Ejercicios de la ecuación del calor y programación lineal

David Cabezas Berrido

1. Ecuación del calor

Debemos encontrar una solución del problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi] \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,\pi) = \pi, & t \in [0,+\infty) \\ u(0,x) = x + \sin(x), & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$

y estudiar entre qué clase de funciones podríamos afirmar que es única.

Consideramos primero el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \in [0,+\infty) \\ u(0,x) = \sin(x), & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{2}$$

Este es el problema que hemos estudiado en teoría (con $\varphi(x) = \sin(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$) y conocemos que la solución es

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \qquad \forall (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi] \tag{3}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Para $n > 1$, tenemos

$$\frac{\pi}{2} a_n = \int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)dx = -\sin(nx)\cos(x)\Big]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} \cos(x)\cos(nx)dx =$$
$$= 0 + n\left(\sin(x)\cos(nx)\Big]_0^{\pi} + n\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)dx \right) = 0 + n^2 \frac{\pi}{2} a_n \Longrightarrow a_n = 0$$

Para $n = 1$, tenemos

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)}{2}dx = 1 - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi} = 1$$

No debe sorprendernos que el desarollo en serie de Fourier de $\sin(x)$ sea $\sin(x)$.

Por tanto la solución de (2) es

$$u(t,x) = e^{-t}\sin(x) \qquad \forall (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi] \tag{5}$$

Se comprueba rápidamente que $u_t = -u = u_{xx}$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ y $u(0,x) = \sin(x)$.

Tomamos ahora $v(t,x) = x + u(t,x) = x + e^{-t}\sin(x) \qquad \forall (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi]$

Tenemos $v_t = u_t$ y $v_{xx} = u_{xx}$, por lo que v satisface la ecuación diferencial de (1).

También, $v(t,0) = 0 + u(t,0) = 0$ y $v(t,\pi) = \pi + u(t,\pi) = \pi$ para todo t en $\mathbb{R}_0^+$. Y $v(0,x) = x + u(0,x) = x + \sin(x)$ para todo x en $[0,\pi]$.

Por tanto $v \in C^2\big([0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$ es solución de (1).

Ahora supongamos que $w \in C^2\big((0,+\infty) \times [0,\pi]\big) \cap C\big([0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$ es otra solución de (1), por tanto tendremos $w_t = w_{xx}$, $w(t,0) = 0$ y $w(t,\pi) = \pi$ para todo t en $\mathbb{R}^+$. Y $w(0,x) = x + \sin(x)$ para todo x en $[0,\pi]$.

Tomando $u = v - w$ obtenemos $u_t = u_{xx}$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ para todo t en $\mathbb{R}_0^+$ y $u(0,x) = 0$ para todo x en $[0,\pi]$.

Por tanto $u \in C^2\big((0,+\infty) \times [0,\pi]\big) \cap C\big([0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$ es solución del problema ($\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in [0,\pi]$).

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \qquad (t,x) \in [0,+\infty) \times [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \qquad t \in [0,+\infty) \\ u(0,x) = 0, \qquad x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{6}$$

El problema satisface claramente las hipótesis del teorema de unicidad, luego tiene (sabemos que la tiene porque u lo satisface) solución única en $C\big([0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$. Como la función constante 0 en $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ también es solución, $u = 0$. Por tanto $v = w$ y afirmamos que v es la única solución de (1) en $C\big([0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$.

Ahora probaré que la solución también es única en el sentido L^2. Sea $w \in C^2\big((0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$ tal que $w(t,\cdot) \in L^2[0,\pi]$ para todo t cercano a 0 ($t \in (0,\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$) y (llamando $g(x) = x + \sin(x)$)

$$\lim_{t \to 0^+} \big\| w(t,\cdot) - g \big\|_{L^2} = 0$$

también $w_t = w_{xx}$ en $(0,+\infty) \times [0,\pi]$ y $w(t,0) = 0$, $w(t,\pi) = \pi$ para todo t en $\mathbb{R}^+$. Probaré que $w = v$ en $(0,+\infty) \times [0,\pi]$. Tomando $u = w - v \in C^2\big((0,+\infty) \times [0,\pi]\big)$, $u(t,\cdot) \in L^2[0,\pi] \quad \forall t \in (0,\varepsilon)$, tenemos

$u_t = w_t - v_t = w_{xx} - v_{xx} = u_{xx}$ en $(0,+\infty) \times [0,\pi]$
$u(t,0) = w(t,0) - v(t,0) = 0 - 0 = 0$ para todo t en $\mathbb{R}^+$
$u(t,\pi) = w(t,\pi) - v(t,\pi) = \pi - \pi = 0$ para todo t en $\mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \to 0^+} \big\| u(t,\cdot) \big\|_{L^2} = \lim_{t \to 0^+} \big\| w(t,\cdot) - v(t,\cdot) \big\|_{L^2} \leq \lim_{t \to 0^+} \big\| w(t,\cdot) - g \big\|_{L^2} + \lim_{t \to 0^+} \big\| v(t,\cdot) - g \big\|_{L^2} = 0 + 0 = 0$$

Por tanto u es solución en el sentido L^2 del problema (6). La función constante 0 $(0,+\infty) \times [0,\pi]$ también es solución del problema en el sentido L^2, y aplicando la proposición de unicidad en sentido L^2 que hemos estudiado en teoría obtenemos $u = 0$ y $v = w$ como queríamos. Por lo que v también es única en sentido L^2.

2. Programación lineal

Una fábrica envasadora de alimentos recibe diariamente

- 1500 kg de café tipo A.
- 715 kg de café tipo B.
- 190 kg de café tipo C.

con ellos fabrica tres mezclas

- Mezcla tipo 1: 80 % café A y 20 % café B; beneficio de 0.2 €/kg.
- Mezcla tipo 2: 60 % café B y 40 % café C; beneficio de 0.3 €/kg.
- Mezcla tipo 3: 40 % café A, 44 % café B y 16 % café C; beneficio de 0.4 €/kg.

Queremos conocer la cantidad de mezcla de cada tipo que debemos producir para maximizar la ganancia.

Si denotamos x_1, x_2 y x_3 a la cantidad en kg que fabricamos de mezcla de tipo 1, 2 y 3 respectivamente, el beneficio en € (función a maximizar) es

$$BE = 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 \tag{1}$$

Hay ciertas restricciones, pues tenemos recursos limitados. La cantidad total en kg de café de tipo A utilizado es $0.8x_1 + 0.4x_3$ y no podrá exceder los 1500 kg. Del mismo modo la cantidad de tipo B $(0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.44x_3)$ no podrá exceder 715 kg y la de tipo C $(0.4x_2 + 0.16x_3)$ los 190 kg. Por tanto las restricciones que encontramos son

$$\begin{array}{r} 0.8x_1 + 0.4x_3 \leq 1500 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.44x_3 \leq 715 \\ 0.4x_2 + 0.16x_3 \leq 190 \end{array} \iff \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.44 \\ 0 & 0.4 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1500 \\ 715 \\ 190 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por tanto problema de gestión de recursos que debemos resolver es

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \leq 0 \\ \max f(x) =< p, x > +m \end{cases} \tag{3}$$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.44 \\ 0 & 0.4 & 0.16 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1500 \\ 715 \\ 190 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad m = 0$$

Llamando $h = (h_1, h_2, h_3)$ al vector de holguras, obtenemos el problema estándar asociado

$$\begin{cases} Ax + h = b \\ x \geq 0, \quad h \geq 0 \\ \max f(x) =< p, x > +m \end{cases} \tag{4}$$

Lo resolveremos por el método Simplex. Como no nos dicen nada, suponemos que el café sin mezclar no aporta ningún beneficio a la fábrica envasadora, luego en la matriz ampliada las holguras tendrán ceros en la última fila. La matriz ampliada queda de esta forma.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \\ 0.8 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 1500 \\ 0.2 & 0.6 & 0.44 & 0 & 1 & 0 & 715 \\ 0 & 0.4 & 0.16 & 0 & 0 & 1 & 190 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & f - 0 \end{pmatrix}$$

Primero elegimos la primera columna para pivotar. Dividiendo la columna de b entre la de x_1 (sólo las dos primeras filas puesto que sólo consideramos entradas positivas y hay un 0 en la tercera fila) obtenemos $\frac{1500}{0.8} = 1875$, $\frac{715}{0.2} = 3575$ Para evitar obtener valores negativos en la columna b , hacemos un 1 en la primera fila (menor de los cocientes), para ello la dividimos entre 0.8. En las demás filas haremos un 0 en la primera columna, restandoles la primera fila (ya con un 1 en esa columna) multiplicada por el valor correspondiente a x_1 en esa fila. Obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 1.25 & 0 & 0 & 1875 \\ 0 & 0.6 & 0.34 & -0.25 & 1 & 0 & 340 \\ 0 & 0.4 & 0.16 & 0 & 0 & 1 & 190 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & -0.25 & 0 & 0 & f-375 \end{pmatrix}$$

Ahora pivotamos sobre la segunda columna (debemos siempre elegir una con entrada positiva en la fila correspondiente a la función objetivo, la última). Para decidir si pivotar sobre las filas 2 ó 3 (la 1 tiene un 0, elegimos entradas positivas) calculamos los cocientes $\frac{340}{0.6} = 566.\overline{6}$ y $\frac{190}{0.4} = 475$; elegimos el menor de ellos, luego pivotaremos sobre la tercera fila. Obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 1.25 & 0 & 0 & 1875 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.25 & 1 & -1.5 & 55 \\ 0 & 1 & 0.4 & 0 & 0 & 2.5 & 475 \\ 0 & 0 & 0.18 & -0.25 & 0 & -0.75 & f-517.5 \end{pmatrix}$$

Ahora pivotamos sobre la columna 3, la única posible. $\frac{1875}{0.5} = 3750$, $\frac{55}{0.1} = 550$ y $\frac{475}{0.4} = 1187.5$; así que pivotamos sobre la segunda fila obteniendo

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.5 & -5 & 7.5 & 1600 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & 10 & -15 & 550 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 8.5 & 255 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -1.8 & 1.95 & f-616.5 \end{pmatrix}$$

Ahora pivotamos sobre la columna 4. $\frac{1600}{2.5} = 640$, $\frac{255}{1} = 255$. Fila 3. Obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2.5 & 0 & 0 & 5 & -13.75 & 962.5 \\ 0 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 6.25 & 1187.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 8.5 & 255 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & -1 & 0.25 & f-667.5 \end{pmatrix}$$

Pivotamos sobre la columna 6. $\frac{1187.5}{6.25} = 190$, $\frac{255}{8.5} = 30$. Fila 3. Obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & h_1 & h_2 & h_3 & b \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -0.8824 & 0 & 1.6176 & -1.4706 & 0 & 1375 \\ 0 & 1.7647 & 1 & -0.7353 & 2.9412 & 0 & 1000 \\ 0 & 0.1176 & 0 & 0.1176 & -0.4756 & 1 & 30 \\ 0 & -0.2294 & 0 & -0.2294 & -0.8824 & 0 & f-675 \end{pmatrix}$$

No queda ningún peso positivo en la última fila, luego hemos llegado a una tabla terminal. Las tres variables básicas que hemos obtenido son x_1, x_3 y h_3. Mirando la posición de los 1_s, concluimos que para maximizar el beneficio se deben fabricar **1375 kg de la mezcla 1, 1000 kg de la mezcla 3 y 0 kg de la mezcla 2**. Sobrando 30 kg de café tipo C.

La cantidad de café A que se gasta es $0.8 \cdot 1375 + 0.4 \cdot 1000 = 1500$ kg, de café B se gastan $0.2 \cdot 1375 + 0.6 \cdot 0 + 0.44 \cdot 1000 = 715$ kg y de café C se gastan $0.4 \cdot 0 + 0.16 \cdot 1000 = 160$ kg (sobran 30 kg como sabíamos).

Fabricando estas cantidades, se obtiene un beneficio de $0.2 \cdot 1375 + 0.3 \cdot 0 + 0.4 \cdot 1000 = 675$ €