Relación 2

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1. Una generalización inmediata del resultado 5 II nos dice que las a_{ii} son independientes por ser la matriz I_p diagonal por cajas (de tamaño 1).

Además, el resultado 5 I nos asegura que

$$a_{ii} = \frac{a_{ii}}{1} \sim \chi^2_n, \qquad i = 1, \dots, p$$

Utilizando que la distribución χ^2 es reproductiva en los grados de libertad y que los elementos de la diagonal son variables aleatorias independientes, obtenemos

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} \sim \chi^2_{np}$$

Ejercicio 2. Aplicando el resultado 3 con $M = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'Aa & a'Ab \\ b'Aa & b'Ab \end{pmatrix} \sim W_2\left(n, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right) \sim W_2\left(n, \begin{pmatrix} a'\Sigma a & a'\Sigma b \\ b'\Sigma a & b'\Sigma b \end{pmatrix}\right)$$

El resultado 5 II nos asegura que si $a'\Sigma b = \Sigma_{B12} = 0$, entonces las variables $a'Aa = B_{11}$ y $b'Ab = B_{22}$ son independientes.

Resultado 3 me dice que a'Aa y b'Bb siguen Wishat centradas univariantes con n grados de libertad y a'Sigma a, b'Sigma b.

Recíprocamente, si $a'Aa = B_{11}$ y $b'Ab = B_{22}$ son independientes, en particular son incorreladas. Por tanto, $\operatorname{Cov}(B_{11}, B_{22}) = 0$. Utilizando ahora el resultado 1 obtenemos

$$0 = \operatorname{Cov}(B_{11}, B_{22}) = n(\Sigma_{B12}^2 + \Sigma_{B12}^2) = 2n(a'\Sigma b)^2,$$

lo que obliga a $a'\Sigma b = 0$.

Ejercicio 3. Trabajaremos con la primera expresión de la función de verosimilitud, queremos maximizar en Σ:

$$L(\mu, \Sigma; x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pN}{2}} |\Sigma|^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)' \Sigma^{-1} (x_\alpha - \mu) \right\}$$

Usando que el logaritmo es estrictamente creciente, esto equivale a maximizar:

$$\ln L(\mu, \Sigma; x_1, \ldots, x_N) = -\frac{pN}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)' \Sigma^{-1} (x_\alpha - \mu)$$

Sólo tenemos que maximizar la parte que depende de Σ, también utilizamos que el último sumando coincide con su traza por ser un escalar y eliminamos el $\frac{1}{2}$. Tenemos que maximizar entonces:

$$g(\Sigma) = -N \ln |\Sigma| - \operatorname{tr}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)' \Sigma^{-1} (x_\alpha - \mu) \right)$$

Utilizamos la linealidad de la traza para sacar la sumatoria, y que la traza es invariante por permutaciones en el producto de matrices.

$$g(\Sigma) = -N \ln |\Sigma| - \sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1} (x_\alpha - \mu)(x_\alpha - \mu)' \right)$$

Aplicando otra vez la linealidad de la traza y que Σ no depende de α:

$$g(\Sigma) = -N \ln |\Sigma| - \operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)(x_\alpha - \mu)' \right)$$

Estamos en condiciones de aplicar el Lema de Watson con $D = \sum_{\alpha=1}^{N} (x_\alpha - \mu)(x_\alpha - \mu)'$, que es simétrica, ya que esta matriz es definida postivia por hipótesis. Obtenemos entonces que $\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} D = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \mu)(X_\alpha - \mu)'$ maximiza g y por tanto L, luego es el EMV de Σ.

Para comprobar si es insesgado, hacemos uso de la linealidad de la esperanza. Después utilizamos que las variables X_α están identicamente distribuidas por una $N_p(\mu, \Sigma)$ y concluimos que efectivamente $\hat{\Sigma}$ es insesgado en Σ.

$$E[\hat{\Sigma}] = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} E[(X_\alpha - \mu)(X_\alpha - \mu)'] = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \Sigma = \Sigma$$

Ejercicio 4. Con la definición de esperanza con la función de densidad, tenemos que

$$E[|A|^r] = \int_{M_S^+(p)} |A|^r \frac{|A|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} A)\}}{2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p(\frac{n}{2})} dA = \int_{M_S^+(p)} \frac{|A|^{\frac{n+2r-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} A)\}}{2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p(\frac{n}{2})} dA \tag{1}$$

donde $M_S^+(p)$ denota el espacio de matrices simétricas definidas positivas de orden p.

Para cada real $m > p - 1$, sabemos que la función de densidad de la distribución $W_p(m, \Sigma)$ debe integrar 1, es decir

$$\int_{M_S^+(p)} \frac{|A|^{\frac{m-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Sigma^{-1} A)\}}{2^{\frac{mp}{2}} |\Sigma|^{\frac{m}{2}} \Gamma_p(\frac{m}{2})} dA = 1 \tag{2}$$

Multiplicamos y dividimos en (1) por los factores que faltan para utilizar (2) con $m = n + 2r > n \geq p > p-1$: $\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})$, $2^{\frac{2rp}{2}}$ y $|\Sigma|^{\frac{2r}{2}}$. Obtenemos entonces:

$$E[|A|^r] = \int_{M_S^+(p)} \frac{|A|^{\frac{n+2r-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}A)\}\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})2^{\frac{2rp}{2}}|\Sigma|^{\frac{2r}{2}}}{2^{\frac{np}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}\Gamma_p(\frac{n}{2})\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})2^{\frac{2rp}{2}}|\Sigma|^{\frac{2r}{2}}} dA$$

Reagrupando y usando (2) obtenemos:

$$E[|A|^r] = \frac{\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})2^{\frac{2rp}{2}}|\Sigma|^{\frac{2r}{2}}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})} \int_{M_S^+(p)} \frac{|A|^{\frac{n+2r-p-1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}A)\}}{2^{\frac{(n+2r)p}{2}}|\Sigma|^{\frac{n+2r}{2}}\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})} dA = \frac{\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})2^{\frac{2rp}{2}}|\Sigma|^{\frac{2r}{2}}}{\Gamma_p(\frac{n}{2})}$$

Por tanto, para cada $r > 0$ tenemos

$$E[|A|^r] = \frac{\Gamma_p(\frac{n+2r}{2})2^{rp}|\Sigma|^r}{\Gamma_p(\frac{n}{2})}$$

Ejercicio 5.

a) Sea $\mathcal{X} = \operatorname{vec}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}$ el vector $pN \times 1$ formado por la concatenación de las observaciones. Buscamos primero una matriz E_α de dimensión $p \times pN$ tal que $X_\alpha = E_\alpha \mathcal{X}$, que claramente debe ser estar formada por $N-1$ cajas de ceros $p \times p$ y la identidad de orden p en la posición α:

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_p^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos definir también $\bar{E} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} E_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}I_p & \cdots & \frac{1}{N}I_p \end{pmatrix}$, de tal forma que $\bar{X} = \bar{E}\mathcal{X}$.

Tenemos entonces

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ X_\alpha - \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E} \\ E_\alpha - \bar{E} \end{pmatrix} \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \bar{E} \\ E_\alpha - \bar{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}$$

Podemos notar

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{E} \\ E_\alpha - \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N}I_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{N}I_p \\ -\frac{1}{N}I_p & \cdots & -\frac{1}{N}I_p & I_p - \frac{1}{N}I_p \; ^{(\alpha)} & -\frac{1}{N}I_p & \cdots & -\frac{1}{N}I_p \end{pmatrix}$$

Por otra parte, como consecuencia de la independencia de las observaciones, tenemos

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \sim N_{pN}\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma \end{pmatrix} \right)$$

De modo que $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ X_\alpha - \bar{X} \end{pmatrix}$ sigue una normal $2p$-variante con vector de medias

$$F_\alpha \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} I_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{N} I_p \\ -\frac{1}{N} I_p & \cdots & -\frac{1}{N} I_p & I_p - \frac{1}{N} I_p \ ^{(\alpha)} & -\frac{1}{N} I_p & \cdots & -\frac{1}{N} I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \frac{1}{N} \mu \\ \mu - N \frac{1}{N} \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

y matriz de covarianzas

$$F_\alpha \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma \end{pmatrix} F'_\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{N} I_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{N} I_p \\ -\frac{1}{N} I_p & \cdots & -\frac{1}{N} I_p & I_p - \frac{1}{N} I_p \ ^{(\alpha)} & -\frac{1}{N} I_p & \cdots & -\frac{1}{N} I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} I_p & -\frac{1}{N} I_p \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{N} I_p \\ \vdots & I_p - \frac{1}{N} I_p \ ^{(\alpha)} \\ \vdots & -\frac{1}{N} I_p \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} I_p & -\frac{1}{N} I_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \Sigma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{1}{N} \Sigma \\ -\frac{1}{N} \Sigma & \cdots & -\frac{1}{N} \Sigma & \Sigma - \frac{1}{N} \Sigma \ ^{(\alpha)} & -\frac{1}{N} \Sigma & \cdots & -\frac{1}{N} \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} I_p & -\frac{1}{N} I_p \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & -\frac{1}{N} I_p \\ \vdots & I_p - \frac{1}{N} I_p \ ^{(\alpha)} \\ \vdots & -\frac{1}{N} I_p \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N} I_p & -\frac{1}{N} I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma - \frac{3}{N} \Sigma \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ X_\alpha - \bar{X} \end{pmatrix}$ sigue una distribución normal con matriz de covarianzas diagonal por cajas, concluimos que que las variables $\bar{X}$ y $X_\alpha - \bar{X}$ son independientes y por tanto incorreladas: $\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_\alpha - \bar{X}) = 0$.

Además, como A es una función medible de las variables $X_\alpha - \bar{X}, \quad \alpha = 1, \ldots, N$; y $\bar{X}$ es independiente de todas ellas, deducimos que $\bar{X}$ y A son independientes.

b) Buscaré primero una matriz C tal que $C\mathbf{X} = C \begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_1 - \bar{X}' \\ \vdots \\ X'_N - \bar{X}' \end{pmatrix}$.

Necesito entonces

$$C\mathbf{X} = I_N\mathbf{X} - \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \end{pmatrix}$$

Desarrollando el segundo sumando:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha 1} & \cdots & \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha 1} & \cdots & \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{Np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{1}_N\mathbf{X}\end{aligned}$$

Por tanto $C = I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N$. Tenemos también

$$\begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} & \cdots & X_N - \bar{X} \end{pmatrix} = (C\mathbf{X})' = \mathbf{X}'C' = \mathbf{X}'C$$

Finalmente,

$$A = \sum_{\alpha=1}^N (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})' = \begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} & \cdots & X_N - \bar{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 - \bar{X}' \\ \vdots \\ X'_N - \bar{X}' \end{pmatrix} = \mathbf{X}'CC\mathbf{X}$$

Luego obtenemos lo requerido para $B = C^2$.

c) Por ser A la matriz de dispersiones de una muestra aleatoria simple (de tamaño $N > p$) de una distribución $N_p(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$, sabemos que $A \sim W_p(N-1, \Sigma)$.

Siempre que G sea de rango p, tendremos por el resultado 3 $GAG' \sim W_p(N-1, G\Sigma G')$. Como Σ es simétrica y definida positiva, admite una factorización de la forma $\Sigma = CC'$ con C matriz cuadrada no singular de orden p. Tomamos $G = C^{-1}$, que es una matriz no singular de orden p. Tenemos entonces

$$GAG' \sim W_p(N-1, G\Sigma G') = W_p(N-1, C^{-1}CC'G^{-1'}) = W_p(N-1, I_p)$$