Mecánica Celeste: Problemas Tema 1

David Cabezas Berrido

Ejercicio 5.

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (x, y) = (r \operatorname{ch} \theta, r \operatorname{sh} \theta)\end{aligned}$$

I) Imagen de Φ.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ¿$\exists (\theta, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ : x = r \operatorname{ch} \theta,\ y = r \operatorname{sh} \theta$?

Esto equivale a $\operatorname{ch} \theta = \frac{x}{r},\ \operatorname{sh} \theta = \frac{y}{r}$, y la identidad $\operatorname{ch}^2 \theta - \operatorname{sh}^2 \theta = 1$ obliga a que

$$1 = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \Rightarrow r^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow r = +\sqrt{x^2 - y^2} \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto necesitamos $x^2 > y^2$. Ahora

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \Rightarrow \theta = \operatorname{arc\,sh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biyectiva con $\operatorname{sh}^{-1} = \operatorname{arc\,sh}$. Sólo nos falta que $\operatorname{ch} \theta = \frac{x}{r}$, lo cual deducimos fácilmente de

$$\operatorname{ch}^2 \theta = 1 + \operatorname{sh}^2 \theta = 1 + \frac{y^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2}$$

pero como ch sólo toma valores positivos, tendremos que imponer también $x \geq 0$. Tenemos por tanto

$$\Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \supset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$$

Pero la otra inclusión es inmediata, puesto que dado $(r \operatorname{ch} \theta, r \operatorname{sh} \theta) \in \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, se tiene por la desigualdad triangular:

$$r \operatorname{ch} \theta = r \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > r \frac{|e^\theta - e^{-\theta}|}{2} = |r \operatorname{sh} \theta|$$

II) Probar $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ difeomorfismo.

Claramente Φ es biyectiva, puesto que hemos construido su inversa en el anterior apartado.

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} : \Phi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto \left(\operatorname{arc\,sh} \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \sqrt{x^2 - y^2} \right)\end{aligned}$$

Las funciones ch, sh y $\operatorname{arc\,sh}$ son diferenciables en todo $\mathbb{R}$, y la función $\sqrt{\ }$ es diferenciable en $\mathbb{R}^+$, luego tanto Φ como Φ^{-1} son diferenciables en sus respectivos dominios.

III) Dibujar $\Phi(\theta, r_0)$ con r_0 fijo.

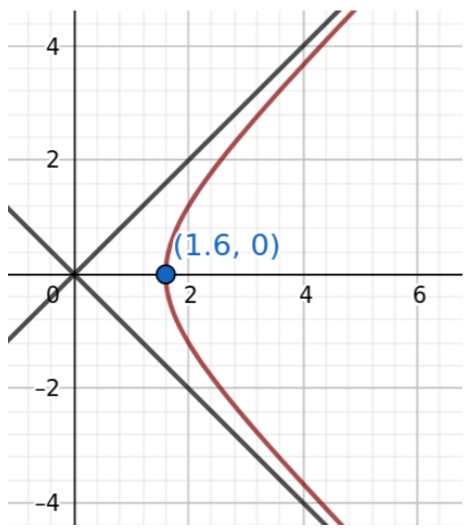
Tenemos $x = r_0 \,\mathrm{ch}\, \theta,\ y = r_0 \,\mathrm{sh}\, \theta$. La inyectividad de sh nos permite despejar $x = f(y) = r_0 \,\mathrm{ch}(\operatorname{arc\,sh} \frac{y}{r_0})$, luego obtendremos x como función de y. Observamos que

$$x^2 - y^2 = r_0^2 \,\mathrm{ch}^2\, \theta - r_0^2 \,\mathrm{sh}^2\, \theta = r_0^2$$

luego tenemos la gráfica de una rama de hipérbola ($x \geq 0$). Observamos que f es par y que para $\theta = 0$ tenemos $(x, y) = (r_0, 0)$, y toma valores en todo $\mathbb{R}$ y x a partir de r_0 (ya que $\mathrm{ch} \geq 1$). Por otra parte tenemos

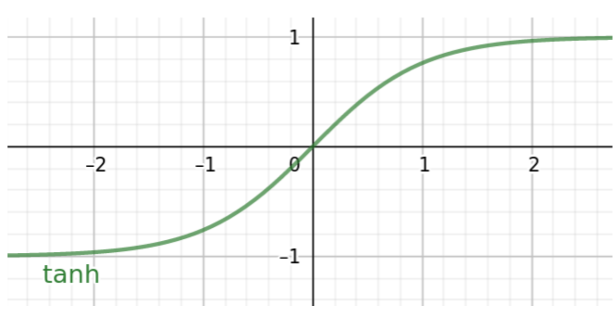
$$\lim_{\theta \to +\infty} \frac{x}{y} = \lim_{\theta \to +\infty} \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}} = 1, \qquad \lim_{\theta \to -\infty} \frac{x}{y} = -1.$$

Así que $x = y$ y $x = -y$ harán de asíntotas.

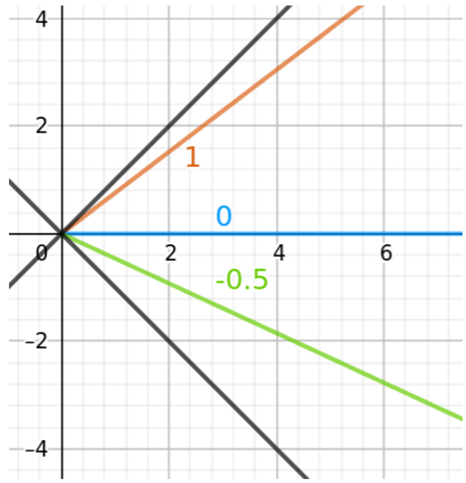


Dibujar $\Phi(\theta_0, r)$ con θ_0 fijo.

Tenemos $x = r \,\mathrm{ch}\, \theta_0,\ y = r \,\mathrm{sh}\, \theta_0$ con $r \in \mathbb{R}^+$, que es la ecuación paramétrica de una semirecta que "pasa" (no llega a tocarlo porque $r > 0$) por el origen. La pendiente será $\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{sh}\, \theta_0}{\mathrm{ch}\, \theta_0} = \tanh \theta_0 \in]-1, 1[$. Y la pendiente será mayor cuanto mayor sea θ_0, puesto que $\tanh$ tiene esta forma:

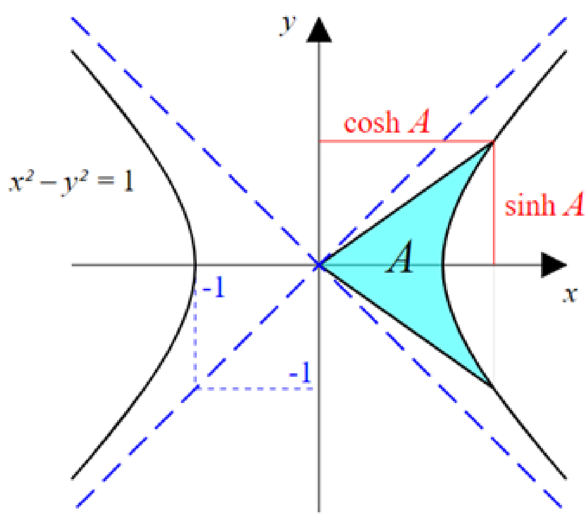


$\Phi(\theta_0, r)$ queda entonces de este modo (comparamos distintos valores de θ_0).



IV) Interpretar sh y ch en términos de "trigonometría en la hipérbola".

Claramente $x = \operatorname{ch}\theta$ y $y = \operatorname{sh}\theta$ satisfacen la ecuación $x^2 - y^2 = 1$. y toma valores en todo $\mathbb{R}$ y x a patir de 1, luego $(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ parametriza la rama derecha de la hipérbola equilátera. Dado $A \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{ch} A, \operatorname{sh} A)$ corresponderá a un punto de dicha rama, y recíprocamente todo punto de la rama se escribe como $(\operatorname{ch} A, \operatorname{sh} A)$ para algún $A \in \mathbb{R}$. Para darle a sh y ch cierto carácter "canónico" (¿Que tiene esta parametrización de la hipérbola de especial? ¿Por qué elegir ésta y no otra?) destacamos que el área azul de la figura es de A unidades cuadradas.



Probaremos que el área azul por encima del eje vale $\frac{A}{2}$. El área bajo la recta $y = \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A} x$ (que pasa por el origen y $(\operatorname{ch} A, \operatorname{sh} A)$) entre 0 y $\operatorname{ch} A$ es

$$\int_0^{\operatorname{ch} A} \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A} x dx = \frac{\operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\operatorname{ch} A} = \frac{\operatorname{sh} A \operatorname{ch} A}{2}$$

Hay que restarle el área bajo la hipérbola ($y = \sqrt{x^2 - 1}$), que es

$$\begin{aligned}
\int_1^{\operatorname{ch} A} \sqrt{x^2 - 1}dx &= \int_0^A \sqrt{\operatorname{ch} t^2 - 1}\operatorname{sh} t dt \qquad \text{(usando el cambio } x = \operatorname{ch} t\text{)} \\
&= \int_0^A \operatorname{sh}^2 t dt = \int_0^A \Big(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\Big)^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^A e^{2t} + e^{-2t} - 2dt \\
&= \frac{1}{4}\bigg(\Big[\frac{e^{2t}}{2}\Big]_0^A - \Big[\frac{e^{-2t}}{2}\Big]_0^A - \Big[2t\Big]_0^A\bigg) = \frac{1}{4}\bigg(\frac{e^{2A}}{2} - \frac{1}{2} - \Big(\frac{e^{-2A}}{2} - \frac{1}{2}\Big) - 2A\bigg) \\
&= -\frac{A}{2} + \frac{1}{4}\frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto el área azul por encima del eje es

$$\frac{\operatorname{sh} A \operatorname{ch} A}{2} + \frac{A}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2} = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\frac{(e^A - e^{-A})}{2}\frac{(e^A + e^{-A})}{2} - \frac{1}{4}\frac{e^{2A} - e^{-2A}}{2} = \frac{A}{2}$$

Ejercicio 6. Se considera el grupo el grupo de rotaciones

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A^T A = AA^T = I,\ \det A > 0\}$$

a) Probar que la aplicación

$$\Phi : SO(3) \to T_1(\mathbb{S}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : |x| = |y| = 1,\ < x, y >= 0\}$$

que a cada matriz $A \in SO(3)$ le hace corresponder sus dos primeras columnas es un homeomorfismo.

Dada una matriz $A = (a_1|a_2|a_3)$, tenemos que A es ortogonal ($A^T A = AA^T = I$) si, y solo si (a_1, a_2, a_3) forma una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$; y $\det A > 0$ si, y solo si la base define una orientación positiva (como los vectores son ortonormales, esto equivale a que $a_1 \times a_2 = a_3$). Por tanto si $A \in SO(3)$, sus dos primeras columnas son ortonormales: $(a_1, a_2) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, así que Φ está bien definida.

¿Es biyectiva? De existir Φ^{-1}, tendría que ser de esta forma: para $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, $\Phi^{-1}(x, y) = A = (x|y|z)$. Para que esto sea una aplicación bien definida, tiene que existir un único z que haga que A sea ortogonal y preserve la orientación (tenga determinante positivo). (x, y, z) será una base ortonormal si, y solo si $z \perp x, y$ y $|z| = 1$. Lo primero implica que $z \in \operatorname{Lin}\{x, y\}^\perp$, que es una recta, así que sólo hay dos posibilidades para z, $z = \pm x \times y$. Pero sólo $z = +x \times y$ hace que la orientación de la base ortonormal sea positiva ($\det A > 0$). Por tanto Φ es biyectiva con
$\Phi^{-1}(x, y) = (x|y|x \times y)$.

Claramente Φ es continua por ser la restricción a $SO(3)$ de la proyección de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ a $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Y Φ^{-1} lo es por serlo el producto vectorial (consecuencia de $|(x - u) \times (y - v)|$
$= |x - u||y - v| \sin(\sphericalangle(x - u, y - v)) \leq |x - u||y - v|$), luego Φ homeomorfismo.

b) $e \in]0,1[$, $\mathcal{E}_*(e)$ espacio de órbitas keplerianas con excentricidad e. Es decir, el conjunto de pares (V, E) con $V \subset \mathbb{R}^3$ plano vectorial orientado y $E \subset V$ elipse con foco en el origen y excentricidad e. Probar que existe una biyección entre $\mathcal{E}_*(e)$ y $SO(3) \times \mathbb{R}^+$.

Probamos algo equivalente: encontramos una biyección entre $\mathcal{E}_*(e)$ y $T_1(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^+$, ya que sabemos que $SO(3)$ es biyectivo con $T_1(\mathbb{S}^2)$.

Dado $\big((x, y), r\big) \in T_1(\mathbb{S}^2) \times \mathbb{R}^+$, le hacemos corresponder el plano vectorial $V = x^\perp$ orientado con la orientación inducida por cualquier base $\{v_1, v_2\}$ de V que convierta a (v_1, v_2, x) en una base positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, esto es: $\det(v_1, v_2, x) > 0$.

Para que esta definición sea correcta, debemos comprobar que la orientación de V no depende de la base escogida. En efecto, si (v_1, v_2) y (u_1, u_2) son dos bases de V que cumplen $\det(v_1, v_2, x), \det(u_1, u_2, x) > 0$, escribimos v_1 y v_2 en función de (u_1, u_2),

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2, \qquad v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2$$

La matriz de cambio de base (v_1, v_2) a (u_1, u_2) es

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

para probar que ambas bases definen la misma orientación en V debemos comprobar que $\det M = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} > 0$. Usaremos para ello propiedades básicas de los determinantes.

$$\begin{aligned}
\det(v_1, v_2, x) &= \det(a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) \\
&= \det(a_{11}u_1, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) + \det(a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2, x) \\
&= \det(a_{11}u_1, a_{21}u_1, x) + \det(a_{11}u_1, a_{22}u_2, x) + \det(a_{12}u_2, a_{21}u_1, x) + \det(a_{12}u_2, a_{22}u_2, x) \\
&= a_{11}a_{21}\det(u_1, u_1, x) + a_{11}a_{22}\det(u_1, u_2, x) + a_{12}a_{21}\det(u_2, u_1, x) + a_{12}a_{22}\det(u_2, u_2, x) \\
&= a_{11}a_{22}\det(u_1, u_2, x) + a_{12}a_{21}\det(u_2, u_1, x) \\
&= a_{11}a_{22}\det(u_1, u_2, x) - a_{12}a_{21}\det(u_1, u_2, x) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\det(u_1, u_2, x) = \det M \det(u_1, u_2, x)
\end{aligned}$$

Por tanto $\det M > 0$ y probamos que esta correspondencia está bien definida.

Como $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$, $y \perp x \Rightarrow y \in x^\perp = V$, lo que nos permite usar y como sentido para el eje de excentricidad de la elipse. E será por tanto la elipse con parámetros $k = r$ y $\vec{e} = ey$.

Recíprocamente, dado $(V, E) \in \mathcal{E}_*(e)$ le hacemos corresponder $\big((x, y), r\big)$, donde x será el vector unitario normal al plano V (hay dos posibilidades, un vector y su opuesto) que respete la orientación en V, es decir, si (v_1, v_2) es una base de V, x será el vector unitario que cumple $x = \lambda \cdot v_1 \times v_2$ con $\lambda > 0$, o equivalentemente $\det(v_1, v_2, x) > 0$. Los argumentos anteriores también prueban que dos bases de V que definan la misma orientación dan luegar al mismo x (puesto que $\det M > 0$).

$y \in V$ será el vector unitario con el sentido del eje de excentricidad de E: $y = \dfrac{\vec{e}}{e}$. Como $x \in V^{\perp}$, tendremos $x \perp y$ y por tanto $(x, y) \in T_1(\mathbb{S}^2)$. Finalmente, tomamos $r = k \in \mathbb{R}^+$, el parámetro de E.

Estas correspondencias son una inversa de la otra: x y V (respectivamente y y $\vec{e}$; y r y k) se definen unívocamente.

c) Caso $e = 0$.

Ahora $\mathcal{E}_*(e)$ está formado por circunferencias en planos orientados.

Las correspondencias entre x y V (plano orientado en el que está la circunferencia); y entre r y k (radio de la circunferencia) siguen siendo válidas. Pero $\vec{e} = 0$ independientemente de $y \in x^{\perp} = V$, luego la correspondencia anterior ya no es una biyección. Esto no descarta que exista otra biyección, probablemente la haya, aunque no sea tan fácil de interpretar.