos que $y \in T(X)$, y de la arbitrariedad de la sucesión llegamos a que $T(X)$ es cerrado en Y.

Ejercicio 2: En el contexto de espacios de Banach:

(1) Pruebe el teorema de la aplicación abierta usando el teorema de los isomorfismos de Banach.
(2) Demuestre el teorema de la gráfica cerrada usando el teorema de la aplicación abierta.
(3) Pruebe el teorema de los isomorfismos de Banach usando el teorema de la gráfica cerrada.

Solución:
A lo largo del ejercicio, X e Y serán dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal.

(1) Supongamos que T es continua y sobreyectiva, debemos probar que es abierta. Como T es continua, $\ker(T)$ es cerrado en X. Al ser X completo, el cociente $X/\ker(T)$ es un espacio de Banach. La descomposición canónica nos asegura que la aplicación $\tilde{T} : X/\ker(T) \to T(X) = Y$ dada por $\tilde{T}(x + \ker(T)) = T(x)$ es una biyección lineal continua. Por el teorema de los isomorfismos de Banach $\tilde{T}$ es un isomorfismo, en particular abierta. Como T es la composición de $\tilde{T}$ con la proyección cociente (que siempre es abierta), concluimos que T es abierta.

(2) Supongamos ahora que T tiene gráfica cerrada, debemos probar que es continua. Como $\operatorname{Gr} T$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $X \times Y$ (producto de Banach), $\operatorname{Gr} T$ es Banach. Consideramos la aplicación $\Phi : \operatorname{Gr} T \to X$ dada por $\Phi(x, T(x)) = x$, que es continua (es una proyección) y claramente sobreyectiva, luego el teorema de la aplicación abierta nos garantiza que Φ es abierta. La función Φ es biyectiva con $\Phi^{-1}(x) = (x, T(x))$, y el hecho de que Φ sea abierta nos dice que Φ^{-1} es continua. Concluimos que T es continua por ser una componente de Φ^{-1}.

(3) Supongamos que T es continua y biyectiva, debemos probar que es un isomorfismo, es decir, que $T^{-1} : Y \to X$ es continua. En vista del teorema de la gráfica cerrada, nos basta con comprobar que $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es un subconjunto cerrado de $Y \times X$. Usando que T es una biyección obtenemos
$$\operatorname{Gr} T^{-1} = \{(y, T^{-1}(y)) : y \in Y\} = \{(T(x), x) : x \in X\}.$$
Observamos que $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es la imagen de $\operatorname{Gr} T$ por el isomorfismo de $X \times Y$ en $Y \times X$ dado por $(x, y) \mapsto (y, x)$. Como T es continua, $\operatorname{Gr} T$ es cerrada en $X \times Y$, luego $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es cerrada en $Y \times X$.

Ejercicio 3: Sea $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales o complejos tal que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$ es convergente para toda sucesión $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Compruebe que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|$ converge.

Solución:
Comenzamos considerando para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional $f_n : c_0 \to \mathbb{K}$ dado por
$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)y(k), \quad \forall x \in c_0.$$
Claramente cada f_n es un funcional lineal, y comprobamos que es continuo con $\|f_n\| = \sum_{k=1}^{n} |y(k)|$: para cada $x \in c_0$ tenemos
$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |x(k)||y(k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x\||y(k)| = \|x\| \sum_{k=1}^{n} |y(k)|,$$
pero tomando $x(k) = \frac{\overline{y(k)}}{|y(k)|}$ para $k \leq n$ y $x(k) = 0$ para $k > n$ se obtiene la igualdad en la expresión anterior.

La hipótesis de partida nos dice justamente que la familia de funcionales $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset c_0^*$ está puntualmente acotada en c_0, y el principio de acotación uniforme para espacios de Banach (c_0 es Banach) nos permite concluir que dicha familia está acotada en norma, luego el conjunto $\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Esto quiere decir que las sumas parciales de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|$ están acotadas, y por monotonía deducimos que la serie converge.

Ejercicio 4: Sean X e Y espacios normados y $x_0 \in X\backslash\{0_X\}$. Dado $y_0 \in Y$, pruebe que existe $T \in L(X, Y)$ tal que $T(x_0) = y_0$ y $\|T\| \, \|x_0\| = \|y_0\|$.

Solución:
Como $x_0 \neq 0$, $\mathbb{K}x_0$ es un subespacio de dimensión 1 de X. Definimos el funcional $g(\lambda x_0) = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, claramente se tiene $g \in (\mathbb{K}x_0)^*$. La igualdad
$$|g(\lambda x_0)| = |\lambda| = \|\lambda x_0\| \frac{1}{\|x_0\|}$$
asegura que $\|g\| = \frac{1}{\|x_0\|}$, y además que la norma se alcanza en cada punto de $\mathbb{K}x_0$. Utilizando el teorema de extensión Hahn-Banach para espacios normados encontramos un funcional $f \in X^*$ tal que $f(\lambda x_0) = \lambda$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\|f\| = \|g\| = \frac{1}{\|x_0\|}$.

Definimos ahora $T : X \to Y$ por $T(x) = f(x)y_0$, claramente $T \in L(X, Y)$. Tenemos $T(x_0) = f(1 \cdot x_0)y_0 = 1 \cdot y_0$, además
$$\|T(x)\| = |f(x)|\|y_0\| \leq \|f\|\|x\|\|y_0\| = \|x\| \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|},$$

luego $\|T\| \leq \|f\| \|y_0\| = \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}$. La igualdad se alcanza precisamente en x_0 (de hecho en todo $\mathbb{K}x_0$):

$$\|T(x_0)\| = \|y_0\| = \|x_0\| \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}.$$

Ejercicio 5: Sea X un espacio normado separable. Pruebe que existe un subconjunto numerable de X^* que separa los puntos de X.

Solución:
Sea E un subconjunto denso numerable de X. Si X es trivial no hay nada que demostrar, en otro caso para cada $x \in E$ existe (como consecuencia del teorema de Hahn-Banach) $f_x \in X^*$ tal que $\|f_x\| = 1$ y $f_x(x) = \|x\|$.
Dados $z, y \in X$ con $z \neq y$, tenemos $z - y \neq 0$. Tomamos $\varepsilon = \|z - y\| > 0$, por la densidad existe $x \in E$ tal que $\|x-(z-y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$, luego $\|x\| = \|x-(z-y)+(z-y)\| \geq \|z-y\| - \|x-(z-y)\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{2}$.
Por tanto, $|f_x(z-y)| = |f_x((z-y)-x)+f_x(x)| \geq |f_x(x)| - |f_x((z-y)-x)| \geq \|x\| - \|f_x\| \|(z-y)-x\| > \frac{\varepsilon}{2} - 1 \cdot \frac{\varepsilon}{3} > 0$. Lo cual implica que $f_x(z) \neq f_x(y)$.
Hemos probado que dados dos puntos diferentes de X, existe un funcional del conjunto $\{f_x : x \in E\} \subset X^*$ que los separa. La numerabilidad de E nos asegura que $\{f_x : x \in E\}$ es el subconjunto que buscamos.

Ejercicio 6: Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión:

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|, \quad \forall x \in X.$$

Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(1) T es continua.
(2) $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$.
(3) $\|\cdot\|_1$ es una norma completa.

Solución:
Probaremos que tanto (3) como (1) son equivalentes a (2).

Si ambas normas son equivalentes, dan lugar a las mismas sucesiones convergentes y a las mismas sucesiones de Cauchy, luego la complitud de una de ellas implica la de la otra. Por tanto, es claro que (2) implica (3).

Supongamos (3). Como las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ son ambas completas, para ver que son equivalentes basta probar que son comparables en vista de un corolario del teorema de los isomorfismos de Banach. Pero esto es obvio, ya que $\|x\|_1 \geq \|x\|$ para cada $x \in X$. Tenemos así (2).

Ahora supondremos (2) y probaremos (1). Si ambas normas son equivalentes, debe existir una constante $M > 0$ tal que

$$\|x\| + \|T(x)\| = \|x\|_1 \leq M\|x\|$$

para cada $x \in X$. Tenemos entonces para todo $x \in X$

$$\|T(x)\| \leq (M-1)\|x\|,$$

lo que prueba que T es continua con $\|T\| \leq M - 1$.

Falta comprobar que (1) implica (2). Si T es continua, existe una constante $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$. Luego

$$\|x\| \leq \|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \leq \|x\| + M\|x\| = (M+1)\|x\|$$

para cada $x \in X$. Obtenemos así (2).