Teorema de Caracterización de Pesos A_1

David Cabezas Berrido

Introducción

Vamos a demostrar el teorema de caracterización de los pesos A_1. Nuestra referencia principal será el libro "Análisis de Fourier" de Javier Duoandikoetxea. Fijemos primero algo de notación.

Trabajaremos en el espacio $\mathbb{R}^n$. En adelante w denotará un peso, es decir, una función medible, no negativa y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Para cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$, notaremos $w(E) = \int_E w dx$, donde la integral es respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. La medida de Lebesgue de un conjunto medible E se denota por $|E|$.

Consideramos el funcional maximal de Hardy-Littlewood M definido por

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \tag{1}$$

para cada f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ $\big(f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\big)$. El supremo de la expresión de arriba es en todos los cubos Q que contienen al punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Recordamos que la condición para que un peso w esté en la clase A_1 es

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq Cw(x) \tag{2}$$

para casi todo $x \in Q$ y para todo cubo Q. La constance C no puede depender ni de x ni de Q, se le llama *constante A_1 de w*.

Demostración del teorema

Primero enunciaremos dos resultados que necesitaremos para la prueba del teorema. El primero es la *desigualdad de Kolmogorov*.

Lema 1. *Si T es un operador $(1,1)$-débil y $\delta \in [0,1[$, se tiene*

$$\int_E |Tf|^\delta dx \leq C(\delta)|E|^{1-\delta}\|f\|_1^\delta$$

para alguna constante $C(\delta)$ dependiente de δ válida para toda f integrable.

Demostración. Partimos de que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C\|f\|_1}{\lambda}$$

para toda $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Tomando $\phi(\lambda) = \lambda^\delta$, se tiene por el TFC que

$$\int_E |Tf(x)|^\delta dx = \int_E \phi(|Tf(x)|)dx = \int_E \int_0^{|Tf(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda dx = \delta \int_E \int_0^{|Tf(x)|} \lambda^{\delta-1} d\lambda dx.$$

Usando Fubini-Tonelli obtenemos

$$\int_E |Tf(x)|^\delta dx = \delta \int_0^{+\infty} \int_{E'} \lambda^{\delta-1} dx d\lambda = \delta \int_0^{+\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{E'} dx d\lambda = \delta \int_0^{+\infty} \lambda^{\delta-1} |E'| d\lambda,$$

donde $E' = \{x \in E : 0 < \lambda < |Tf(x)|\}$. La desigualdad $(1,1)$-débil nos dice que $|E'| \leq \text{mín}\left\{|E|, \frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right\}$, luego

$$\begin{aligned}
\int_E |Tf(x)|^\delta dx &\leq \delta \int_0^{+\infty} \lambda^{\delta-1} \text{mín}\left\{|E|, \frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right\} d\lambda \\
&= \delta \int_0^{C\|f\|_1/|E|} \lambda^{\delta-1}|E| d\lambda + \delta \int_{C\|f\|_1/|E|}^{+\infty} C\|f\|_1 \lambda^{\delta-2} d\lambda \\
&= |E|\lambda^\delta \Big|_0^{C\|f\|_1/|E|} + \delta C\|f\|_1 \frac{\lambda^{\delta-1}}{\delta-1}\Big|_{C\|f\|_1/|E|}^{+\infty} \\
&= |E|C^\delta \|f\|_1^\delta |E|^{-\delta} + \frac{\delta}{1-\delta} C\|f\|_1 C^{\delta-1}\|f\|_1^{\delta-1}|E|^{1-\delta} \\
&\leq |E|^{1-\delta}\|f\|_1^\delta \left(C^\delta + \frac{\delta}{1-\delta}C\right) = |E|^{1-\delta}\|f\|_1^\delta C(\delta).
\end{aligned}$$

□

Sabemos que el operador M es (1,1)-débil, por lo que podremos aplicarle éste resultado. El siguiente es la *desigualdad de Hölder inversa*, que ya fue probado durante el curso.

Lema 2. *Si $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$. Existe $\varepsilon > 0$ dependiente sólo de p y de la constante A_p de w tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w,$$

donde la constante C es válida para todo cubo Q.

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema de caracterización de pesos A_1.

Teorema 3. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Mf(x) < \infty$ casi por doquier en $\mathbb{R}^n$. Si $\delta \in [0,1[$, $w(x) = \big(Mf(x)\big)^\delta$ es un peso A_1 con constante A_1 dependiente del δ pero no de f.*

Recíprocamente, si $w \in A_1$ existen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $k^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\delta \in [0,1[$ tales que $w = k(Mf)^\delta$.

Demostración. Para la primera parte, debemos probar que para todo cubo Q y para casi todo $x \in Q$ se tiene la condición A_1:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf)^\delta \leq C\big(Mf(x)\big)^\delta$$

con C independientemente de Q y de f. Fijados Q y f, sea $\overline{Q}$ el cubo con el mismo centro y el doble de lado. De esta forma se tiene $|\overline{Q}| = 2^n|Q|$. Podemos escribir $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f \cdot \chi_{\overline{Q}}$ y $f_2 = f - f_1$. Tenemos

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(y)+f_2(y)|dy \leq \sup_{Q\ni x}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(y)|dy + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_2(y)|dy\right) \\ &\leq \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(y)|dy + \sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_2(y)|dy = Mf_1(x) + Mf_2(x) \end{aligned}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, si $\delta \in [0,1[$, $Mf(x)^\delta \leq Mf_1(x)^\delta + Mf_2(x)^\delta$ pct (para casi todo) x.

Trabajemos primero con $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Usando el Lema 1, puesto que M es (1,1)-débil y no negativo, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf_1)^\delta &\leq \frac{1}{|Q|}C(\delta)|Q|^{1-\delta}\|f_1\|_1^\delta = C(\delta)\left(\frac{\int_{\overline{Q}}|f|}{|Q|}\right)^\delta = C(\delta)\left(\frac{\int_{\overline{Q}}|f|}{|\overline{Q}|/2^n}\right)^\delta \\ &\leq C(\delta)2^{\delta n}\left(\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|\right)^\delta \leq C(\delta)2^n Mf(x)^\delta \end{aligned} \tag{3}$$

pct $x \in \overline{Q}$, en particular, pct $x \in Q$. En el segundo paso hemos usado que $f_1 = f \cdot \chi_{\overline{Q}}$.

Por otra parte, para cada $y \in Q$ satisfaciendo $Mf_2(y) > 0$ habrá algún cubo $R \ni y$ tal que $\int_R |f_2| > 0$. Como $f_2|_{\overline{Q}} \equiv 0$, el cubo R no puede quedar contenido en $\overline{Q}$. Además, tiene que contener a y, por lo que el lado del cubo R deberá ser mayor que la mitad del lado de Q. Por tanto, existirá una constante $c_n > 0$ dependiente sólo de la dimensión del espacio tal que al dilatar el cubo R por esa constante manteniendo su centro se obtiene un cubo R' tal que $Q \subset R'$ y $|R'| = c_n^n|R|$. Se tiene entonces

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f_2| \leq \frac{c_n^n}{|R'|}\int_{R'}|f| \leq c_n^n Mf(x) \quad \forall x \in Q,$$

y tomando supremo en $R \ni y$ obtenemos $Mf_2(y) \leq c_n^n Mf(x)$ para cada $x, y \in Q$. Esto nos permite acotar la integral

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_2(y)^\delta dy \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q c_n^n Mf(x)^\delta dy = c_n^n Mf(x)^\delta \tag{4}$$

pct $x \in Q$.

Combinando (3) y (4) con la desigualdad que probamos al principio nos queda la condición deseada con $C = C(\delta)2^n + c_n^n$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf)^\delta &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf_1)^\delta + \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf_2)^\delta \leq C(\delta)2^n Mf(x)^\delta + c_n^n Mf(x)^\delta \\ &= \big(C(\delta)2^n + c_n^n\big)Mf(x)^\delta = CMf(x)^\delta\end{aligned}$$

para casi todo $x \in Q$. La arbitrarierdad de Q nos dice que $Mf(x)^\delta \in A_1$ como queríamos.

Ahora probaremos la implicación recíproca. Supongamos que $w \in A_1$, entonces $w \in A_p$ para todo $p \geq 1$. Podemos usar el Lema 2 para obtener $C, \varepsilon > 0$ satisfaciendo

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w = \frac{Cw(Q)}{|Q|} \leq C' w(x)$$

pct $x \in Q$ y para todo cubo Q. Para la última desigualdad hemos usado la condición (2). La constante $C' > 0$ no depende ni de x ni de Q. Fijando $x \in \mathbb{R}^n$ y tomando supremos obtenemos

$$M(w^{1+\varepsilon})(x)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq C' w(x)$$

casi por doquier en $\mathbb{R}^n$. Si llamamos $f = w^{1+\varepsilon} \in L^1_{\text{loc}}$ y $\delta = \frac{1}{1+\varepsilon} \in]0,1[$, esto se lee como

$$Mf(x)^\delta \leq C' w(x) \quad \text{pct } x \in \mathbb{R}^n.$$

Además, aplicando el teorema de diferenciación de Lebesgue obtenemos que pct $x \in \mathbb{R}^n$,

$$w^{1+\varepsilon}(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} w \leq Mw^{1+\varepsilon}(x) = Mf(x),$$

donde $Q(x,r)$ denota el cubo en $\mathbb{R}^n$ de centro x y radio r: $\{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\|_\infty < r\}$. La desigualdad es clara por la definición de M, que es el supremo de la misma expresión pero en los cubos que contienen a x. Elevando ambos miembros a $\delta = (1+\varepsilon)^{-1}$ obtenemos $w(x) \leq Mf(x)^\delta$ pct $x \in \mathbb{R}^n$.

Definiendo $k(x) = \frac{w(x)}{Mf(x)^\delta}$, se tiene $0 < C'^{-1} \leq k(x) \leq 1$ casi por doquier en $\mathbb{R}^n$. Por tanto, $k, 1/k \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $w = k(Mf)^\delta$. □

Referencias

[1] J. Duoandikoetxea: *Análisis de Fourier*. Universidad Autónoma de Madrid, 1995.