Teorema de Caracterización de Pesos A_1

David Cabezas Berrido

Introducción

Vamos a demostrar el teorema de caracterización de los pesos A_1. Nuestra referencia principal será el libro "Análisis de Fourier" de Javier Duoandikoetxea. Fijemos primero algo de notación.

Trabajaremos en el espacio $\mathbb{R}^n$. En adelante w denotará un peso, es decir, una función medible, no negativa y localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Para cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^n$, notaremos $w(E) = \int_E w dx$, donde la integral es respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. La medida de Lebesgue de un conjunto medible E se denota por $|E|$.

Consideramos el funcional maximal de Hardy-Littlewood M definido por

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \tag{1}$$

para cada f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ $\big(f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\big)$. El supremo de la expresión de arriba es en todos los cubos diádicos Q que contienen al punto $x \in \mathbb{R}^n$.

La condición para que un peso w esté en la clase A_1 es

$$\frac{w(Q)}{|Q|} \leq C w(x) \tag{2}$$

para casi todo $x \in Q$ y para todo cubo diádico Q. La constance C no puede depender ni de x ni de Q, se le llama *constante* A_1 *de* w.

Demostración del teorema

Primero enunciaremos dos resultados que necesitaremos para la prueba del teorema. El primero es la *desigualdad de Kolmogorov.*

Lema 1. *Si* T *es un operador* $(1,1)$*-débil y* $\delta \in [0,1[$, *se tiene*

$$\int_E |Tf|^\delta dx \leq C(\delta)|E|^{1-\delta} \|f\|_1^\delta$$

para alguna constante $C(\delta)$ *dependiente de* δ *válida para toda* f *integrable.*

Sabemos que el operador M es (1,1)-débil, por lo que podremos aplicarle éste resultado. El siguiente es la *desigualdad de Hölder inversa*.

Lema 2. *Si $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$. Existe $\varepsilon > 0$ dependiente sólo de p y de la constante A_p de w tal que*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q w,$$

donde la constante C es válida para todo cubo diádico Q.

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema de caracterización de pesos A_1.

Teorema 3. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Mf(x) < \infty$ casi por doquier en $\mathbb{R}^n$. Si $\delta \in [0,1[$, $w(x) = \big(Mf(x)\big)^\delta$ es un peso A_1 con constante A_1 dependiente del δ pero no de f.*

Recíprocamente, si $w \in A_1$ existen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $k \in L^\infty$ con $k^{-1} \in L^\infty$ y $\delta \in [0,1[$ tales que $w = k(Mf)^\delta$.

Demostración. Para la primera parte, debemos probar que para todo cubo diádico Q y para casi todo $x \in Q$ se tiene la condición A_1:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf)^\delta \leq C\big(Mf(x)\big)^\delta$$

con C independientemente de Q y de f. Fijados Q y f, sea $\overline{Q}$ el cubo con el mismo centro y el doble de lado. De esta forma, $\overline{Q}$ también es un cubo diádico con $|\overline{Q}| = 2^n|Q|$. Podemos escribir $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f \cdot \chi_{\overline{Q}}$ y $f_2 = f - f_1$. Tenemos

$$\begin{aligned} Mf(x) = \sup_{Q \ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(y) + f_2(y)|dy &\leq \sup_{Q \ni x}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(y)|dy + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f_2(y)|dy\right) \\ &\leq \sup_{Q \ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(y)|dy + \sup_{Q \ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_2(y)|dy = Mf_1(x) + Mf_2(x) \end{aligned}$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, si $\delta \in [0,1[$, $Mf(x)^\delta \leq Mf_1(x)^\delta + Mf_2(x)^\delta$ pct (para casi todo) x.

Trabajemos primero con $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Usando el Lema 1, puesto que M es (1,1)-débil y no negativo, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf_1)^\delta &\leq \frac{1}{|Q|}C(\delta)|Q|^{1-\delta}\|f_1\|_1^\delta = C(\delta)\left(\frac{\int_{\overline{Q}}|f|}{|Q|}\right)^\delta = C(\delta)\left(\frac{\int_{\overline{Q}}|f|}{|\overline{Q}|/2^n}\right)^\delta \\ &\leq C(\delta)2^{\delta n}\left(\sup_{Q \ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|\right)^\delta \leq C(\delta)2^n Mf(x)^\delta \end{aligned} \tag{3}$$

pct $x \in \overline{Q}$, en particular, pct $x \in Q$. En el segundo paso hemos usado que $f_1 = f \cdot \chi_{\overline{Q}}$.

Por otra parte, □

Referencias

[1] J. Duoandikoetxea: *Análisis de Fourier*. Universidad Autónoma de Madrid, 1995.