Problemas de Análisis Funcional Avanzado

Tema 2: Espacios localmente convexos. Teorema de Krein-Milman

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1:

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, X' su dual algebraico y $X_\mathbb{R}$, $(X')_\mathbb{R}$ los correspondientes espacios reales subyacentes. Prueba que la aplicación $f \mapsto \text{Re}f$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $(X')_\mathbb{R}$ en $(X_\mathbb{R})'$.

Solución:

Si $f \in (X')_\mathbb{R}$, en particular $f \in X'$ (son idénticos como conjuntos), luego $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. Podemos escribir f como $f = \text{Re}f + i\text{Im}f$, de modo que $\text{Re}f(\lambda x + y) + i\text{Im}f(\lambda x + y) = \lambda(\text{Re}f(x) + i\text{Im}f(x)) + \text{Re}f(y) + i\text{Im}f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. En el caso de que λ sea real tendremos $\text{Re}f(\lambda x + y) = \lambda\text{Re}f(x) + \text{Re}f(y)$, lo que demuestra ($\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$ son arbitrarios) que $\text{Re}f \in (X_\mathbb{R})'$.

Dado $g \in (X_\mathbb{R})'$, tomando $f(x) := g(x) - ig(ix)$ para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= g(\lambda x + y) - ig(i\lambda x + iy) = \lambda g(x) + g(y) - i(\lambda g(ix) + g(iy)) \\ &= \lambda g(x) - \lambda i g(ix) + g(y) - ig(iy) = \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto demuestra que f es $\mathbb{R}$-lineal, pero además

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i(-i)g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$$

para cada $x \in X$. Concluimos que f es ($\mathbb{C}$-)lineal y por tanto $f \in X' = (X')_\mathbb{R}$ (como conjuntos). Como es claro que $\text{Re}f = g$, deducimos que la aplicación es sobreyectiva.

La identidad $\text{Im}f(x) = \text{Re}(-if(x)) = -\text{Re}f(ix)$ sugiere que f viene unívocamente determinado por su parte real, luego en realidad tenemos una biyección.

Finalmente, es claro que la función parte real es $\mathbb{R}$-lineal.

Ejercicio 2:

Sean X e Y espacios vectoriales y $g : X \to Y$ una aplicación. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) g es afín.

ii) Existe una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f : X \to Y$ y un vector $b \in Y$ tales que $g(x) = f(x) + b$ para todo $x \in X$.

Solución:

Supongamos primero (ii). Dados $x, y \in X$ y $t \in [0, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned} g((1-t)x + ty) &= f((1-t)x + ty) + b = (1-t)f(x) + tf(y) + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(f(x) + b) + t(f(y) + b) = (1-t)g(x) + tg(y), \end{aligned}$$

lo que demuestra que g es afín.

Suponiendo (i), tomamos $f : X \to Y$ dada por $f(x) = g(x) - g(0)$. Sólo necesitamos probar que f es $\mathbb{R}$-lineal. Primero comprobamos que f preserva el producto por escalares de $[0, 1]$, sean $x \in X$ y $t \in [0, 1]$:

$$f(tx) = g(tx) - g(0) = g(tx + (1-t)0) - g(0) = tg(x) + (1-t)g(0) - g(0) = tg(x) - tg(0) = tf(x).$$

Ahora vemos que f separa sumas. Si $x, y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x + y) &= g\Big(\frac{2x + 2y}{2}\Big) - g(0) = \frac{1}{2}g(2x) + \frac{1}{2}g(2y) - \frac{1}{2}g(0) - \frac{1}{2}g(0) \\ &= \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(2y) = f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado lo anterior para cancelar los $\frac{1}{2}$ de fuera con los 2 de dentro de f.

Utilizando la aditividad un número arbitrario de veces podemos concluir que $f(nx) = nf(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Todo real positivo $r \in \mathbb{R}^+$ se puede escribir como $r = n + t$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in [0, 1]$. Por tanto,

$$f(rx) = f(nx + tx) = f(nx) + f(tx) = nf(x) + tf(x) = rf(x),$$

lo que demuestra que f preserva homotecias de razón positiva. Finalmente, la igualdad

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

lleva a $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in X$. Concluimos así que f es $\mathbb{R}$-lineal.

Ejercicio 3:

Sea X un espacio vectorial, n un natural, B_j con subconjunto convexo de X para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$. Prueba que

$$\operatorname{co}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j x_j : t_j \in [0, 1],\ x_j \in B_j\ \forall j = 1, \ldots, n,\ \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

Observa como consecuencia que si $b_1, \ldots, b_n$ son elementos de X,

$$\operatorname{co}(\{b_1, \ldots, b_n\}) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j b_j : t_j \in [0, 1]\ \forall j = 1, \ldots, n,\ \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

Solución:

La segunda igualdad es un caso particular en la que cada B_j se reduce a un punto, por lo que basta con demostrar la primera. Además, la inclusión hacia la derecha ($\supset$) es trivial por la Proposición 3.1.1, ya que cada B_j está contenido en B.

Dado $x \in \operatorname{co}(B)$, podemos escribir $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ con $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $y_i \in B$ para cada $i = 1, \ldots, m$ (Proposición 3.1.1) y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Nuestro objetivo es escribir x con n sumandos cada uno en un conjunto B_j y manteniendo la misma condición sobre los pesos (deben ser no negativos y sumar 1).

Supongamos que hubiese dos elementos $y_i, y_{i'} \in B$ con $i, i' \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq i'$, y $y_i, y_{i'} \in B_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$. Reordenando y renombrando si es preciso, podemos suponer que son $y_{m-1}, y_m \in B_j$. Por la convexidad de B_j tenemos

$$y := \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_{m-1} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_m \in B_j \subset B,$$

y podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i y_i + (\lambda_{m-1} + \lambda_m) y.$$

Hemos expresado x utilizando un sumando menos y es obvio que se sigue cumpliendo la condición sobre los nuevos puntos y pesos.

Podemos repetir este proceso siempre que existan dos índices distintos tales que los puntos correspondientes están en un mismo B_j, de modo que en un número finito de pasos llegaríamos a expresar x como una combinación convexa en la que cada y_i pertenece a un único B_i, lo que forzaría a que esa combinación tuviese como máximo n sumandos. En caso de haber menos, podríamos añadir nuevos elementos a la combinación otorgándoles peso 0, de forma que todos los B_j tengan (como mínimo) un representante.

Ejercicio 4:

Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una familia no vacía de subconjuntos absorbentes y equilibrados de X de modo que

i) $\forall U, V \in \mathcal{B},\ \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$.

ii) $\forall U \in \mathcal{B},\ \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$.

Prueba que existe una única topología vectorial en X con respecto a la cual $\mathcal{B}$ es una base de entornos de cero.

Solución:

Definimos la topología $\mathcal{T}$ como sigue. Un conjunto $A \subset X$ será abierto cuando para cada $a \in A$ exista $U \in \mathcal{B}$ tal que $a + U \subset A$. Es claro que la topología $\mathcal{T}$ contiene al vacío, al total y que es estable por uniones arbitrarias. Si $A, B \in \mathcal{T}$ y $x \in A \cap B$, sabemos que existen $U, V \in \mathcal{B}$ cumpliendo $x + U \subset A$ y $x + V \subset B$. La propiedad (i) nos da un $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$, luego $x + W \subset A \cap B$ y $A \cap B \in \mathcal{T}$. Probamos así que $\mathcal{T}$ es estable para intersecciones finitas y concluimos que es una topología.

Primero comprobaremos que efectivamente los elementos de $\mathcal{B}$ son entornos de cero en dicha topología. Fijamos $U \in \mathcal{B}$ y bastará comprobar que el conjunto $A = \{x \in X : \exists V \in \mathcal{B},\ x + V \subset U\}$ es abierto, puesto que $0 \in A \subset U$. Sea $x \in A$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x + V \subset U$. Por (ii) podemos tomar $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$, y la inclusión $(x + W) + W \subset U$ asegura que $x + W \subset A$, luego $A \in \mathcal{T}$. Es claro que cualquier entorno de cero contiene un elemento de $\mathcal{B}$, luego $\mathcal{B}$ es base de entornos de cero para $\mathcal{T}$. Además, es obvio que la definición de $\mathcal{T}$ es la mínima para que $\mathcal{B}$ sea base de entornos de cero, lo que garantiza la unicidad.

Veamos ahora que $\mathcal{T}$ es una topología vectorial. Fijamos un punto $(x, y) \in X \times X$. Cualquier entorno de $x + y$ contiene un conjunto de la forma $x + y + U$ con $U \in \mathcal{B}$, tomamos $V \in \mathcal{B}$ tal que $V + V \subset U$, que existe por (ii). Los conjuntos $x + V$ e $y + V$ son entornos de x e y respectivamente, y además $(x + V) + (y + V) \subset x + y + U$. Esto prueba la continuidad de la suma.

Para el producto por escalares fijamos un punto $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X$. Cualquier entorno del punto λx contendrá un conjunto de la forma $\lambda x + U$ con $U \in \mathcal{B}$. Asumiré que he encontrado $V \in \mathcal{B}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(\lambda + \varepsilon\mathbb{D})(x + V) \subset \lambda x + U$ y veré qué tienen que cumplir. En caso de existir dichos V y ε quedará probada la continuidad del producto por escalares y concluiremos la demostración.

$$(\lambda + \varepsilon\mathbb{D})(x + V) \subset \lambda x + \lambda V + \varepsilon\mathbb{D}x + \varepsilon\mathbb{D}V,$$

luego necesito $\lambda V + \varepsilon\mathbb{D}x + \varepsilon\mathbb{D}V \subset U$. Utilizando (ii) inductivamente puedo conseguir $V \in \mathcal{B}$ cumpliendo $nV + V + V \subset \sum_{j=1}^{n+2} V \subset U$ para $n \geq |\lambda|$. Por ser V equilibrado tengo

$$\lambda V = \lambda\mathbb{D}V = |\lambda|\mathbb{D}V =\subset n\mathbb{D}V = nV.$$

Por otra parte, si tomo $\varepsilon \leq 1$ y uso que V es equilibrado obtengo $\varepsilon\mathbb{D}V \subset \mathbb{D}V = V$. Sólo falta ver si $\varepsilon\mathbb{D}x \subset V$. Como V es absorbente tengo $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $rx \in V$, y siempre que $\varepsilon \leq r$ tendremos

$$\varepsilon\mathbb{D}x \subset r\mathbb{D}x = \mathbb{D}rx \subset \mathbb{D}V = V.$$