ACP: Tarea voluntaria

David Cabezas Berrido

Justificar que a_3 (el vector de pesos de la tercera componente principal) es el vector de vector propio asociado al tercer valor propio de mayor módulo de la matriz R.

a_3 debe maximizar la expresión $Var[U_3] = Var[a_3^t X]$, siendo un vector unitario. Y U_3 debe ser incorrelada con U_1 y con U_2. Esto se traduce en:

$$\begin{aligned} \max\ & Var[U_3] \\ \text{s.a. } \|a_3\| = a_3^t a_3 &= 1 \\ \operatorname{cov}(U_1, U_3) &= 0 \\ \operatorname{cov}(U_2, U_3) &= 0 \end{aligned}$$

Como X es centrado, tenemos $E[U_3] = E[a_3^t X] = a_3^t E[X] = 0$. Por tanto, $Var[U_3] = E[U_3^2] = E[a_3^t X a_3^t X] = E[a_3^t X X^t a_3] = a_3^t E[XX^t] a_3 = a_3^t R a_3$.

Por otra parte, para $i = 1, 2$ tenemos: $\operatorname{cov}(U_i, U_3) = E[U_i U_3] - E[U_i]E[U_3] = E[U_i U_3] = E[a_i^t X a_3^t X] = a_i^t E[XX^t] a_3 = a_i^t R a_3$. Llamando $\lambda_i \neq 0$ al valor propio asociado al vector propio a_i y utilizando que R es simétrica, tenemos $0 = \operatorname{cov}(U_i, U_3) = a_i^t R a_3 = \lambda_i a_i^t a_3$. Por tanto el problema queda:

$$\begin{aligned} \max_{a_3} & a_3^t R a_3 \\ \text{s.a. } \|a_3\| = a_3^t a_3 &= 1 \\ a_1^t R a_3 &= 0 \\ a_2^t R a_3 &= 0 \\ a_1^t a_3 &= 0 \\ a_2^t a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Donde las últimas dos condiciones se deducen de las dos anteriores.

Aplicando el Teorema de los multiplicadores Lagrange para la obtención de extremos condicionados, el problema se reduce a

$$\max_{a_3} \{a_3^t R a_3 - \lambda(a_3^t a_3 - 1) - \mu_1 a_1^t R a_3 - \mu_2 a_2^t R a_3\}$$

Derivando la expresión respecto de a_3 (matricialmente y teniendo en cuenta que R es simétrica) e igualando a cero, obtenemos:

$$2Ra_3 - 2\lambda a_3 - \mu_1 R a_1 - \mu_2 R a_2 = 0 \tag{1}$$

Multiplicando a la izquierda por a_i^t ($i = 1, 2$, llamamos j al otro), tenemos:

$$2a_i^t R a_3 - 2\lambda a_i^t a_3 - \mu_1 a_i^t R a_1 - \mu_2 a_i^t R a_2 = 0$$

Ahora utilizamos que $a_i^t a_3 = a_i^t R a_3 = a_i^t R a_j = 0$, también que $a_i^t R a_i = \lambda_i \neq 0$. Nos queda $-\mu_i \lambda_i = 0$, por lo que $\mu_i = 0$ para $i = 1, 2$. Por tanto 1 queda:

$$2Ra_3 - 2\lambda a_3 = 0$$

Equivalentemente $Ra_3 = \lambda a_3$, por lo que a_3 es un vector propio de R asociado al valor propio λ.

Además, $Var[U_3] = a_3^t R a_3 = a_3^t \lambda a_3 = \lambda$, ya que a_3 es unitario.

Por tanto, la tercera componente principal es $U_3 = a_3^t X$, siendo a_3 el vector propio asociado al tercer valor propio de mayor módulo de R.