Relación 2

David Cabezas Berrido

Ejercicio 1. Una generalización inmediata del resultado 5 II nos dice que las a_{ii} son independientes por ser la matriz I_p diagonal por cajas (de tamaño 1).

Además, el resultado 5 I nos asegura que

$$a_{ii} = \frac{a_{ii}}{1} \sim \chi^2_n, \qquad i = 1, \ldots, p$$

Utilizando que la distribución χ^2 es reproductiva en los grados de libertad y que los elementos de la diagonal son variables aleatorias independientes, obtenemos

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii} \sim \chi^2_{np}$$

Ejercicio 2. Aplicando el resultado 3 con $M = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ obtenemos:

$$B = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'Aa & a'Ab \\ b'Aa & b'Ab \end{pmatrix} \sim W_2\left(n, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\right) \sim W_2\left(n, \begin{pmatrix} a'\Sigma a & a'\Sigma b \\ b'\Sigma a & b'\Sigma b \end{pmatrix}\right)$$

El resultado 5 II nos asegura que si $a'\Sigma b = \Sigma_{B12} = 0$, entonces las variables $a'Aa = B_{11}$ y $b'Ab = B_{22}$ son independientes.

Resultado 3 me dice que a'Aa y b'Bb siguen Wishat centradas univariantes con n grados de libertad y a'Sigma a, b'Sigma b.

Recíprocamente, si $a'Aa = B_{11}$ y $b'Ab = B_{22}$ son independientes, en particular son incorreladas. Por tanto, $\operatorname{Cov}(B_{11}, B_{22}) = 0$. Utilizando ahora el resultado 1 obtenemos

$$0 = \operatorname{Cov}(B_{11}, B_{22}) = n(\Sigma_{B12}^2 + \Sigma_{B12}^2) = 2n(a'\Sigma b)^2,$$

lo que obliga a $a'\Sigma b = 0$.

Ejercicio 3. Trabajaremos con la primera expresión de la función de verosimilitud, queremos maximizar en Σ:

$$L(\mu, \Sigma; x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{pN}{2}} |\Sigma|^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \mu)'\Sigma^{-1}(x_\alpha - \mu)\right\}$$

Usando que el logaritmo es estrictamente creciente, esto equivale a maximizar:

$$\ln L(\mu, \Sigma; x_1, \dots, x_N) = -\frac{pN}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \mu)'\Sigma^{-1}(x_\alpha - \mu)$$

Sólo tenemos que maximizar la parte que depende de Σ, también utilizamos que el último sumando coincide con su traza por ser un escalar y eliminamos el $\frac{1}{2}$. Tenemos que maximizar entonces:

$$g(\Sigma) = -N\ln|\Sigma| - \operatorname{tr}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \mu)'\Sigma^{-1}(x_\alpha - \mu)\right)$$

Utilizamos la linealidad de la traza para sacar la sumatoria, y que la traza es invariante por permutaciones en el producto de matrices.

$$g(\Sigma) = -N\ln|\Sigma| - \sum_{\alpha=1}^{N}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}(x_\alpha - \mu)(x_\alpha - \mu)'\right)$$

Aplicando otra vez la linealidad de la traza y que Σ no depende de α:

$$g(\Sigma) = -N\ln|\Sigma| - \operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \mu)(x_\alpha - \mu)'\right)$$

Estamos en condiciones de aplicar el Lema de Watson con $D = \sum_{\alpha=1}^{N}(x_\alpha - \mu)(x_\alpha - \mu)'$, que es simétrica, [TODO: pero estamos asumiendo que D es definida positiva]. Obtenemos entonces que $\hat{\Sigma} = \frac{1}{N}D = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha - \mu)(X_\alpha - \mu)'$ maximiza g y por tanto L, luego es el EMV de Σ.

Para comprobar si es insesgado, hacemos uso de la linealidad de la esperanza. Después utilizamos que las variables X_α están identicamente distribuidas por una $N_p(\mu, \Sigma)$ y concluimos que efectivamente $\hat{\Sigma}$ es insesgado en Σ.

$$E[\hat{\Sigma}] = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}E[(X_\alpha - \mu)(X_\alpha - \mu)'] = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\Sigma = \Sigma$$

Ejercicio 4. TODO

Ejercicio 5.

a) TODO

b) Buscaré primero una matriz C tal que $C\mathbf{X} = C\begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1' - \bar{X}' \\ \vdots \\ X_N' - \bar{X}' \end{pmatrix}$.

Necesito entonces

$$C\mathbf{X} = I_N\mathbf{X} - \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \end{pmatrix}$$

Desarrollando el segundo sumando:

$$\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^N X'_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha 1} & \cdots & \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha 1} & \cdots & \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{Np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{1}_N\mathbf{X}$$

Por tanto $C = I_N - \frac{1}{N}\mathbf{1}_N$. Tenemos también

$$\begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} & \cdots & X_N - \bar{X} \end{pmatrix} = (C\mathbf{X})' = \mathbf{X}'C' = \mathbf{X}'C$$

Finalmente,

$$A = \sum_{\alpha=1}^N (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})' = \begin{pmatrix} X_1 - \bar{X} & \cdots & X_N - \bar{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 - \bar{X}' \\ \vdots \\ X'_N - \bar{X}' \end{pmatrix} = \mathbf{X}'CC\mathbf{X}$$

Luego obtenemos lo requerido para $B = C^2$.

$c)$ Por ser A la matriz de dispersiones de una muestra aleatoria simple (de tamaño $N > p$) de una distribución $N_p(\mu, \Sigma)$ con $\Sigma > 0$, sabemos que $A \sim W_p(N-1, \Sigma)$.

Siempre que G sea de rango p, tendremos por el resultado 3 $GAG' \sim W_p(N-1, G\Sigma G')$. Como Σ es simétrica y definida positiva, admite una factorización de la forma $\Sigma = CC'$ con C matriz cuadrada no singular de orden p. Tomamos $G = C^{-1}$, que es una matriz no singular de orden p. Tenemos entonces

$$GAG' \sim W_p(N-1, G\Sigma G') = W_p(N-1, C^{-1}CC'G^{-1\prime}) = W_p(N-1, I_p)$$