Ejercicios propuestos: Tema 2 (Parte II)

David Cabezas Berrido

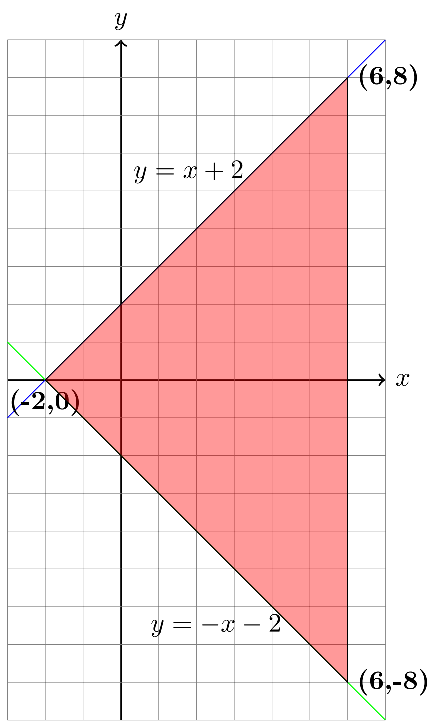
Ejercicio 2

Sea (X, Y) un vector continuo con la función de densidad conjunta que se muestra a continuación

$$f(x, y) = \frac{1}{64}, \quad -2 < x < 6, \ -2 - x < y < x + 2$$

Obtener la función de densidad de y condicionada a un valor x_0, así como la función de densidad de x condicionada a un valor y_0. A través de estas funciones de densidad condicionadas, calcular
$P(Y > 1.34/X = 1.97)$ y $P(X < 1.97/Y = 1.34)$.

El área roja es el conjunto de puntos del plano donde f toma el valor constante $\frac{1}{64}$. Fuera de éste área, f es nula. Del mismo modo, todas las funciones que definiré a continuación toman el valor 0 fuera de los intervalos que especifico.



Marginales:

Necesarias para el cálculo de las funciones de densidad condicionadas.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-x-2}^{x+2} \frac{1}{64}dy = \frac{1}{64}(x+2-(-x-2)) = \frac{1}{64}(2x+4) \quad x \in]-2,6[$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{-y-2}^{6} \frac{1}{64}dx = \frac{1}{64}(6-(-y-2)) = \frac{1}{64}(y+8) & y \in]-8,0[\\ \displaystyle\int_{y-2}^{6} \frac{1}{64}dx = \frac{1}{64}(6-(y-2)) = \frac{1}{64}(-y+8) & y \in]0,8[\end{cases}$$

Condicionadas:

$x_0 \in]-2,6[$

$$f(y/x=x_0) = \frac{f(x_0,y)}{f_1(x_0)} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{64}(2x_0+4)} = \frac{1}{2x_0+4} \qquad y \in]-2-x_0, x_0+2[$$

$y_0 \in]-8,8[$

$$f(x/y=y_0) = \frac{f(x,y_0)}{f_2(y_0)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{64}(y_0+8)} = \dfrac{1}{y_0+8} & x \in]-y_0-2,6[\quad \text{si } y_0 \in]-8,0[\\ \dfrac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{64}(-y_0+8)} = \dfrac{1}{-y_0+8} & x \in]y_0-2,6[\quad \text{si } y_0 \in]0,8[\end{cases}$$

Probabilidades:

Evaluamos las funciones de densidad condicionadas que acabamos de calcular para hallar la probabilidades requeridas.

$$P(Y>1.34/X=1.97) = \int_{1.34}^{+\infty} f(y/x=1.97)dy = \int_{1.34}^{1.97+2} \frac{1}{2\cdot 1.97+4}dy = \frac{1.97+2-1.34}{2\cdot 1.97+4} = \frac{263}{794} \simeq 0.3312$$

$$P(X<1.97/Y=1.34) = \int_{-\infty}^{1.97} f(x/y=1.34)dx = \int_{1.34-2}^{1.97} \frac{1}{-1.34+8}dx = \frac{1.97-(1.34-2)}{-1.34+8} = \frac{263}{666} \simeq 0.3949$$