Ejercicios propuestos: Parte III

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1

Función masa de probabilidad:

X/Y	0	2
2	1/16	1/16
4	1/8	1/4
6	0	1/2

Se pide calcular la función generatriz de momentos y, a partir de ella, la matriz de covarianzas.

f.g.m.:

$$M(t_1,t_2)=E[e^{t_1x+t_2y}]=\frac{1}{16}e^{2t_1}+\frac{1}{16}e^{2t_1+2t_2}+\frac{1}{8}e^{4t_1}+\frac{1}{4}e^{4t_1+2t_2}+\frac{1}{2}e^{6t_1+2t_2}=\frac{1}{16}(e^{2t_1}+e^{2t_1+2t_2}+2e^{4t_1}+4e^{4t_1+2t_2}+8e^{6t_1+2t_2})$$

Queremos calcular la **matriz de covarianzas**

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y)\\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{20} & \mu_{11}\\ \mu_{11} & \mu_{02}\end{pmatrix}$$

Para hallar los momentos centrados, podemos hallar primero los no centrados. Usaremos la función generatriz de momentos para hallarlos.

$$m_{10}=\frac{\partial M}{\partial t_1}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{1}{16}(2e^{2t_1}+2e^{2t_1+2t_2}+8e^{4t_1}+16e^{4t_1+2t_2}+48e^{6t_1+2t_2})\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{2+2+8+16+48}{16}=\frac{19}{4}$$

$$m_{01}=\frac{\partial M}{\partial t_2}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{1}{16}(2e^{2t_1+2t_2}+8e^{4t_1+2t_2}+16e^{6t_1+2t_2})\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{2+8+16}{16}=\frac{13}{8}$$

$$m_{20}=\frac{\partial^2 M}{\partial t_1^2}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{1}{16}(4e^{2t_1}+4e^{2t_1+2t_2}+32e^{4t_1}+64e^{4t_1+2t_2}+288e^{6t_1+2t_2})\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{4+4+32+64+288}{16}=\frac{49}{2}$$

$$m_{02}=\frac{\partial^2 M}{\partial t_2^2}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{1}{16}(4e^{2t_1+2t_2}+16e^{4t_1+2t_2}+32e^{6t_1+2t_2})\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{4+16+32}{16}=\frac{13}{4}$$

$$m_{11}=\frac{\partial^2 M}{\partial t_1 t_2}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{1}{16}(4e^{2t_1+2t_2}+32e^{4t_1+2t_2}+96e^{6t_1+2t_2})\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{4+32+96}{16}=\frac{33}{4}$$

Ya podemos hallar los momentos centrados:

$$\mu_{20}=m_{20}-m_{10}^2=\frac{49}{2}-\left(\frac{19}{4}\right)^2=\frac{31}{16}$$
$$\mu_{11}=m_{11}-m_{10}m_{01}=\frac{33}{4}-\frac{19}{4}\frac{13}{8}=\frac{17}{32}$$
$$\mu_{02}=m_{02}-m_{01}^2=\frac{13}{4}-\left(\frac{13}{8}\right)^2=\frac{39}{64}$$

Por tanto la matriz de covarianzas es

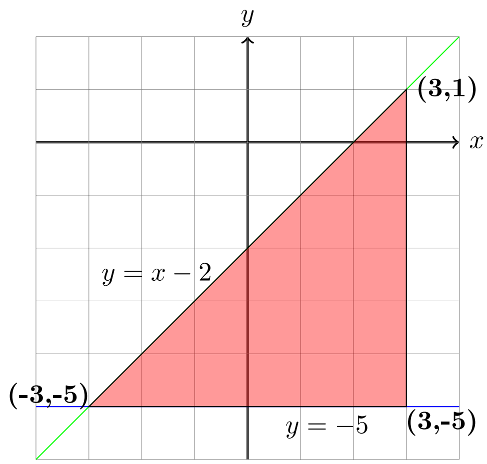
$$\begin{pmatrix}\frac{31}{16} & \frac{17}{32}\\ \frac{17}{32} & \frac{39}{64}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Función densidad:

$$f(x,y) = \frac{1}{18} \quad -3 < x < 3,\ -5 < y < -2 + x$$

Se pide calcular la recta y la curva de regresión de Y sobre X, así como el coeficiente de determinación lineal y la razón de correlación.



Recta de regresión:

$$Y = aX + b$$

donde

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{Var(X)}, \qquad b = \mathrm{E}(Y) - a\,\mathrm{E}(X)$$

Covarianza:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-3}^{3}\int_{-5}^{x-2} \frac{1}{18}xydydx = \frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x \int_{-5}^{x-2} ydydx \\
&= \frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-5}^{x-2} dx = \frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x\left(\frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(-5)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{36}\int_{-3}^{3} x(x^2-4x+4-25)dx \\
&= \frac{1}{36}\int_{-3}^{3} x^3 - 4x^2 - 21xdx = \frac{1}{36}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{21x^2}{2}\right]_{-3}^{3} = \frac{1}{36}\left[\frac{4x^3}{3}\right]_{3}^{-3} = \frac{1}{36}\left(\frac{-36}{3} - \frac{36}{3}\right) \\
&= \frac{-1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-3}^{3}\int_{-5}^{x-2} \frac{1}{18}xdydx = \frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x \int_{-5}^{x-2} dydx \\
&= \frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x(x-2-(-5))dx = \frac{1}{18}\int_{-3}^{3} x^2 + 3xdx = \frac{1}{18}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{3} = \\
&= \frac{1}{18}\left(\frac{27}{3} - \frac{-27}{3}\right) = 1
\end{aligned}$$