Ejercicios sobre la distribución T^2 de Hotelling

David Cabezas Berrido

1 Contraste sobre μ para Σ desconocida

Tenemos los datos de 20 individuos, la Altura (pulgadas) y el Peso (libras). Suponiendo que siguen una distribución $N_2(\mu, \Sigma)$ con Σ matriz definida no negativa, queremos contrastar las hipótesis:

$$H_0: \quad \mu = \begin{pmatrix} 70 \\ 170 \end{pmatrix} = \mu_0; \qquad H_1: \quad \mu \neq \begin{pmatrix} 70 \\ 170 \end{pmatrix} = \mu_0$$

En el caso de que la matriz Σ sea desconocida.

Obtenemos los siguientes estadísticos muestrales básicos:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 71.45 \\ 164.7 \end{pmatrix} \qquad S_n = \begin{pmatrix} 14.576 & 128.88 \\ 128.88 & 1441.2653 \end{pmatrix} \qquad r_{12} = 0.889$$

Introducimos estos datos en R:

```
mu0=matrix(c(70,170), nrow=2, ncol=1) # Valor de mu para la hipótesis nula
X=matrix(c(71.45, 164.7), nrow = 2, ncol = 1) # Vector de medias muestral
# Matriz de cuasi-covarianzas muestral
Sn=matrix(c(14.576,128.88,128.88,1441.2653),nrow=2,ncol=2)
p=2
N=20
n=N-1
r12=0.889 # Coeficiente de correlación muestral
```

Calculamos el valor del estadístico de contraste:

```
> # Estadístico de contraste para Sigma desconocida:
> t=20*t(x-mu0)%*%solve(Sn)%*%(x-mu0)
> t
         [,1]
[1,] 24.65119
```

$$t = N(\bar{x} - \mu_0)' S_n^{-1} (\bar{x} - \mu_0) = 24.65119$$

Valores de comparación teóricos bajo H_0 a distintos niveles de significación:

```
f01=qf(0.1, 2, 18, lower.tail = FALSE)*38/18 # alpha=0.1
f005=qf(0.05, 2, 18, lower.tail = FALSE)*38/18 # alpha=0.05
f001=qf(0.01, 2, 18, lower.tail = FALSE)*38/18 # alpha=0.01
```

```
> f01
[1] 5.539444
> f005
[1] 7.504065
> f001
[1] 12.69391
```

$$\frac{38}{18}F_{2,28;0.1} = 5.539444; \qquad \frac{38}{18}F_{2,28;0.05} = 7.504065; \qquad \frac{38}{18}F_{2,28;0.01} = 12.69391$$

Para los tres niveles de significación se tiene $24.65119 = t > \frac{38}{18}F_{2,28;\alpha}$, por lo que en los tres casos rechazaríamos la hipótesis nula.

2 Regiones de confianza en torno a μ_0 para distintos valores del nivel de confianza

2.1 Caso de Σ conocida

Queremos representar la elipse de ecuación

$$U = N(x-\mu_0)'\Sigma^{-1}(x-\mu_0)$$

Con $N = 20$, $\mu_0 = \begin{pmatrix} 70 \\ 170 \end{pmatrix}$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 100 \\ 100 & 1000 \end{pmatrix}$. Y para los distintos valores de U:

$$\chi^2_{2;0.1} = 4.60517; \quad \chi^2_{2;0.05} = 5.991465; \quad \chi^2_{2;0.01} = 9.21034$$

que obtenemos mediante el siguiente código de R:

```
c01=qchisq(0.1,2,lower.tail=FALSE)
c005=qchisq(0.05,2,lower.tail=FALSE)
c001=qchisq(0.01,2,lower.tail=FALSE)
```

Esto lo logramos con el paquete ellipse de R.

```
library("ellipse")

# Regiones de confianza (elipses) para los distintos niveles de significación
e1<-ellipse(x=Sigma/N, centre=as.vector(mu0), t=sqrt(c01))
plot(e1, type='l', xlim=c(67,73), ylim=c(145,195), col="red",
     xlab="Altura", ylab="Peso", main="Región de confianza para nivel 0.9")
points(x=c(as.vector(mu0)[1], as.vector(X)[1]),
       y=c(as.vector(mu0)[2], as.vector(X)[2]), pch=20)
text(x=c(as.vector(mu0)[1], as.vector(X)[1]), y=c(as.vector(mu0)[2], as.vector(X)[2]),
     pos=2, offset=0.3, labels=c('mu0', 'x'), cex=0.7, font=2)
```

Primero definimos la elipse con la función `ellipse`, indicando la matriz ($\frac{1}{N}\Sigma$), el centro (μ_0) y el valor de U, introducimos la raíz del valor correspondiente a cada nivel de confianza. Con esto obtenemos 100 puntos de la elipse, que dibujamos con `plot` en color rojo, manteniendo fijo el tamaño de los ejes para comparar fácilmente el tamaño de las distintas elipses para los distintos valores de α. Después representamos y etiquetamos el centro de la elipse (μ_0) y el vector de medias muestral ($\bar{x}$). Se rechaza la hipótesis nula cuando el vector $\bar{x}$ cae fuera de la elipse.

Este código representa la elipse para el nivel de confianza $1 - \alpha = 0.9$.

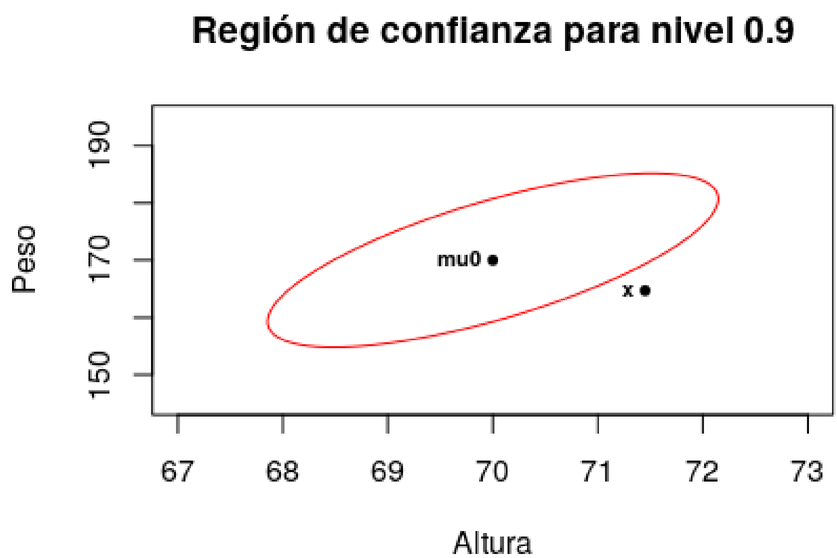
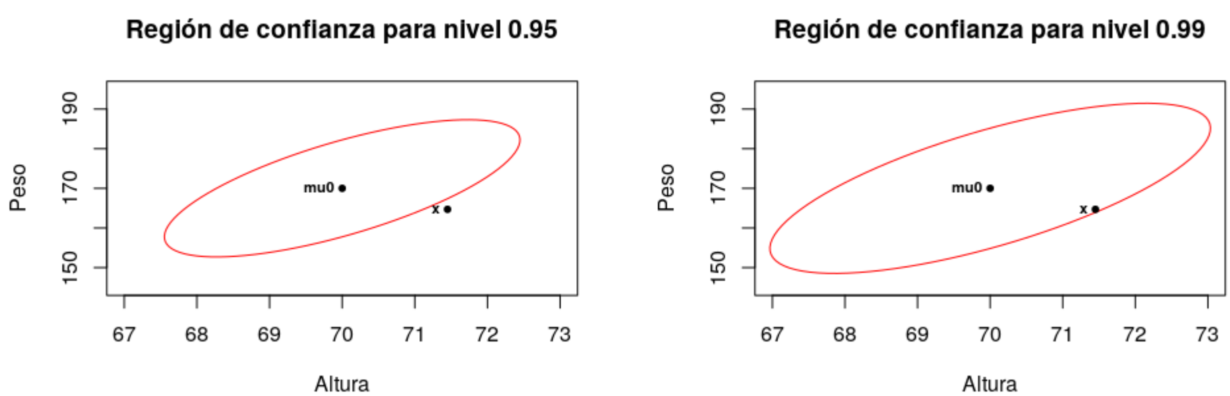


Figure 1: Región de confianza para el nivel $1 - \alpha = 0.9$. Σ conocida.

Análogamente, los valores $\chi^2_{2;0.05}$ y $\chi^2_{2;0.01}$ nos permiten dibujar las regiones de confianza para los niveles de confianza 0.95 y 0.99 respectivamente.



(a) Región de confianza al nivel 0.95

(b) Región de confianza al nivel 0.99

Figure 2: Regiones de confianza para los niveles 0.95 y 0.99. Σ conocida.

Nótese que la única figura en la que el vector $\bar{x}$ está dentro de la elipse es la última (nivel de confianza 0.99), por lo que sería el único caso de los tres en el que no rechazaríamos H_0, lo cual concuerda con los cálculos realizados en teoría.

2.2 Caso de Σ desconocida

Seguimos un proceso análogo al anterior, esta vez con la ecuación

$$T^2 = N(x - \mu_0)' S_n^{-1} (x - \mu_0)$$

y los valores para T^2:

$$\frac{38}{18} F_{2,18;0.1} = 5.539444; \qquad \frac{38}{18} F_{2,18;0.05} = 7.504065; \qquad \frac{38}{18} F_{2,18;0.01} = 12.69391$$

Con este código en R dibujamos la primera de las elipses:

```
# Regiones de confianza (elipses) para los distintos niveles de significación
e1<-ellipse(x=Sn/N, centre=as.vector(mu0), t=sqrt(f01))
plot(e1, type='l', xlim=c(67,73), ylim=c(140,200), col="red",
     xlab="Altura", ylab="Peso", main="Región de confianza para nivel 0.9")
points(x=c(as.vector(mu0)[1], as.vector(X)[1]),
       y=c(as.vector(mu0)[2], as.vector(X)[2]), pch=20)
text(x=c(as.vector(mu0)[1], as.vector(X)[1]), y=c(as.vector(mu0)[2], as.vector(X)[2]),
     pos=2, offset=0.3, labels=c('mu0', 'x'), cex=0.7, font=2)
```

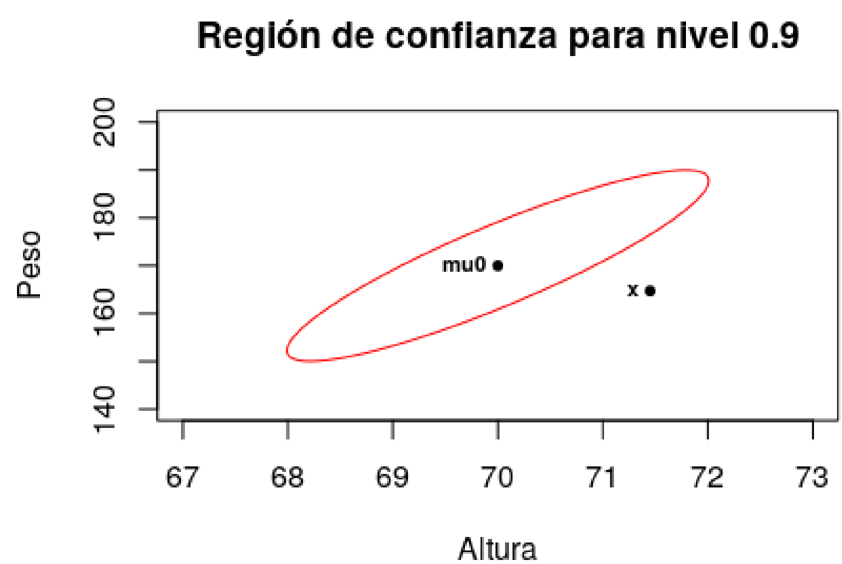
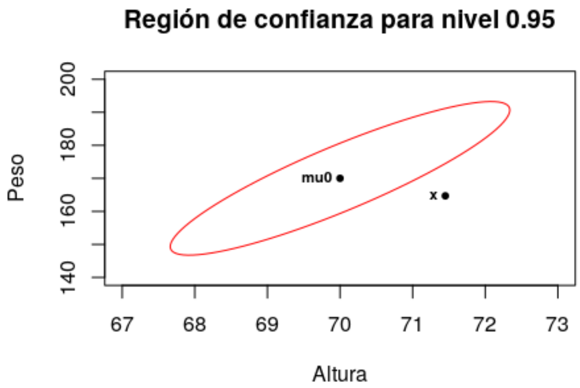
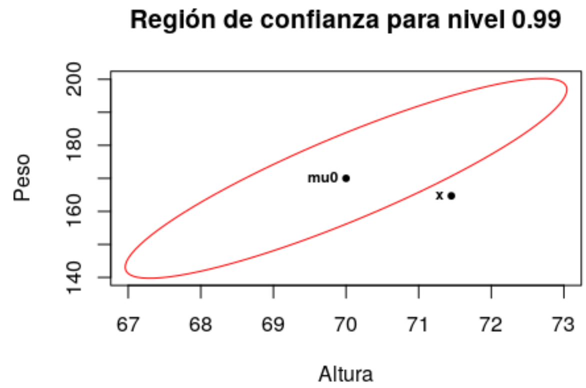


Figure 3: Región de confianza para el nivel $1 - \alpha = 0.9$. Σ desconocida.

Análogamente, los valores $\frac{38}{18} F_{2,18;0.05}$ y $\frac{38}{18} F_{2,18;0.01}$ nos permiten dibujar las regiones de confianza para los niveles de confianza 0.95 y 0.99 respectivamente.



(a) Región de confianza al nivel 0.95



(b) Región de confianza al nivel 0.99

Figure 4: Regiones de confianza para los niveles 0.95 y 0.99. Σ desconocida.

En los tres casos, el vector $\bar{x}$ aparece fuera de la región de confianza, por lo que rechazamos H_0 en todos los casos, lo que concuerda con los cálculos realizados en el test.