Relación 1

David Cabezas Berrido

Ejercicio 3. Debemos tener en cuenta que $\alpha'(X-\mu)$ es una variable aleatoria unidimensional.

Si $k=0$, el resultado es obvio: $E[1]=1$, ya que $m=\frac{k}{2}=0$ y $0!=a^0=1$ para cualquier número real a. Suponemos en adelante $k>0$.

Si $\alpha=0$, obtenemos otra trivialidad: $E[0]=0$. De lo contrario, podemos ver α' como una matriz $1\times p$ de rango máximo y aplicar el resultado sobre transformaciones lineales de rango máximo (RESULTADO 4 de DNM para $\Sigma>0$) para concluir $Y\sim N(\alpha'\mu-\alpha'\mu,\alpha'\Sigma\alpha'')=N(0,\alpha'\Sigma\alpha)$.

El resultado auxiliar nos proporciona entonces $E[Y^k]=0$ para k impar y
$E[Y^k]=(\alpha'\Sigma\alpha)^{\frac{k}{2}}(k-1)!!$, sustituyendo $m=\frac{k}{2}$ obtenemos $E[Y^k]=(\alpha'\Sigma\alpha)^m(2m-1)!!$ y sólo queda probar $(2m-1)!!=\frac{(2m)!}{2^m m!}$ para todo $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 1$. Esto lo haremos por inducción sobre m:

En el caso $m=1$ basta desarrollar y obtenemos

$$(2\cdot 1-1)!!=1!!=1; \qquad \frac{(2\cdot 1)!}{2^1 1!}=\frac{2}{2}=1$$

Supuesta la igualdad para $m-1$, es decir,

$$(2m-3)!!=\big(2(m-1)-1\big)!!=\frac{\big(2(m-1)\big)!}{2^{m-1}(m-1)!}=\frac{(2m-2)!}{2^{m-1}(m-1)!}.$$

Comprobamos para m,

$$\begin{aligned} &(2m-1)!!=\frac{(2m)!}{2^m m!}\iff(2m-1)(2m-3)!!=\frac{(2m)!}{2^m m!}\\ \underset{m-1}{\overset{\text{Caso}}{\iff}}\quad &(2m-1)\frac{(2m-2)!}{2^{m-1}(m-1)!}=\frac{(2m)!}{2^m m!}\iff(2m-1)!=\frac{(2m)!}{2m}\end{aligned}$$

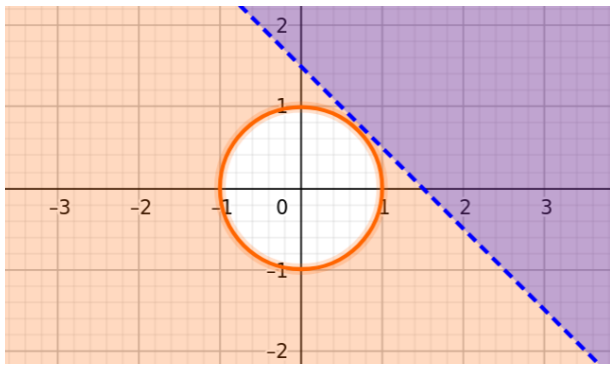
y obtenemos lo que queríamos.

Ejercicio 5.

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 0 & \sigma_{13}\\ 0 & 1 & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 1\end{pmatrix}$$

Los menores de orden 1 y 2 de la diagonal principal de Σ valen los dos $1 > 0$, luego Σ es definida positiva si, y solo si su determinante es positivo. Hemos de probar por tanto $0 \geq |\Sigma| = 1 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$, sabiendo que $\sigma_{13} + \sigma_{23} > \frac{3}{2}$. Por comodidad, renombramos $\sigma_{13} = x$, $\sigma_{23} = y$; queremos probar $x^2 + y^2 \geq 1$ para $x + y > \frac{3}{2}$.

Geométricamente, esto no es más que decir que el semiplano abierto $P : x + y > \frac{3}{2}$ está contenido en el complementario del disco abierto unidad $D : x^2 + y^2 < 1$, o lo que es lo mismo, $P \cap D = \emptyset$. En esta figura se ve claramente



Haremos una demostración analítica, la función $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ está minorada y por tanto tiene ínfimo no negativo en el conjunto P. Caben tres posibilidades:

- El ínfimo se alcanza en un punto interior donde se anula el gradiente, pero $\nabla f(x, y) = 2(x, y) \neq (0, 0)$ en P.
- El ínfimo se alcanza en la frontera de P, donde $y = \frac{3}{2} - x$. $f(x, \frac{3}{2} - x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{4}$, que es mínimo en $x = \frac{3}{4}$ y vale $1{,}125 > 1$.
- Existe una sucesión divergente cuya imagen por f converge al ínfimo, esto no puede darse puesto que f es el cuadrado de la norma euclídea.

De esto deducimos que $\inf\{f(x, y) : (x, y) \in P\} = 1{,}125$ y puesto que P no contiene a su frontera, $x^2 + y^2 > 1{,}125$ en todo P. Y por tanto $|\Sigma| \leq 0$, por lo que Σ no puede ser definida positiva.

Ejercicio 7. $Y \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$|\Sigma| = 144 > 0$ y Σ simétrica. Luego es definida positiva. La idea de los apartados a-e es escribir la variable que queremos estudiar como una transformada lineal de rango máximo de Y y aplicar el resultado de transformaciones lineales de rango máximo para $\Sigma > 0$.

a)

$$Z = 2Y_1 - Y_2 + 3Y_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} Y$$

Como la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 1, el resultado sobre transformaciones lineales de máximo rango para $\Sigma > 0$ nos asegura que $Z \sim N_1(B\mu, B\Sigma B') = N_1(17, 21)$.

b) (Z_1, Z_2) donde $Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3$, $Z_2 = Y_1 - Y_2 + 2Y_3$.

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} Y = BY$$

Esta vez el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es 2, y el mismo resultado nos da
$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}\right)$.

c)
$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y = BY$$

El rango de B sigue siendo máximo, por tanto $Y_2 \sim N_1(1, 13)$.

d)
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Una vez más el mismo resultado nos dice que $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right)$.

e)
$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} Y$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{21}{4} \end{pmatrix}\right).$$

f) Encontrar Z tal que $Z = (T')^{-1}(Y - \mu) \sim N_3(0, I)$. Con T la matriz correspondiente a la factorización de Cholesky, $\Sigma = T'T$.

Utilizamos el algoritmo para la descomposición de Cholesky implementado en la herramienta `SageMath`, y obtenemos que (redondeando)

$$\Sigma = T'T = \begin{pmatrix} 2{,}4495 & 0 & 0 \\ 0{,}4082 & 3{,}5824 & 0 \\ -0{,}8165 & 1{,}2096 & 1{,}3675 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}4495 & 0{,}4082 & -0{,}8165 \\ 0 & 3{,}5824 & 1{,}2096 \\ 0 & 0 & 1{,}3675 \end{pmatrix}$$

También con `SageMath`, calculamos la inversa:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4082 & -0{,}0465 & 0{,}2849 \\ 0 & 0{,}2791 & -0{,}2469 \\ 0 & 0 & 0{,}7312 \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z = \begin{pmatrix} 0{,}4082 & -0{,}0465 & 0{,}2849 \\ 0 & 0{,}2791 & -0{,}2469 \\ 0 & 0 & 0{,}7312 \end{pmatrix} (Y - \mu)$$

Como $T'T = \Sigma$, se tiene $Z \sim N_3(0, I)$.

g) Encontrar Z tal que $Z = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(Y - \mu) \sim N_3(0, I)$. Con $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ la inversa de la matriz correspondiente a la factorización raíz cuadrada, $\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}$.

Con la función `np.linalg.eigh`, obtenemos una matriz ortogonal

$$V = \begin{pmatrix} -0{,}4358 & 0{,}8996 & 0{,}0276 \\ 0{,}3268 & 0{,}1296 & 0{,}9362 \\ -0{,}8386 & -0{,}417 & 0{,}3505 \end{pmatrix}$$

que cumple

$$V'\Sigma V = \begin{pmatrix} 1{,}4018 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}0712 & 0 \\ 0 & 0 & 14{,}527 \end{pmatrix} = D$$

Tomando

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1{,}4018} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7{,}0712} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{14{,}527} \end{pmatrix}$$

tenemos usando que V es ortogonal,

$$\Sigma = VDV' = VD^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}V' = VD^{\frac{1}{2}}V'VD^{\frac{1}{2}}V'$$

Por tanto debemos tomar $\Sigma^{\frac{1}{2}} = VD^{\frac{1}{2}}V' = \begin{pmatrix} 2{,}3798 & 0{,}2399 & -0{,}528 \\ 0{,}2399 & 3{,}5115 & 0{,}7823 \\ -0{,}528 & 0{,}7823 & 1{,}7633 \end{pmatrix}$, que es simétrica.

Calculamos su inversa también con ayuda de `NumPy`,

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0{,}465 & -0{,}0697 & 0{,}1702 \\ -0{,}0697 & 0{,}3265 & -0{,}1657 \\ 0{,}1702 & -0{,}1657 & 0{,}6916 \end{pmatrix}$$

Luego

$$Z = \begin{pmatrix} 0{,}465 & -0{,}0697 & 0{,}1702 \\ -0{,}0697 & 0{,}3265 & -0{,}1657 \\ 0{,}1702 & -0{,}1657 & 0{,}6916 \end{pmatrix} (Y - \mu)$$

Como $\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}} = \Sigma$, se tiene $Z \sim N_3(0, I)$.

Ejercicio 8. $Y \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz de convarianzas del vector Y es Σ, que es definida positiva. Es una matriz diagonal por cajas, por lo que el Resultado 2 del tema DNM caso $\Sigma > 0$ nos garantiza que los vectores $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ y (Y_3) son (mutuamente) independientes, y además

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right), \qquad Y_3 \sim N_1(4, 5)$$

a) En la entrada $(1, 2)$ de la matriz Σ, vemos que $\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) = -3 \neq 0$. Por tanto, estas variables no son incorreladas, luego no pueden ser independientes.

b) Son independiente, Y_1 es una componente (una proyección) de un vector independiente con Y_3. TODO: ¿funcion de una independiente sigue siendo independiente?

c) Son independiente, Y_2 es una componente (una proyección) de un vector independiente con Y_3.

d) Lo son, es justo lo que garantiza el Resultado 2 que comento arriba.

e) Si fuesen independientes, Y_1 sería independiente de Y_2 por ser una función (proyección) de un vector independiente. Por tanto, no lo son.

Ejercicio 9. 1.

Ejercicio 10. La función de distribución marginal de X es:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y)dydt = \lim_{s\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{s} f(t, y)dydt = \lim_{s\to+\infty} F(x, s) \\ &= \lim_{s\to+\infty} \Phi(x)\Phi(s)[1 + \alpha(1 - \Phi(x))(1 - \Phi(s))] = \Phi(x) \end{aligned}$$

Donde en el último paso usamos que $\lim\limits_{s\to+\infty} \Phi(s) = 1$. Que por hipótesis es la función de distribución normal estándar.

La situación de Y es totalmente análoga.

Ejercicio 11. Calculamos la distribución conjunta de

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 - X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X$$

utilizando que es una transformación lineal de rango máximo. Obtenemos que

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 - X_3 \end{pmatrix} \sim N_2\left(0, \begin{pmatrix} 3 + 4\rho & -1 - 2\rho \\ -1 - 2\rho & 3 \end{pmatrix}\right),$$

su matriz de covarianzas es diagonal si $\rho = \dfrac{-1}{2}$, y para ese mismo valor la matriz Σ queda

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

que es definida positiva: los determinantes menores de la diagonal principal son: 1, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$, todos positivos.

Para $\rho = \dfrac{-1}{2}$, $\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 - X_3 \end{pmatrix}$ sigue una DNM con matriz de covarianzas no singular y diagonal, así que sus componentes ($X_1 + X_2 + X_3$ y $X_1 - X_2 - X_3$) son independientes.