AMA-parte 2. Máster 2021-212.
Ejercicios.
Envíe antes del 15 de junio un pdf con las soluciones por correo eléctronico a
girela@uma.es

1. (a) Sea $0 < \alpha \leq 2\pi$ y sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ tal que $f(\mathbb{D})$ está contenido en un sector de amplitud α. Demuestre que $f \in H^p$ para $0 < p < \frac{\pi}{\alpha}$.

   (b) Sea $f(z) = \frac{1}{1-z}\left(\frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z}\right)^{-2}$ (se entiende que las singularidades evitables están evitadas). Compruebe que $f \in H^p$ si y sólo si $0 < p \leq 1$.

2. Sea D un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N \in \partial D$. Sea u una función subarmónica y acotada superiormente en D y sea $M > 0$. Supongamos que

$$\limsup_{\substack{z\to\xi \\ z\in D}} u(z) \leq M, \quad \text{para todo } \xi \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}.$$

   Demuestre que $u(z) \leq M$ para todo $z \in D$.

3. (a) Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ y supongamos que f tiene límite no-tangencial finito en 1. Demuestre que $\displaystyle\lim_{\substack{r\to 1 \\ r\in(0,1)}} (1-r)f'(r) = 0$.

   Indicación: Para $r \in (0,1)$ considere la circunferencia de centro r y radio $(1-r)/2$, …, fórmula de Cauchy para la derivada, … .

   (b) Sea $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Observe que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición de Blaschke. Sea B el producto de Blaschke cuya sucesión de ceros es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

   - Denuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$(1-|a_n|^2)|B'(a_n)| \geq C, \quad \text{para todo } n.$$

   - Pruebe que B no tiene límite radial en 1.

4. Para cada n natural, sea $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. Observe que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición de Blaschke. Sea B el producto de Blaschke cuya sucesión de ceros es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Compruebe que B tiene límite radial y límite no-tangencial en 1.

   Indicación: Demuestre que se tiene

$$|B(r)| \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{r-a_k}{1-a_k r} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - a_k}{1-a_k}, \quad \text{si } a_{n-1} < r < a_n \text{ y } n \geq 2,$$

   y utilice la desigualdad $1 - x \leq e^{-x}$, si $0 < x < 1$.

5. Sea $f(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$ $(z \in \mathbb{D})$.

   - Compruebe que $f \in H^{\infty}$ y que para todo $\xi \in \partial\mathbb{D}$ con $\xi \neq 1$, f tiene límite no tangencial con valor absoluto igual a 1 en ξ.
   - ¿Tiene f límite no-tangencial en 1? Si la respuesta es afirmativa, determínelo.
   - Compruebe que el límite $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 1 \\ z\in\mathbb{D}}} f(z)$ no existe.