Principales resultados de Análisis Vectorial

David Cabezas Berrido

Vamos a presentar los principales resultados de la asignatura Análisis Vectorial: el Teorema de Green, el Teorema de la Stokes y el Teorema de la Divergencia. Todos ellos establecen propiedades relativas a las integrales en curvas y superficies de funciones reales de varias variables, normalmente en dimensión 2 y 3.

A continuación, introducimos los conceptos necesarios para la comprensión de cada uno de estos resultados. Seguidamente, iremos presentando los teoremas principales, en cada caso incluiremos una breve explicación intuitiva y un ejemplo donde comprobaremos que se verifica el resultado.

1. Conceptos previos

1.1. Operadores diferenciales

Los siguientes operadores diferenciales tienen una gran importancia en el análisis real, y algunos de ellos son necesarios para comprender los teoremas antes mencionados.

Gradiente

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$. El **gradiente** de f es la función $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^N)$ dada por el vector de derivadas parciales, esto es,

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\right)$$

para cada $x \in \Omega$.

Divergencia

Si $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es un campo vectorial diferencible dado por $F = (F_1, \dots, F_N)$, la **divergencia** de F viene dada por

$$\operatorname{div}\big(F(x)\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x).$$

Se tiene $\operatorname{div} F : \Omega \to \mathbb{R}$.

Laplaciano

Si ahora suponemos que f es de clase 2 ($f \in C^2(\Omega)$), definimos el **laplaciano** de f como la traza de su matriz Hessiana, es decir, la función $\Delta f : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x).$$

Además, se tiene $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$.

Rotacional

Cuando la dimensión es $N = 3$, definimos la **rotacional** del campo vectorial diferenciable $F = (F_1, F_2, F_3)$ como el campo (vectorial) dado por

$$\mathrm{rotF} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Para el caso bidimensional, donde $F = (F_1, F_2)$, tenemos

$$\mathrm{rotF} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}.$$

Notemos que en este caso, la rotacional es un campo escalar.

1.2. Integrales de campos escalares y vectoriales sobre curvas y superficies

Con la notación anterior, introducimos la forma de integrar campos escalares y vectoriales sobre curvas y superficies.

Integral de línea de un campo escalar

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos (una función de clase C^1 a trozos del intervalo $[a, b]$ en Ω), definimos la *integral de línea de f a lo largo de γ* como

$$\int_\gamma f dl = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Integral de línea de un campo vectorial

Si $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ es un campo escalar continuo con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es un camino regular a trozos, definimos la *integral de línea de F a lo largo de γ* como

$$\int_\gamma F dl = \int_a^b \big\langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \big\rangle \, dt.$$

Integral de superficie de un campo escalar

Si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ admite una parametrización simple y suave, para cada función continua $f : S \to \mathbb{R}$, la *integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie S* viene definida mediante la igualdad

$$\iint_S f ds = \iint_\Phi f ds = \iint_W f\big(\Phi(u,v)\big)\|\Phi_u \times \Phi_v\| dudv,$$

donde $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización simple (inyectiva) y suave ($\Phi_u \times \Phi_v$ no se anula en W).

Este valor es independiente de la parametrización Φ elegida.

Integral de superficie de un campo vectorial

Sea Φ una parametrización simple y suave de S y supongamos que $F : S \to \mathbb{R}^3$ es una función continua. La *integral de superficie del campo vectorial F sobre la superficie S orientada mediante* $\dfrac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$ viene dada por la igualdad

$$\iint_S F ds = \iint_\Phi F ds = \iint_W \big\langle F\big(\Phi(u,v)\big), \Phi_u \times \Phi_v \big\rangle\, dudv.$$

Este valor es independiente de la parametrización Φ elegida siempre que se respete la misma orientación $\Big($siempre que el vector $\dfrac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$ sea el mismo$\Big)$. Obtendríamos el valor opuesto si eligiésemos una parametrización simple y suave que determine la orientación opuesta. Esto depende de si el vector $\dfrac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$ es normal exterior o interior a la superficie.

2. Teorema de Green

El Teorema de Green asegura que el valor de la integral de línea de un campo vectorial de clase C^1 y dimensión 2 a lo largo de una curva de Jordan viene determinado por la integral doble de su rotacional en la región interior a la curva.

Teorema 2.1 (Teorema de Green)**.** *Sea γ un camino en $\mathbb{R}^2$, regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ en sentido positivo (antihorario). Sea D la región interior a Γ, y $F = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $D \cup \Gamma \subset \Omega$. Entonces,*

$$\int_\gamma F dl = \iint_D \operatorname{rot} F dxdy.$$

Más explícitamente, esto puede escribirse como

$$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy.$$

Ejemplo

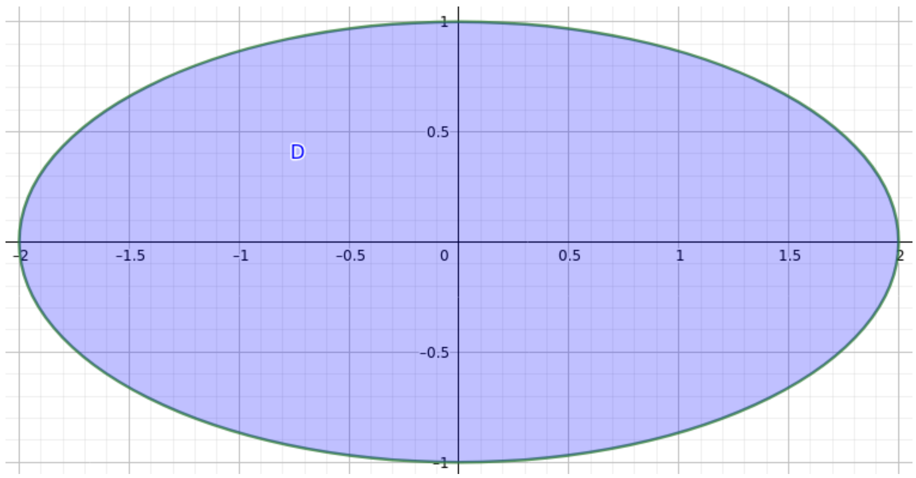
Comprobemos ahora el Teorema de Green en un ejemplo concreto.

Consideremos el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (x + 2y, 3x - 5y)$, y la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Tenemos $F_1(x, y) = x + 2y$ y $F_2(x, y) = 3x - 5y$, por tanto

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3 - 2 = 1.$$

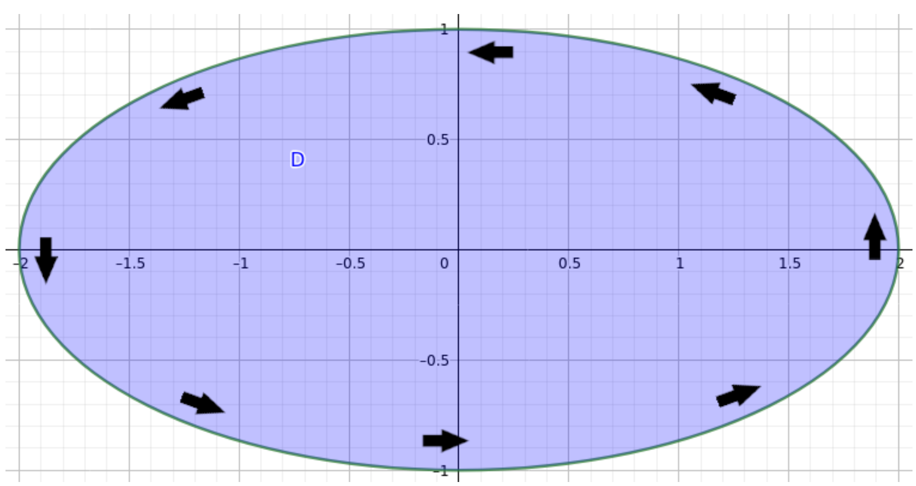
Por una parte, la integral en D de la función constante 1 coincide con el área de D. D es el área encerrada por una elipse centrada en el origen con ejes de longitud 2 y 1.



El área de una elipse cuyos ejes tienen longitud a y b es πab, por tanto el área de D es $\pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$.

Por tanto, $\displaystyle\iint_D \operatorname{rot} F dxdy = 2\pi$.

Para la otra integral, parametrizamos la elipse que encierra a D con la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (2\cos t, \sin t)$.



Tenemos $\gamma'(t) = (-2\sin t, \cos t)$, y la integral queda entonces:

$$\int_\gamma F dl = \int_0^{2\pi} \langle F\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle (2\cos t + 2\sin t, 6\cos t - 5\sin t), (-2\sin t, \cos t)\rangle \, dt.$$

Simplificando obtenemos

$$\int_\gamma F dl = -4\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 6\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -4\pi + 6\pi = 2\pi,$$

y comprobamos que se verifica el Teorema de Green.

3. Teorema de la Divergencia en $\mathbb{R}^2$

TODO: pag 13

4. Teorema de Stokes

TODO: pag 19

5. Teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^N$

5.1. Preámbulo

TODO: dominio regular (se puede hablar de normal exterior a la frontera).

En un regular se puede despejar en la frontera una componente en función de las demás.

Particiones continuas de la unidad, caso compacto (cierre de acotado)

5.2. Resultado pricipal

TODO: pag 26