AMA - Parte 2. Ejercicios

David Cabezas Berrido

(2) Definimos $v \in \mathcal{A}(D)$ por

$$v(z) = \sum_{k=1}^{N} \log\left|\frac{z-\xi_k}{R}\right| \leq 0.$$

Donde R es el diámetro de D (acotado).

Tenemos $\lim_{z \to \xi_k} v(z) = -\infty \quad k=1,\dots,N.$

Para cada $\delta > 0$, consideramos

$$W_\delta(z) = u(z) + \delta v(z).$$ Subarmónica.

$\forall \{z_n\}$ sucesión en D,

- Si $\{z_n\} \to \xi_k$,

$$W_\delta(z_n) = \underbrace{u(z_n)}_{\text{mayorada}} + \delta \underbrace{v(z_n)}_{\downarrow\, -\infty} \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

- Si $\{z_n\} \to \xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$

$$W_\delta(z_n) = \underbrace{u(z_n)}_{\limsup\, \leq M} + \delta \underbrace{v(z_n)}_{\leq 0}$$

En cualquier caso, $\limsup\limits_{\substack{z \to \xi \\ z \in D}} w_\delta(z) \leq M \quad \forall \xi \in D.$

w_δ cumple las hipótesis del Principio del Máximo para funciones subarmónicas.

Por tanto, $w_\delta(z) \leq M \quad \forall z \in D, \forall \delta > 0.$

$$u(z) \leq M - \delta v(z) \quad \forall z \in D, \forall \delta > 0.$$

Tomando límite $\delta \to 0$ obtenemos

$$\boxed{u(z) \leq M \quad \forall z \in D}$$

① a) Como H^p espacio vectorial, dado cualquier $\lambda\in\mathbb{T}$, $f\in H^p \Longleftrightarrow \lambda f\in H^p$. Por tanto, podemos suponer que $\arg f\in \left]-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right[$.

Aplicando el isomorfismo conforme $z\mapsto z^{\pi/\alpha}$ llevamos el sector $(-\alpha/2, \alpha/2)$ en el semiplano de la derecha.

Tenemos entonces $\operatorname{Re} f^{\pi/\alpha}>0$ y el corolario de la pág. 58 nos garantiza $f^{\pi/\alpha}\in H^p$ $\forall p<1$.

Sabemos $\displaystyle\sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^{\pi p/\alpha}d\theta<\infty$.

Si $q\in\left]0,\pi/\alpha\right[$, $q=\frac{\pi}{\alpha}\cdot p$ con $p\in\left]0,1\right[$

$$\Rightarrow \sup_{0\le r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^{q}d\theta<\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{f\in H^q\ \forall q\in\left]0,\pi/\alpha\right[.}$$

b) Sabemos (pág. 56) que

$$|1-re^{i\theta}| \geq \frac{|\theta|}{\pi} \quad \forall \tfrac{1}{2} < r < 1, \ -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$f \in H^p \iff \lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty$$

$$f(z) = \frac{z^2}{(1-z)\log^2\left(\frac{1}{1-z}\right)}$$

$$|f(re^{i\theta})| = \frac{r^2}{|1-re^{i\theta}| \cdot \left|\log\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right)\right|^2} \leq \frac{\pi}{|\theta|} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \ (*)$$

(*) Consideramos la función

$$g(w) = |\log w|^2 = \ln^2|w| + \arg^2 w \quad \forall w \in \mathbb{C}^*,$$

claramente $\lim_{w \to \infty} g(w) = +\infty$ y el

único cero de g está en $w=1$.

$$\left|1 - \frac{1}{1-re^{i\theta}}\right| = \left|\frac{1-re^{i\theta}-1}{1-re^{i\theta}}\right| = \frac{r}{|1-re^{i\theta}|} \geq \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

$\left(\frac{1}{2} < r < 1\right)$

Como el número complejo $\frac{1}{1-re^{i\theta}}$ está a distancia $\geq \frac{1}{4}$ del 1, existirá $\varepsilon>0$ tq $g\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right)\geq \varepsilon$ $\forall \theta\in[-\pi,\pi]$, $1/2<r<1$.

Por tanto, $\forall 1/2<r<1$,

si $p\in]0,1[$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{|\theta|}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)^p d\theta < \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{f\in H^p \ \forall 0<p<1.}$$

$\forall \theta\in]-\pi,\pi[$,

¿$f(e^{i\theta})\in L^1(\partial\mathbb{D})$?

$$f(e^{i\theta})=\frac{1}{1-e^{i\theta}}\cdot\frac{e^{2i\theta}}{\log^2\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right)}$$

$$f(e^{i\theta})\in L_1(\partial\mathbb{D}) \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|d\theta<\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}\cdot\frac{1}{\left|\log\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right)\right|^2}}_{\shortparallel}d\theta<\infty$$

$$h(\theta)=\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}\cdot\frac{1}{\left|\log\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}}\right)\right|^2}=\frac{1}{|1-e^{i\theta}|}\cdot\frac{1}{|-\log(1-e^{i\theta})|^2}$$

La integral sólo tiene problema cuando θ está cerca de 0, así que la partiremos en dos.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-e^{i\theta}}{\theta} \overset{(L'H)\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{\theta\to 0} \frac{-ie^{i\theta}}{1} = -i \quad (L'H \text{ para Holomorfas})$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\log(1-e^{i\theta})}{\log\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\overbrace{\log\left(\frac{1-e^{i\theta}}{\theta}\right)}^{\log(-i)\ \text{cte}} + \overbrace{\log\theta}^{\infty}}{\log\theta \to \infty} = 1$$

Sea $g(\theta) = \frac{1}{|\theta|}\cdot\frac{1}{|\log\theta|^2}$,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{g(\theta)}{h(\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \overbrace{\frac{|1-e^{i\theta}|}{|\theta|}}^{1} \cdot \overbrace{\frac{|\log(1-e^{i\theta})|^2}{|\log\theta|^2}}^{1} = 1$$

Tanto g como h son integrables en intervalos compactos de $[-1/2, 0[\cup]0, 1/2]$. Usando comparación por paso al límite,

$$\int_0^{1/2} g(\theta)\,d\theta < \infty \Longleftrightarrow \int_0^{1/2} h(\theta)\,d\theta$$

y lo mismo para $\int_{-1/2}^{0}$.

$\frac{1}{\theta}\frac{1}{\log^2\theta}$ es real y no cambia de signo en $]0,1/2[$, a efectos de convergencia de la integral puedo quitar el módulo:

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{\theta}\cdot\log^{-2}\theta\,d\theta = \left[\log^{-1}\theta\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\log 1/2} - \underbrace{\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\log\theta}}_{0} = \frac{1}{\log 1/2} < \infty$$

Para la otra parte:

$$\int_{-1/2}^{0}\frac{1}{|\theta|}\left|\log^{-2}\theta\right|d\theta = -\int_{-2}^{-\infty}\left|\frac{\cancel{u}}{u^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{\cancel{-1}\log^2 u^{-1}}\right|du = *$$

Cambio variable $\frac{1}{\theta}=u$; $\frac{-1}{\theta^2}d\theta = du \Rightarrow d\theta = \frac{-1}{u^2}du$

$$* = \int_{-\infty}^{-2}\left|\frac{1}{u}\log^{-2}u\right|du = \sum_{k=2}^{\infty}\int_{-k-1}^{-k}\left|\frac{1}{u}\right|\cdot\frac{du}{|\log^2 u|}$$

$$\left(\frac{1}{|\log^2 u|} = \frac{1}{|\log|u|+i\pi|^2} = \frac{1}{\log^2|u|+\pi^2}\right)$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} \int_{-k-1}^{-k} \left| \frac{1}{-k} \right| \cdot \frac{1}{\log^2 |-k|} du \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k} \overset{*}{<} \infty$$

* Test de la integral:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{k} \log^{-2} k \, du = \left[\log^{-1} k \right]_2^{\infty} = \lim_{k \to \infty} \overbrace{\frac{1}{\log k}}^{0} - \frac{1}{\log 2} < \infty$$

Por tanto,

$$\int_0^{1/2} h(\theta) d\theta , \int_{-1/2}^{0} h(\theta) d\theta < \infty .$$

Tenemos entonces $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) d\theta = \int_0^{1/2} h(\theta) d\theta +$

$$+ \int_{-1/2}^{0} h(\theta) d\theta + \underbrace{\int_{\varepsilon < |\theta| < \pi} h(\theta) d\theta}_{\infty \text{ (Acotada)}} < \infty$$

Concluimos $f(e^{i\theta}) \in L^1(\partial \mathbb{D})$, y

por el teorema de la pág. 107, $\boxed{f \in H^1}$

$$|f(re^{i\theta})| = \frac{r^2}{|1-re^{i\theta}| \cdot \left|\log\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right)\right|^2} = \frac{r^2}{|1-re^{i\theta}| \cdot |\log(1-re^{i\theta})|^2}$$

Si $|\theta| > 1-r \Rightarrow |1-re^{i\theta}| \leq 2|\theta|$

$$2\pi M_p(r,f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \geq \int_{1-r<|\theta|<\pi} \frac{r^{2p}\, d\theta}{2^p |\theta|^p \, |\log(1-re^{i\theta})|^{2p}}$$

$$\geq \frac{r^{2p}}{2^p} \int_{1-r}^{1/2} \left| \frac{d\theta}{\theta^p \log^{2p}(1-re^{i\theta})} \right|$$

A efectos de integrar cerca de cero (haré r tender a 1), hemos visto previamente que basta probar

$$\lim_{r\to 1} \int_{1-r}^{1/2} \left| \frac{d\theta}{\theta^p \log^{2p}(\theta)} \right| *$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{d\theta}{|\theta^p \log^{2p}\theta|} = \infty \qquad (p>1)$$

$$* \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - re^{i\theta}}{\theta} = -ri \neq 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{L'H para} \\ \text{holomorfas} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\theta \to 0} \frac{\log(1 - re^{i\theta})}{\log(\theta)} \neq 0$$

$$\int_0^{1/2} \frac{d\theta}{|\theta^p \log^{2p}\theta|} = \int_2^{\infty} \left| \frac{1}{u^{2-p}} \cdot \frac{1}{\log^{2p} u} \right| du$$

Cambio variable $u = \frac{1}{\theta}$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \int_k^{k+1} \left| \frac{1}{u^{2-p}} \cdot \frac{1}{\log^{2p} u} \right| du \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\log^{2p}(k+1)},$$ donde

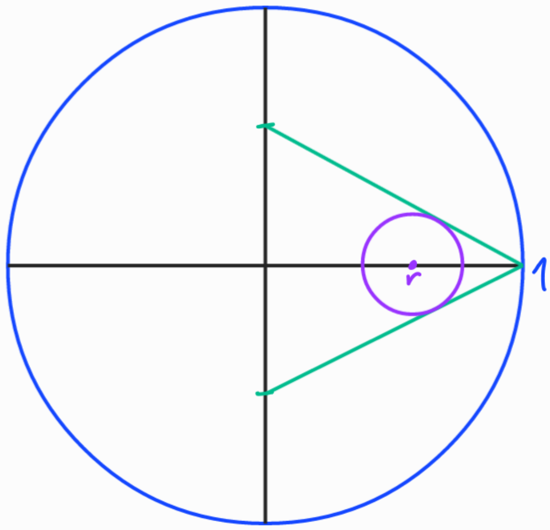
$\alpha = \max\{k^{(2-p)}, (k+1)^{2-p}\}$. En cualquiera de los dos casos, es clalo que la serie diverge, puesto que $2-p<1$.

Concluimos que $\lim_{r \to 1} M_p(r, f) = \infty$,

luego $f \notin H^p$ para $p>1$.

③ a) Sea L el límite no tangencial de f en 1. Podemos suponer $L=0$, ya que de lo contrario trabajaríamos con $f-L$, que tiene la misma derivada.

$\forall r \in (0,1)$ consideramos la circunferencia de centro r y radio $\frac{1-r}{2}$.



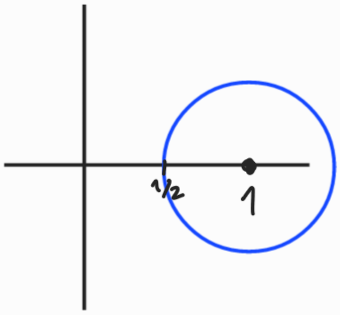
$C_r = C\left(r, \frac{1-r}{2}\right)$

¿Se quedan las C_r en algún $S_\alpha(1)$?

$z = r + \lambda \frac{1-r}{2}$ con $\lambda \in \mathbb{T}$ cualquiera.

$$|\arg(1-z)| = \left|\arg\left(1 - r - \lambda \frac{1-r}{2}\right)\right| = \left|\arg\left[(1-r)\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\right]\right|$$

$$= \left|\overbrace{\arg(1-r)}^{\overset{0}{\shortparallel}} + \arg(1-\lambda/2)\right| = |\arg(\underbrace{1-\lambda/2}_{w})| \leq \pi/4$$



$1+\frac{1}{2}\mathbb{T}$

$\operatorname{Re} w \geq 1/2$

$|\operatorname{Im} w| \leq 1/2$

$|\arg(w)| = \left|\arctan \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Re} w}\right| \leq \arctan 1 = \pi/4$ ✓

La fórmula de Cachy para la derivada nos dice
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw, \quad \forall z \in D\left(r, \frac{1-r}{2}\right).$$

En particular,
$$f'(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-r)^2}\,dw.$$

$|w-r| = \frac{1-r}{2}$

Como f tiene límite tangencial en 1 (vale 0)

$$|w-1| \leq |w-r| + |1-r| = \frac{3}{2}|1-r| \quad \forall w \in C_r$$

y $w \in S_\alpha(1)$ para cualquier $\alpha > \pi/4$.

$\forall \varepsilon > 0$, tenemos $|f(w)| \leq \varepsilon$ para r lo suficientemente cercano a 1.

Tomando módulo:

$$|f'(r)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{f(w)}{(w-r)^2} dw \right| \leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \frac{\cancel{1-r}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{\frac{(1-r)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\,2}}$$

$$(1-r)|f'(r)| \leq 2\varepsilon.$$

Por tanto,

$$\boxed{\lim_{r \to 1} (1-r) f'(r) = 0.}$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-1/2^n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 < \infty$ ✓

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n}\,\frac{a_n - z}{1-\bar{a}_n z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\frac{1}{2^n}-z}{1-z(1-1/2^n)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1-1/2^n-z}{1-z(1-1/2^n)} - 1\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cancel{1}-1/2^n-\cancel{z}-\cancel{1}+z(\cancel{1}-1/2^n)}{1-z(1-1/2^n)}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{-1/2^n - z/2^n}{1-z(1-1/2^n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{|1+z|}{|1-z(1-1/2^n)|}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{1+|z|}{1-|z|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{2}{1-\max_{z\in K}|z|} < \infty$$

En un compacto $K \subseteq \mathbb{D}$

$\sum_{n\geq 1}|b_n - 1|$

Como la serie converge uniformemente en compactos, tenemos derivada logarítmica:

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}-z}{1-z(1-1/2^n)}\right)'\frac{1-z(1-1/2^n)}{1-1/2^n-z} =$$

(Las singularidades están evitadas)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\left(1-z(1-1/2^n)\right) + \left(1-1/2^n - z\right)(+1)\left(1-1/2^n\right)}{\left[1-z(1-1/2^n)\right]^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{1-z(1-1/2^n)}}{1-1/2^n - z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{-1}+\cancel{z}-\cancel{z/2^n}+\cancel{1}-1/2^n-\cancel{z}-1/2^n+\frac{1}{2^{2n}}+\cancel{z/2^n}}{\left(1-1/2^n-z\right)\left(1-z(1-1/2^n)\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2/2^n + \frac{1}{2^n \cdot 2^n}}{\left(1-1/2^n - z\right)\left(1-z(1-1/2^n)\right)}$$

$$B'(z) = \left(\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1-\overset{\text{Para } m=n}{\cancel{\frac{1}{2^m}}}-z}{1-z(1-1/2^m)}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{-2}{2^n}+\frac{1}{2^n \cdot 2^n}}{\left(1-\cancel{1/2^n}-z\right)\left(1-z(1-1/2^n)\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{2^n}+\frac{1}{2^n \cdot 2^n}\right) \cdot \frac{1}{\left[1-z(1-1/2^n)\right]^2} \cdot \prod_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{1-1/2^m - z}{1-z(1-1/2^m)}$$

$$B'(a_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{2^n}+\frac{1}{2^n 2^n}\right) \cdot \frac{1}{(1-a_n a_k)^2} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{a_m - a_k}{1-a_m a_k}}_{= 0 \text{ Excepto si } n=k}$$

$$= \left(\frac{-2}{2^k}+\frac{1}{2^k \cdot 2^k}\right) \frac{1}{(1-a_k^2)^2} \cdot \prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{\infty} \frac{a_m - a_k}{1-a_m \cdot a_k}$$

$$(1-a_k^2)\left|B'(a_k)\right| = \cancel{\left|\frac{-2}{2^k}+\frac{1}{2^k \cdot 2^k}\right|} \cdot \cancel{\frac{1}{|1-a_k^2|}} \cdot \left|\prod_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{\infty} \frac{a_m - a_k}{1-a_m a_k}\right|$$

$$\left(1-a_k^2 = 1-\left(1-\frac{1}{2^k}\right)^2 = 1-\left(1+\frac{1}{2^{2k}}-2\frac{1}{2^k}\right) = \frac{2}{2^k}-\frac{1}{2^{2k}}\right)$$

Hay que probar que el producto está minorado uniformemente en k por una cte positiva C.

$$|a_m - a_k| = \left|1 - \frac{1}{2^m} - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\right| = \left|\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^m}\right|$$
$$= \frac{1}{2^k}\left|1 - \frac{1}{2^{m-k}}\right| = \frac{1}{2^m}\left|1 - \frac{1}{2^{k-m}}\right|$$

$$|1 - a_m a_k| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\right| =$$
$$= \left|1 - \left(1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^k \cdot 2^m}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^k \cdot 2^m}\right| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^m}$$
$$= \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{1}{2^{m-k}}\right) = \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^{k-m}}\right)$$

Los escribiré como mejor convenga en cada momento.

$$\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left|\frac{a_m - a_k}{1 - a_m a_k}\right| = \prod_{m<k} \frac{a_k - a_m}{1 - a_m a_k} \cdot \prod_{m>k} \frac{a_m - a_k}{1 - a_m a_k}$$

$$\geq \prod_{m<k} \frac{1/2^m \left(1 - 1/2^{k-m}\right)}{1/2^m \left(1 + 1/2^{k-m}\right)} \cdot \prod_{m>k} \frac{1/2^k \left(1 - 1/2^{m-k}\right)}{1/2^k \left(1 + 1/2^{m-k}\right)}$$

$$= \prod_{m<k} \frac{1 - 1/2^{k-m}}{1 + 1/2^{k-m}} \cdot \prod_{m>k} \frac{1 - 1/2^{m-k}}{1 + 1/2^{m-k}} \geq \underbrace{\left[\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - 1/2^j}{1 + 1/2^j}\right]^2}_{= C} > 0 \; *$$

Proboremos que $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-1/2^j}{1+1/2^j}$ converge en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ viendo que $\sum_{j=1}^{\infty} \log\left[\frac{1-1/2^j}{1+1/2^j}\right]$ es convergente:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log\left[\frac{1-1/2^j}{1+1/2^j}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \log(1-1/2^j) - \log(1+1/2^j)$$

El logaritmo en $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ es lipschitziana con constante 2.

$$* \sum_{j=1}^{\infty} \log(1+1/2^j) - \log(1-1/2^j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2\left(1+1/2^j - (1-1/2^j)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{2}{2^j} = 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \quad \text{convergente} \checkmark.$$

Hemos probado $C > 0$.

* Misma serie cambiada de signo.

Puesto que $B \in H^\infty$, en vista del teorema de la pag. 62 (Lindelöf), si B tuviese límite radial en 1, entonces tendría límite no tangencial. En tal caso

$$\lim_{r \to 1^-} (1-r) B'(r) = 0.$$

Pero

$$0 < C \leq (1-a_n)(1+a_n)\, |B'(a_n)|$$

$$\Rightarrow (1-a_n)\, |B'(a_n)| \geq \frac{C}{1+a_n} \geq \frac{C}{2} > 0.$$

Obtenemos así una contradicción y concluimos que $\boxed{B \text{ no tiene límite radial en } 1}$

4 $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

$$B(r)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\,\frac{a_n-r}{1-\bar{a}_n r}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-r}{1-a_n r}$$

$$|B(r)|=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{r-a_k}{1-a_k r}\cdot\underbrace{\left|\prod_{k=n}^{\infty}\frac{a_k-r}{1-a_k r}\right|}_{\leq 1}\qquad \forall a_{n-1}<r<a_n,\ n\geq 2$$

$$1-\frac{1}{k^2}-(1-1/n^2)=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\geq 0$$

Si $k\geq n\geq 2 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{1-\frac{1}{k^2}}^{\geq}-r}{\underbrace{1-(1-1/k^2)r}_{\geq 0}}\leq\dfrac{1-1/k^2-r}{1-r+\frac{r}{k^2}}\leq 1$ Ambos positivos, denom. claramente mayor.

Por tanto,

$$|B(r)|\leq\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\overset{\leq a_n}{r}-a_k}{1-a_k\underset{\leq 1}{r}}\leq\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_n-a_k}{1-a_k}\qquad \forall a_{n-1}<r<a_n,\ n\geq 2.$$

Puesto que $B\in H^\infty$, en vista del teorema de la pag. 62 (Lindelöf), basta probar que B tiene límite radial en 1.

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - a_k}{1-a_k} \le \prod_{k=1}^{n-1} e^{-k^2/n^2} = e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}}$$

$(k<n)$

$$\frac{a_n - a_k}{1-a_k} = \frac{1-\frac{1}{n^2}-1+\frac{1}{k^2}}{1-1+1/k^2} = k^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{k^2}{n^2} \le e^{-k^2/n^2}$$

Por tanto,

$$|B(r)| \le e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}} = (*)$$

$\forall n \geq 2$

$a_{n-1} < r < a_n$

$1-\frac{1}{(n-1)^2} < r < 1-\frac{1}{n^2}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$(*) = e^{-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

$-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \to -\infty \quad (n\to\infty)$

Cuando $r\to 1$ podemos mantener cierta la desigualdad haciendo n tender a ∞ de forma que $1-\frac{1}{(n-1)^2} < r < 1-\frac{1}{n^2}$, pero el miembro de la derecha tiende a 0 cuando $n\to\infty$. Por tanto,

$$\lim_{r\to 1} |B(r)| = 0 \Rightarrow$$

B tiene límite radial (y no tangencial) en 1 y vale 0.

5 $f \in H^\infty \iff \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$

$$|f(z)| = e^{-\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} < e^0 = 1 \quad \checkmark$$

$$\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1+z-\bar{z}-|z|^2}{1-z-\bar{z}+|z|^2} = \frac{1-|z|^2+2i\operatorname{Im} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2\operatorname{Re} z} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0 \quad \forall z\in\mathbb{D}$$

Por tanto, $f\in H^\infty$ con $\|f\|_{H^\infty} \leq 1$.

¿se da la igualdad?

¿$\rho\in\mathbb{R}$? $\quad \dfrac{1+z}{1-z} = \rho i \quad \left(\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=0\right)$

$$1+z = \rho i - \rho i z$$

$$z(1+\rho i) = \rho i - 1$$

$$z = \frac{-1+\rho i}{1+\rho i} \in \partial\mathbb{D}$$

Con $z\in\mathbb{D}$, $\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ puede estar tan cerca de 0 como queramos.

$\|f\|_{H^\infty} = 1$.

En vista del T$^{\text{a}}$ de la pag. 62 (Lindelöf), basta probar que f tiene límite radial en ξ $\forall \xi \in \partial\mathbb{D}\setminus\{1\}$

(Como $f \in H^\infty$, sabemos que esta propiedad se cumple casi por doquier en $\partial\mathbb{D}$.)

$$\lim_{r\to 1} e^{-\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}} = e^{-\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}} = e^{-\frac{1+\xi}{1-\xi}} \quad (\forall \xi \neq 1)$$

$(\theta \neq 0)$

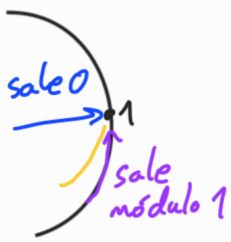
$$\left| e^{-\frac{1+\xi}{1-\xi}} \right| = e^{-\mathrm{Re}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)} = e^{-\frac{1-|\xi|^2}{|1-\xi|^2}} = e^0 = 1$$

$(|\xi| = 1)$ ✓

“$\frac{2}{0^+} = +\infty$”

$$\lim_{r\to 1} e^{\overset{-\infty}{-\frac{1+r}{1-r}}} = 0$$

Tiene límite radial en 1 y vale 0. Como $f \in H^\infty$, también no tangencial. ✓



Tengo que encontrar una forma de acercarme al 1 por puntos de $\mathbb{D}$ de forma que la sucesión no quede en $S_\alpha(1)$ para algún $\alpha \in]0, \pi/2[$.

$$z_t = 1-t^2+it \longrightarrow 1 \quad (t\to 0)$$

$$|z_t|^2 = (1-t^2)^2+t^2 = 1+t^4-t^2 < 1 \quad \text{si } t\in]-1,1[$$

$$\lim_{t\to 0} |f(z_t)| = \lim_{t\to 0} \left| e^{-\frac{2-t^2+it}{t^2-it}} \right| = \lim_{t\to 0} e^{-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = e^{-1}$$

$$\frac{(2-t^2+it)}{(t^2-it)}\cdot\frac{t^2+it}{t^2+it} = \frac{2t^2-t^4+\cancel{it^3}+i2t-\cancel{it^3}-t^2}{t^4+t^2} = \frac{t^2-t^4+2it}{t^4+t^2} =$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\cdot\frac{2}{t^3+t}$$

Como el límite radial en 1 vale 0, si hubiese límite tendría que ser 0. Pero hemos encontrado una forma de acercarnos al 1 por la que el módulo de f tiende a e^{-1}. No puede haber límite, pues $f(z_t)$ no converge a 0 cuando $t\to 0$ $(z_t\in\mathbb{D},\ z_t\to 1)$.

A exponer:

Rudin R & C
Lemma 15.17
Pag 307

Demostrar $\int_{-\pi}^{\pi} \log|1-e^{it}|\,dt = 0$

Consideramos $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$.

Para cada $z \in \Omega$, $\operatorname{Re}(1-z) = 1 - \operatorname{Re}(z) > 0$, Por tanto la función $z \longmapsto 1-z$ no se anula en Ω. Como además es simplemente conexo, existe un logaritmo holomorfo: $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfaciendo

$$e^{h(z)} = 1-z \quad \forall z \in \Omega$$

Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ cumple lo mismo, tenemos

$$e^{g(z)} = 1-z = e^{h(z)} \qquad \forall z \in \Omega$$

$$\Rightarrow e^{h(z)-g(z)} = 1 \Rightarrow h-g \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

De modo que si exigimos $h(0)=0$, h queda únicamente determinada.

Observamos que $\forall z \in \Omega$,

$$e^{h(z)} = 1-z \Rightarrow |1-z| = |e^{h(z)}| = e^{\operatorname{Re} h(z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log|1-z| = \operatorname{Re} h(z)} \qquad (1)$$

Puesto que $\operatorname{Re}(1-z) > 0 \quad \forall z \in \Omega$,

se tiene también

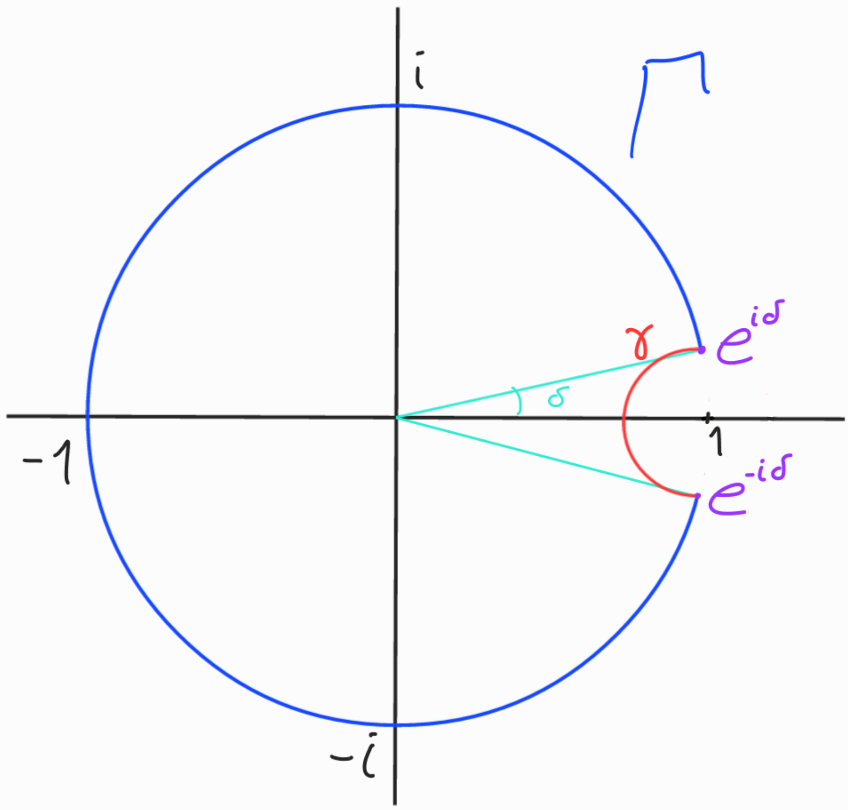
$$\operatorname{Im} h(z) = \arg(1-z) \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[$$

$$\Rightarrow \boxed{|\operatorname{Im} h(z)| < \tfrac{\pi}{2}} \quad \forall z \in \Omega \qquad (2)$$

Para $\delta \in]0, \varepsilon^{*}[$, consideramos el camino $\Gamma : [\delta, 2\pi-\delta] \to \mathbb{C}$, $\Gamma(t) = e^{it}$.

Sea γ el arco circular centrado en 1 que va de $e^{i\delta}$ hasta $e^{-i\delta}$ por dentro del disco abierto unidad.

* $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Tomaremos límite $\delta \to 0$.



Por la periodicidad de la exponencial, nuestro objetivo es equivalente a probar

$$\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta = 0$$

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} \log|1-e^{i\theta}|\,d\theta \overset{(1)}{=} \int_\delta^{2\pi-\delta} \mathrm{Re}\, h(e^{i\theta})\,d\theta = \mathrm{Re}\left[\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{i\theta})\,d\theta\right]$$

$(e^{i\theta} \in \Omega)$

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} h(e^{i\theta})\,d\theta = \int_\Gamma h(z)\frac{dz}{iz}$$

Voy a probar que se va a 0, no me importa.

Cambio variable:

$z = e^{i\theta}$

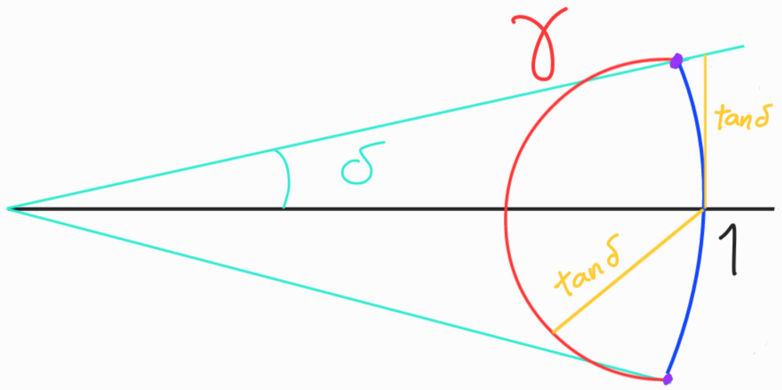
$dz = ie^{i\theta}d\theta = z\,d\theta$

Los caminos Γ y γ están contenidos en Ω, que es abierto y simplemente conexo. Además, la función $z \mapsto \frac{h(z)}{z}$ es holomorfa en Ω, puesto que tiene un cero en 0 de orden al menos 1 y la singularidad es evitable.

Por tanto, el valor de la integral sólo depende de los extremos y no del camino elegido:

$$\int_\Gamma h(z) \frac{dz}{z} = \int_\gamma h(z) \frac{dz}{z}$$

Basta probar que la integral en γ tiende a 0 cuando $\delta \to 0$.



Como $\lim_{\delta \to 0} \frac{\tan\delta}{\delta} = 1$, se tiene $\tan\delta < 2\delta$ para δ suficientemente pequeño. Por tanto,

$$\underset{\text{(longitud)}}{\mathrm{len}(\gamma)} \underset{\substack{\gamma \text{ centrado} \\ \text{en } 1.}}{\leq} \pi \tan\delta \leq 2\pi\delta.$$

De (1) y (2) obtenemos $\forall z \in \gamma^*$ (Traza de la curva)

$$|h(z)| \leq \Big(\big|\log \underbrace{|1-z|}_{\substack{\tan\delta \\ \wedge \\ 2\delta}}\big| + \frac{\pi}{2} \Big) \leq \big|\log(2\delta)\big| + \frac{\pi}{2}$$

$|z| \geq 1 - \tan\delta \geq 1/2$ para δ suficientemente pequeño.

Concluimos que $\left|\frac{h(z)}{z}\right| \leq \pi + 2\big|\log(2\delta)\big|$ $\forall z \in \gamma^*$

Tenemos por tanto,

$$\left| \int_\gamma h(z) \frac{dz}{z} \right| \leq 2\pi\delta \left(\pi + 2 |\log(2\delta)| \right)$$

$$= 2\pi^2\delta + 2\pi \cdot 2\delta \overset{*}{|\log(2\delta)|} \longrightarrow 0 \quad (\delta \to 0),$$

y obtenemos lo deseado.

$$* \lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$$