

Tarea evaluable: Análisis de Componentes Principales

David Cabezas Berrido

Contents

1	Carga, análisis exploratorio y preparación de los datos	2
1.1	Carga y tratamiento de valores perdidos	2
1.2	Estudio de la escala y variabilidad de las variables	3
1.3	Estandarización de los datos	4
1.4	Análisis de la correlación de las variables	5
1.5	Limpieza de outliers	5
2	Análisis de Componentes Principales	7
2.1	Obtención de las componentes principales y sus varianzas explicada y acumulada	7
2.2	Selección del número óptimo de componentes principales	9
2.3	Representación gráfica de las componentes principales	10

He elegido el **Problema 2**, sobre las puntuaciones de 13 empresas en 8 indicadores económicos.

Carga, análisis exploratorio y preparación de los datos

1.1 Carga y tratamiento de valores perdidos

Comenzamos cargando los datos de **empresas.sav**.

```
> library(foreign)
> datos<-read.spss("empresas.sav", to.data.frame = TRUE, reencode="utf-8")
> round(datos,4)
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
1	0.1280	0.9444	2.1667	5.7943	5.4803	11.0963	3.9821	5.7987
2	1.5525	4.2997	4.3333	5.4044	5.3356	11.0115	5.5841	8.1026
3	1.2148	6.8998	6.5000	4.0673	6.8894	24.7631	7.2766	14.3987
4	2.4759	8.6931	8.6667	7.4094	4.1379	31.5858	10.3398	17.8725
5	6.0131	11.2399	10.8333	0.0299	10.0368	10.1698	1.9664	7.5506
6	6.7350	13.1272	13.0000	1.5495	5.8742	6.1346	1.0636	3.9489
7	7.5839	14.8487	15.1667	11.3959	2.7099	6.9551	1.6670	4.7504
8	8.0142	18.1598	17.3333	6.3268	2.5565	41.5239	12.3739	26.2319
9	8.1197	19.5661	19.5000	6.5147	3.4624	31.0378	10.1604	20.1541
10	11.5167	21.7262	21.6667	5.0601	5.9190	43.2783	12.2356	26.5714
11	10.7337	24.1411	23.8333	3.9694	5.5955	11.3741	5.2363	7.3334
12	11.9853	24.8071	26.0000	4.8855	4.8703	9.7093	4.0888	6.8327
13	14.3636	25.4261	28.1667	7.7611	3.5246	34.4364	9.7984	20.4134
14	20023.0000	18.0000	16.0000	8.0000	8.0000	10.0000	NA	NA

Nos informan de que hay 13 empresas y vemos 14 líneas. La última línea es muy sospechosa: todos sus valores son enteros, tiene dos valores perdidos y el valor 20023 en la variable X1 (indicador del volumen de facturación), lo que distorsiona el **summary** de los datos:

x1		x2		x3		x4	
Min.	: 0.128	Min.	: 0.944	Min.	: 2.167	Min.	: 0.030
1st Qu.:	3.360	1st Qu.:	9.330	1st Qu.:	9.208	1st Qu.:	4.272
Median :	7.799	Median :	16.424	Median :	15.583	Median :	5.599
Mean :	1436.674	Mean :	15.134	Mean :	15.226	Mean :	5.584
3rd Qu.:	11.321	3rd Qu.:	21.186	3rd Qu.:	21.125	3rd Qu.:	7.186
Max.	:20023.000	Max.	:25.426	Max.	:28.167	Max.	:11.396

x5		x6		x7		x8	
Min.	: 2.557	Min.	: 6.135	Min.	: 1.064	Min.	: 3.949
1st Qu.:	3.678	1st Qu.:	10.042	1st Qu.:	3.982	1st Qu.:	6.833
Median :	5.408	Median :	11.235	Median :	5.584	Median :	8.103
Mean :	5.314	Mean :	20.220	Mean :	6.598	Mean :	13.074
3rd Qu.:	5.908	3rd Qu.:	31.449	3rd Qu.:	10.160	3rd Qu.:	20.154
Max.	:10.037	Max.	:43.278	Max.	:12.374	Max.	:26.571
				NA's	:1	NA's	:1

En la variable X1, el tercer cuartil vale 11.321 y la media es 1436.674, debido a que la fila 14 introduce un valor desproporcionado.

Tenemos razones para pensar que las filas que corresponden a las 13 empresas son las 13 primeras, por lo que eliminamos la 14.

```
> datos<-datos[-14,]
```

1.2 Estudio de la escala y variabilidad de las variables

Visualizamos ahora el resumen de los datos

x1	x2	x3	x4
Min. : 0.128	Min. : 0.944	Min. : 2.167	Min. : 0.030
1st Qu.: 2.476	1st Qu.: 8.693	1st Qu.: 8.667	1st Qu.: 4.067
Median : 7.584	Median :14.849	Median :15.167	Median : 5.404
Mean : 6.957	Mean :14.914	Mean :15.167	Mean : 5.398
3rd Qu.:10.734	3rd Qu.:21.726	3rd Qu.:21.667	3rd Qu.: 6.515
Max. :14.364	Max. :25.426	Max. :28.167	Max. :11.396

x5	x6	x7	x8
Min. : 2.557	Min. : 6.135	Min. : 1.064	Min. : 3.949
1st Qu.: 3.525	1st Qu.:10.170	1st Qu.: 3.982	1st Qu.: 6.833
Median : 5.336	Median :11.374	Median : 5.584	Median : 8.103
Mean : 5.107	Mean :21.006	Mean : 6.598	Mean :13.074
3rd Qu.: 5.874	3rd Qu.:31.586	3rd Qu.:10.160	3rd Qu.:20.154
Max. :10.037	Max. :43.278	Max. :12.374	Max. :26.571

Observamos que no quedan valores nulos, luego no debemos preocuparnos de cómo imputarlos.

También podemos usar un boxplot para observar la distribución de cada variable con mayor comodidad.

```
> boxplot(datos,main="Análisis exploratorio de datos",
+         xlab="Indicadores económicos",
+         ylab="Distribución de valores",
+         col=c(1:15))
```

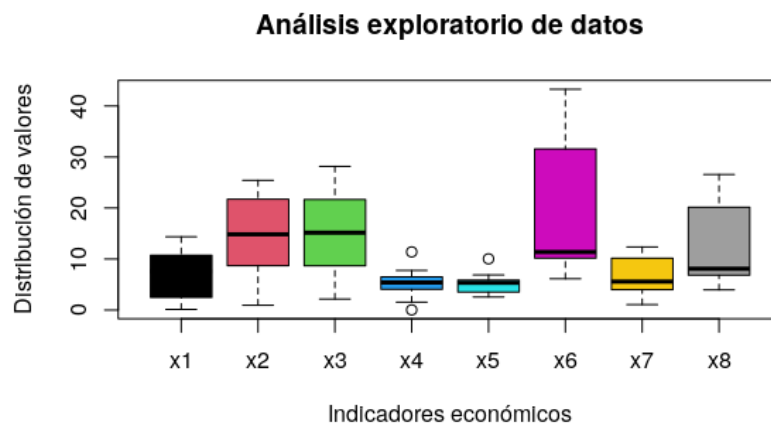


Figure 1: Distribución de las variables

Observamos que las variables tienen escalas diferentes, por ejemplo el indicador X6 llega a tomar el valor 40 mientras que los indicadores X4 y X5 no pasan del valor 10. También observamos algunos outliers en los indicadores X4 y X5. Además, nos percatamos de que algunas distribuciones son bastante asimétricas: las variables X6, X7 y X8 tienen una mediana muy próxima al primer cuartil, mientras que la variable X5 la tiene muy próxima al tercer cuartil.

1.3 Estandarización de los datos

Los distintos rangos de escalas de las variables nos sugieren que estas no están estandarizadas, lo corroboramos obteniendo la media y desviación típica de cada columna.

```
> round(colMeans(datos),4)
      x1      x2      x3      x4      x5      x6      x7      x8
6.9566 14.9138 15.1667  5.3976  5.1071 21.0058  6.5979 13.0738

> round(apply(datos, 2, sd),4)
      x1      x2      x3      x4      x5      x6      x7      x8
4.5451  8.1626  8.4380  2.8238  1.9919 13.7798  4.0307  8.2497
```

Observamos que las columnas no tienen media 0 y varianza unidad, por lo que los datos no están estandarizados. Lo hacemos nosotros.

```
> datos_pca<-scale(datos)

> round(colMeans(datos_pca),4)
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8
 0  0  0  0  0  0  0  0

> round(apply(datos_pca, 2, sd),4)
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8
 1  1  1  1  1  1  1  1
```

Nos preguntamos que problemas podríamos haber encontrado en el caso de no hacer la estandarización, y son dos. Para entenderlos, debemos tener claro el objetivo de PCA: Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^8 (en este caso hay 8 variables) tal que la distribución esté contenida en la mayor medida posible un subespacio vectorial (de dimensión lo más pequeña posible) formado por algunos elementos de la base, de forma que al realizar la proyección perdamos la menor información posible. El no estandarizar supone dos problemas:

- El primero es que las variables tienen distinta escala, por lo que las variables con mayor escala cobrarían más importancia (comparando con el indicador X6, los indicadores X4 y X5 están muy cercanos al eje, por lo que la distribución “es bastante estrecha” en estas dimensiones, este problema lo resolvemos dividiendo los valores por su desviación típica, para así igualar sus escalas.
- El segundo problema es que los valores de las variables no están centrados en torno al cero, por lo que como mucho podríamos esperar que la distribución esté contenida en un subespacio afín y no vectorial, resolvemos este problema restando la media de la columna, para trasladar la distribución al origen.

1.4 Análisis de la correlación de las variables

Primero debemos preguntarnos si tiene sentido hacer un Análisis de Componentes Principales, en la matriz de correlación observamos altas correlaciones entre algunas variables: un 97% de correlación entre los índices X1 y X2, un 98% de correlación entre los índices X1 y X3, un 99% de correlación entre los índices X6 y X8, y algunas más.

```
> round(cor(datos_pca),4) # Matriz de correlación
```

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x1	1.0000	0.9722	0.9805	0.1028	-0.2575	0.2643	0.2142	0.2988
x2	0.9722	1.0000	0.9940	0.1130	-0.3080	0.3122	0.2933	0.3479
x3	0.9805	0.9940	1.0000	0.1479	-0.3261	0.2984	0.2795	0.3285
x4	0.1028	0.1130	0.1479	1.0000	-0.8409	0.2515	0.2958	0.2294
x5	-0.2575	-0.3080	-0.3261	-0.8409	1.0000	-0.3483	-0.4155	-0.3428
x6	0.2643	0.3122	0.2984	0.2515	-0.3483	1.0000	0.9666	0.9940
x7	0.2142	0.2933	0.2795	0.2958	-0.4155	0.9666	1.0000	0.9632
x8	0.2988	0.3479	0.3285	0.2294	-0.3428	0.9940	0.9632	1.0000

Por tanto, parece que podremos reducir en cierta medida el número de variables sin perder demasiada información. Nos aseguramos de esto realizando el Test de Bartlett, debe aplicarse a los datos normalizados, pero ya lo están.

```
> library(psych)
> cortest.bartlett(cor(datos_pca),n=13) # n es el tamaño de muestra
$chisq
[1] 154.2293
$p.value
[1] 2.122684e-19
```

Observamos un p-valor prácticamente nulo, por lo que rechazamos la hipótesis nula y concluimos que los datos están correlados, por lo que procedemos con el Análisis de Componentes Principales.

1.5 Limpieza de outliers

Este análisis es muy sensible a outliers, y comprobamos en la Figura 1 que las variables X4 y X5 presentan algunos, que no cambian con la estandarización. Por eso los sustituimos por la media con el código que mejoramos en la tarea voluntaria, para realizar justo el número necesario de pasadas en cada columna que presente outliers.

```
outlier<-function(data,na.rm=T){ # Función para limpiar los outliers
  continue<-TRUE
  while(continue){
    H<-1.5*IQR(data)
    data[data<quantile(data,0.25,na.rm = T)-H]<-NA
    data[data>quantile(data,0.75, na.rm = T)+H]<-NA
    continue<-any(is.na(data))
    data[is.na(data)]<-mean(data,na.rm=T)
  }
  data
}
```

Aplicamos esta función a las dos columnas que presentan outliers.

```
> datos_pca[,4]<-outlier(datos_pca[,4])  
> datos_pca[,5]<-outlier(datos_pca[,5])
```

En la Figura 2 comparamos los datos estandarizados antes y después de eliminar los outliers. Apreciamos que la estandarización ha centrado las distribuciones en el 0 y ha equiparado las escalas de las variables, pero se mantienen los outliers (comparar boxplot de la izquierda con Figura 1). Eliminar los outliers también ha desplazado y modificado el grueso de la distribución de estas variables (comparar el boxplot de la izquierda con el de la derecha (las cajas azul claro, X4 y oscuro, X5)).

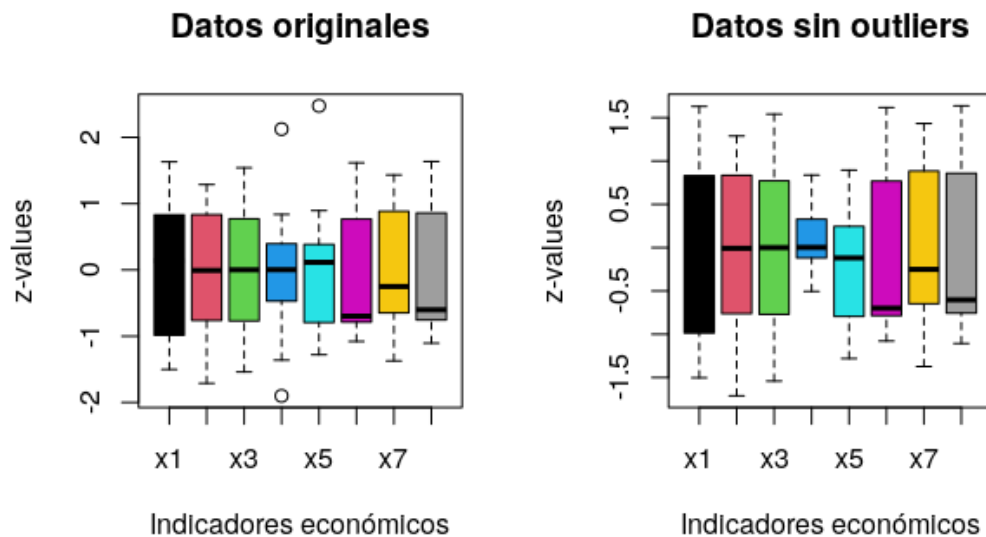


Figure 2: Limpieza de los outliers

2 Análisis de Componentes Principales

2.1 Obtención de las componentes principales y sus varianzas explicada y acumulada

Realizamos el ACP:

```
PCA<-prcomp(datos_pca, scale=T, center = T)
```

En la matriz de rotación, podemos consultar el peso de cada variable en cada componente principal:

```
> round(PCA$rotation,4)
```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8
x1	0.3576	-0.4467	0.0024	-0.1589	0.4267	-0.6514	0.0017	-0.2023
x2	0.3720	-0.4295	0.0686	0.0104	-0.2191	0.4928	0.4264	-0.4468
x3	0.3713	-0.4320	0.0332	-0.1031	-0.2512	0.1648	-0.4236	0.6278
x4	0.2381	0.2921	-0.5866	-0.7069	-0.0497	0.0709	0.0819	-0.0082
x5	-0.2531	-0.0291	0.6979	-0.6654	-0.0052	0.0393	0.0588	0.0108
x6	0.3994	0.3426	0.2280	0.0299	0.3303	0.3018	-0.5885	-0.3518
x7	0.3857	0.3516	0.2473	0.0768	-0.6673	-0.4484	0.0306	-0.1153
x8	0.4084	0.3197	0.2233	0.1214	0.3873	0.0830	0.5304	0.4776

Table 1: Matriz de cambio de base entre las variables y las componentes principales. Contiene las contribuciones de las variables a cada componente principal.

También podemos ver con `summary` la desviación típica (`PCA$sdev`), la varianza explicada y la acumulada por cada componente principal:

```
> summary(PCA)
```

Importance of components:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8
Standard deviation	2.0461	1.4874	1.1025	0.55772	0.23779	0.10786	0.06953	0.03781
Proportion of Variance	0.5233	0.2765	0.1519	0.03888	0.00707	0.00145	0.00060	0.00018
Cumulative Proportion	0.5233	0.7999	0.9518	0.99069	0.99776	0.99922	0.99982	1.00000

Podemos visualizar estas cantidades utilizando el paquete `ggplot`.

```
library("ggplot2")
> prop_var<- PCA$sdev^2 / sum(PCA$sdev^2)
> ggplot(data = data.frame(prop_var, pc = 1:8),
+       aes(x = pc, y = prop_var, fill=prop_var )) +
+   geom_col(width = 0.3) +
+   scale_y_continuous(limits = c(0,0.6)) + theme_bw() +
+   labs(x = "Componente principal", y= " Proporción de varianza explicada")
```

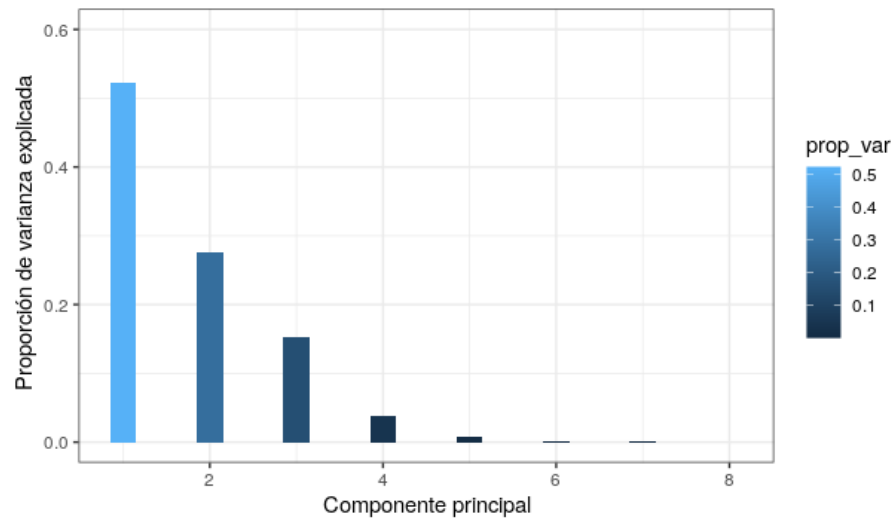


Figure 3: Proporción de varianza explicada por cada componente principal

```
> cum_var<-cumsum(prop_var)
> ggplot( data = data.frame(cum_var, pc = 1:8),
+         aes(x = pc, y = cum_var ,fill=cum_var )) +
+   geom_col(width = 0.5) +
+   scale_y_continuous(limits = c(0,1)) +
+   theme_bw() +
+   labs(x = "Componente principal",
+        y = "Proporción de varianza acumulada")
```

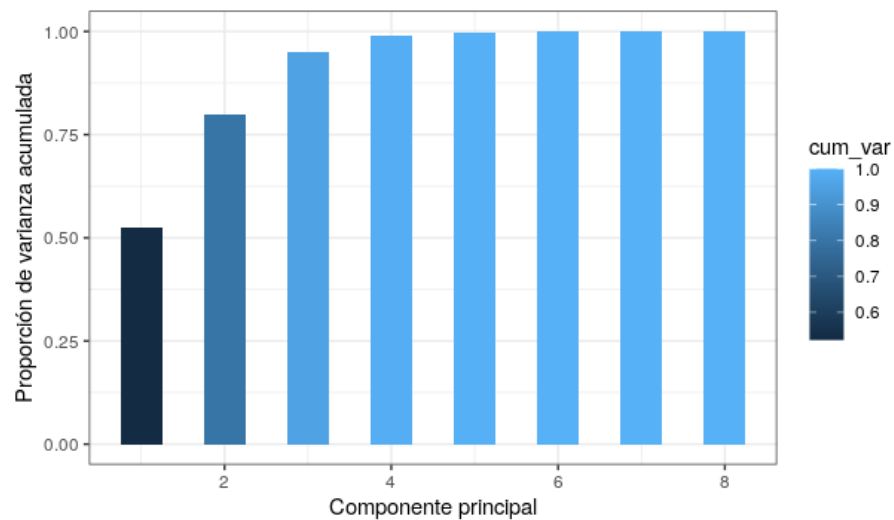


Figure 4: Proporción de varianza acumulada por cada componente principal

2.2 Selección del número óptimo de componentes principales

El método que se ha explicado en las sesiones consiste en tomar las componentes principales cuya varianza sobrepase la media de las varianzas.

```
> round(PCA$sdev^2,4)
[1] 4.1867 2.2123 1.2155 0.3111 0.0565 0.0116 0.0048 0.0014
> round(mean(PCA$sdev^2),4)
[1] 1
```

En este caso seleccionaríamos las tres primeras componentes principales.

También hemos investigado acerca del [Método del Codo](#). Para ello, obtenemos una representación de la varianza acumulada, Figura 4, (también se puede hacer con la explicada, pero es algo más complejo de interpretar a simple vista) con puntos y líneas.

```
> ggplot( data = data.frame(cum_var, pc = 1:8),
+         aes(x = pc, y = cum_var ,fill=cum_var )) +
+   geom_line(size = 1.5) +
+   geom_point(size=3, fill="black") +
+   scale_y_continuous(limits = c(0,1)) +
+   theme_bw() +
+   labs(x = "Componente principal",
+        y = "Proporción de varianza acumulada")
```

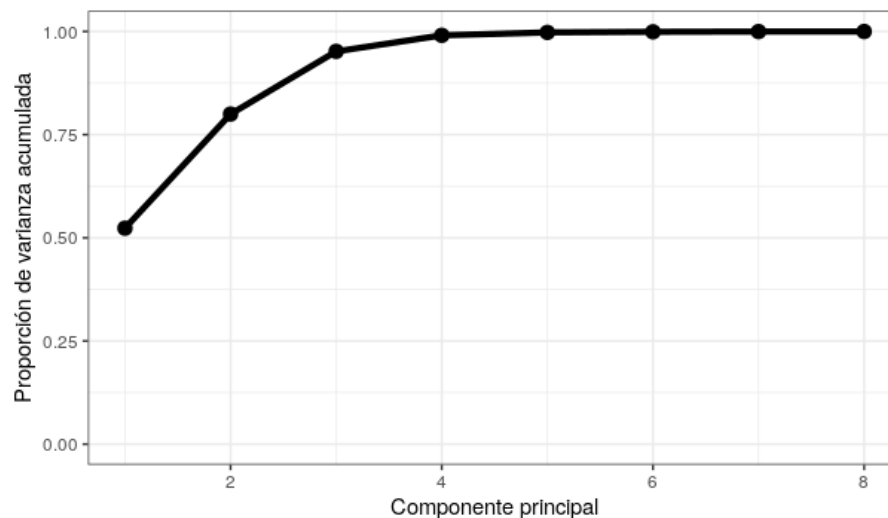


Figure 5: Proporción de varianza acumulada por cada componente principal

También tenemos el código de la curva para 3 componentes principales. Las tres primeras componentes principales acumulan una varianza explicada del 95.18%.

2.3 Representación gráfica de las componentes principales

Con ayuda del paquete `factoextra` podemos visualizar para cada dos de las tres componentes principales la proyección (en el subespacio correspondiente esas dos componentes) de las instancias y sus contribuciones a las varianzas. Así como el peso de las variables en cada componente principal. Lo que podemos identificar en estas representaciones, también se refleja en la matriz de rotación, Tabla 1 (las relaciones entre variables y componentes principales) y en la matriz de coordenadas de las empresas correspondientes (Tabla 2 a las tres primeras componentes principales).

```
> t(round(PCA$x[,1:3],3))
```

	1	2	3	4	5	6	7
PC1	-2.764	-2.193	-1.711	0.456	-1.530	-1.830	-0.934
PC2	1.334	1.036	1.175	2.342	-0.461	-1.005	-1.199
PC3	-0.354	-0.031	2.010	-0.749	-0.497	-0.239	-1.637

	8	9	10	11	12	13
PC1	2.673	1.892	2.450	-0.121	0.251	3.360
PC2	1.358	0.503	0.248	-2.337	-2.514	-0.479
PC3	-0.383	-0.460	2.115	1.063	0.110	-0.947

Table 2: Matriz con las coordenadas de las proyecciones de las empresas en el subespacio formado por las tres primeras componentes principales.

```
> fviz_pca(PCA, axes=c(1,2),
+           alpha.ind="contrib", col.var = "cos2",col.ind="seagreen",
+           gradient.cols = c("#FDF50E", "#FD960E", "#FD1E0E"),
+           repel=TRUE,
+           legend.title="Distancia")+theme_bw()
```

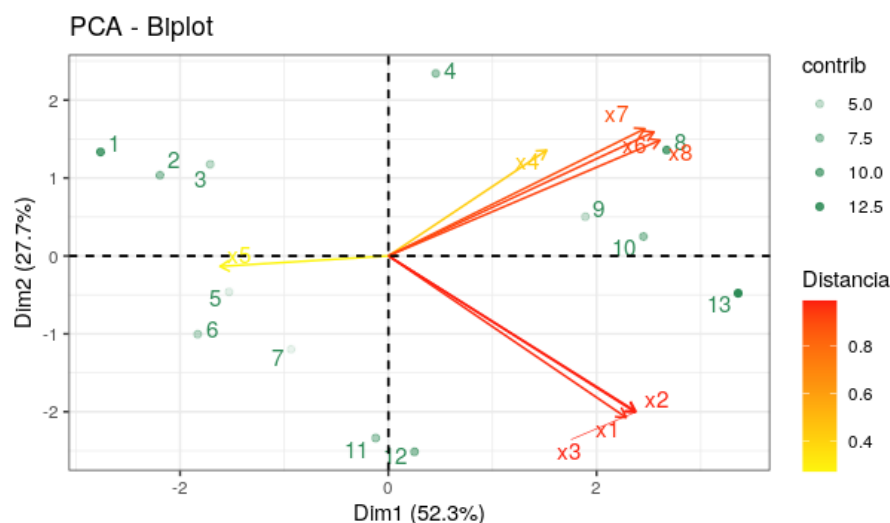


Figure 6: Primera y segunda componente principal

Las instancias que más contribuyen a la varianza son las que aparecen en verde más oscuro: la empresa 13, la 8 y la 1. Las que menos son las que aparecen en verde más claro: la empresa 7, la 5, la 9 y la 3. Por ejemplo, las empresas 11 y 12 tienen una coordenada en la segunda componente por debajo de -2 y una coordenada cercana a 0 en la primera componente (como puede comprobarse en la Tabla 2), mientras que la empresa 13 tiene una coordenada en la primera componente cercana a 3 y en la segunda componente cercana a -0.5.

Observamos que respecto a lo que concierne a las dos primeras componentes principales, las variables X6, X7 y X8 están muy correladas, igual pasa con las variables X1, X2, y X3. Justamente las seis variables que acabamos de comentar son las que más contribuyen a las dos primeras componentes principales. En la Tabla 1 vemos que tienen pesos mayores en estas componentes que las variables X4 y X5. También observamos que los signos de los pesos concuerdan con la posición de las variables en la parte positiva o negativa de los ejes. Por último, cabe destacar que la variable X5 queda proyectada muy cerca del eje de la primera componente, por lo que apenas contribuye a la segunda componente, de hecho en la Tabla 1 observamos que su peso es prácticamente nulo.

```
> fviz_pca(PCA, axes=c(1,3),
+           alpha.ind="contrib", col.var = "cos2",col.ind="seagreen",
+           gradient.cols = c("#FDF50E", "#FD960E", "#FD1E0E"),
+           repel=TRUE,
+           legend.title="Distancia")+theme_bw()
```

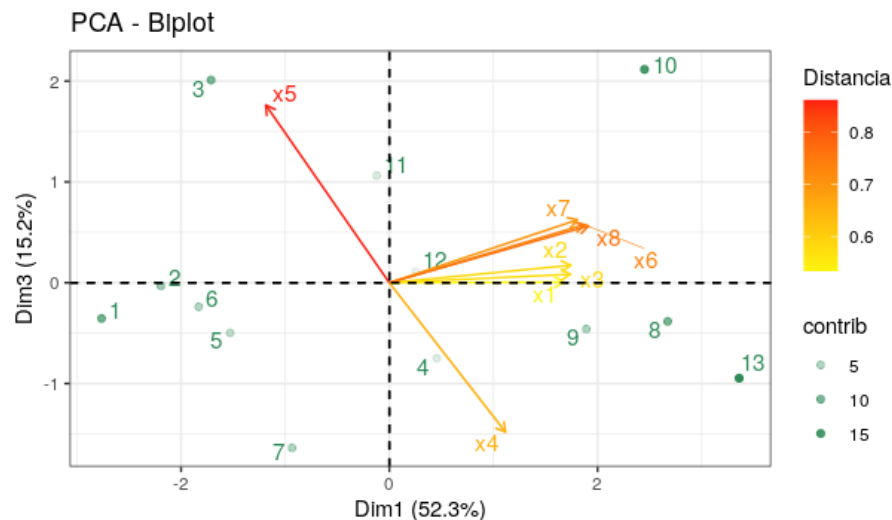


Figure 7: Primera y tercera componente principal

```
> fviz_pca(PCA, axes=c(2,3),
+           alpha.ind="contrib", col.var = "cos2",col.ind="seagreen",
+           gradient.cols = c("#FDF50E", "#FD960E", "#FD1E0E"),
+           repel=TRUE,
+           legend.title="Distancia")+theme_bw()
```

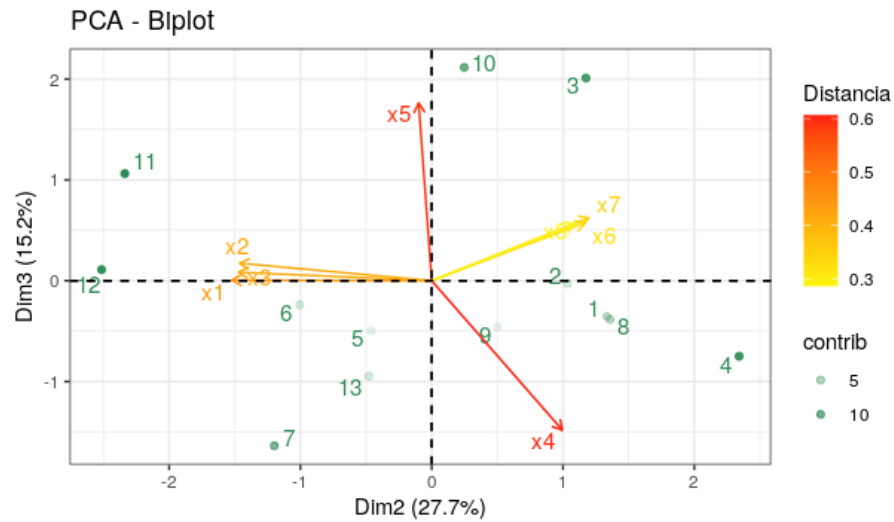


Figure 8: Segunda y tercera componente principal

Observando las otras dos gráficas, podemos hacer un análisis análogo al que hemos hecho para la primera. Por destacar alguna idea novedosa, observamos que las variables X1, X2, X3 aparecen también muy correladas para estos dos pares de componentes principales; y lo mismo ocurre con las variables X6, X7, X8. Si nos vamos a la matriz de correlación al principio de la Sección 1.4, observamos que entre estas variables existen correlaciones de entre el 96 y el 99%, así que es lógico que esto ocurra.