

# Taller avanzado de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: ejercicio 8

David Cabezas Berrido

## Resumen

Ejercicios de las sesiones 4 y 5 en un único documento.

## Índice

1	Ejercicio 1: secciones, párrafos y estilo	1
1.1	Tres párrafos normales	1
1.2	Algunos párrafos con formatos especiales	1
1.2.1	Algunos párrafos con alineación especial	2
2	Ejercicio 2: listas y columnas	3
2.1	La compra para esta semana	3
2.2	Películas mejor valoradas por los usuarios de IMDB	3
2.3	Invitados a la boda (viñetas y relleno de línea)	3
2.4	Múltiples columnas	4
3	Ejercicio 3: imágenes, tablas e índice	4
3.1	Imágenes entre el texto	4
3.2	Tablas entre el texto	8
4	Ejercicio 4: referencias	9
4.1	Referencias a secciones y subsecciones	9
4.1.1	Una subsección	10
4.1.2	Otra subsubsección	10
4.2	Referencias a páginas	11
4.3	Referencias bibliográficas	11
5	Ejercicio 5: fórmulas	12
5.1	La definición de grupo	12
5.2	La ecuación de segundo grado	12
5.3	Las ecuaciones de Cauchy-Riemann	12
5.4	Desarrollos en serie de Taylor	13
5.5	Fórmula del cambio de base	13
6	Ejercicio 6: fórmulas largas y referencias	14
7	Ejercicio 7: entornos de tipo teorema	15
8	Ejercicio 8: el final del artículo	18

## 1. Ejercicio 1: secciones, párrafos y estilo

### 1.1. Tres párrafos normales

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras sagittis tincidunt mauris, nec gravida nunc porta sed. Duis eu ultrices quam. Praesent pulvinar tortor sed leo dignissim lacinia. Pellentesque fermentum leo sed elit sollicitudin eleifend. Aenean placerat ipsum eu orci varius hendrerit. Curabitur condimentum suscipit quam non ornare. Etiam vel lacus mauris. Duis congue turpis ipsum, scelerisque consectetur nunc laoreet ac.

Etiam ultrices metus eu est venenatis ultrices. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Maecenas id convallis neque, at convallis turpis. Donec mollis consequat turpis et pellentesque. Pellentesque ut enim mattis, placerat est a, vehicula lacus. Morbi sodales, massa in venenatis efficitur, eros lectus varius eros, sed egestas magna dolor ac tortor. Suspendisse vel nisl dui. Phasellus congue eros mauris, non tincidunt turpis rhoncus id.

Cras vulputate eros sem, eu laoreet diam pharetra vel. Sed nulla ipsum, lacinia sit amet ullamcorper eget, dictum vulputate urna. Fusce tempor, nibh ut egestas tempus, neque lacus sollicitudin elit, accumsan dignissim eros enim vitae elit. Suspendisse scelerisque rhoncus massa id placerat. In nec interdum urna. Duis interdum cursus augue vitae lacinia. Suspendisse rhoncus augue augue, et molestie sapien ornare ut. Curabitur ut arcu non erat laoreet ultrices. Duis lectus risus, mattis ut volutpat non, lobortis a erat. Duis id eros arcu. Vestibulum vel placerat libero, id blandit ex. In ullamcorper quam ipsum, eu iaculis ipsum commodo ut.

### 1.2. Algunos párrafos con formatos especiales

Este es un párrafo normal.

Este es un párrafo con **algunas palabras en negrita**.

Este es un párrafo con *algunas palabras enfatizadas*.

*Este es un párrafo en cursiva con algunas palabras enfatizadas.*

Este es un párrafo con algunas palabras subrayadas.

Este es un párrafo con 

algunas palabras recuadradas
------------------------------

.

Este es un párrafo con “algunas palabras entrecomilladas”.

Este es un párrafo con ALGUNAS PALABRAS EN VERSALITAS.

Este es un párrafo con **algunas palabras en fuente teletipo**.

Este es un párrafo con <sub>subíndices</sub> y <sup>superíndices</sup>.

Este es un párrafo con un enlace a la página de Donald Knuth.

Este es un párrafo con una nota al pie de página<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Soy una nota al pie de página!

Este párrafo contiene la fecha de compilación: 21 de marzo de 2022.

Este párrafo contiene guiones (– —) y puntos suspensivos (...)

Este es un párrafo con algunas palabras muy grandes.

Este es un párrafo con algunas palabras muy pequeñas.

Este es un párrafo con algunas palabras en rojo y otras en azul.

Este es un párrafo con cuatro caracteres especiales: \$, &, { y }.

Este párrafo contiene código `\comando{argumento}`.

### 1.2.1. Algunos párrafos con alineación especial

Este es un párrafo sin indentación o sangrado.

Este es un párrafo largo donde se han  
forzado intencionadamente  
dos saltos de línea (aunque el resultado es horrible).

Este es un párrafo con 3cm de espacio en blanco.

Y este es otro párrafo con 3cm de espacio en blanco.

Este es un párrafo con 0.5cm más de espacio con el párrafo precedente.

Este es un párrafo con 0.3cm menos de espacio con el párrafo precedente.

Este es un párrafo alineado a la izquierda (nótese la falta de sangrado).

Este es un párrafo centrado.

Este es un párrafo alineado a la derecha.

## 2. Ejercicio 2: listas y columnas

### 2.1. La compra para esta semana

- Pan
- Naranjas
- Salmón
- Piña
- Tomates

### 2.2. Películas mejor valoradas por los usuarios de IMDB

1. Cadena perpetua

2. El padrino: parte I
3. El padrino: parte II
4. El caballero oscuro
5. 12 hombres sin piedad

### 2.3. Invitados a la boda (viñetas y relleno de línea)

(A) Invitados del novio ☐

☐ I Familia del novio ..... ☐

1. Padres del novio ..... ☐

2. Tíos del novio ..... ☐

3. Abuelos del novio..... ☐

☐ II Amigos del novio

(B) Invitados de la novia ☐

☐ I Familia de la novia ..... ☐

1. Padres de la novia ..... ☐

2. Tíos de la novia ..... ☐

3. Abuelos de la novia..... ☐

☐ II Amigos de la novia ..... ☐

(C) Invitados comunes ☐

Familia de la novia

Padres de la novia Tíos de la novia Abuelos de la novia

Amigos de la novia

Invitados comunes

### 2.4. Múltiples columnas

Este es un texto distribuido en tres columnas:

<p>Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras sagittis tincidunt mauris, nec gravida nunc porta sed. Duis eu ultrices quam. Praesent pulvinar tortor sed leo dignissim lacinia. Pellentesque fermentum leo sed elit sollicitudin</p>	<p>eleifend. Aenean placerat ipsum eu orci varius hendrerit. Curabitur condimentum suscipit quam non ornare. Etiam vel lacus mauris. Duis congue turpis ipsum, scelerisque consectetur nunc laoreet. Etiam ultrices metus eu est venenatis ultrices.</p>	<p>ces. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Maecenas id convallis neque, at convallis turpis. Donec mollis consequat turpis et pellentesque. Pellentesque ut enim mattis, place-</p>
---	--	--

rat est a, vehicula lacus. Morbi sodales, massa in venenatis efficitur, eros lectus varius eros, sed egestas magna dolor ac tortor. Suspendisse vel nisl dui. Phasellus congue eros mauris, non tincidunt turpis rhoncus id.

Estos son los primeros 25 números primos distribuidos en 5 columnas:

■ 2	■ 13	■ 31	■ 53	■ 73
■ 3	■ 17	■ 37	■ 59	■ 79
■ 5	■ 19	■ 41	■ 61	■ 83
■ 7	■ 23	■ 43	■ 67	■ 89
■ 11	■ 29	■ 47	■ 71	■ 97

### 3. Ejercicio 3: imágenes, tablas e índice

#### 3.1. Imágenes entre el texto

El ejercicio consiste en introducir las figuras 1, 2 y 3.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras sagittis tincidunt mauris, nec gravida nunc porta sed. Duis eu ultrices quam. Praesent pulvinar tortor sed leo dignissim lacinia. Pellentesque fermentum leo sed elit sollicitudin eleifend. Aenean placerat ipsum eu orci varius hendrerit. Curabitur condimentum suscipit quam non ornare. Etiam vel lacus mauris. Duis congue turpis ipsum, scelerisque consectetur nunc laoreet ac.



Figura 1: Figura con etiqueta `h` y 50 % del ancho

Etiam ultrices metus eu est venenatis ultrices. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Maecenas id convallis neque, at convallis turpis. Donec mollis consequat turpis et pellentesque. Pellentesque ut enim mattis, placerat est a, vehicula lacus. Morbi sodales, massa in venenatis efficitur, eros lectus varius eros, sed egestas magna dolor ac tortor. Suspendisse vel nisl dui. Phasellus congue eros mauris, non tincidunt turpis rhoncus id.

<i>abcABC</i> <code>\emph{abcABC}</code> emphasis	<i>abcABC</i> <code>\textrm{abcABC}</code> roman	<b>abcABC</b> <code>\textbf{abcABC}</code> bold	<i>abcABC</i> <code>\textit{abcABC}</code> italic
ABCABC <code>\textsc{abcABC}</code> CAPS	<i>abcABC</i> <code>\textsl{abcABC}</code> slanted	<i>abcABC</i> <code>\textmd{abcABC}</code> medium	<i>abcABC</i> <code>\textsf{abcABC}</code> sans
<b>abcABC</b> <code>\mathbf{abcABC}</code> mathbf	<i>ABC</i> <code>\mathcal{ABC}</code> mathcal	<b>ABC</b> <code>\mathbb{ABC}</code> mathbb	<i>abcABC</i> <code>\mathrm{abcABC}</code> mathrm
<i>abcABC</i> <code>\texttt{abcABC}</code> tt	<i>abcABC</i> <code>\verb"abcABC"</code> verbatim		

Figura 2: Figura con etiqueta t y 80 % del ancho

Cras vulputate eros sem, eu laoreet diam pharetra vel. Sed nulla ipsum, lacinia sit amet ullamcorper eget, dictum vulputate urna. Fusce tempor, nibh ut egestas tempus, neque lacus sollicitudin elit, accumsan dignissim eros enim vitae elit. Suspendisse scelerisque rhoncus massa id placerat. In nec interdum urna. Duis interdum cursus augue vitae lacinia. Suspendisse rhoncus augue augue, et molestie sapien ornare ut. Curabitur ut arcu non erat laoreet ultrices. Duis lectus risus, mattis ut volutpat non, lobortis a erat. Duis id eros arcu. Vestibulum vel placerat libero, id blandit ex. In ullamcorper quam ipsum, eu iaculis ipsum commodo ut.

Praesent a interdum massa, ut finibus dui. Curabitur sodales, quam a luctus tristique, diam ante tincidunt sapien, nec ultricies diam elit eget lorem. Fusce volutpat erat vitae enim suscipit pellentesque. Curabitur in porta diam. Aenean laoreet vel leo sit amet pretium. Nullam tincidunt pulvinar massa, vitae finibus dui vehicula nec. Duis in tortor euismod, feugiat lectus tristique, dignissim ex. Vivamus eu vestibulum massa. Suspendisse pulvinar orci a orci vestibulum sagittis. Maecenas sapien mi, condimentum vel ante a, blandit euismod turpis. Aliquam laoreet ligula quam, et cursus magna accumsan varius. Fusce placerat, urna non vestibulum malesuada, tellus tortor molestie libero, eget fermentum risus turpis eu felis. Duis vitae dui erat. Quisque eleifend dictum ipsum vitae elementum. Praesent lacinia lectus urna, et consectetur sem porttitor a. Vivamus pharetra ipsum eget dignissim convallis.

Donec eget sapien ac leo consequat cursus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Fusce velit ligula, hendrerit ac dui sit amet, dapibus ornare tellus. Pellentesque in sem a augue tempor consectetur sed eu lacus. Phasellus mollis dictum metus eu finibus. Nam eu imperdiet nunc. Duis tincidunt molestie dignissim. Sed ullamcorper tristique volutpat. Cras ac pharetra elit, at tincidunt ligula. Nulla facilisi. Suspendisse vulputate purus sit amet elit vestibulum, sed lobortis neque laoreet. Quisque varius velit ac posuere fringilla. Donec ullamcorper felis vitae tortor eleifend, a elementum lectus semper. Vestibulum tincidunt ornare turpis, id venenatis tellus lobortis eget.

Ut nec placerat enim. Praesent interdum ullamcorper tellus id congue. Nullam id tellus neque. Integer at ante feugiat, eleifend felis at, interdum felis. Cras

vel sapien arcu. Aliquam in massa eu augue efficitur lacinia ut luctus sapien. Pellentesque vel mi interdum, pulvinar libero sed, pretium velit. Proin auctor, nibh sit amet dictum molestie, ante quam suscipit diam, non scelerisque magna felis quis mauris.

Nunc vitae nulla tellus. Nam tempor lacus ligula, nec tempus diam ullamcorper efficitur. Sed vitae fringilla eros, nec venenatis sem. Proin eu mauris ligula. Integer accumsan sem sed eros pharetra, nec eleifend nibh volutpat. Cras id sapien id leo suscipit auctor. Aliquam accumsan nisl vitae vestibulum posuere. Curabitur vitae varius elit. Sed tempus magna eros, efficitur mattis elit posuere posuere. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. In hac habitasse platea dictumst. Integer vehicula dignissim volutpat. Aenean est elit, tempor ut tellus vel, malesuada viverra neque. Nullam tempus varius felis eleifend rhoncus. Nullam sapien enim, bibendum sollicitudin mi vel, blandit ultrices erat. Etiam vulputate quam non lobortis rhoncus.

Etiam imperdiet lorem at dapibus tincidunt. Donec dignissim, sem ac mattis ornare, tellus erat varius sem, eget porta eros est eu elit. Vestibulum tellus nisl, varius a lacus quis, maximus porta sapien. Morbi ultricies id justo vitae vulputate. Pellentesque eros lorem, malesuada nec neque quis, convallis laoreet dolor. Vivamus nibh dui, placerat sed dapibus ac, dignissim eget nibh. Curabitur sed augue vitae quam vulputate suscipit. Nam dignissim magna eget dolor malesuada, facilisis egestas lectus blandit. Proin commodo diam a est feugiat rutrum. In nulla urna, dictum sed lorem eu, varius molestie enim. Phasellus tincidunt ultricies magna, sed facilisis arcu. Vestibulum hendrerit ultricies elementum. Ut vel nisl a nulla congue pretium.

Vestibulum ac nulla tristique erat aliquam vestibulum a nec purus. In dignissim lorem felis, et luctus leo gravida vel. Duis sagittis, mauris at consectetur porta, tortor nibh vehicula risus, id tristique tortor augue porta est. Cras sed vulputate lectus. Aliquam nulla dolor, porta laoreet massa ut, blandit ornare odio. Ut vulputate tellus nec elit dictum, ac condimentum sem auctor. Duis laoreet, neque aliquam commodo euismod, purus lectus placerat elit, a fringilla sapien diam in velit. Quisque blandit odio lacinia commodo lacinia. Aliquam magna elit, venenatis tristique pharetra a, bibendum consectetur mauris. Sed sapien nulla, fringilla at nunc nec, venenatis mollis nulla. Nullam velit turpis, varius et convallis sit amet, cursus gravida velit. Curabitur a venenatis elit. Ut varius est at molestie volutpat. Nullam ut mollis quam, nec volutpat sapien.

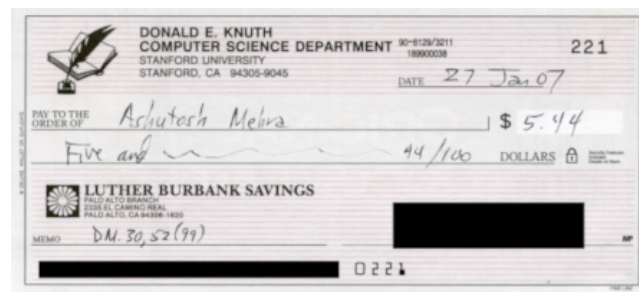


Figura 3: Figura con etiqueta **b** y 70 % del ancho

Curabitur imperdiet pellentesque lectus a dictum. Aliquam ac iaculis ipsum, sit amet consequat risus.

Pellentesque tristique lacinia volutpat. Phasellus vehicula pretium quam, ornare faucibus enim condimentum tempus. Orci varius natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Fusce id molestie sapien. Donec tortor metus, placerat id lacus nec, egestas auctor erat. Proin eu erat viverra leo mollis laoreet faucibus eu justo. Cras vel elit at orci pulvinar convallis molestie a magna. Maecenas pretium tortor at mi hendrerit, id ultricies magna blandit.

Sed tincidunt lectus ac lobortis consectetur. Maecenas a dui dapibus, auctor ligula ac, tempus dolor. Aliquam sapien odio, sagittis sit amet justo nec, ornare tincidunt sapien. Nulla leo massa, molestie sed sagittis eget, ultricies non purus. In gravida venenatis velit, vitae cursus augue mollis eu. Vivamus id gravida lectus. Suspendisse vel consectetur urna, ac interdum orci. Cras ac rhoncus nibh, nec pharetra velit. Nullam nec pharetra ligula, eget rutrum lorem. Fusce nisl libero, ultrices id ornare vitae, dictum sed mi. Aenean tortor nunc, porttitor suscipit suscipit a, sodales ut orci.

Morbi orci dui, ornare at porta auctor, tempus venenatis eros. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Mauris urna enim, porttitor nec scelerisque eget, elementum sit amet ante. Duis sodales nibh et turpis pellentesque, at tempus arcu rutrum. Proin vitae dui nec elit malesuada blandit ut eget odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; In cursus leo ornare ipsum venenatis interdum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Sed accumsan justo lectus, sed vehicula nulla tempor a. Suspendisse potenti. Curabitur augue erat, sodales quis vulputate vitae, molestie ac arcu. Fusce finibus eu odio non mollis. Aliquam id nisl id ligula pretium vehicula.

In tincidunt lorem eget fringilla volutpat. Nam bibendum orci vel risus malesuada, in elementum odio faucibus. Vestibulum dictum tincidunt ante, a rutrum turpis vestibulum vel. Donec sit amet erat ultrices ipsum sagittis pellentesque a nec metus. Morbi lacinia mollis quam sed vulputate. Fusce vitae ultricies nisi, eu pharetra elit. In sit amet turpis vestibulum mauris mattis fermentum. Quisque iaculis eget nibh non commodo. Nam augue mi, fermentum in ullamcorper id, accumsan sed ligula. Sed vehicula quis elit vel ultricies. Suspendisse in fringilla erat, ac tempus lacus. Vestibulum posuere efficitur lacus, eget vehicula ex consectetur sed.

Cras eu diam nisi. Proin iaculis purus arcu, sed iaculis ligula congue non. Nullam malesuada pretium hendrerit. Nulla lobortis eros lectus, a consequat nunc pharetra at. Praesent tempor arcu id ipsum fringilla, eu dictum nulla elementum. Sed ac dui et lacus fermentum tincidunt non quis risus. Fusce consequat odio leo, id placerat diam faucibus ac. Sed in tortor vel elit mattis scelerisque. Vivamus tempor egestas laoreet. Quisque non enim a magna fringilla pulvinar. Aliquam tristique porta tincidunt. Vestibulum sed arcu eget arcu ullamcorper vestibulum non ac nunc. Phasellus sed ligula eu tellus venenatis porta. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Phasellus ornare tortor nulla, eu consectetur libero hendrerit at. Sed mattis vehicula facilisis.



### 3.2. Tablas entre el texto

Ahora se trata de insertar las tablas 1 y 2.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras sagittis tincidunt mauris, nec gravida nunc porta sed. Duis eu ultrices quam. Praesent pulvinar tortor sed leo dignissim lacinia. Pellentesque fermentum leo sed elit sollicitudin eleifend. Aenean placerat ipsum eu orci varius hendrerit. Curabitur condimentum suscipit quam non ornare. Etiam vel lacus mauris. Duis congue turpis ipsum, scelerisque consectetur nunc laoreet ac.

Col1	Col2	Col2	Col3
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

Cuadro 1: Tabla con etiqueta `\h`

Etiam ultrices metus eu est venenatis ultrices. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Maecenas id convallis neque, at convallis turpis. Donec mollis consequat turpis et pellentesque. Pellentesque ut enim mattis, placerat est a, vehicula lacus. Morbi sodales, massa in venenatis efficitur, eros lectus varius eros, sed egestas magna dolor ac tortor. Suspendisse vel nisl dui. Phasellus congue eros mauris, non tincidunt turpis rhoncus id.

Cras vulputate eros sem, eu laoreet diam pharetra vel. Sed nulla ipsum, lacinia sit amet ullamcorper eget, dictum vulputate urna. Fusce tempor, nibh ut egestas tempus, neque lacus sollicitudin elit, accumsan dignissim eros enim vitae elit. Suspendisse scelerisque rhoncus massa id placerat. In nec interdum urna. Duis interdum cursus augue vitae lacinia. Suspendisse rhoncus augue augue, et molestie sapien ornare ut. Curabitur ut arcu non erat laoreet ultrices. Duis lectus risus, mattis ut volutpat non, lobortis a erat. Duis id eros arcu. Vestibulum vel placerat libero, id blandit ex. In ullamcorper quam ipsum, eu iaculis ipsum commodo ut.

Cabecera			
Col1	Col2	Col3	Col4
<b>1 y 2</b>		3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	<b>16 y 20</b>
17	18	19	

Cuadro 2: Tabla con etiqueta `\b`, multicolumn y multirow.

Praesent a interdum massa, ut finibus dui. Curabitur sodales, quam a luctus tristique, diam ante tincidunt sapien, nec ultricies diam elit eget lorem. Fusce volutpat erat vitae enim suscipit pellentesque. Curabitur in porta diam. Aenean laoreet vel leo sit amet pretium. Nullam tincidunt pulvinar massa, vitae finibus dui vehicula nec. Duis in tortor euismod, feugiat lectus tristique, dignissim ex. Vivamus eu vestibulum massa. Suspendisse pulvinar orci a orci vestibulum sagittis. Maecenas sapien mi, condimentum vel ante a, blandit euismod turpis. Aliquam laoreet ligula quam, et cursus magna accumsan varius. Fusce placerat, urna non vestibulum malesuada, tellus tortor molestie libero, eget fermentum risus turpis eu felis. Duis vitae dui erat. Quisque eleifend dictum ipsum vitae elementum. Praesent lacinia lectus urna, et consectetur sem porttitor a. Vivamus pharetra ipsum eget dignissim convallis.

Donec eget sapien ac leo consequat cursus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Fusce velit ligula, hendrerit ac dui sit amet, dapibus ornare tellus. Pellentesque in sem a augue tempor consectetur sed eu lacus. Phasellus mollis dictum metus eu finibus. Nam eu imperdiet nunc. Duis tincidunt molestie dignissim. Sed ullamcorper tristique volutpat. Cras ac pharetra elit, at tincidunt ligula. Nulla facilisi. Suspendisse vulputate purus sit amet elit vestibulum, sed lobortis neque laoreet. Quisque varius velit ac posuere fringilla. Donec ullamcorper felis vitae tortor eleifend, a elementum lectus semper. Vestibulum tincidunt ornare turpis, id venenatis tellus lobortis eget.

## 4. Ejercicio 4: referencias

### 4.1. Referencias a secciones y subsecciones

La sección 4 está compuesta por las subsecciones 4.1, 4.2 y 4.3. Además, la subsección 4.1 contiene las subsecciones 4.1.1 y 4.1.2.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras sagittis tincidunt mauris, nec gravida nunc porta sed. Duis eu ultrices quam. Praesent pulvinar tortor sed leo dignissim lacinia. Pellentesque fermentum leo sed elit sollicitudin eleifend. Aenean placerat ipsum eu orci varius hendrerit. Curabitur condimentum suscipit quam non ornare. Etiam vel lacus mauris. Duis congue turpis ipsum, scelerisque consectetur nunc laoreet ac.

Etiam ultrices metus eu est venenatis ultrices. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Maecenas id convallis neque, at convallis turpis. Donec mollis consequat turpis et pellentesque. Pellentesque ut enim mattis, placerat est a, vehicula lacus. Morbi sodales, massa in venenatis efficitur, eros lectus varius eros, sed egestas magna dolor ac tortor. Suspendisse vel nisl dui. Phasellus congue eros mauris, non tincidunt turpis rhoncus id.

#### 4.1.1. Una subsección

Cras vulputate eros sem, eu laoreet diam pharetra vel. Sed nulla ipsum, lacinia sit amet ullamcorper eget, dictum vulputate urna. Fusce tempor, nibh ut

egestas tempus, neque lacus sollicitudin elit, accumsan dignissim eros enim vitae elit. Suspendisse scelerisque rhoncus massa id placerat. In nec interdum urna. Duis interdum cursus augue vitae lacinia. Suspendisse rhoncus augue augue, et molestie sapien ornare ut. Curabitur ut arcu non erat laoreet ultrices. Duis lectus risus, mattis ut volutpat non, lobortis a erat. Duis id eros arcu. Vestibulum vel placerat libero, id blandit ex. In ullamcorper quam ipsum, eu iaculis ipsum commodo ut.

Praesent a interdum massa, ut finibus dui. Curabitur sodales, quam a luctus tristique, diam ante tincidunt sapien, nec ultricies diam elit eget lorem. Fusce volutpat erat vitae enim suscipit pellentesque. Curabitur in porta diam. Aenean laoreet vel leo sit amet pretium. Nullam tincidunt pulvinar massa, vitae finibus dui vehicula nec. Duis in tortor euismod, feugiat lectus tristique, dignissim ex. Vivamus eu vestibulum massa. Suspendisse pulvinar orci a orci vestibulum sagittis. Maecenas sapien mi, condimentum vel ante a, blandit euismod turpis. Aliquam laoreet ligula quam, et cursus magna accumsan varius. Fusce placerat, urna non vestibulum malesuada, tellus tortor molestie libero, eget fermentum risus turpis eu felis. Duis vitae dui erat. Quisque eleifend dictum ipsum vitae elementum. Praesent lacinia lectus urna, et consectetur sem porttitor a. Vivamus pharetra ipsum eget dignissim convallis.

#### 4.1.2. Otra subsubsección

Donec eget sapien ac leo consequat cursus. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Fusce velit ligula, hendrerit ac dui sit amet, dapibus ornare tellus. Pellentesque in sem a augue tempor consectetur sed eu lacus. Phasellus mollis dictum metus eu finibus. Nam eu imperdiet nunc. Duis tincidunt molestie dignissim. Sed ullamcorper tristique volutpat. Cras ac pharetra elit, at tincidunt ligula. Nulla facilisi. Suspendisse vulputate purus sit amet elit vestibulum, sed lobortis neque laoreet. Quisque varius velit ac posuere fringilla. Donec ullamcorper felis vitae tortor eleifend, a elementum lectus semper. Vestibulum tincidunt ornare turpis, id venenatis tellus lobortis eget.

Ut nec placerat enim. Praesent interdum ullamcorper tellus id congue. Nullam id tellus neque. Integer at ante feugiat, eleifend felis at, interdum felis. Cras vel sapien arcu. Aliquam in massa eu augue efficitur lacinia ut luctus sapien. Pellentesque vel mi interdum, pulvinar libero sed, pretium velit. Proin auctor, nibh sit amet dictum molestie, ante quam suscipit diam, non scelerisque magna felis quis mauris.

## 4.2. Referencias a páginas

La siguiente tabla refleja las subsecciones de esta sección y sus números de página:

<code>\ref{...}</code>	<code>\pageref{...}</code>
4.1	9
4.2	11
4.3	11

Nunc vitae nulla tellus. Nam tempor lacus ligula, nec tempus diam ullamcorper efficitur. Sed vitae fringilla eros, nec venenatis sem. Proin eu mauris ligula. Integer accumsan sem sed eros pharetra, nec eleifend nibh volutpat. Cras id sapien id leo suscipit auctor. Aliquam accumsan nisl vitae vestibulum posuere. Curabitur vitae varius elit. Sed tempus magna eros, efficitur mattis elit posuere posuere. Interdum et malesuada fames ac ante ipsum primis in faucibus. In hac habitasse platea dictumst. Integer vehicula dignissim volutpat. Aenean est elit, tempor ut tellus vel, malesuada viverra neque. Nullam tempus varius felis eleifend rhoncus. Nullam sapien enim, bibendum sollicitudin mi vel, blandit ultrices erat. Etiam vulputate quam non lobortis rhoncus.

Etiam imperdiet lorem at dapibus tincidunt. Donec dignissim, sem ac mattis ornare, tellus erat varius sem, eget porta eros est eu elit. Vestibulum tellus nisl, varius a lacus quis, maximus porta sapien. Morbi ultricies id justo vitae vulputate. Pellentesque eros lorem, malesuada nec neque quis, convallis laoreet dolor. Vivamus nibh dui, placerat sed dapibus ac, dignissim eget nibh. Curabitur sed augue vitae quam vulputate suscipit. Nam dignissim magna eget dolor malesuada, facilisis egestas lectus blandit. Proin commodo diam a est feugiat rutrum. In nulla urna, dictum sed lorem eu, varius molestie enim. Phasellus tincidunt ultricies magna, sed facilisis arcu. Vestibulum hendrerit ultricies elementum. Ut vel nisl a nulla congue pretium.

### 4.3. Referencias bibliográficas

Toda la información que necesitas acerca de referencias cruzadas puede encontrarse en [K] o bien en [OPHS, Sección 2.8].

Vestibulum ac nulla tristique erat aliquam vestibulum a nec purus. In dignissim lorem felis, et luctus leo gravida vel. Duis sagittis, mauris at consectetur porta, tortor nibh vehicula risus, id tristique tortor augue porta est. Cras sed vulputate lectus. Aliquam nulla dolor, porta laoreet massa ut, blandit ornare odio. Ut vulputate tellus nec elit dictum, ac condimentum sem auctor. Duis laoreet, neque aliquam commodo euismod, purus lectus placerat elit, a fringilla sapien diam in velit. Quisque blandit odio lacinia commodo lacinia. Aliquam magna elit, venenatis tristique pharetra a, bibendum consectetur mauris. Sed sapien nulla, fringilla at nunc nec, venenatis mollis nulla. Nullam velit turpis, varius et convallis sit amet, cursus gravida velit. Curabitur a venenatis elit. Ut varius est at molestie volutpat. Nullam ut mollis quam, nec volutpat sapien. Curabitur imperdiet pellentesque lectus a dictum. Aliquam ac iaculis ipsum, sit amet consequat risus.

Pellentesque tristique lacinia volutpat. Phasellus vehicula pretium quam, ornare faucibus enim condimentum tempus. Orci varius natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Fusce id molestie sapien. Donec tortor metus, placerat id lacus nec, egestas auctor erat. Proin eu erat viverra leo mollis laoreet faucibus eu justo. Cras vel elit at orci pulvinar convallis molestie a magna. Maecenas pretium tortor at mi hendrerit, id ultricies magna blandit.

## 5. Ejercicio 5: fórmulas

### 5.1. La definición de grupo

Diremos que el par  $(G, \cdot)$  es un grupo cuando  $G$  sea un conjunto no vacío y la operación  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  verifique las siguientes tres propiedades:

(a) **Asociativa.**

Para cualesquiera  $a, b, c \in G$ , se cumple que  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ .

(b) **Existencia de elemento neutro.**

Existe  $e \in G$  tal que  $e \cdot a = a \cdot e = a$  para todo  $a \in G$ .

(c) **Existencia de elemento simétrico.**

Para cada  $a \in G$ , existe  $b \in G$  tal que  $a \cdot b = b \cdot a = e$ .

Si además cumple la propiedad conmutativa, esto es,  $a \cdot b = b \cdot a$  para cualesquiera  $a, b \in G$ , entonces diremos que  $(G, \cdot)$  es un grupo *conmutativo* o *abeliano*.

### 5.2. La ecuación de segundo grado

Dada la ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  y  $a \neq 0$ , sus soluciones vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Obtenemos dos soluciones en función de la elección del signo  $\pm$ .

### 5.3. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$  un abierto. Diremos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es derivable (en sentido complejo) en  $a \in \Omega$  cuando el siguiente límite exista

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Esto equivale a que  $f = (u, v)$  sea diferenciable en  $a$  y las derivadas parciales de sus partes real e imaginaria,  $u = \Re(f)$  y  $v = \Im(f)$ , cumplan las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a). \end{cases}$$

En particular,  $u$  es armónica en el punto  $a$ , esto es,

$$\Delta u(a) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = 0$$

#### 5.4. Desarrollos en serie de Taylor

Cualquier función holomorfa  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  en un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  es analítica, es decir,  $\forall a \in \Omega, \exists r_a > 0$  tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

converge uniformemente sobre compactos del disco  $D(a, r_a)$  a la función  $f$ . Consideremos los siguientes desarrollos centrados en el origen de funciones elementales en los dominios que se indican:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{arccot}(z) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{arcsin}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} z^{2n+1}, \quad \forall z \in D(0, 1).$$

Una forma de calcular los coeficientes es usar la **fórmula de Cauchy**, que nos dice que si  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un abierto y  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ , dados  $a \in \Omega$  y  $r > 0$  tales que  $\overline{D}(a, r) \subseteq \Omega$ , para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  se cumple que

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in D(a, r).$$

#### 5.5. Fórmula del cambio de base

Supongamos que  $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\overline{\mathbb{B}} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  son dos bases de un espacio vectorial  $V$ . Buscamos una expresión que, tomando un  $v \in V$  cualquiera, nos permita relacionar de  $C_{\mathbb{B}}(v)$  y  $C_{\overline{\mathbb{B}}}(v)$ .

Llamemos a las coordenadas que nos hacen falta de la siguiente manera:

$$C_{\mathbb{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C_{\overline{\mathbb{B}}}(v) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathbb{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad C_{\mathbb{B}}(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots \quad C_{\mathbb{B}}(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

lo que nos permite escribir

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \\ &= \lambda_1 (a_{11} \bar{e}_1 + a_{21} \bar{e}_2 + \dots + a_{n1} \bar{e}_n) + \dots + \lambda_n (a_{1n} \bar{e}_1 + a_{2n} \bar{e}_2 + \dots + a_{nn} \bar{e}_n) \\ &= (a_{11} \lambda_1 + a_{12} \lambda_2 + \dots + a_{1n} \lambda_n) \bar{e}_1 + \dots + (a_{n1} \lambda_1 + a_{n2} \lambda_2 + \dots + a_{nn} \lambda_n) \bar{e}_n. \end{aligned}$$

[illegible]
$$\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Para cualquier  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ , se verifican las igualdades

donde  $\gamma$  es la constante de Euler.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx. \quad (1)$$
$$f_n(x) = \begin{cases} x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty x^{s-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} \int_0^\infty x^{s-1} (n-x)^n dx. \quad (2)$$

15

Haciendo esto, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} \frac{n! \cdot n^{s+n}}{s(s+1)(s+2) \cdots (s+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^s}{s(s+1)(s+2) \cdots (s+n)}\end{aligned}\tag{3}$$

que es la igualdad buscada. Para que ésta se cumpla para todo  $z \notin \mathbb{Z}_0^-$ , será suficiente probar que la función

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}$$

es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ , pero podemos desarrollarla como

$$\begin{aligned}f(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z \cdot \frac{z+1}{1} \frac{z+2}{2} \cdots \frac{z+n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z \cdot \prod_{k=1}^n \frac{z+k}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z e^{-z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}}{z \cdot \prod_{k=1}^n \frac{z+k}{k} e^{-z/k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{z \log n - z \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}}{z \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{z+k}{k}\right) e^{-z/k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-z(-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k})}}{z \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{z+k}{k}\right) e^{-z/k}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\gamma z}}{z \cdot \prod_{k=1}^n \left(\frac{z+k}{k}\right) e^{-z/k}}.\end{aligned}\tag{4}$$

El hecho de que el producto del último término del desarrollo en (4) es convergente y que es una función entera con ceros en  $\mathbb{Z}_0^-$  no es en absoluto trivial, pero una demostración puede encontrarse en cualquier texto de Variable Compleja en el que se traten productos infinitos (e.g., véase [R]). En particular, la función  $f(z)$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$  y la demostración está completa.  $\square$

## 7. Ejercicio 7: entornos de tipo teorema

**Definición 7.1 (espacio métrico).** Una distancia en un conjunto no vacío  $E$  es una aplicación  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  verificando las siguientes tres condiciones.

- (I) Dados  $p, q \in E$ ,  $d(p, q) = 0$  si, y sólo si  $p = q$ .
- (II)  $d(p, q) = d(q, p)$  para cualesquiera  $p, q \in E$ .
- (III)  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$  para cualesquiera  $p, q, x \in E$ .

Al par  $(E, d)$  lo llamaremos espacio métrico.

En todo espacio métrico  $(E, d)$  tenemos ciertos conjuntos distinguidos. Concretamente, dados  $p \in E$  y  $r \geq 0$ , llamaremos bolas abierta y cerrada de centro  $p$  y radio  $r$ , respectivamente, a los conjuntos

$$B(p, r) = \{x \in E : d(p, x) < r\}, \quad \overline{B}(p, r) = \{x \in E : d(p, x) \leq r\}.$$



**Lema 7.2.** En un espacio métrico  $(E, d)$ , la familia  $\{B(p, r) : p \in E, r > 0\}$  de bolas abiertas es una base de topología en  $E$ .

*Demostración.* Como quiera que  $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(p, n)$  para cualquier  $p \in E$ , la unión de todas las bolas de es el propio  $E$ . Además, si  $B(p_1, r_1)$  y  $B(p_2, r_2)$  son bolas cuya intersección es no vacía, entonces se cumple que

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(p_1, r_1) \cap B(p_2, r_2)$$

para  $x \in B(p_1, r_1) \cap B(p_2, r_2)$  y  $0 < \varepsilon < \min\{r_1 - d(x, p_1), r_2 - d(x, p_2)\}$ .  $\square$

En lo sucesivo, llamaremos *topología de la distancia* en  $(E, d)$  a la topología que se construye de esta manera que es la topología más pequeña sobre  $E$  que hace continua a la distancia. En general usaremos la topología de la distancia cuando trabajemos con espacios métricos sin hacer referencia expresa. Observemos que, como consecuencia de que  $d$  es continua, tenemos que todas las bolas cerradas son cerrados y, por tanto, que  $\overline{B(p, r)} \subseteq \overline{B(p, r)}$ , aunque la inclusión opuesta no es en general cierta como veremos en los siguientes ejemplos.

### Ejemplos 7.3.

1. En cualquier conjunto  $E$  podemos tomar la distancia trivial definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

para cualesquiera  $x, y \in E$ . En tal caso, es claro que la topología de la distancia es la topología discreta pues cada punto forma un abierto. En particular, si  $E$  tiene más de un elemento, entonces no es conexo lo que prueba que, en general, los espacios métricos no tienen por qué ser conexos. Observemos por otro lado que, para cualquier  $p \in E$ , tenemos que  $\overline{B(p, 1)} = E$  mientras que  $B(p, 1) = \{p\}$ , lo que prueba que la igualdad  $\overline{B(p, r)} = \overline{B(p, r)}$  no es cierta en general.

2. Si  $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$  es una familia finita de espacios métricos. Las siguientes son distancias en el producto  $\prod_{k=1}^n E_k$ , siendo  $\alpha \geq 1$ .

$$d_\alpha(x, y) = \left( \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k)^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq k \leq n} d_k(x_k, y_k),$$

para  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{k=1}^n E_k$ . Es interesante destacar que la topología que induce  $d_\alpha$  en  $\prod_{k=1}^n E_k$  no depende de  $\alpha \in (1, \infty]$  y coincide con el producto de las topologías de cada factor.

**7.4. Teorema del punto fijo de Banach.** Toda aplicación contractiva de un espacio métrico completo en sí mismo tiene exactamente un punto fijo.

*Demostración.* Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y  $f : E \rightarrow E$  una aplicación contractiva, esto es, existe  $\alpha \in [0, 1[$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  para

cualesquiera  $x, y \in E$ . Dado  $x_0 \in E$ , consideremos la sucesión  $\{x_n\} \subseteq E$  definida por  $x_n = f(x_{n-1})$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Veamos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. En efecto, para cualesquier  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_0, x_1).$$

Por tanto, dados  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $q \geq p$ , se tiene que

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{n=p}^{q-1} d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{n=p}^{q-1} \alpha^n = \frac{\alpha^p - \alpha^q}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^p}{1 - \alpha},$$

de donde se sigue que  $\{x_n\}$  es de Cauchy, luego convergente al ser  $(E, d)$  completo. En consecuencia, existe  $x = \lim\{x_n\}$  y, aplicando  $f$  que es continua (por ser lipschitziana), tendremos que  $\lim\{f(x_n)\} = f(x)$ , pero  $\{f(x_n)\}$  no es más que una parcial de  $\{x_n\}$  luego  $f(x) = x$  por unicidad del límite y hemos probado que  $f$  tiene un punto fijo.

Para probar su unicidad, supongamos que  $x, y \in E$  verifican que  $f(x) = x$ ,  $f(y) = y$ . Entonces, como  $f$  es contractiva,

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad (5)$$

y, como  $\alpha < 1$ , no queda más opción que  $d(x, y) = 0$ , esto es,  $x = y$ .  $\square$

**Teorema 7.5 (Baire).** Sean  $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$  una familia de abiertos densos en un espacio métrico completo  $(E, d)$ . Entonces,  $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  es denso en  $E$ .

*Demostración.* Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $E$  y probemos que  $U \cap G \neq \emptyset$ . Como  $G_1$  es denso en  $E$  tenemos que  $U \cap G_1$  es un abierto no vacío de  $E$ , luego existen  $x_1 \in E$  y  $0 < r_1 < 1$  tales que  $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq U \cap G_1$ . Ahora  $G_2 \cap \overline{B}(x_1, r_1)$  es un abierto no vacío de  $E$  luego existen  $x_2 \in E$  y  $0 < r_2 < 1$  tales que  $\overline{B}(x_2, r_2) \subseteq U \cap G_2$ . Reiterando el proceso, ahora con el abierto  $\overline{B}(x_2, r_2)$ , obtenemos sucesiones  $\{x_n\} \subseteq E$  y  $\{r_n\} \in ]0, 1[$  tales que  $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}$  es una sucesión decreciente de cerrados en  $E$ , luego existe  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$  por ser  $E$  completo. Finalmente, es claro que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq U \cap G$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 7.6.** Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y  $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$  una sucesión de cerrados de  $E$  tales que  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ . Entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $F_k$  tiene interior no vacío.

*Demostración.* Consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_n = E \setminus F_n$  que es un abierto. Supongamos que todos los  $F_n$  tienen interior vacío, esto es, los abiertos  $G_n$  son densos en  $E$ . El teorema de Baire nos asegura que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  es denso en  $E$ , luego no puede ser  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  y hemos probado el enunciado.  $\square$

## Referencias a teoremas

El corolario 7.6 se deduce del teorema 7.5.

La fórmula (5) es decisiva en la demostración de la unicidad que afirma el teorema del punto fijo de Banach 7.4.

## 8. Ejercicio 8: el final del artículo

De las tareas propuestas sólo he realizado la primera. Para ello, he tenido que añadir en el preámbulo las siguientes líneas:

```
\usepackage{tocloft}
\renewcommand\cftsecfont{\color{blue}}
\renewcommand\cftsubsecfont{\color{blue}}
```

## Referencias

- [K] D.E. Knuth. The  $\text{\TeX}$ Book Addison-Wesley, New York (1986). ISBN: 0-201-13447-0.
- [OPHS] T. Oetiker et al. La introducción no-tan-corta a  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  Versión 5.03: Agosto de 2014. Recurso online disponible en <https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/spanish>.
- [R] W.Rudin Real and complex analysis. International student edition. McGraw Hill (1970). ISBN: 978-07-094189-0.