

Problemas de Análisis Funcional Avanzado

Tema 2: Espacios localmente convexos.

Teorema de Krein-Milman

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1:

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , X' su dual algebraico y $X_{\mathbb{R}}, (X')_{\mathbb{R}}$ los correspondientes espacios reales subyacentes. Prueba que la aplicación $f \mapsto \text{Ref}$ es una biyección \mathbb{R} -lineal de $(X')_{\mathbb{R}}$ en $(X_{\mathbb{R}})'$.

Solución:

Si $f \in (X')_{\mathbb{R}}$, en particular $f \in X'$ (son idénticos como conjuntos), luego $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. Podemos escribir f como $f = \text{Ref} + i\text{Imf}$, de modo que $\text{Ref}(\lambda x + y) + i\text{Imf}(\lambda x + y) = \lambda(\text{Ref}(x) + i\text{Imf}(x)) + \text{Ref}(y) + i\text{Imf}(y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x, y \in X$. En el caso de que λ sea real tendremos $\text{Ref}(\lambda x + y) = \lambda \text{Ref}(x) + \text{Ref}(y)$, lo que demuestra ($\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$ son arbitrarios) que $\text{Ref} \in (X_{\mathbb{R}})'$.

Dado $g \in (X_{\mathbb{R}})'$, tomando $f(x) := g(x) - ig(ix)$ para cada $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= g(\lambda x + y) - ig(i\lambda x + iy) = \lambda g(x) + g(y) - i(\lambda g(ix) + g(iy)) \\ &= \lambda g(x) - \lambda ig(ix) + g(y) - ig(iy) = \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Esto demuestra que f es \mathbb{R} -lineal, pero además

$$f(ix) = g(ix) - ig(-x) = i(-i)g(ix) + ig(x) = i(g(x) - ig(ix)) = if(x)$$

para cada $x \in X$. Concluimos que f es (\mathbb{C}) -lineal y por tanto $f \in X' = (X')_{\mathbb{R}}$ (como conjuntos). Como es claro que $\text{Ref} = g$, deducimos que la aplicación es sobreyectiva.

La identidad $\text{Imf}(x) = \text{Re}(-if(x)) = -\text{Ref}(ix)$ sugiere que f viene unívocamente determinado por su parte real, luego en realidad tenemos una biyección.

Finalmente, es claro que la función parte real es \mathbb{R} -lineal.

Ejercicio 2:

Sean X e Y espacios vectoriales y $g : X \rightarrow Y$ una aplicación. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) g es afín.
- ii) Existe una aplicación \mathbb{R} -lineal $f : X \rightarrow Y$ y un vector $b \in Y$ tales que $g(x) = f(x) + b$ para todo $x \in X$.

Solución:

Supongamos primero (ii). Dados $x, y \in X$ y $t \in [0, 1]$, tenemos

$$\begin{aligned} g((1-t)x + ty) &= f((1-t)x + ty) + b = (1-t)f(x) + tf(y) + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(f(x) + b) + t(f(y) + b) = (1-t)g(x) + tg(y), \end{aligned}$$

lo que demuestra que g es afín.

Suponiendo (i), tomamos $f : X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = g(x) - g(0)$. Sólo necesitamos probar que f es \mathbb{R} -lineal. Primero comprobamos que f preserva el producto por escalares de $[0, 1]$, sean $x \in X$ y $t \in [0, 1]$:

$$f(tx) = g(tx) - g(0) = g(tx + (1-t)0) - g(0) = tg(x) + (1-t)g(0) - g(0) = tg(x) - tg(0) = tf(x).$$

Ahora vemos que f separa sumas. Si $x, y \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g\left(\frac{2x+2y}{2}\right) - g(0) = \frac{1}{2}g(2x) + \frac{1}{2}g(2y) - \frac{1}{2}g(0) - \frac{1}{2}g(0) \\ &= \frac{1}{2}f(2x) + \frac{1}{2}f(2y) = f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado lo anterior para cancelar los $\frac{1}{2}$ de fuera con los 2 de dentro de f .

Utilizando la aditividad un número arbitrario de veces podemos concluir que $f(nx) = nf(x)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in X$. Todo real positivo $r \in \mathbb{R}^+$ se puede escribir como $r = n + t$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in [0, 1]$. Por tanto,

$$f(rx) = f(nx + tx) = f(nx) + f(tx) = nf(x) + tf(x) = rf(x),$$

lo que demuestra que f preserva homotecias de razón positiva. Finalmente, la igualdad

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

lleva a $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in X$. Concluimos así que f es \mathbb{R} -lineal.

Ejercicio 3:

Sea X un espacio vectorial, n un natural, B_j con subconjunto convexo de X para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ y $B = \bigcup_{j=1}^n B_j$. Prueba que

$$\text{co}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j x_j : t_j \in [0, 1], x_j \in B_j \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

Observa como consecuencia que si b_1, \dots, b_n son elementos de X ,

$$\text{co}(\{b_1, \dots, b_n\}) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j b_j : t_j \in [0, 1] \forall j = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n t_j = 1 \right\}.$$

Solución:

La segunda igualdad es un caso particular en la que cada B_j se reduce a un punto, por lo que basta con demostrar la primera. Además, la inclusión hacia la derecha (\supset) es trivial por la Proposición 3.1.1, ya que cada B_j está contenido en B .

Dado $x \in \text{co}(B)$, podemos escribir $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ con $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $y_i \in B$ para cada $i = 1, \dots, m$ (Proposición 3.1.1) y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Nuestro objetivo es escribir x con n sumandos cada uno en un conjunto B_j y manteniendo la misma condición sobre los pesos (deben ser no negativos y sumar 1).

Supongamos que hubiese dos elementos $y_i, y_{i'} \in B$ con $i, i' \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq i'$, y $y_i, y_{i'} \in B_j$ para algún $j = 1, \dots, n$. Reordenando y renombrando si es preciso, podemos suponer que son $y_{m-1}, y_m \in B_j$. Por la convexidad de B_j tenemos

$$y := \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_{m-1} + \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1} + \lambda_m} y_m \in B_j \subset B,$$

y podemos escribir

$$x = \sum_{i=1}^{m-2} \lambda_i y_i + (\lambda_{m-1} + \lambda_m) y.$$

Hemos expresado x utilizando un sumando menos y es obvio que se sigue cumpliendo la condición sobre los nuevos puntos y pesos.

Podemos repetir este proceso siempre que existan dos índices distintos tales que los puntos correspondientes están en un mismo B_j , de modo que en un número finito de pasos llegaríamos a expresar x como una combinación convexa en la que cada y_i pertenece a un único B_i , lo que forzaría a que esa combinación tuviese como máximo n sumandos. En caso de haber menos, podríamos añadir nuevos elementos a la combinación otorgándoles peso 0, de forma que todos los B_j tengan (como mínimo) un representante.

Ejercicio 4:

Sea X un espacio vectorial y \mathcal{B} una familia no vacía de subconjuntos absorbentes y equilibrados de X de modo que

i) $\forall U, V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V.$

ii) $\forall U \in \mathcal{B}, \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U.$

Prueba que existe una única topología vectorial en X con respecto a la cual \mathcal{B} es una base de entornos de cero.

Solución: