

Mecánica Celeste: Problemas Tema 1

David Cabezas Berrido

Ejercicio 5.

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (x, y) = (r \operatorname{ch} \theta, r \operatorname{sh} \theta)\end{aligned}$$

i) Imagen de Φ .

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (\theta, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : x = r \operatorname{ch} \theta, y = r \operatorname{sh} \theta?$$

Esto equivale a $\operatorname{ch} \theta = \frac{x}{r}$, $\operatorname{sh} \theta = \frac{y}{r}$, y la identidad $\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$ obliga a que

$$1 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow r = +\sqrt{x^2 - y^2} \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto necesitamos $x^2 > y^2$. Ahora

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc sh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biyectiva con $\operatorname{sh}^{-1} = \operatorname{arc sh}$. Sólo nos falta que $\operatorname{ch} \theta = \frac{x}{r}$, lo cual deducimos fácilmente de

$$\operatorname{ch}^2 \theta = 1 + \operatorname{sh}^2 \theta = 1 + \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2}$$

pero como ch sólo toma valores positivos, tendremos que imponer también $x \geq 0$. Tenemos por tanto

$$\Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \supset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$$

Pero la otra inclusión es inmediata, puesto que dado $(r \operatorname{ch} \theta, r \operatorname{sh} \theta) \in \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, se tiene por la desigualdad triangular:

$$r \operatorname{ch} \theta = r \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > r \frac{|e^\theta - e^{-\theta}|}{2} = |r \operatorname{sh} \theta|$$

ii) Probar $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ difeomorfismo.

Claramente Φ es biyectiva, puesto que hemos construido su inversa en el anterior apartado.

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} : \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto \left(\operatorname{arc sh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \sqrt{x^2 - y^2} \right)\end{aligned}$$

Las funciones ch , sh y arcsh son diferenciables en todo \mathbb{R} , y la función $\sqrt{}$ es diferenciable en \mathbb{R}^+ , luego tanto Φ como Φ^{-1} son diferenciables en sus respectivos dominios.

III) Dibujar $\Phi(\theta, r_0)$ con r_0 fijo.

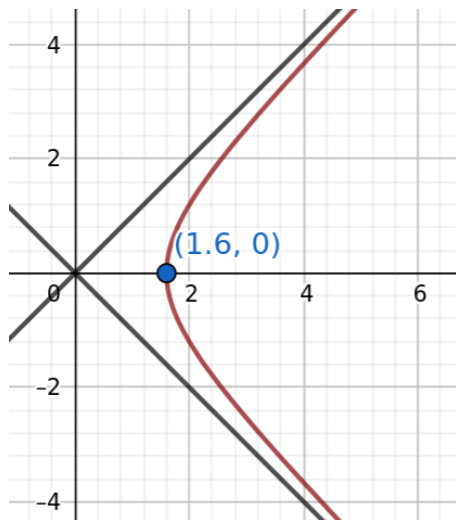
Tenemos $x = r_0 \text{ch } \theta$, $y = r_0 \text{sh } \theta$. La inyectividad de sh nos permite despejar $x = f(y) = r_0 \text{ch}(\text{arcsh } \frac{y}{r_0})$, luego obtendremos x como función de y . Observamos que

$$x^2 - y^2 = r_0^2 \text{ch}^2 \theta - r_0^2 \text{sh}^2 \theta = r_0^2$$

luego tenemos la gráfica de una rama de hipérbola ($x \geq 0$). Observamos que f es par y que para $\theta = 0$ tenemos $(x, y) = (r_0, 0)$, y toma valores en todo \mathbb{R} y x a partir de r_0 (ya que $\text{ch} \geq 1$). Por otra parte tenemos

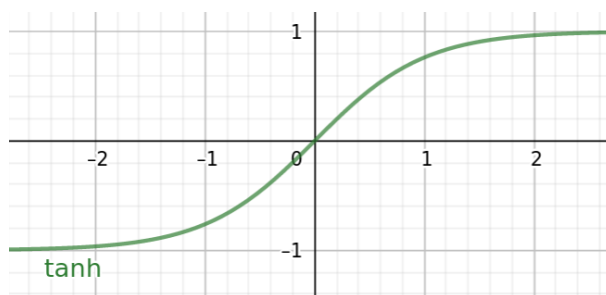
$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{x}{y} = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{x}{y} = -1.$$

Así que $x = y$ y $x = -y$ harán de asíntotas.

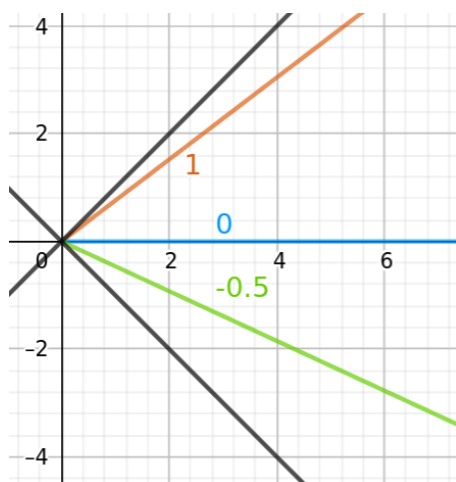


Dibujar $\Phi(\theta_0, r)$ con θ_0 fijo.

Tenemos $x = r \text{ch } \theta_0$, $y = r \text{sh } \theta_0$ con $r \in \mathbb{R}^+$, que es la ecuación paramétrica de una semirecta que “pasa” (no llega a tocarlo porque $r > 0$) por el origen. La pendiente será $\frac{y}{x} = \frac{\text{sh } \theta_0}{\text{ch } \theta_0} = \tanh \theta_0 \in]-1, 1[$. Y la pendiente será mayor cuanto mayor sea θ_0 , puesto que \tanh tiene esta forma:

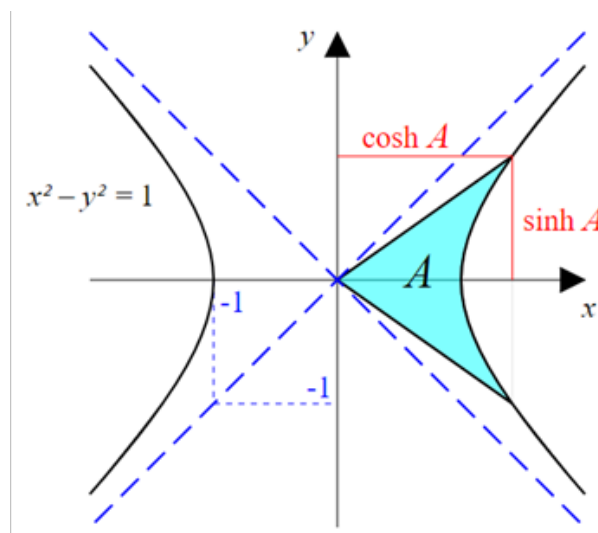


$\Phi(\theta_0, r)$ queda entonces de este modo (comparamos distintos valores de θ_0).



iv) Interpretar sh y ch en términos de “trigonometría en la hipérbola”.

Claramente $x = \text{ch } \theta$ y $y = \text{sh } \theta$ satisfacen la ecuación $x^2 - y^2 = 1$. y toma valores en todo \mathbb{R} y x a partir de 1, luego $(\text{ch}, \text{sh}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametriza la rama derecha de la hipérbola equilátera. Dado $A \in \mathbb{R}$, $(\text{ch } A, \text{sh } A)$ corresponderá a un punto de dicha rama, y recíprocamente todo punto de la rama se escribe como $(\text{ch } A, \text{sh } A)$ para algún $A \in \mathbb{R}$. Para darle a sh y ch cierto carácter “canónico” (¿Que tiene esta parametrización de la hipérbola de especial? ¿Por qué elegir ésta y no otra?) destacamos que el área azul de la figura es de A unidades cuadradas.



Probaremos que el área azul por encima del eje vale $\frac{A}{2}$. El área bajo la recta $y = \frac{\text{sh } A}{\text{ch } A}x$ (que pasa por el origen y $(\text{ch } A, \text{sh } A)$) entre 0 y $\text{ch } A$ es

$$\int_0^{\text{ch } A} \frac{\text{sh } A}{\text{ch } A} x dx = \frac{\text{sh } A}{\text{ch } A} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\text{ch } A} = \frac{\text{sh } A \text{ ch } A}{2}$$

Hay que restarle el área bajo la hipérbola ($y = \sqrt{x^2 - 1}$), que es

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\operatorname{ch} A} \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int_0^A \sqrt{\operatorname{ch} t^2 - 1} \operatorname{sh} t dt \quad (\text{usando el cambio } x = \operatorname{ch} t) \\
 &= \int_0^A \operatorname{sh}^2 t dt = \int_0^A \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^A e^{2t} + e^{-2t} - 2 dt \\
 &= \frac{1}{4} \left(\left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^A - \left[\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^A - [2t]_0^A \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2A}}{2} - \frac{1}{2} - \left(\frac{e^{-2A}}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2A \right) \\
 &= -\frac{A}{2} + \frac{1}{4} \frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2}
 \end{aligned}$$

Por tanto el área azul por encima del eje es

$$\frac{\operatorname{sh} A \operatorname{ch} A}{2} + \frac{A}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2} = \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \frac{(e^A - e^{-A})(e^A + e^{-A})}{2} - \frac{1}{4} \frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2} = \frac{A}{2}$$

Ejercicio 6. Se considera el grupo el grupo de rotaciones

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A^T A = A A^T = I, \det A > 0\}$$

a) Probar que la aplicación

$$\Phi : SO(3) \rightarrow T_1(\mathbb{S}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |x| = |y| = 1, \langle x, y \rangle = 0\}$$

que a cada matriz $A \in SO(3)$ le hace corresponder sus dos primeras columnas es un homeomorfismo.

Dada una matriz $A = (a_1|a_2|a_3)$, tenemos que A es ortogonal ($A^T A = A A^T = I$) si, y solo si (a_1, a_2, a_3) forma una base ortonormal de \mathbb{R}^3 ; y $\det A > 0$ si, y solo si la base define una orientación positiva (como los vectores son ortonormales, esto equivale a que $a_1 \times a_2 = a_3$). Por tanto si $A \in SO(3)$, sus dos primeras columnas son ortonormales: $(a_1, a_2) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, así que Φ está bien definida.

¿Es biyectiva? De existir Φ^{-1} , tendría que ser de esta forma: para $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, $\Phi^{-1}(x, y) = A = (x|y|z)$. Para que esto sea una aplicación bien definida, tiene que existir un único z que haga que A sea ortogonal y preserve la orientación (tenga determinante positivo). (x, y, z) será una base ortonormal si, y solo si $z \perp x, y$ y $|z| = 1$. Lo primero implica que $z \in \text{Lin}\{x, y\}^\perp$, que es una recta, así que sólo hay dos posibilidades para z , $z = \pm x \times y$. Pero sólo $z = +x \times y$ hace que la orientación de la base ortonormal sea positiva ($\det A > 0$). Por tanto Φ es biyectiva con $\Phi^{-1}(x, y) = (x|y|x \times y)$.

Claramente Φ es continua por ser la restricción a $SO(3)$ de la proyección de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ a $\mathbb{R}^{3 \times 2}$. Y Φ^{-1} lo es por serlo el producto vectorial (consecuencia de $|(x - u) \times (y - v)| = |x - u||y - v|\sin(\angle(x - u, y - v)) \leq |x - u||y - v|$), luego Φ homeomorfismo.

b) $e \in]0, 1[$, $\mathcal{E}_*(e)$ espacio de órbitas keplerianas con excentricidad e . Es decir, el conjunto de pares (V, E) con $V \subset \mathbb{R}^3$ plano vectorial orientado y $E \subset V$ elipse con foco en el origen y excentricidad e . Probar que existe una biyección entre $\mathcal{E}_*(e)$ y $SO(3) \times \mathbb{R}^+$.

Probamos algo equivalente: encontramos una biyección entre $\mathcal{E}_*(e)$ y $T_1(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^+$, ya que sabemos que $SO(3)$ es biyectivo con $T_1(\mathbb{S}^2)$.

Dado $((x, y), r) \in T_1(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^+$, le hacemos corresponder el plano vectorial $V = x^\perp$ orientado con la orientación inducida por cualquier base $\{v_1, v_2\}$ de V que convierta a (v_1, v_2, x) en una base positivamente orientada de \mathbb{R}^3 , esto es: $\det(v_1, v_2, x) > 0$.

Para que esta definición sea correcta, debemos comprobar que la orientación de V no depende de la base escogida. En efecto, si (v_1, v_2) y (u_1, u_2) son dos bases de V que cumplen $\det(v_1, v_2, x), \det(u_1, u_2, x) > 0$, escribimos v_1 y v_2 en función de (u_1, u_2) ,

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \quad v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$$

La matriz de cambio de base (v_1, v_2) a (u_1, u_2) es

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

para probar que ambas bases definen la misma orientación en V debemos comprobar que $\det M = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$. Usaremos para ello propiedades básicas de los determinantes.

$$\begin{aligned}
\det(v_1, v_2, x) &= \det(a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) \\
&= \det(a_{11}u_1, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) + \det(a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) \\
&= \det(a_{11}u_1, a_{21}u_1, x) + \det(a_{11}u_1, a_{22}u_2, x) + \det(a_{12}u_2, a_{21}u_1, x) + \det(a_{12}u_2, a_{22}u_2, x) \\
&= a_{11}a_{21} \det(u_1, u_1, x) + a_{11}a_{22} \det(u_1, u_2, x) + a_{12}a_{21} \det(u_2, u_1, x) + a_{12}a_{22} \det(u_2, u_2, x) \\
&= a_{11}a_{22} \det(u_1, u_2, x) + a_{12}a_{21} \det(u_2, u_1, x) \\
&= a_{11}a_{22} \det(u_1, u_2, x) - a_{12}a_{21} \det(u_1, u_2, x) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \det(u_1, u_2, x) = \det M \det(u_1, u_2, x)
\end{aligned}$$

Por tanto $\det M > 0$ y probamos que esta correspondencia está bien definida.

Como $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, $y \perp x \Rightarrow y \in x^\perp = V$, lo que nos permite usar y como sentido para el eje de excentricidad de la elipse. E será por tanto la elipse con parámetros $k = r$ y $\vec{e} = ey$.

Recíprocamente, dado $(V, E) \in \mathcal{E}_*(e)$ le hacemos corresponder $((x, y), r)$, donde x será el vector unitario normal al plano V (hay dos posibilidades, un vector y su opuesto) que respete la orientación en V , es decir, si (v_1, v_2) es una base de V , x será el vector unitario que cumple $x = \lambda \cdot v_1 \times v_2$ con $\lambda > 0$, o equivalentemente $\det(v_1, v_2, x) > 0$. Los argumentos anteriores también prueban que dos bases de V que definan la misma orientación dan lugar al mismo x (puesto que $\det M > 0$).

$y \in V$ será el vector unitario con el sentido del eje de excentricidad de E : $y = \frac{\vec{e}}{e}$. Como $x \in V^\perp$, tendremos $x \perp y$ y por tanto $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$. Finalmente, tomamos $r = k \in \mathbb{R}^+$, el parámetro de E .

Estas correspondencias son una inversa de la otra: x y V (respectivamente y y \vec{e} ; y r y k) se definen unívocamente.

c) Caso $e = 0$.

Ahora $\mathcal{E}_*(e)$ está formado por circunferencias en planos orientados.

Las correspondencias entre x y V (plano orientado en el que está la circunferencia); y entre r y k (radio de la circunferencia) siguen siendo válidas. Pero $\vec{e} = 0$ independientemente de $y \in x^\perp = V$, luego la correspondencia anterior ya no es una biyección. Esto no descarta que exista otra biyección, probablemente la haya, aunque no sea tan fácil de interpretar.

Ejercicio 11. Dado un campo C^∞ , $V = (V_1, V_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cumpliendo $\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 1$, debemos encontrar $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$V = J\nabla F + V_* = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right) + V_* \quad (1)$$

donde $V_* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es fijo.

Dado V , supondremos que se puede expresar como en (1) para obtener condiciones sobre F y V_* . Con estas condiciones obtendremos candidatos a F y V_* , para después comprobar que efectivamente V se puede expresar de esa forma.

Tomando divergencias en (1) y utilizando que la divergencia es un operador lineal, obtenemos

$$1 = \operatorname{div} V = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \operatorname{div} V_*$$

Utilizando que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, obtenemos $\operatorname{div} V_* = 1$. Observamos que si se cumpliera (1) para un V_* , existiría una F_0 tal que el campo $V_0(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, que tiene divergencia 1, se expresase como $V_0 = \left(-\frac{\partial F_0}{\partial y}, \frac{\partial F_0}{\partial x} \right) + V_*$. Por otra parte, dado cualquier V con divergencia 1, existiría F tal que $V = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right) + V_*$. Obtendríamos por tanto

$$V = \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right) + V_0 - \left(-\frac{\partial F_0}{\partial y}, \frac{\partial F_0}{\partial x} \right) = \left(-\frac{\partial(F - F_0)}{\partial y}, \frac{\partial(F - F_0)}{\partial x} \right) + V_0$$

Con esto hemos demostrado que no importa el V_* que tomemos, ya que sólo hará que varíe la función F , pero no afectará a su existencia. Tomamos por tanto $V_* = V_0 = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$.

Discutamos ahora F . Dado $V = (V_1, V_2)$ con $\operatorname{div} V = 1$, (1) nos proporciona un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que tiene que cumplir F .

$$V_1 = -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{x}{2} \quad (2)$$

$$V_2 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{2} \quad (3)$$

La existencia de F dependerá de la existencia de solución para este sistema.

Tomando primitivas respecto de y en (2) obtenemos:

$$F(x, y) = \frac{xy}{2} - \int_0^y V_1(x, s) ds + c(x), \quad (4)$$

ya que al tomar primitivas respecto de y nos aparece una constante que puede depender de x (constante respecto de y). Para determinar F , falta determinar $c(x)$, ya que el resto de sumandos son conocidos.

Considerando $y \in \mathbb{R}$ fijo, $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por $c(x) = F(x, y) - \frac{xy}{2} + \int_0^y V_1(x, s)ds$. Utilizando el Teorema de Derivación Bajo el Signo Integral, obtenemos que $c \in C^1(\mathbb{R})$ y se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{2} - \int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, s)ds + c'(x)$$

Notemos que en (1) sólo aparece el gradiente de F , por lo que debemos determinar F salvo constante. Así que nos basta con determinar $c'(x)$. Igualamos esta ecuación con (3):

$$V_2(x, y) - \frac{y}{2} = \frac{y}{2} - \int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, s)ds + c'(x) \quad (5)$$

Primero resolveremos la integral, aplicando $\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 1$ y utilizando la regla de Barrow:

$$\int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, s)ds = \int_0^y 1 - \frac{\partial V_2}{\partial y}(x, s)ds = y - (V_2(x, y) - V_2(x, 0)) \quad (6)$$

Sustituimos en (5):

$$V_2(x, y) - \frac{y}{2} = \frac{y}{2} - y + V_2(x, y) - V_2(x, 0) + c'(x) \quad (7)$$

Simplificando V_2 e y , obtenemos $c'(x) = V_2(x, 0)$ y tomamos $c(x) = \int_0^x V_2(t, 0)dt$.

Recuperando (4), obtenemos finalmente:

$$F(x, y) = \frac{xy}{2} - \int_0^y V_1(x, s)ds + \int_0^x V_2(t, 0)dt \quad (8)$$

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe y es continua en todo \mathbb{R}^2 , mientras que combinando el Teorema de Derivación Bajo el Signo Integral con el Teorema Fundamental del Cálculo, deducimos que $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe y es continua en todo \mathbb{R}^2 . Por tanto, F es $C^1(\mathbb{R}^2)$. Comprobamos ahora que efectivamente se cumple (1) obteniendo las derivadas parciales de F :

$$\left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \left(-\frac{x}{2} + V_1(x, y), \frac{y}{2} - \int_0^y \frac{\partial V_1}{\partial x}(x, s)ds + V_2(x, 0) \right)$$

Volvemos a utilizar $\text{div } V = 1$ y la regla de Barrow para calcular el valor de la integral como en (6), y simplificamos:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x} \right) &= \left(-\frac{x}{2} + V_1(x, y), \frac{y}{2} - y + V_2(x, y) - V_2(x, 0) + V_2(x, 0) \right) \\ &= \left(-\frac{x}{2} + V_1(x, y), -\frac{y}{2} + V_2(x, y) \right) = V - V_* \end{aligned}$$

Viendo ahora que las derivadas parciales de F son $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, concluimos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.