Solución al problema 1: Dilema del padre

David Cabezas Berrido

1. a) Encontrar, si existe, un entero positivo cuyo factorial termine en exactamente 5 ceros.

Entiendo que esto significa que la cifra correspondiente a las unidades de millón sea distinta de 0 y todas las cifras anteriores (desde las unidades a las centenas de millar) sean 0.

No existe tal número, a continuación lo razonaré:

Para que un número termine en exactamente 5 0s, debe ser divisible por 10^5, pero no por 10^6, esto significa que en su factorización en números primos aparezcan $2^p \cdot 5^q$ con $p, q \in \mathbb{N}$ y $\min\{p, q\} = 5$.

Si un número n es de la forma $n = k!$, la multiplicidad del factor 2 (aparece cada dos números) será menor que la multiplicidad del factor 5 (aparece cada 5), por lo que podemos suponer que si k es el número buscado, la factorización de n en números primos tendrá $2^p \cdot 5^5$ con $p > 5$. Pero esto es imposible, ya que si $k = 24$, el factor 5 tendrá multiplicidad 4 (aparece en 5, 10, 15, 20); y para $k = 25$, el factor 5 tendrá multiplicidad 6 (aparece dos veces en 25).

Por lo que no existe ningún número cuyo factorial tenga al 5 como factor de multiplicidad exactamente 5, y puesto que el factor 2 aparece con mayor multiplicidad, acabe en 5 0s.