AMA: Armónicas

David Cabezas

(3) a) $u(z)=x^2-y^2$, $D=\mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(z)=2x$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial y}(z)=-2y$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z)=2$ $\quad$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z)=-2$

$\Delta u(z)=2-2=0$ ✓ Armónica

Si encuentro una función v tq $u+iv\in\mathcal{H}(D)$, consigo todo de golpe

¡Todas son C^∞ en sus dominios!

(conjugada armónica)

* v debe cumplir $\frac{\partial v}{\partial y}(z)=2x$; $\frac{\partial v}{\partial x}(z)=2y$ $\forall z\in\mathbb{C}$

* Existe porque $\mathbb{C}$ simplemente conexo.

$$\boxed{v(z)=2xy}$$

b) $u(z)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $D=\mathbb{C}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z)=e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cos(2xy)+e^{x^2-y^2}(-\sin(2xy))\cdot 2y$$
$$=e^{x^2-y^2}(2x\cos(2xy)-2y\sin(2xy))$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z)=e^{x^2-y^2}(-2y)\cos(2xy)+e^{x^2-y^2}(-\sin(2xy)\cdot 2x)$$
$$=-e^{x^2-y^2}(2y\cos(2xy)+2x\sin(2xy))$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z)=2x\,e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cos(2xy)+2e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$
$$-e^{x^2-y^2}\cdot 2x\sin(2xy)2y$$
$$-e^{x^2-y^2}2x\cdot 2y\cdot\sin(2xy)-e^{x^2-y^2}\cos(2xy)4y^2$$

$$= 4e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)\left(x^2+\tfrac{1}{2}-y^2\right)-2\sin(2xy)\,xy\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = e^{x^2-y^2}(-2y)^2\cos(2xy) - 2e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$$
$$+ 2y\,e^{x^2-y^2}\sin(2xy)\cdot 2x$$
$$- e^{x^2-y^2}(-2y)\sin(2xy)\cdot 2x$$
$$- e^{x^2-y^2}\cos(2xy)\cdot 2x\cdot 2x$$
$$= 4e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy)\left(y^2-\tfrac{1}{2}-x^2\right)+2\sin(2xy)\,xy\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) \quad \forall z\in\mathbb{C} \ \checkmark$$

Armónica.

v existe porque D es simplemente conexo.

Si tomo $\boxed{v(z) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy)}$

se tiene

$$u(z)+iv(z) = e^{x^2-y^2}\left(\cos(2xy)+i\sin(2xy)\right)$$
$$= e^{x^2-y^2}\cdot e^{i2xy} = e^{(x+iy)^2} = e^{z^2},$$

que claramente es holomorfa.

c) $u(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x > 0\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Tomo

$$v(z) = \frac{-1}{2}\log(x^2+y^2) \qquad \forall z \in D$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{-1}{2}\,\frac{1\cdot 2x}{x^2+y^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{-1}{2}\,\frac{1\cdot 2y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

✓

$u + iv$ es holomorfa

d) $u(z) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = \frac{-x2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Tomo $v(z) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. $\forall z \in D$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x}(z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{-y\,(-1)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

u+iv es holomorfa

e) $u(z) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Trabajaré en polares:

$$u(z) = \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^4} = \frac{\cos\theta \sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z) = \frac{-2}{r^3} \cos\theta \sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(z) = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(z) = \frac{6}{r^4} \cos\theta \sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(z) = \frac{2\cos\theta(-\sin\theta) - 2\sin\theta\cos\theta}{r^2} = \frac{-4}{r^2} \sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(z) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(z)$$

$$= \frac{6\cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta}{r^4} = 0 \checkmark$$

Armónica.

Necesito

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(z) = -\frac{2}{r^2}\cos\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(z) = -\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^3}$$

$$v(z) = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2r^2} \quad \forall z \in D$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(z) = \frac{-2\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta}{2r^2} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}(z) = \frac{-2}{2}\cdot\frac{1}{r^3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

v es la conjugada armónica //

f) $u(z) = 1 + r^2\sin\theta\cos\theta$, $D = \mathbb{C}$

$u(z) = 1 + xy$ en cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0 \quad \forall z \in D$$

Armónica.

$$V(z) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \quad \forall z \in D$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(z) = -x \, , \quad \frac{\partial V}{\partial y}(z) = y \quad \checkmark$$

4 a) Escribiré la integral en polares, $\overline{D}(a,r)$ se parametriza así:

$$\phi(\rho,\theta) = x+iy = z = a+\rho e^{i\theta} \qquad \begin{array}{l}\rho\in[0,r] \\ \theta\in]-\pi,\pi]\end{array}$$

$$x = \operatorname{Re} a + \rho\cos\theta$$

$$y = \operatorname{Im} a + \rho\sin\theta$$

$$J\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \qquad |J\phi(\rho,\theta)| = \rho$$

Por tanto, obtenemos

$$\iint_{\overline{D}(a,r)} u(z)\,dx\,dy = \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} u(a+\rho e^{i\theta})\cdot\rho\, d\theta\, d\rho$$

Aplicando la propiedad del valor medio en cada circunferencia $C(a,\rho)$, esto es igual a

$$\int_0^r \rho\cdot 2\pi u(a)\,d\rho = 2\pi\frac{r^2}{2}u(a) = \pi r^2 u(a)$$

✓

b) Fijamos $a \in D$.

Con el mismo cambio a polares, ahora partimos de

$$(*) \quad \pi r^2 u(a) = \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} u(a+\rho e^{i\theta})\rho \, d\theta \, d\rho$$

$$\forall r \in]0, r_a[.$$

Y vamos a probar que u cumple la propiedad del valor medio. La arbitrariedad de a nos dirá que u es armónica.

Derivamos respecto de r en la expresión $(*)$, aplicando el TFC ($\int_{-\pi}^{\pi} u(a+\rho e^{i\theta})d\theta \cdot \rho$ continuo en ρ) obtenemos

$$2\cancel{r}\pi u(a) = \int_{-\pi}^{\pi} u(a+re^{i\theta})\cancel{r} \, d\theta \quad \forall r \in]0, r_a[,$$

justo lo que queríamos.

5 $u \in A(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$ simplemente conexo

$\exists f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tq $\operatorname{Re} f = u$.

Por reducción al absurdo, supongamos que u no es constante $\Rightarrow f$ tampoco $\Rightarrow f(\mathbb{C})$ denso en $\mathbb{C}$.

u continua $\Rightarrow u(\mathbb{C})$ intervalo de $\mathbb{R}$

Si u mayorada (o minorada), $u(\mathbb{C})$ contenido en semirrecta $\Rightarrow f(\mathbb{C})$ contenido en semiplano. ¡Imposible!

Por tanto, una función armónica en $\mathbb{C}$ y constante no puede estar mayorada ni minorada. De hecho, $u(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.

(Vale para 0 y 1)

6 Si $\lim_{z \to \infty} u(z) = k \in \mathbb{R}$, tomando $\varepsilon = 1$

$\exists R > 0$ tq $|u(z) - k| < 1 \quad \forall |z| > R$

$\Rightarrow |u(z)| \leq \max\{1 + |k|, M\}$ donde

$M = \max\{|u(z)| : z \in \overline{D}(0, R)\}$ Continua en compacto

Como u es armónica en $\mathbb{C}$ y está acotada, el ejercicio 5 nos dice que es constante. Para que se cumpla el límite se tiene forzosamente $\boxed{u(z) = k \quad \forall z \in \mathbb{C}.}$

7 Sabemos que u debe ser de la forma

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)f(e^{it})\,dt \quad \forall z\in D(0,1)$$

$$u(z)=f(z) \quad \forall z\in\partial D(0,1).$$

Además, u es continua en $\overline{D}(0,1)$ y armónica en $D(0,1)$.

$x=1,-1$ lo cumple trivialmente:

$$u(\pm1)=f(\pm1)=\frac{f(\pm1)+f(\overline{\pm1})}{2}=0,$$ luego podemos suponer $x\in\,]-1,1[$.

Tenemos

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\right)f(e^{it})\,dt$$

Trabajamos primero con esta fracción

$$\frac{(e^{it}+x)\overset{(*)}{(e^{-it}-x)}}{(e^{it}-x)(e^{-it}-x)}=\frac{1-x^2+x(e^{-it}-e^{it})}{1+x^2-x(e^{it}+e^{-it})}$$

(*) Multiplico y divido por el conjugado del denominador.

$$= \frac{1-x^2+x\left(\cancel{\cos(-t)}+i\sin(-t)-\cancel{\cos(t)}-i\sin(t)\right)}{1-x^2+x\left(\cos t+i\sin t+\cos(-t)+i\sin(-t)\right)}$$

$$= \frac{1-x^2+x(-2i\sin t)}{1-x^2+x(2\cos t)},$$ la parte real es $\frac{1-x^2}{1-x^2+2x\cos t}$.

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{1-x^2}{1-x^2+2x\cos t}f(e^{it})}\,dt$$

Esta expresión es impar respecto a t, puesto que el coseno es par y la hipótesis del enunciado dice

$$f(e^{-it})=f(\overline{e^{it}})=-f(e^{it}).$$

Por tanto, al integrar ente $-\pi$ y π sale 0. $\boxed{u(x)=0}$