Ejercicios de Análisis Matemático Avanzado

1. Probar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares para $u^*(r,\theta) = u(re^{i\theta})$ y $v^*(r,\theta) = v(re^{i\theta})$ son:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v^*}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v^*}{\partial r}.$$

   Asimismo, probar que la ecuación de Laplace en cordenadas polares para $u^*(r,\theta) = u(re^{i\theta})$ es:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = 0$$

2. Probar, usando coordenadas polares, que la función $u(re^{i\theta}) = \theta log(r)$ es armónica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$. Usar la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para encontrar una función conjugada armónica v de u. ¿Qué función es $f(z) = u(z) + iv(z)$?

3. En cada uno de los siguientes casos mostrar que la función u es armónica en el dominio D y encontrar, si existe, una función conjugada armónica de u en D. (Notación: $z = x + iy = re^{i\theta}$).

   a) $u(z) = x^2 - y^2,\ D = \mathbb{C}$.

   b) $u(z) = e^{x^2-y^2} cos(2xy)\ \ D = \mathbb{C}$.

   c) $u(z) = arctg(\frac{y}{x}),\ D = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = x > 0\}$.

   d) $u(z) = \frac{x}{x^2+y^2},\ D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   e) $u(z) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2},\ D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   f) $u(re^{i\theta}) = 1 + r^2 sen\theta cos\theta\ \ D = \mathbb{C}$.

4. *a)* Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y $u : D \to \mathbb{R}$ una función armónica. Probar que, si $a \in D$ y $r > 0$ son tales que $\overline{D}(a,r) \subseteq D$, entonces

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{\overline{D}(a,r)} u(z)dxdy$$

   b) Sea D un dominio de $\mathbb{C}$ y $u : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que, para cada $a \in D$, existe $r_a > 0$ tal que $\overline{D}(a,r_a) \subseteq D$ y

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{\overline{D}(a,r)} u(z)dxdy$$

   para todo $r \in]0,r_a[$.
   Probar que u es armónica en D.

5. Probar que si u es armónica en $\mathbb{C}$ y está mayorada, entonces u es constante. ¿Qué se puede afirmar si u está minorada en $\mathbb{C}$?

6. Probar que si u es armónica en $\mathbb{C}$ y satisface $\lim_{z\to\infty} u(z) = 0$, entonces es idénticamente nula en $\mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar si u es armónica en $\mathbb{C}$ y satisface $\lim_{z\to\infty} u(z) = 1$?

7. Sea $f : \partial D(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(z) + f(\bar{z}) = 0$ para todo $z \in \partial D(0,1)$. Probar que si u es la solución del problema de dirichlet en $D(0,1)$ con valores en la frontera f, entonces $u(x) = 0$ para cada $x \in [-1,1]$.