Problemas de Análisis Funcional Avanzado
Tema 1: Principios fundamentales del Análisis Funcional (repaso)

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1: Sean X e Y espacios de Banach y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $\ker(T) = \{0_X\}$ y $T(X)$ es cerrado en Y.
(2) Existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\alpha\,\|x\| \le \|T(x)\|$ para todo $x \in X$.

Solución:
Supongamos (1) y consideremos T como una aplicación sobreyectiva sobre su imagen, $T : X \to T(X)$. Además, la condición $\ker(T) = \{0_X\}$ nos dice que T es inyectiva, luego tenemos una biyección. Por otra parte, al ser $T(X)$ un subespacio cerrado de un espacio completo Y, deducimos que $T(X)$ es también un espacio de Banach.

Aplicando el teorema de los isomorfismos de Banach concluimos que $T : X \to T(X)$ es un isomorfismo, por tanto $T^{-1} : T(X) \to X$ es continua. Esto equivale a que exista $M > 0$ tal que

$$\|T^{-1}(y)\| \le M\|y\| \quad \forall y \in T(X).$$

Como $T : X \to T(X)$ es una biyección, decir $y \in T(X)$ es tan arbitrario como decir $T(x)$ con $x \in X$, luego tenemos

$$\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \le M\|T(x)\| \quad \forall x \in X.$$

Tomando $\alpha = M^{-1} > 0$ obtenemos la condición deseada, (2).

Para la implicación inversa, la desigualdad en (2) nos dice que si $x \in \ker(T)$, entonces $\alpha\|x\| \le \|T(x)\| = 0$, lo que fuerza (por ser $\alpha > 0$) que $x = 0$. Concluimos que $\ker(T) = \{0\}$ y que $T : X \to T(X)$ es una biyección.

Ahora tomamos una sucesión convergente cualquiera $\{y_n\} \to y \in Y$ de elementos de $T(X)$, nuestro objetivo es probar que $y \in T(X)$. Sea $\{x_n\}$ la sucesión de elementos de X definida por $x_n = T^{-1}(y_n)$, la condición (2) nos dice que

$$\|x_n - x_m\| \le \alpha^{-1}\|T(x_n - x_m)\| = \alpha^{-1}\|y_n - y_m\| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $\{y_n\}$ es convergente y por tanto de Cauchy, luego la desigualdad anterior nos asegura que $\{x_n\}$ también es de Cauchy. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $\{x_n\} \to x$. Finalmente, la continuidad de T nos permite deducir que

$$T(x) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Concluimos que $y \in T(X)$, y de la arbitrariedad de la sucesión llegamos a que $T(X)$ es cerrado en Y.

Ejercicio 2: En el contexto de espacios de Banach:

(1) Pruebe el teorema de la aplicación abierta usando el teorema de los isomorfismos de Banach.
(2) Demuestre el teorema de la gráfica cerrada usando el teorema de la aplicación abierta.
(3) Pruebe el teorema de los isomorfismos de Banach usando el teorema de la gráfica cerrada.

Solución:
A lo largo del ejercicio, X e Y serán dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal.

(1) Supongamos que T es continua y sobreyectiva, debemos probar que es abierta. Como T es continua, $\ker(T)$ es cerrado en X. Al ser X completo, el cociente $X/\ker(T)$ es un espacio de Banach. La descomposición canónica nos asegura que la aplicación $\tilde{T} : X/\ker(T) \to T(X) = Y$ dada por $\tilde{T}(x + \ker(T)) = T(x)$ es una biyección lineal continua. Por el teorema de los isomorfismos de Banach $\tilde{T}$ es un isomorfismo, en particular abierta. Como T es la composición de $\tilde{T}$ con la proyección cociente (que siempre es abierta), concluimos que T es abierta.

(2) Supongamos ahora que T tiene gráfica cerrada, debemos probar que es continua. Como $\operatorname{Gr} T$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach $X \times Y$ (producto de Banach), $\operatorname{Gr} T$ es Banach. Consideramos la aplicación $\Phi : \operatorname{Gr} T \to X$ dada por $\Phi(x, T(x)) = x$, que es continua (es una proyección) y claramente sobreyectiva, luego el teorema de la aplicación abierta nos garantiza que Φ es abierta. La función Φ es biyectiva con $\Phi^{-1}(x) = (x, T(x))$, y el hecho de que Φ sea abierta nos dice que Φ^{-1} es continua. Concluimos que T es continua por ser una componente de Φ^{-1}.

(3) Supongamos que T es continua y biyectiva, debemos probar que es un isomorfismo, es decir, que $T^{-1} : Y \to X$ es continua. En vista del teorema de la gráfica cerrada, nos basta con comprobar que $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es un subconjunto cerrado de $Y \times X$. Usando que T es una biyección obtenemos

$$\operatorname{Gr} T^{-1} = \{(y, T^{-1}(y)) : y \in Y\} = \{(T(x), x) : x \in X\}.$$

Observamos que $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es la imagen de $\operatorname{Gr} T$ por el isomorfismo de $X \times Y$ en $Y \times X$ dado por $(x, y) \mapsto (y, x)$. Como T es continua, $\operatorname{Gr} T$ es cerrada en $X \times Y$, luego $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es cerrada en $Y \times X$.

Ejercicio 3: Sea $\{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales o complejos tal que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$ es convergente para toda sucesión $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Compruebe que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} |y(n)|$ converge.

Solución:

Ejercicio 4: Sean X e Y espacios normados y $x_0 \in X \backslash \{0_X\}$. Dado $y_0 \in Y$, pruebe que existe $T \in L(X, Y)$ tal que $T(x_0) = y_0$ y $\|T\| \, \|x_0\| = \|y_0\|$.

Solución:

Ejercicio 5: Sea X un espacio normado separable. Pruebe que existe un subconjunto numerable de X^* que separa los puntos de X.

Solución:

Ejercicio 6: Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión:

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|, \quad \forall x \in X.$$

Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) T es continua.
(2) $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$.
(3) $\|\cdot\|_1$ es una norma completa.

Solución: