

Principales resultados de Análisis Vectorial

Vamos a presentar los principales resultados de la asignatura Análisis Vectorial: el Teorema de Green, el Teorema de la Stokes y el Teorema de la Divergencia. Todos ellos establecen propiedades relativas a las integrales en curvas y superficies de funciones reales de varias variables, normalmente en dimensión 2 y 3.

A continuación, introducimos los conceptos necesarios para la comprensión de cada uno de estos resultados. Seguidamente, iremos presentando los teoremas principales, en cada caso incluiremos una breve explicación intuitiva y un ejemplo donde comprobaremos que se verifica el resultado.

1. Conceptos previos

1.1. Operadores diferenciales

Los siguientes operadores diferenciales tienen una gran importancia en el análisis real, y algunos de ellos son necesarios para comprender los teoremas antes mencionados.

Gradiente

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable, donde Ω es un abierto de \mathbb{R}^N . El **gradiente** de f es la función $\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ dada por el vector de derivadas parciales, esto es,

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} f(x) \right)$$

para cada $x \in \Omega$.

Divergencia

Si $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un campo vectorial diferenciable dado por $F = (F_1, \dots, F_N)$, la **divergencia** de F viene dada por

$$\operatorname{div} (F(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x).$$

Se tiene $\operatorname{div} F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Laplaciano

Si ahora suponemos que f es de clase 2 ($f \in C^2(\Omega)$), definimos el **laplaciano** de f como la traza de su matriz Hessiana, es decir, la función $\Delta f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x).$$

Además, se tiene $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$.

Rotacional

Cuando la dimensión es $N = 3$, definimos la **rotacional** del campo vectorial diferenciable $F = (F_1, F_2, F_3)$ como el campo (vectorial) dado por

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Para el caso bidimensional, donde $F = (F_1, F_2)$, tenemos

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}.$$

Notemos que en este caso, la rotacional es un campo escalar.

1.2. Integrales de campos escalares y vectoriales sobre curvas y superficies

Con la notación anterior, introducimos la forma de integrar campos escalares y vectoriales sobre curvas y superficies.

Integral de línea de un campo escalar

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino regular a trozos (una función de clase C^1 a trozos del intervalo $[a, b]$ en Ω), definimos la *integral de línea de f a lo largo de γ* como

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Integral de línea de un campo vectorial

Si $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ es un campo escalar continuo con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un camino regular a trozos, definimos la *integral de línea de F a lo largo de γ* como

$$\int_{\gamma} F dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Integral de superficie de un campo escalar

Si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ admite una parametrización simple y suave, para cada función continua $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, la *integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie S* viene definida mediante la igualdad

$$\iint_S f ds = \iint_{\Phi} f ds = \iint_W f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \times \Phi_v\| du dv,$$

donde $\Phi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización simple (inyectiva) y suave ($\Phi_u \times \Phi_v$ no se anula en W).

Este valor es independiente de la parametrización Φ elegida.

Integral de superficie de un campo vectorial

Sea Φ una parametrización simple y suave de S y supongamos que $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función continua. La *integral de superficie del campo vectorial F sobre la superficie S orientada mediante $\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$* viene dada por la igualdad

$$\iint_S F ds = \iint_{\Phi} F ds = \iint_W \langle F(\Phi(u, v)), \Phi_u \times \Phi_v \rangle du dv.$$

Este valor es independiente de la parametrización Φ elegida siempre que se respete la misma orientación (siempre que el vector $\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$ sea el mismo). Obtendríamos el valor opuesto si eligiésemos una parametrización simple y suave que determine la orientación opuesta. Esto depende de si el vector $\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}$ es normal exterior o interior a la superficie.

2. Teorema de Green

El Teorema de Green asegura que el valor de la integral de línea de un campo vectorial de clase C^1 y dimensión 2 a lo largo de una curva de Jordan viene determinado por la integral doble de su rotacional en la región interior a la curva.

Teorema 2.1 (Teorema de Green). *Sea γ un camino en \mathbb{R}^2 , regular a trozos, cerrado y simple, que recorre una curva de Jordan Γ en sentido positivo (antihorario). Sea D la región interior a Γ , y $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $D \cup \Gamma \subset \Omega$. Entonces,*

$$\int_{\gamma} F dl = \iint_D \text{rot } F dA.$$

Más explícitamente, esto puede escribirse como

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ejemplo

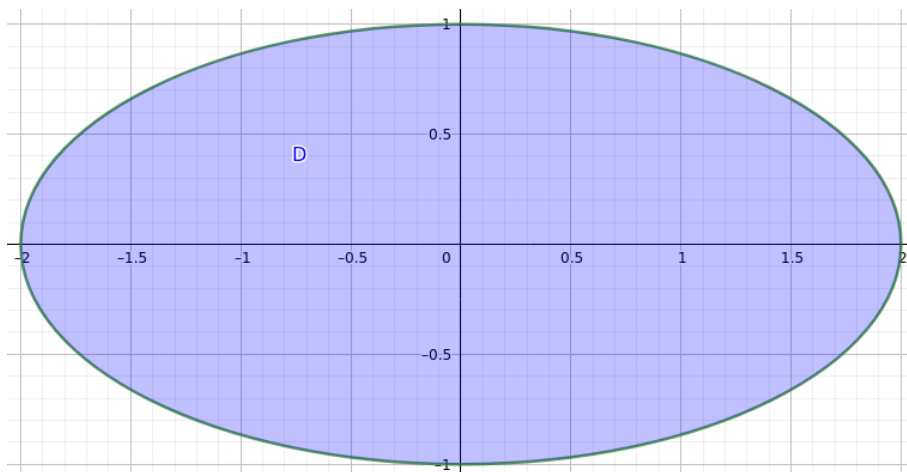
Comprobemos ahora el Teorema de Green en un ejemplo concreto.

Consideremos el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (x + 2y, 3x - 5y)$, y la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Tenemos $F_1(x, y) = x + 2y$ y $F_2(x, y) = 3x - 5y$, por tanto

$$\text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3 - 2 = 1.$$

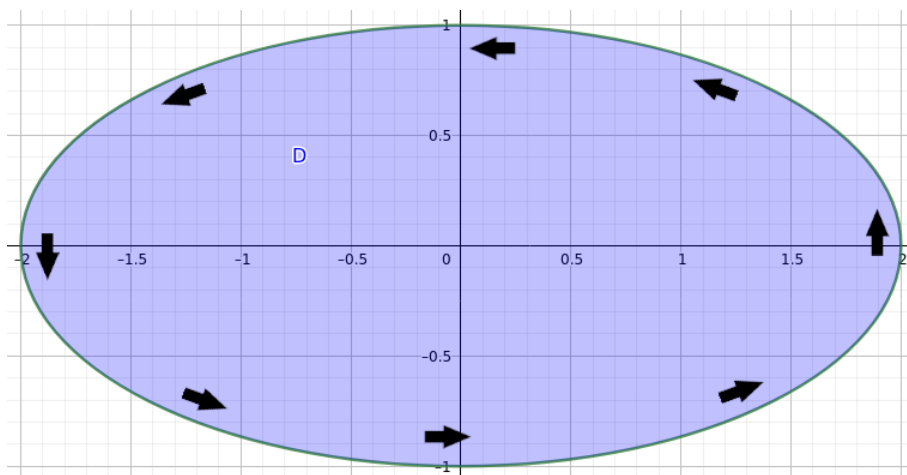
Por una parte, la integral en D de la función constante 1 coincide con el área de D . D es el área encerrada por una elipse centrada en el origen con ejes de longitud 2 y 1.



El área de una elipse cuyos ejes tienen longitud a y b es πab , por tanto el área de D es $\pi \cdot 1 \cdot 2 = 2\pi$.

Por tanto, $\iint_D \text{rot } F dx dy = 2\pi$.

Para la otra integral, parametrizamos la elipse que encierra a D con la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$.



Tenemos $\gamma'(t) = (-2 \sin t, \cos t)$, y la integral queda entonces:

$$\int_{\gamma} F dl = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle (2 \cos t + 2 \sin t, 6 \cos t - 5 \sin t), (-2 \sin t, \cos t) \rangle dt.$$

Simplificando obtenemos

$$\int_{\gamma} F dl = -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 6 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -4\pi + 6\pi = 2\pi,$$

y comprobamos que se verifica el Teorema de Green.

3. Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^2

El Teorema de la Divergencia permite, dado un campo vectorial, calcular fácilmente el flujo saliente de una región. El flujo saliente se expresa como la integral del producto escalar entre el campo y la normal exterior a la frontera (curva, superficie o hipersuperficie) del recinto a lo largo de la frontera. Gracias a este teorema, podemos obtener el flujo saliente integrando la divergencia del campo (que es una función escalar) en la región del espacio.

Teorema 3.1 (Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^2). *Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^2 y $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 . Sea $\Gamma \subset \Omega$ una curva de Jordan C^1 a trozos orientada positivamente, y D la región interior a Γ . Tomamos la normal exterior a Γ . Esto es, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización que recorre Γ en el sentido positivo y $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, la normal exterior a Γ es $n(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\gamma'(t)\|}$.*

Entonces,

$$\int_{\Gamma} \langle F, n \rangle dl = \iint_D \operatorname{div} F dA = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Demostración. Utilizando la definición de integral curvilínea de un campo escalar y desarrollando el producto obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle F, n \rangle dl &= \int_a^b \frac{F_1(\gamma(t))y'(t) - F_2(\gamma(t))x'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b F_1(\gamma(t))y'(t) - F_2(\gamma(t))x'(t) dt = \int_a^b F_1(\gamma(t)) dy - F_2(\gamma(t)) dx \\ &= \int_{\Gamma} F_1 dy - F_2 dx. \end{aligned}$$

Finalmente, el Teorema de Green aplicado al campo $(-F_2, F_1)$ nos asegura que

$$\int_{\Gamma} \langle F, n \rangle dl = \int_{\Gamma} F_1 dy - F_2 dx = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

□

Ejemplo

Comprobemos que este teorema se verifica en el ejemplo anterior, con el campo $F(x, y) = x + 2y, 3x - 5y$ y la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Por una parte, tenemos $\operatorname{div} F = 1 - 5 = -4$, y el resultado de integrar en D es el mismo que obtenemos multiplicando por el área:

$$\iint_D \operatorname{div} F dA = -4 \cdot 2\pi = -8\pi.$$

Por otra parte, utilizaremos la misma parametrización que recorre la curva en sentido positivo, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$. Tenemos $\gamma'(t) = (-2 \sin t, \cos t)$, luego $n(t) = \frac{(\cos t, 2 \sin t)}{\sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 t}}$.

Desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle F, n \rangle dl &= \int_0^{2\pi} \left\langle F(2 \cos t, \sin t), \frac{(\cos t, 2 \sin t)}{\sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 t}} \right\rangle \sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (2 \cos t + 2 \sin t, 6 \cos t - 5 \sin t), (\cos t, 2 \sin t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Ahora simplificamos, lo que nos deja con

$$\int_{\gamma} F dl = 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 10 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 2\pi - 10\pi = -8\pi,$$

y comprobamos que se verifica el Teorema de la Divergencia en este caso.

4. Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes es una generalización del Teorema de Green, que permite obtener la misma tesis para superficies que tienen curvas alabeadas como bordes, en lugar de para regiones del plano con curvas planas como bordes. Por tanto, trabajaremos en dimensión 3.

Teorema 4.1 (Teorema de Stokes). *Sea S una superficie orientada definida mediante una parametrización simple y suave $\Phi : D \rightarrow S$, donde D es una región del plano verificando las hipótesis del Teorema de Green (su frontera es una curva de Jordan regular a trozos). Sea $\partial S = \Phi(\partial D)$ la frontera de S con la orientación positiva (inducida por Φ). Sea F un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contine a S . Entonces,*

$$\iint_S \text{rot } F ds = \int_{\partial S} F dl.$$

Demostración. Supondremos que S es la gráfica de una función, $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ con $f \in C^2(D)$. En este caso, $\partial S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \partial D\}$.

Sea $c : [a, b] \rightarrow \partial D$, $c(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización en el sentido positivo de ∂D . Entonces, $p : [a, b] \rightarrow \partial S$, $p(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ es una parametrización en el sentido positivo de ∂S .

Si $F = (F_1, F_2, F_3)$ con $F_1, F_2, F_3 \in C^1$, tenemos

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

S es la gráfica de una función, luego su vector perpendicular ($\Phi_x \times \Phi_y$ para la parametrización $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$) en el punto $(x, y, z = f(x, y))$ es $(-z_x, -z_y, 1)$. Por tanto,

$$\iint_S \text{rot } F ds = \iint_D -z_x \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - z_y \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy.$$

Por otra parte,

$$\int_{\partial S} F dl = \int_a^b (F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t)) dt,$$

y aplicando que $z'(t) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F dl &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

Aplicamos el Teorema de Green al campo $\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}, F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right)$:

$$\int_{\partial S} F dl = \iint_D \left[\frac{d}{dx} \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{d}{dy} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] dA.$$

Ahora desarrollamos, debemos tener en cuenta que F_1, F_2, F_3 dependen de 3 variables: x, y, z , pero a su vez la variable $z = f(x, y)$ depende de las dos primeras.

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F dl &= \iint_D \left[\frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_3}{dx} \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_3}{dy} \frac{\partial z}{\partial x} \right] dA \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - F_3 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] dA. \end{aligned}$$

Usamos que $F_3 \in C^2$ para simplificar y sacamos factor común las derivadas parciales de z con signo negativo y el 1. Obtenemos así la conclusión deseada.

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F dl &= \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right] dA \\ &= \iint_D \left[- \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dA \\ &= \iint_S \text{rot } F ds. \end{aligned}$$

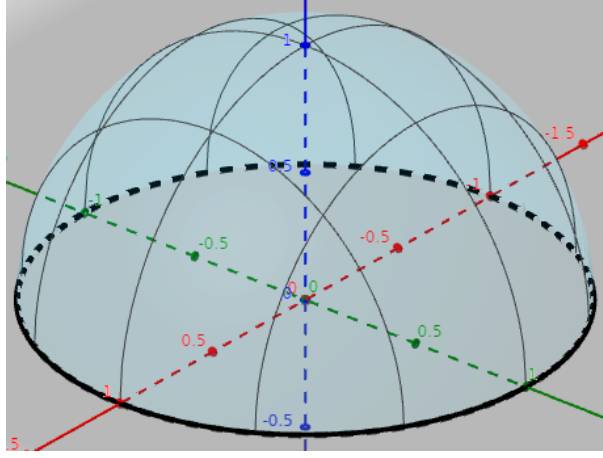
□

Ejemplo

Comprobemos el teorema en un sencillo ejemplo concreto. Consideremos el campo $F(x, y) = (x - y + z, 2x + y, y + 6z)$ y la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\},$$

que corresponde a la mitad superior de la esfera unidad.



El borde de la superficie es la circunferencia unidad en el plano $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Lo parametrizamos con la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$, cuya derivada es $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$. De modo que la integral de línea queda:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos t, \sin t, 0), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t(\cos t - \sin t + 0) + \cos t(2\cos t + \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + 2\cos^2 t dt = 3\pi. \end{aligned}$$

Para la integral sobre la superficie, la parametrizamos de la siguiente forma:

$$(\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]; \quad (x, y, z) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{1 - \rho^2}).$$

Calculamos el vector $\Phi_\rho \times \Phi_\theta = \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \times (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$ haciendo el producto vectorial y obtenemos

$$\Phi_\rho \times \Phi_\theta = \left(\frac{\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \rho \right) = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \Phi(\rho, \theta).$$

Tenemos también $\text{rot } F = (1 - 0, 1 - 0, 2 - (-1)) = (1, 1, 3)$.

La integral de superficie queda entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } F ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left\langle (1, 1, 3), (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{1-\rho^2}) \right\rangle d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\rho \cos \theta + \rho \sin \theta + 3\sqrt{1-\rho^2} \right] d\theta d\rho \\ &= 6\pi \int_0^1 \rho d\rho = 3\pi. \end{aligned}$$

Como era de esperar, ambas integrales coinciden.

5. Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^N

Para enunciar el Teorema de la Divergencia con mayor generalidad, necesitamos generalizar la noción de normal exterior.

Definición 5.1. Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N . Diremos que Ω es **regular** en un punto $x_0 \in \partial\Omega$ cuando exista un entorno $U \subset \mathbb{R}^N$ de x_0 y una función $\varphi \in C^1(U)$ tales que:

- (a) $\nabla\varphi(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$.
- (b) $\partial\Omega \cap U = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}$.
- (c) $\Omega \cap U = \{x \in U : \varphi(x) < 0\}$.

En tal caso, podemos definir la **normal exterior** en x_0 por $n(x_0) = \frac{\nabla\varphi(x_0)}{\|\nabla\varphi(x_0)\|}$, esta definición generaliza la normal exterior “clásica” en dimensiones 2 y 3.

Un dominio se dice regular si lo es en todo punto de su frontera, esto es, su frontera es una variedad regular $(n-1)$ -dimensional.

La siguiente propiedad de los conjuntos regulares será de utilidad en la demostración del teorema.

Lema 5.2. Si Ω es regular en un punto $z = (z_1, \dots, z_N) \in \partial\Omega$, entonces existen una variable, pongamos x_N , y un entorno $W \subset \mathbb{R}^{N-1}$ de (z_1, \dots, z_{N-1}) , un entorno $V \subset \mathbb{R}^N$ de z en \mathbb{R}^N , y una función de clase C^1 $h : W \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo:

- (a) Si $(x_1, \dots, x_N) \in V$, entonces $(x_1, \dots, x_{N-1}) \in W$.
- (b) Si $(x_1, \dots, x_N) \in \partial\Omega \cap V$, entonces $h(x_1, \dots, x_{N-1}) = x_N$.

Es decir, la frontera de Ω es localmente la gráfica de una función en alguna variable.

Demostración. Tomando U y φ de la definición de regularidad tenemos $\nabla\varphi(z) \neq 0$, por lo que tendrá al menos una componente distinta de 0. El Teorema de la Función Implícita proporciona la tesis requerida. \square

Enunciamos ya el último de los resultados más relevantes de la asignatura.

Teorema 5.3 (Teorema de la Divergencia). Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N acotado y regular. Sea $F = (F_1, \dots, F_N) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase C^1 . Entonces,

$$\int_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx.$$

Nótese, que en el caso de 3 dimensiones se tiene:

$$\iint_{\partial\Omega} F ds = \iint_{\partial\Omega} \langle F(x), n(x) \rangle dx = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx.$$

Para la demostración requerimos la siguiente herramienta.

Definición 5.4. Sea X un espacio topológico y $\{U_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento de X por abiertos. Una **partición continua de la unidad subordinada al recubrimiento** es un conjunto de funciones $\{\Phi_i : X \rightarrow [0, 1] \mid i \in I\}$ coninuas tal que:

- (a) El soporte de cada Φ_i se queda dentro del correspondiente U_i , $\text{supp } \Phi_i \subset U_i \quad \forall i \in I$.
- (b) Para cada $x \in X$, existe un entorno V tal que $\Phi_i|_V \equiv 0$ salvo para un número finito de índices. Además,

$$\sum_{i \in I} \Phi(y) = 1 \quad \forall y \in V.$$

En concreto, lo aplicaremos al siguiente caso particular.

Lema 5.5. *Sea $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Entonces, cualquier recubrimiento por abiertos de $\overline{\Omega}$ tiene un subrecubrimiento finito y una partición continua de la unidad (finita) subordinada a dicho subrecubrimiento.*

Dividiremos la demostración en tres pasos.

Demostración del Teorema de la Divergencia.

Caso 1: Ω es un hipercubo

Un cubo no es un dominio regular, lo que provoca que la normal exterior no esté definida en las aristas. Sin embargo, a efectos de integración esto no supone ningún problema, ya que las aristas tienen medida $(N-1)$ -dimensional nula.

Tenemos $\Omega = \prod_{k=1}^N (a_k, b_k)$, donde cada (a_k, b_k) es un intervalo de \mathbb{R} .

Usando el Teorema de Fubini y la regla de Barrow obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) dx &= \int_{a_N}^{b_N} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N \\ &= \int_{a_N}^{b_N} \cdots \int_{a_2}^{b_2} F_1(b_1, \dots, x_N) - F_1(a_1, \dots, x_N) dx_2 \cdots dx_N \\ &= \int_{A_1 \cup B_1} \langle F(x), n(x) \rangle dx, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad tenemos lo siguiente: $A_1 = \{(a_1, x_2, \dots, x_N) : x_k \in (a_k, b_k), k \geq 2\}$ y $B_1 = \{(b_1, x_2, \dots, x_N) : x_k \in (a_k, b_k), k \geq 2\}$ son dos tapas opuestas del cilindro, y sus normales exteriores son $(-1, 0, \dots, 0)$ y $(1, 0, \dots, 0)$ respectivamente.

El mismo argumento es válido para $k \geq 2$ (se pueden reordenar las integrales con Fubini), sumando obtenemos lo requerido.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div } F(x) dx_1 \cdots dx_N &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{A_k \cup B_k} \langle F(x), n(x) \rangle dx \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^N (A_k \cup B_k)} \langle F(x), n(x) \rangle dx = \int_{\partial \Omega} \langle F(x), n(x) \rangle dx. \end{aligned}$$

Caso 2: Ω es un “prisma” cuya tapa es la gráfica de una función

En este caso tenemos $\Omega = \{(\bar{x}, x_N) : \bar{x} \in D, x_N \in (0, h(\bar{x}))\} \subset D \times \mathbb{R}$, donde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{N-1})$, $D = \prod_{k=1}^{N-1} (a_k, b_k)$ y $h : D \rightarrow (0, +\infty)$ es de clase C^1 . Es decir, Ω es un (hiper)prisma con base rectangular y tapa la gráfica de la función h .

Calculamos primero la integral del último sumando de la divergencia.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial F_N}{\partial x_N}(x) dx &= \int_D \int_0^{h(\bar{x})} \frac{\partial F_N}{\partial x_N}(\bar{x}, x_N) dx_N d\bar{x} = \int_D F_N(\bar{x}, h(\bar{x})) - F_N(\bar{x}, 0) d\bar{x} \\ &= \int_D F_N(\bar{x}, h(\bar{x})) d\bar{x} + \int_{C_0} \langle F(y), (0, \dots, 0, -1) \rangle dy. \end{aligned}$$

Donde $C_0 = D \times \{0\} \subset \partial\Omega$ tiene normal exterior $n(y) = (0, \dots, 0, -1)$. Por tanto,

$$\int_{C_0} \langle F(y), (0, \dots, 0, -1) \rangle dy = \int_{C_0} \langle F(y), n(y) \rangle dy.$$

Por otra parte, hacemos el resto de sumandos de la divergencia. Todos se calculan de forma análoga, así que mostraremos sólo el primero.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) dx = \int_D \int_0^{h(\bar{x})} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}, x_N) dx_N d\bar{x}$$

Comenzamos con el cambio de variable $x_N = sh(\bar{x})$, tenemos $dx_N = h(\bar{x}) ds$. También sumamos y restamos $\frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh(\bar{x}) h_{x_1}(\bar{x})$, con $h_{x_1}(\bar{x}) = \frac{\partial h}{\partial x_1}(\bar{x})$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) dx &= \int_D \int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) h(\bar{x}) ds d\bar{x} \\ &= \int_D \int_0^1 h(\bar{x}) \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) + \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh_{x_1}(\bar{x}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh(\bar{x}) h_{x_1}(\bar{x}) \right) ds d\bar{x}. \end{aligned}$$

Utilizamos que

$$\frac{dF_1}{dx_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) + \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh_{x_1}(\bar{x}),$$

y la integral queda del siguiente modo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) dx = \int_D \int_0^1 h(\bar{x}) \frac{dF_1}{dx_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) - \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh(\bar{x}) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x}. \quad (1)$$

Hacemos partes para resolver la primera integral. Notamos $D = (a_1, b_1) \times \tilde{D}$, $\bar{x} = (x_1, \tilde{x}) \in D$, y tomamos las partes $h(\bar{x}) = u$, $dv = \frac{dF_1}{dx_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) dx_1$.

$$\begin{aligned} \int_D \int_0^1 h(\bar{x}) \frac{dF_1}{dx_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) &= \int_{\tilde{D}} \int_0^1 F_1(b_1, \tilde{x}, sh(b_1, \tilde{x})) h(b_1, \tilde{x}) ds d\tilde{x} \\ &\quad - \int_{\tilde{D}} \int_0^1 F_1(a_1, \tilde{x}, sh(a_1, \tilde{x})) h(a_1, \tilde{x}) ds d\tilde{x} \\ &\quad - \int_D \int_0^1 F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x}, \end{aligned}$$

y hacemos el cambio de variable en las dos primeras integrales:

$$\begin{aligned} \int_D \int_0^1 h(\bar{x}) \frac{dF_1}{dx_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) &= \int_{\tilde{D}} \int_0^{h(b_1, \tilde{x})} F_1(b_1, \tilde{x}, x_N) dx_N d\tilde{x} \\ &\quad - \int_{\tilde{D}} \int_0^{h(a_1, \tilde{x})} F_1(a_1, \tilde{x}, x_N) dx_N d\tilde{x} \\ &\quad - \int_D \int_0^1 F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x}, \end{aligned}$$

Notando $B_1 = \partial\Omega \cap \{x_1 = b_1\}$ y $A_1 = \partial\Omega \cap \{x_1 = a_1\}$, tenemos $n(y) = (1, 0, \dots, 0)$ en B_1 y $n(y) = (-1, 0, \dots, 0)$ en A_1 . Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_D \int_0^1 h(\bar{x}) \frac{dF_1}{dx_1}(\bar{x}, sh(\bar{x})) &= \int_{B_1} \langle F(y), n(y) \rangle dy + \int_{A_1} \langle F(y), n(y) \rangle dy \\ &\quad - \int_D \int_0^1 F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x} \\ &= \int_{B_1} \langle F(y), n(y) \rangle dy + \int_{A_1} \langle F(y), n(y) \rangle dy \\ &\quad - \int_D \int_0^1 F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) dx &= \int_{A_1 \cup B_1} \langle F(y), n(y) \rangle dy \\ &\quad - \int_D \int_0^1 F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x} + \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh(\bar{x}) h_{x_1}(\bar{x}) ds d\bar{x}. \end{aligned}$$

Por otra parte, nos damos cuenta de que

$$\frac{d}{ds} [F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) sh_{x_1}(\bar{x})] = F_1(\bar{x}, sh(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) + \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\bar{x}, sh(\bar{x})) h(\bar{x}) sh_{x_1}(\bar{x}).$$

Y sustituyendo queda

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) dx = \int_{A_1 \cup B_1} \langle F(y), n(y) \rangle dy - \int_D F_1(\bar{x}, h(\bar{x})) h_{x_1}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Ahora agrupamos todos los términos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\Omega} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x) dx + \int_{\Omega} \frac{\partial F_N}{\partial x_N}(x) dx \\ &= \int_{A_1 \cup B_1 \cup \dots \cup A_{N-1} \cup B_{N-1}} \langle F(y), n(y) \rangle dy - \int_D \sum_{k=1}^{N-1} F_k(\bar{x}, h(\bar{x})) h_{x_k}(\bar{x}) d\bar{x} \\ &\quad + \int_{C_0} \langle F(y), n(y) \rangle dy + \int_D F_N(\bar{x}, h(\bar{x})) d\bar{x} \\ &= \int_{\partial\Omega \setminus C_N} \langle F(y), n(y) \rangle dy + \int_D F_N(\bar{x}, h(\bar{x})) - \sum_{k=1}^{N-1} F_k(\bar{x}, h(\bar{x})) h_{x_k}(\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Donde $C_N = \partial\Omega \setminus (C_0 \cup A_1 \cup B_1 \cup \dots \cup A_{N-1} \cup B_{N-1}) = \{(\bar{x}, h(\bar{x})) : \bar{x} \in D\}$ es la tapa de arriba del prisma, la gráfica de la función h . En esta superficie (la gráfica de h), el vector perpendicular es $(-h_{x_1}, \dots, -h_{x_{N-1}}, 1)$, por lo que la integral queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_{C_N} \langle F(y), n(y) \rangle dy &= \int_D \langle F(\bar{x}, h(\bar{x})), (-h_{x_1}, \dots, -h_{x_{N-1}}, 1) \rangle d\bar{x} \\ &= \int_D F_N(\bar{x}, h(\bar{x})) - \sum_{k=1}^{N-1} F_k(\bar{x}, h(\bar{x})) h_{x_k}(\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos lo requerido:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega \setminus C_N} \langle F(y), n(y) \rangle dy + \int_{C_N} \langle F(y), n(y) \rangle dy = \int_{\partial\Omega} \langle F(y), n(y) \rangle dy.$$

Caso 3: Caso general, Ω es un dominio acotado y regular

Para cada $x \in \bar{\Omega}$, tomamos un entorno U_x en la topología inducida de $\bar{\Omega}$ de forma que:

- Si $x \in \Omega$, tomamos U_x de forma que sea un hipercubo y que su frontera quede completamente dentro de Ω : $x \in U_x \subset \bar{U}_x \subset \Omega$.
- Si $x \in \partial\Omega$, tomamos U_x como en el Caso 2: la cara que “contiene” a x (no llega a contenerlo porque no es cerrado) será la gráfica de una función. Esto es posible gracias al Lema 5.2.

Claramente, la familia $\{U_x : x \in \bar{\Omega}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\bar{\Omega}$, que es compacto. Tomamos un subrecubrimiento finito U_1, \dots, U_m , y (por el Lema 5.5) una partición continua de la unidad Φ_1, \dots, Φ_m subordinada a dicho recubrimiento.

Por tanto, tomando $F_j = F \cdot \Phi_j$, se tiene $\operatorname{supp} F_j \subset U_j \quad \forall j = 1, \dots, m$ y $\sum_{j=1}^m F_j = F$.

Tenemos entonces para cada $j = \dots, m$, aplicando el teorema en los Casos 1 y 2,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F_j(x) dx = \int_{U_j} \operatorname{div} F_j(x) dx = \int_{\partial U_j} \langle F_j(x), n(x) \rangle dx = \int_{\partial\Omega} \langle F_j(x), n(x) \rangle dx.$$

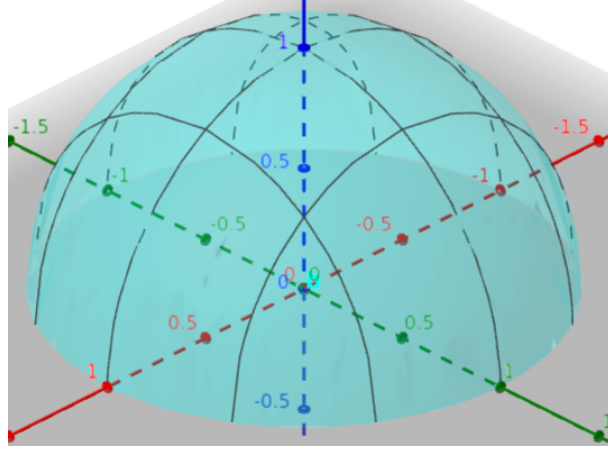
Finalmente, al agrupar todos los sumandos, obtenemos lo requerido. □

Ejemplo

Comprobemos el teorema en un sencillo ejemplo concreto. Consideremos el campo $F(x, y) = (x - y + z, 2x + y, y + 6z)$ y la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in \{\sqrt{1 - x^2 - y^2}, 0\}\},$$

que corresponde a la mitad superior de la esfera unidad tapada por abajo. Ω denotará a la región que encierra S .



Por una parte tenemos $\text{div } F(x, y, z) = 1 + 2 + 6 = 8$. Como es constante, el valor de la integral en la parte superior de la bola será su producto por el volumen:

$$\int_{\Omega} \text{div } F dv = 8 \cdot \frac{2}{3}\pi 1^3 = \frac{16}{3}\pi.$$

Ahora calcularemos el flujo saliente a través de la superficie S , este será la suma del flujo saliente a través de la semiesfera superior (S_1) y la tapa de abajo (S_2).

En el caso de S_2 , la normal exterior es $(0, 0, -1)$. Utilizamos la parametrización por polares.

$$(\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]; \quad (x, y, z) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$$

$$\iint_{S_2} \langle F, n \rangle ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0), (0, 0, -1) \rangle d\theta d\rho = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \sin \theta d\theta d\rho = 0.$$

Por otra parte, para S_1 tenemos:

$$(\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]; \quad (x, y, z) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{1 - \rho^2}).$$

Calculamos el vector $\Phi_\rho \times \Phi_\theta = \left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \times (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$ haciendo el producto vectorial y obtenemos

$$\Phi_\rho \times \Phi_\theta = \left(\frac{\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\rho^2 \sin \theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \rho \right) = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \Phi(\rho, \theta).$$

La integral de superficie queda entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S F ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\langle (\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + \sqrt{1 - \rho^2}, 2\rho \cos \theta + \rho \sin \theta, \rho \sin \theta + 6\sqrt{1 - \rho^2}), \right. \\ &\quad \left. (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \sqrt{1 - \rho^2}) \right\rangle \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left(\rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin \theta \cos \theta + \rho \cos \theta \sqrt{1 - \rho^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \sin^2 \theta + \rho \sqrt{1 - \rho^2} \sin \theta + 6(1 - \rho^2) \right) d\theta d\rho. \end{aligned}$$

Sabemos por experiencia que cada uno de los sumandos $\rho \cos \theta \sqrt{1 - \rho^2}$, $\rho^2 \sin \theta \cos \theta$, $2\rho^2 \sin \theta \cos \theta$ y $\rho \sqrt{1 - \rho^2} \sin \theta$ se anularán al integrar respecto de θ entre 0 y 2π , por tanto podemos simplificar:

$$\begin{aligned}\iint_S F ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} (\rho^2 + 6 - 6\rho^2) d\theta d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} (6 - 5\rho^2) d\rho.\end{aligned}$$

Resolvemos las integrales por separado:

Para la primera hacemos el cambio $u = 1 - \rho^2$, $du = -2\rho d\rho$.

$$\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho = \int_1^0 \frac{\rho}{\sqrt{u}} \frac{du}{-2\rho} = \int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{u}} = [\sqrt{u}]_0^1 = 1.$$

La segunda la resolvemos con el cambio $u = \sqrt{1 - \rho^2}$, $u^2 = 1 - \rho^2$, $2udu = -2\rho d\rho$, luego $udu = -\rho d\rho$.

$$\int_0^1 \frac{\rho^3}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho = \int_1^0 \frac{\rho^3}{u} \frac{udu}{-\rho} = \int_0^1 \rho^2 du = \int_0^1 (1 - u^2) du = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Obtenemos finalmente,

$$\iint_S F ds = 2\pi \left(6 \cdot 1 - 5 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3} \pi.$$

Hemos comprobado que en este caso se satisface el teorema.