El Teorema de Russo-Dye y refinamientos

David Cabezas Berrido

Trabajo final de la asignatura
Métodos Avanzados de Análisis Funcional y Análisis de Fourier

Índice

Índice

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

¿De qué formas se puede expresar un elemento de una C*-álgebra como combinación convexa de elementos unitarios?

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

En una C*-álgebra conmutativa y unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

¿De qué formas se puede expresar un elemento de una C*-álgebra como combinación convexa de elementos unitarios?

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

En una C*-álgebra conmutativa y unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

Teorema de Russo-Dye (1966)

En una C*-álgebra unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

¿De qué formas se puede expresar un elemento de una C*-álgebra como combinación convexa de elementos unitarios?

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

En una C*-álgebra conmutativa y unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

Teorema de Russo-Dye (1966)

En una C*-álgebra unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

- Manifiesta la abundancia de elementos unitarios en una C*-álgebra (unital).

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

¿De qué formas se puede expresar un elemento de una C*-álgebra como combinación convexa de elementos unitarios?

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

En una C*-álgebra conmutativa y unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

Teorema de Russo-Dye (1966)

En una C*-álgebra unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

- Manifiesta la abundancia de elementos unitarios en una C*-álgebra (unital).
- Posteriormente refinado y versionado.

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

¿De qué formas se puede expresar un elemento de una C*-álgebra como combinación convexa de elementos unitarios?

R.R. Phelps en "Extreme points in function algebras" (1965)

En una C*-álgebra conmutativa y unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

Teorema de Russo-Dye (1966)

En una C*-álgebra unital, la envolvente convexa de los elementos unitarios es densa en la bola cerrada unidad.

- Manifiesta la abundancia de elementos unitarios en una C*-álgebra (unital).
- Posteriormente refinado y versionado.

Índice

Notación

- A C*-álgebra unital sobre el cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
- $\mathbb{1} \in A$ su unidad.
- $A_1 = \{a \in A : \|a\| < 1\}$ bola abierta unidad de A.
- $B_A = \{a \in A : \|a\| \leq 1\}$ bola cerrada unidad de A.

Notación

- A C*-álgebra unital sobre el cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
- $\mathbb{1} \in A$ su unidad.
- $A_1 = \{a \in A : \|a\| < 1\}$ bola abierta unidad de A.
- $B_A = \{a \in A : \|a\| \leq 1\}$ bola cerrada unidad de A.
- $U = \mathcal{U}(A)$ grupo de elementos unitarios de A.

Notación

- A C*-álgebra unital sobre el cuerpo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
- $\mathbb{1} \in A$ su unidad.
- $A_1 = \{a \in A : \|a\| < 1\}$ bola abierta unidad de A.
- $B_A = \{a \in A : \|a\| \leq 1\}$ bola cerrada unidad de A.
- $U = \mathcal{U}(A)$ grupo de elementos unitarios de A.

Descomposición polar de invertibles

Lema

Todo elemento invertible $a \in A$ admite una *descomposición polar* de la forma $a = u|a|$, donde $|a| = (a^*a)^{1/2}$ es positivo y u es unitario.

Demostración

$|a|^2 := a^*a \in A$ invertible y positivo, admite raíz cuadrada $|a|$ (CFC).

Descomposición polar de invertibles

Lema

Todo elemento invertible $a \in A$ admite una *descomposición polar* de la forma $a = u|a|$, donde $|a| = (a^*a)^{1/2}$ es positivo y u es unitario.

Demostración

$|a|^2 := a^*a \in A$ invertible y positivo, admite raíz cuadrada $|a|$ (CFC).

$$|a|(|a||a|^{-2}) = (|a||a|)|a|^{-2} = |a|^2|a|^{-2} = \mathbb{1}$$

$$(|a|^{-2}|a|)|a| = |a|^{-2}(|a||a|) = |a|^{-2}|a|^2 = \mathbb{1},$$

$|a|$ invertible con $|a|^{-1} = |a||a|^{-2} = |a|^{-2}|a| \Rightarrow |a|^{-1}|a|^{-1} = |a|^{-2}$.

Descomposición polar de invertibles

Lema

Todo elemento invertible $a \in A$ admite una *descomposición polar* de la forma $a = u|a|$, donde $|a| = (a^*a)^{1/2}$ es positivo y u es unitario.

Demostración

$|a|^2 := a^*a \in A$ invertible y positivo, admite raíz cuadrada $|a|$ (CFC).

$$|a|(|a||a|^{-2}) = (|a||a|)|a|^{-2} = |a|^2|a|^{-2} = \mathbb{1}$$

$$(|a|^{-2}|a|)|a| = |a|^{-2}(|a||a|) = |a|^{-2}|a|^2 = \mathbb{1},$$

$|a|$ invertible con $|a|^{-1} = |a||a|^{-2} = |a|^{-2}|a| \Rightarrow |a|^{-1}|a|^{-1} = |a|^{-2}$.

Descomposición polar de invertibles

Lema

Todo elemento invertible $a \in A$ admite una *descomposición polar* de la forma $a = u|a|$, donde $|a| = (a^*a)^{1/2}$ es positivo y u es unitario.

Demostración

$u := a|a|^{-1} \in A$ invertible. Como $|a|^{-1}$ auto-adjunto,

$$uu^* = a|a|^{-1}|a|^{-1}a^* = a|a|^{-2}a^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^{-1}(a^*)^{-1}a^* = \mathbb{1}$$

$$u^*u = |a|^{-1}a^*a|a|^{-1} = |a|^{-1}|a|^2|a|^{-1} = |a|^{-1}|a||a||a|^{-1} = \mathbb{1},$$

u unitario. $\square$

Descomposición polar de invertibles

Lema

Todo elemento invertible $a \in A$ admite una *descomposición polar* de la forma $a = u|a|$, donde $|a| = (a^*a)^{1/2}$ es positivo y u es unitario.

Demostración

$u := a|a|^{-1} \in A$ invertible. Como $|a|^{-1}$ auto-adjunto,

$$uu^* = a|a|^{-1}|a|^{-1}a^* = a|a|^{-2}a^* = a(a^*a)^{-1}a^* = aa^{-1}(a^*)^{-1}a^* = \mathbb{1}$$

$$u^*u = |a|^{-1}a^*a|a|^{-1} = |a|^{-1}|a|^2|a|^{-1} = |a|^{-1}|a||a||a|^{-1} = \mathbb{1},$$

u unitario. $\square$

Índice

El resultado

Teorema de Russo-Dye (1966)

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Entonces, $B_A = \overline{\text{co}}(U)$.

Original: "A note in unitary operators in C*-algebras" (A.H. Dye & B. Russo, 1966).

El resultado

Teorema de Russo-Dye (1966)

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Entonces, $B_A = \overline{\text{co}}(U)$.

Original: "A note in unitary operators in C*-algebras" (A.H. Dye & B. Russo, 1966).

Prueba elemental: "Shorter Notes: An Elementary Proof of the Russo-Dye Theorem" (L.T. Gardner, 1984).

El resultado

Teorema de Russo-Dye (1966)

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Entonces, $B_A = \overline{\mathrm{co}}(U)$.

Original: "A note in unitary operators in C*-algebras" (A.H. Dye & B. Russo, 1966).

Prueba elemental: "Shorter Notes: An Elementary Proof of the Russo-Dye Theorem" (L.T. Gardner, 1984).

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2} u$.

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2}u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y).

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2} u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^*y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2}u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^*y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \leq \||y|^2\|\mathbb{1} \leq \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \geq 0$ admite raíz cuadrada.

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2} u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^*y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \leq \||y|^2\|\mathbb{1} \leq \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \geq 0$ admite raíz cuadrada. Por tanto, $|y| = (w + w^*)/2$, donde

$$w = |y| + i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}, \quad w^* = |y| - i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}.$$

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2}u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^*y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \leq \||y|^2\|\mathbb{1} \leq \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \geq 0$ admite raíz cuadrada. Por tanto, $|y| = (w + w^*)/2$, donde

$$w = |y| + i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}, \quad w^* = |y| - i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}.$$

Además, $w, w^* = w^{-1}$ unitarios, ya que $|y|$ y $\mathbb{1} - |y|^2$ conmutan.

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2}u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^*y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \leq \||y|^2\|\mathbb{1} \leq \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \geq 0$ admite raíz cuadrada. Por tanto, $|y| = (w + w^*)/2$, donde

$$w = |y| + i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}, \quad w^* = |y| - i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}.$$

Además, $w, w^* = w^{-1}$ unitarios, ya que $|y|$ y $\mathbb{1} - |y|^2$ conmutan.

Hemos probado $x + u = vw + vw^* \Rightarrow A_1 + U \subset U + U$ $(*)$.

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2} u$. $\|xu^*\| \leq \|x\| \|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^* y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^* y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \leq \||y|^2\| \mathbb{1} \leq \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \geq 0$ admite raíz cuadrada. Por tanto, $|y| = (w + w^*)/2$, donde

$$w = |y| + i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}, \quad w^* = |y| - i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}.$$

Además, $w, w^* = w^{-1}$ unitarios, ya que $|y|$ y $\mathbb{1} - |y|^2$ conmutan.

Hemos probado $x + u = vw + vw^* \Rightarrow A_1 + U \subset U + U$ $(*)$.

$\dfrac{x+U}{2} \subset \text{co}(U) \Leftrightarrow U \subset 2\,\text{co}(U) - x \Rightarrow \text{co}(U) \subset 2\,\text{co}(U) - x \Rightarrow \dfrac{x + \text{co}(U)}{2} \subset \text{co}(U)$

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \frac{x+u}{2} = \frac{xu^* + \mathbb{1}}{2} u$. $\|xu^*\| \leq \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^* y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^* y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \leq \||y|^2\|\mathbb{1} \leq \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \geq 0$ admite raíz cuadrada. Por tanto, $|y| = (w + w^*)/2$, donde

$$w = |y| + i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}, \quad w^* = |y| - i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}.$$

Además, $w, w^* = w^{-1}$ unitarios, ya que $|y|$ y $\mathbb{1} - |y|^2$ conmutan.

Hemos probado $x + u = vw + vw^* \Rightarrow A_1 + U \subset U + U$ $(*)$.

$\frac{x+U}{2} \subset \text{co}(U) \Leftrightarrow U \subset 2\,\text{co}(U) - x \Rightarrow \text{co}(U) \subset 2\,\text{co}(U) - x \Rightarrow \frac{x + \text{co}(U)}{2} \subset \text{co}(U)$

Por tanto, la sucesión $x_0 = u$ y $x_{n+1} = (x + x_n)/2$ yace en $\text{co}(U)$.

Claramente $x_n \to x$. $\square$

Demostración

Basta probar $A_1 \subset \overline{\text{co}}(U)$. Tomamos $x \in A_1$, $u \in U$ cualesquiera, sea $y := \dfrac{x+u}{2} = \dfrac{xu^* + \mathbb{1}}{2} u$. $\|xu^*\| \le \|x\|\|u^*\| = \|x\| < 1 \Rightarrow xu^* + \mathbb{1}$ invertible (también y). Podemos escribir $y = v|y|$ con $v \in U$ y $|y| = (y^*y)^{1/2} \in B_A$ positivo.

$\||y|^2\| = \|y^*y\| = \|y\|^2 < 1 \Rightarrow |y|^2 \le \||y|^2\|\mathbb{1} \le \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} - |y|^2 \ge 0$ admite raíz cuadrada. Por tanto, $|y| = (w + w^*)/2$, donde

$$w = |y| + i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}, \quad w^* = |y| - i(\mathbb{1} - |y|^2)^{1/2}.$$

Además, $w, w^* = w^{-1}$ unitarios, ya que $|y|$ y $\mathbb{1} - |y|^2$ conmutan.

Hemos probado $x + u = vw + vw^* \Rightarrow A_1 + U \subset U + U$ $(*)$.

$\dfrac{x+U}{2} \subset \text{co}(U) \Leftrightarrow U \subset 2\,\text{co}(U) - x \Rightarrow \text{co}(U) \subset 2\,\text{co}(U) - x \Rightarrow \dfrac{x + \text{co}(U)}{2} \subset \text{co}(U)$

Por tanto, la sucesión $x_0 = u$ y $x_{n+1} = (x + x_n)/2$ yace en $\text{co}(U)$. Claramente $x_n \to x$. $\square$

Observación de C.K. Fong: $A_1 \subset \mathrm{co}(U)$

Como $x \in A_1$, podemos tomar $x' \in A_1$ tal que $x \in [u, x'[$.

Observación de C.K. Fong: $A_1 \subset \mathrm{co}(U)$

Como $x \in A_1$, podemos tomar $x' \in A_1$ tal que $x \in [u, x'[$.

La sucesión $x_0 = u$ y $x_{n+1} = (x' + x_n)/2$ cumple $x \in [u, x_n]$ para n lo bastante grande, luego $x \in \mathrm{co}(U)$.

Observación de C.K. Fong: $A_1 \subset \mathrm{co}(U)$

Como $x \in A_1$, podemos tomar $x' \in A_1$ tal que $x \in [u, x'[$.
La sucesión $x_0 = u$ y $x_{n+1} = (x' + x_n)/2$ cumple $x \in [u, x_n]$ para n lo bastante grande, luego $x \in \mathrm{co}(U)$.

Claramente, $A = \mathrm{span}\, U$.

Observación de C.K. Fong: $A_1 \subset \mathrm{co}(U)$

Como $x \in A_1$, podemos tomar $x' \in A_1$ tal que $x \in [u, x'[$.
La sucesión $x_0 = u$ y $x_{n+1} = (x' + x_n)/2$ cumple $x \in [u, x_n]$ para n lo bastante grande, luego $x \in \mathrm{co}(U)$.

Claramente, $A = \mathrm{span}\, U$.

Aplicación

Corolario

Sea A una C*-álgebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios, y sea X un espacio normado arbitrario. Entonces, una aplicación lineal $\phi : A \to X$ es continua si y solo si ϕ está acotada en U. Además, se tiene la siguiente igualdad:

$$\|\phi\| = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\|.$$

Demostración

Definimos una nueva norma en A

$$\|a\|_U := \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| : a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j,\ \lambda_j \in \mathbb{K},\ u_j \in U \right\}$$

Aplicación

Corolario

Sea A una C*-álgebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios, y sea X un espacio normado arbitrario. Entonces, una aplicación lineal $\phi : A \to X$ es continua si y solo si ϕ está acotada en U. Además, se tiene la siguiente igualdad:

$$\|\phi\| = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\|.$$

Demostración

Definimos una nueva norma en A

$$\|a\|_U := \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| : a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j,\ \lambda_j \in \mathbb{K},\ u_j \in U \right\}$$

Cumple $\|a\| \leq \|a\|_U$ $\forall a \in A$. Además, $a \in \text{co}(U)$ implica $\|a\|_U \leq 1$.

Aplicación

Corolario

Sea A una C*-álgebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios, y sea X un espacio normado arbitrario. Entonces, una aplicación lineal $\phi : A \to X$ es continua si y solo si ϕ está acotada en U. Además, se tiene la siguiente igualdad:

$$\|\phi\| = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\|.$$

Demostración

Definimos una nueva norma en A

$$\|a\|_U := \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| : a = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j, \ \lambda_j \in \mathbb{K}, \ u_j \in U \right\}$$

Cumple $\|a\| \leq \|a\|_U \ \forall a \in A$. Además, $a \in \mathrm{co}(U)$ implica $\|a\|_U \leq 1$.

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U \ \forall a \in A$.

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U \; \forall a \in A$.

Sea $K = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\| \in \mathbb{R}_0^+$.

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U \ \forall a \in A$.

Sea $K = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\| \in \mathbb{R}_0^+$. Para cada $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ (con cada $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $u_j \in U$) tenemos

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(u_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|\phi(u_j)\| \leq K \sum_{j=1}^n |\lambda_j|,$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U \ \forall a \in A$.

Sea $K = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\| \in \mathbb{R}_0^+$. Para cada $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ (con cada $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $u_j \in U$) tenemos

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(u_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|\phi(u_j)\| \leq K \sum_{j=1}^n |\lambda_j|,$$

luego $\|\phi(a)\| \leq K\|a\|_U = K\|a\|$.

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U$ $\forall a \in A$.

Sea $K = \sup_{u\in U} \|\phi(u)\| \in \mathbb{R}_0^+$. Para cada $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ (con cada $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $u_j \in U$) tenemos

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(u_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|\phi(u_j)\| \leq K \sum_{j=1}^n |\lambda_j|,$$

luego $\|\phi(a)\| \leq K\|a\|_U = K\|a\|$. Por tanto, ϕ es continua con $\|\phi\| \leq K$.

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U$ $\forall a \in A$.

Sea $K = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\| \in \mathbb{R}_0^+$. Para cada $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ (con cada $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $u_j \in U$) tenemos

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(u_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|\phi(u_j)\| \leq K \sum_{j=1}^n |\lambda_j|,$$

luego $\|\phi(a)\| \leq K\|a\|_U = K\|a\|$. Por tanto, ϕ es continua con $\|\phi\| \leq K$.

Por la definición de K, existe una sucesión $\{u_n\}$ en $U \subset B_A$ tal que $\|\phi(u_n)\| \to K$, de modo que $\|\phi\| \geq K$. $\square$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$, $b = \dfrac{a}{\|a\| + \varepsilon} \in A_1 \subset \mathrm{co}(U)$, luego $\|b\|_U \leq 1$ y $\|a\|_U \leq \|a\| + \varepsilon$. Por tanto, $\|a\| = \|a\|_U$ $\forall a \in A$.

Sea $K = \sup_{u \in U} \|\phi(u)\| \in \mathbb{R}_0^+$. Para cada $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$ (con cada $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $u_j \in U$) tenemos

$$\|\phi(a)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(u_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| \|\phi(u_j)\| \leq K \sum_{j=1}^n |\lambda_j|,$$

luego $\|\phi(a)\| \leq K\|a\|_U = K\|a\|$. Por tanto, ϕ es continua con $\|\phi\| \leq K$.

Por la definición de K, existe una sucesión $\{u_n\}$ en $U \subset B_A$ tal que $\|\phi(u_n)\| \to K$, de modo que $\|\phi\| \geq K$. □

Índice

Mejora del teorema

Gardner prueba $A_1 + U \subset U + U$ $(*)$

Teorema

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Si un elemento $a \in A$ cumple $\|a\| < 1 - \frac{2}{n}$ para algún entero $n > 2$, entonces existen n elementos unitarios $u_1, \ldots, u_n \in U$ tales que $a = n^{-1}(u_1 + \cdots + u_n)$.

Mejora del teorema

Gardner prueba $A_1 + U \subset U + U$ $(*)$

Teorema

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Si un elemento $a \in A$ cumple $\|a\| < 1 - \frac{2}{n}$ para algún entero $n > 2$, entonces existen n elementos unitarios $u_1, \ldots, u_n \in U$ tales que $a = n^{-1}(u_1 + \cdots + u_n)$.

"Means and convex combinations of unitary operators" (R.V. Kadison & G.K. Pedersen, 1985).

Mejora del teorema

Gardner prueba $A_1 + U \subset U + U \ (*)$

Teorema

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Si un elemento $a \in A$ cumple $\|a\| < 1 - \frac{2}{n}$ para algún entero $n > 2$, entonces existen n elementos unitarios $u_1, \ldots, u_n \in U$ tales que $a = n^{-1}(u_1 + \cdots + u_n)$.

"Means and convex combinations of unitary operators" (R.V. Kadison & G.K. Pedersen, 1985).

Demostración

Demostración

Sean $x \in A_1$ and $u \in U$ cualesquiera, consideremos el elemento

$$z = u + (n-1)x = u + x + (n-2)x \in A.$$

Existen $u_1, v_1 \in U$ tales que $u + x = u_1 + v_1$.

Demostración

Demostración

Sean $x \in A_1$ and $u \in U$ cualesquiera, consideremos el elemento

$$z = u + (n-1)x = u + x + (n-2)x \in A.$$

Existen $u_1, v_1 \in U$ tales que $u + x = u_1 + v_1$. Luego

$$z = u_1 + v_1 + (n-2)x = u_1 + v_1 + x + (n-3)x.$$

Demostración

Demostración

Sean $x \in A_1$ and $u \in U$ cualesquiera, consideremos el elemento

$$z = u + (n-1)x = u + x + (n-2)x \in A.$$

Existen $u_1, v_1 \in U$ tales que $u + x = u_1 + v_1$. Luego

$$z = u_1 + v_1 + (n-2)x = u_1 + v_1 + x + (n-3)x.$$

Existen $u_2, v_2 \in U$ tales que $v_1 + x = u_2 + v_2$.

Demostración

Demostración

Sean $x \in A_1$ and $u \in U$ cualesquiera, consideremos el elemento

$$z = u + (n-1)x = u + x + (n-2)x \in A.$$

Existen $u_1, v_1 \in U$ tales que $u + x = u_1 + v_1$. Luego

$$z = u_1 + v_1 + (n-2)x = u_1 + v_1 + x + (n-3)x.$$

Existen $u_2, v_2 \in U$ tales que $v_1 + x = u_2 + v_2$. Luego

$$z = u_1 + u_2 + v_2 + (n-3)x = u_1 + u_2 + v_2 + x + (n-4)x.$$

Demostración

Demostración

Sean $x \in A_1$ and $u \in U$ cualesquiera, consideremos el elemento

$$z = u + (n-1)x = u + x + (n-2)x \in A.$$

Existen $u_1, v_1 \in U$ tales que $u + x = u_1 + v_1$. Luego

$$z = u_1 + v_1 + (n-2)x = u_1 + v_1 + x + (n-3)x.$$

Existen $u_2, v_2 \in U$ tales que $v_1 + x = u_2 + v_2$. Luego

$$z = u_1 + u_2 + v_2 + (n-3)x = u_1 + u_2 + v_2 + x + (n-4)x.$$

En $n-3$ pasos más,

$$z = u + (n-1)x = \sum_{j=1}^{n} u_j, \quad \text{donde } u_j \in U \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Demostración

Demostración

Sean $x \in A_1$ and $u \in U$ cualesquiera, consideremos el elemento

$$z = u + (n-1)x = u + x + (n-2)x \in A.$$

Existen $u_1, v_1 \in U$ tales que $u + x = u_1 + v_1$. Luego

$$z = u_1 + v_1 + (n-2)x = u_1 + v_1 + x + (n-3)x.$$

Existen $u_2, v_2 \in U$ tales que $v_1 + x = u_2 + v_2$. Luego

$$z = u_1 + u_2 + v_2 + (n-3)x = u_1 + u_2 + v_2 + x + (n-4)x.$$

En $n-3$ pasos más,

$$z = u + (n-1)x = \sum_{j=1}^{n} u_j, \quad \text{donde } u_j \in U \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Demostración

Demostración

$$z = u + (n-1)x = \sum_{j=1}^{n} u_j, \text{ donde } u_j \in U \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \quad (1)$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \|(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1})\| &\leq (n-1)^{-1}(n\|a\| + 1) \\ &< (n-1)^{-1}(n(1-2/n)+1) = (n-1)^{-1}(n-1) = 1, \end{aligned}$$

Demostración

Demostración

$$z = u + (n-1)x = \sum_{j=1}^{n} u_j, \quad \text{donde } u_j \in U \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \|(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1})\| &\leq (n-1)^{-1}(n\|a\| + 1) \\ &< (n-1)^{-1}\big(n(1-2/n)+1\big) = (n-1)^{-1}(n-1) = 1, \end{aligned}$$

luego $(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1}) \in A_1$.

Demostración

Demostración

$$z = u + (n-1)x = \sum_{j=1}^{n} u_j, \quad \text{donde } u_j \in U \text{ para cada } j = 1, \dots, n \qquad (1)$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \|(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1})\| &\leq (n-1)^{-1}(n\|a\| + 1) \\ &< (n-1)^{-1}\big(n(1-2/n)+1\big) = (n-1)^{-1}(n-1) = 1, \end{aligned}$$

luego $(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1}) \in A_1$.

Aplicamos (1) con $x = (n-1)^{-1}(na - \mathbb{1})$ y $u = \mathbb{1}$:

$$u + (n-1)x = \mathbb{1} + (na - \mathbb{1}) = na = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

□

Demostración

Demostración

$$z = u + (n-1)x = \sum_{j=1}^{n} u_j, \quad \text{donde } u_j \in U \text{ para cada } j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} \|(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1})\| &\leq (n-1)^{-1}(n\|a\| + 1) \\ &< (n-1)^{-1}\big(n(1-2/n)+1\big) = (n-1)^{-1}(n-1) = 1, \end{aligned}$$

luego $(n-1)^{-1}(na - \mathbb{1}) \in A_1$.

Aplicamos (1) con $x = (n-1)^{-1}(na - \mathbb{1})$ y $u = \mathbb{1}$:

$$u + (n-1)x = \mathbb{1} + (na - \mathbb{1}) = na = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

□

Aplicación

Corolario

Todo elemento de una C*-algebra unital A es un multiplo positivo de la suma de tres unitarios.

Demostración

Dado cualquier $a \in A$, tomamos $\varepsilon > 0$ cualquiera y consideramos el elemento $b = \dfrac{1}{3(\|a\| + \varepsilon)} a$.

Aplicación

Corolario

Todo elemento de una C*-algebra unital A es un multiplo positivo de la suma de tres unitarios.

Demostración

Dado cualquier $a \in A$, tomamos $\varepsilon > 0$ cualquiera y consideramos el elemento $b = \dfrac{1}{3(\|a\| + \varepsilon)} a$. Claramente $\|b\| < 1/3$.

Aplicación

Corolario

Todo elemento de una C*-algebra unital A es un multiplo positivo de la suma de tres unitarios.

Demostración

Dado cualquier $a \in A$, tomamos $\varepsilon > 0$ cualquiera y consideramos el elemento $b = \dfrac{1}{3(\|a\| + \varepsilon)} a$. Claramente $\|b\| < 1/3$.

Por el teorema anterior con $n = 3$, podemos escribir $b = (u_1 + u_2 + u_3)/3$ con $u_j \in U$ para $j = 1, 2, 3$.

Aplicación

Corolario

Todo elemento de una C*-algebra unital A es un multiplo positivo de la suma de tres unitarios.

Demostración

Dado cualquier $a \in A$, tomamos $\varepsilon > 0$ cualquiera y consideramos el elemento $b = \dfrac{1}{3(\|a\| + \varepsilon)} a$. Claramente $\|b\| < 1/3$.

Por el teorema anterior con $n = 3$, podemos escribir $b = (u_1 + u_2 + u_3)/3$ con $u_j \in U$ para $j = 1, 2, 3$. Por tanto,

$$a = 3(\|a\| + \varepsilon)b = (\|a\| + \varepsilon)(u_1 + u_2 + u_3)$$

$\square$

Aplicación

Corolario

Todo elemento de una C*-algebra unital A es un multiplo positivo de la suma de tres unitarios.

Demostración

Dado cualquier $a \in A$, tomamos $\varepsilon > 0$ cualquiera y consideramos el elemento $b = \dfrac{1}{3(\|a\| + \varepsilon)}a$. Claramente $\|b\| < 1/3$.

Por el teorema anterior con $n = 3$, podemos escribir $b = (u_1 + u_2 + u_3)/3$ con $u_j \in U$ para $j = 1, 2, 3$. Por tanto,

$$a = 3(\|a\| + \varepsilon)b = (\|a\| + \varepsilon)(u_1 + u_2 + u_3)$$

$\square$

Otra vuelta de tuerca

Teorema

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Si un elemento $a \in A$ cumple $\|a\| \leq 1 - 2/n$ para algún entero $n > 2$, entonces existen n elementos unitarios $u_1, \ldots, u_n \in U$ tales que $a = n^{-1}(u_1 + \cdots + u_n)$.

"Means of unitary operators, revisited" (U. Haagerup, R.V. Kadison & G.K. Pedersen, 2007).

Otra vuelta de tuerca

Teorema

Sea A una C*-algebra unital y $U = \mathcal{U}(A)$ su grupo de unitarios. Si un elemento $a \in A$ cumple $\|a\| \leq 1 - 2/n$ para algún entero $n > 2$, entonces existen n elementos unitarios $u_1, \ldots, u_n \in U$ tales que $a = n^{-1}(u_1 + \cdots + u_n)$.

"Means of unitary operators, revisited" (U. Haagerup, R.V. Kadison & G.K. Pedersen, 2007).

Fin.

Gracias por la atención.