Relación 1

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1.

a) Y sigue una DNM con vector de medias α y matriz de covarianzas $D\Sigma D' + \sigma^2 I$, utilizaremos la función característica para comprobarlo.

$$\Phi_Y(t) = E[e^{it'(\alpha+DX+Z)}] = E[e^{it'\alpha}e^{it'DX}e^{it'Z}],$$

sacamos la constante y utilizamos que $e^{it'DX}$ y $e^{it'Z}$ son independientes (funciones medibles de vectores aleatorios independientes) para separar las esperanzas,

$$\Phi_Y(t) = E[e^{it'\alpha}e^{it'DX}e^{it'Z}] = e^{it'\alpha}E[e^{it'DX}]E[e^{it'Z}] = e^{it'\alpha}\Phi_X(D't)\Phi_Z(t).$$

Sustituimos las funciones características de X y Z para obtener lo que queríamos:

$$\Phi_Y(t) = e^{it'\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2}t'D\Sigma D't\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}t'\sigma^2 It\right\} = \exp\left\{it'\alpha - \frac{1}{2}t'\big(D\Sigma D' + \sigma^2 I\big)t\right\}.$$

Por tanto, $Y \sim N_p\big(\alpha, D\Sigma D' + \sigma^2 I\big)$.

b)

Ejercicio 3. Debemos tener en cuenta que $\alpha'(X-\mu)$ es una variable aleatoria unidimensional.

Si $k=0$, el resultado es obvio: $E[1]=1$, ya que $m=\frac{k}{2}=0$ y $0! = a^0 = 1$ para cualquier número real a. Suponemos en adelante $k>0$.

Si $\alpha = 0$, obtenemos otra trivialidad: $E[0]=0$. De lo contrario, podemos ver α' como una matriz $1\times p$ de rango máximo y aplicar el resultado sobre transformaciones lineales de rango máximo (RESULTADO 4 de DNM para $\Sigma > 0$) para concluir $Y \sim N(\alpha'\mu - \alpha'\mu, \alpha'\Sigma\alpha'') = N(0, \alpha'\Sigma\alpha)$.

El resultado auxiliar nos proporciona entonces $E[Y^k]=0$ para k impar y
$E[Y^k] = (\alpha'\Sigma\alpha)^{\frac{k}{2}}(k-1)!!$, sustituyendo $m=\frac{k}{2}$ obtenemos $E[Y^k] = (\alpha'\Sigma\alpha)^m(2m-1)!!$ y sólo queda probar $(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ para todo $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$. Esto lo haremos por inducción sobre m:

En el caso $m=1$ basta desarrollar y obtenemos

$$(2\cdot 1-1)!! = 1!! = 1; \qquad \frac{(2\cdot 1)!}{2^1 1!} = \frac{2}{2} = 1$$

Supuesta la igualdad para $m-1$, es decir,

$$(2m-3)!! = \big(2(m-1)-1\big)!! = \frac{\big(2(m-1)\big)!}{2^{m-1}(m-1)!} = \frac{(2m-2)!}{2^{m-1}(m-1)!}.$$

Comprobamos para m,

$$\begin{aligned} &(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!} \iff (2m-1)(2m-3)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!} \\ \underset{m-1}{\overset{\text{Caso}}{\iff}} \quad &(2m-1)\frac{(2m-2)!}{2^{m-1}(m-1)!} = \frac{(2m)!}{2^m m!} \iff (2m-1)! = \frac{(2m)!}{2m} \end{aligned}$$

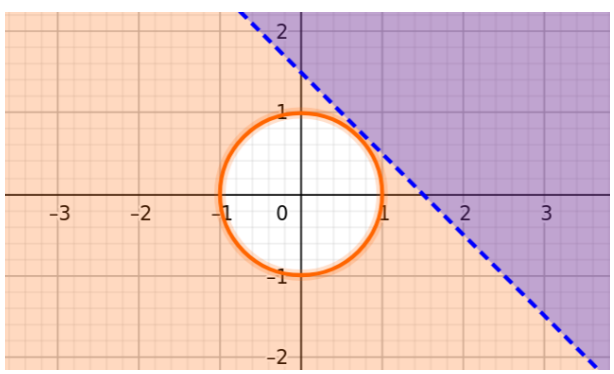
y obtenemos lo que queríamos.

Ejercicio 5.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

Los menores de orden 1 y 2 de la diagonal principal de Σ valen los dos $1 > 0$, luego Σ es definida positiva si, y solo si su determinante es positivo. Hemos de probar por tanto $0 \geq |\Sigma| = 1 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$, sabiendo que $\sigma_{13} + \sigma_{23} > \frac{3}{2}$. Por comodidad, renombramos $\sigma_{13} = x$, $\sigma_{23} = y$; queremos probar $x^2 + y^2 \geq 1$ para $x + y > \frac{3}{2}$.

Geométricamente, esto no es más que decir que el semiplano abierto $P : x + y > \frac{3}{2}$ está contenido en el complementario del disco abierto unidad $D : x^2 + y^2 < 1$, o lo que es lo mismo, $P \cap D = \emptyset$. En esta figura se ve claramente



Haremos una demostración analítica, la función $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0$ está minorada y por tanto tiene ínfimo no negativo en el conjunto P. Caben tres posibilidades:

- El ínfimo se alcanza en un punto interior donde se anula el gradiente, pero $\nabla f(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ en P.
- El ínfimo se alcanza en la frontera de P, donde $y = \frac{3}{2} - x$. $f(x, \frac{3}{2} - x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{4}$, que es mínimo en $x = \frac{3}{4}$ y vale $1{,}125 > 1$.

- Existe una sucesión divergente cuya imagen por f converge al ínfimo, esto no puede darse puesto que f es el cuadrado de la norma euclídea.

De esto deducimos que $\inf\{f(x,y) : (x,y) \in P\} = 1{,}125$ y puesto que P no contiene a su frontera, $x^2 + y^2 > 1{,}125$ en todo P. Y por tanto $|\Sigma| \leq 0$, por lo que Σ no puede ser definida positiva.

Ejercicio 7. $Y \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$|\Sigma| = 144 > 0$ y Σ simétrica. Luego es definida positiva. La idea de los apartados a-e es escribir la variable que queremos estudiar como una transformada lineal de rango máximo de Y y aplicar el resultado de transformaciones lineales de rango máximo para $\Sigma > 0$.

a)
$$Z = 2Y_1 - Y_2 + 3Y_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} Y$$

Como la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, el resultado sobre transformaciones lineales de máximo rango para $\Sigma > 0$ nos asegura que $Z \sim N_1(B\mu, B\Sigma B') = N_1(17, 21)$.

b) (Z_1, Z_2) donde $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$, $Z_2 = Y_1 - Y_2 + 2Y_3$.

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Y = BY$$

Esta vez el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es 2, y el mismo resultado nos da $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}\right)$.

c)
$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y = BY$$

El rango de B sigue siendo máximo, por tanto $Y_2 \sim N_1(1, 13)$.

d)
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Una vez más el mismo resultado nos dice que $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right)$.

e)

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1+Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} Y$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1+Y_2) \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{21}{4} \end{pmatrix}\right).$$

f) Encontrar Z tal que $Z = (T')^{-1}(Y-\mu) \sim N_3(0, I)$. Con T la matriz correspondiente a la factorización de Cholesky, $\Sigma = T'T$.

Utilizamos el algoritmo para la descomposición de Cholesky implementado en la herramienta `SageMath`, y obtenemos que (redondeando)

$$\Sigma = T'T = \begin{pmatrix} 2{,}4495 & 0 & 0 \\ 0{,}4082 & 3{,}5824 & 0 \\ -0{,}8165 & 1{,}2096 & 1{,}3675 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}4495 & 0{,}4082 & -0{,}8165 \\ 0 & 3{,}5824 & 1{,}2096 \\ 0 & 0 & 1{,}3675 \end{pmatrix}$$

También con `SageMath`, calculamos la inversa:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4082 & -0{,}0465 & 0{,}2849 \\ 0 & 0{,}2791 & -0{,}2469 \\ 0 & 0 & 0{,}7312 \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z = \begin{pmatrix} 0{,}4082 & -0{,}0465 & 0{,}2849 \\ 0 & 0{,}2791 & -0{,}2469 \\ 0 & 0 & 0{,}7312 \end{pmatrix} (Y-\mu)$$

Como $T'T = \Sigma$, se tiene $Z \sim N_3(0, I)$.

g) Encontrar Z tal que $Z = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(Y-\mu) \sim N_3(0, I)$. Con $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ la inversa de la matriz correspondiente a la factorización raíz cuadrada, $\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}$.

Con la función `np.linalg.eigh`, obtenemos una matriz ortogonal

$$V = \begin{pmatrix} -0{,}4358 & 0{,}8996 & 0{,}0276 \\ 0{,}3268 & 0{,}1296 & 0{,}9362 \\ -0{,}8386 & -0{,}417 & 0{,}3505 \end{pmatrix}$$

que cumple

$$V'\Sigma V = \begin{pmatrix} 1{,}4018 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}0712 & 0 \\ 0 & 0 & 14{,}527 \end{pmatrix} = D$$

Tomando

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1{,}4018} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7{,}0712} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{14{,}527} \end{pmatrix}$$

tenemos usando que V es ortogonal,

$$\Sigma = VDV' = VD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V' = VD^{\frac{1}{2}}V'VD^{\frac{1}{2}}V'$$

Por tanto debemos tomar $\Sigma^{\frac{1}{2}} = VD^{\frac{1}{2}}V' = \begin{pmatrix} 2{,}3798 & 0{,}2399 & -0{,}528 \\ 0{,}2399 & 3{,}5115 & 0{,}7823 \\ -0{,}528 & 0{,}7823 & 1{,}7633 \end{pmatrix}$, que es simétrica.

Calculamos su inversa también con ayuda de `NumPy`,

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0{,}465 & -0{,}0697 & 0{,}1702 \\ -0{,}0697 & 0{,}3265 & -0{,}1657 \\ 0{,}1702 & -0{,}1657 & 0{,}6916 \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z = \begin{pmatrix} 0{,}465 & -0{,}0697 & 0{,}1702 \\ -0{,}0697 & 0{,}3265 & -0{,}1657 \\ 0{,}1702 & -0{,}1657 & 0{,}6916 \end{pmatrix} (Y - \mu)$$

Como $\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma$, se tiene $Z \sim N_3(0, I)$.

Ejercicio 8. $Y \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz de convarianzas del vector Y es Σ, que es definida positiva. Es una matriz diagonal por cajas, por lo que el Resultado 2 del tema DNM caso $\Sigma > 0$ nos garantiza que los vectores $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ y (Y_3) son (mutuamente) independientes, y además

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right), \qquad Y_3 \sim N_1(4, 5)$$

Nos será útil el siguiente resultado: Si X e Y son vectores aleatorios independientes de m y n componentes respectivamente, para cada par de funciones medibles $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ se tiene que los vectores aleatorios $f(X)$ y $g(Y)$ son independientes.

a) En la entrada $(1, 2)$ de la matriz Σ, vemos que $\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = -3 \neq 0$. Por tanto, estas variables no son incorreladas, luego no pueden ser independientes.

b) Y_1 es una componente (una proyección) del vector $(Y_1, Y_2)'$. Como este vector es independiente de Y_3 y las proyecciones son funciones medibles, Y_1 e Y_3 son independientes.

c) Son independiente por el mismo motivo, la proyección de la segunda componente también es una función medible.

d) Lo son, es justo lo que garantiza el Resultado 2 que comento arriba.

e) Si fuesen independientes, Y_1 sería independiente de Y_2 por ser una función medible (proyección) de un vector independiente. Por tanto, no lo son.

Ejercicio 9. Utilizaremos el Resultado 3 de DNM caso no singular (ya que $\Sigma > 0$). Nos dice que la distribución condicionada de Y dado $X = x$ sigue una DNM de la forma:

$$N_2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left(x - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right),\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 0 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)$$

Simplificando,

$$(Y/X = x) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-16}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{45}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

a) Por tanto $E[Y/X] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-16}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -12 \\ \frac{45}{2} \end{pmatrix}$

b) $\text{Cov}(Y/X) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10. La función de distribución marginal de X es:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)dydt = \lim_{s\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{s} f(t,y)dydt = \lim_{s\to+\infty} F(x,s)$$
$$= \lim_{s\to+\infty} \Phi(x)\Phi(s)[1+\alpha(1-\Phi(x))(1-\Phi(s))] = \Phi(x)$$

Donde en el último paso usamos que $\lim_{s\to+\infty} \Phi(s) = 1$. Que por hipótesis es la función de distribución normal estándar.

La situación de Y es totalmente análoga.

Ejercicio 11. Calculamos la distribución conjunta de

$$\begin{pmatrix} X_1+X_2+X_3 \\ X_1-X_2-X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X$$

utilizando que es una transformación lineal de rango máximo. Obtenemos que

$$\begin{pmatrix} X_1+X_2+X_3 \\ X_1-X_2-X_3 \end{pmatrix} \sim N_2\left(0, \begin{pmatrix} 3+4\rho & -1-2\rho \\ -1-2\rho & 3 \end{pmatrix}\right),$$

su matriz de covarianzas es diagonal si $\rho = \dfrac{-1}{2}$, y para ese mismo valor la matriz Σ queda

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva: los determinantes menores de la diagonal principal son: 1, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$, todos positivos.

Para $\rho = \dfrac{-1}{2}$, $\begin{pmatrix} X_1+X_2+X_3 \\ X_1-X_2-X_3 \end{pmatrix}$ sigue una DNM con matriz de covarianzas no singular y diagonal, así que sus componentes ($X_1+X_2+X_3$ y $X_1-X_2-X_3$) son independientes.