Chapitre 1 – Les ensembles de nombres

Définition. – Les entiers naturels ou nuls sont les nombres entiers positifs ou nuls. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

Notation. – On écrit par exemple $2 \in \mathbb{N}$ (se lit « 2 appartient à $\mathbb{N}$ »).

Définition. – Les entiers relatifs sont les entiers positifs, nuls ou négatifs. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Proposition. – Tout entier naturel est aussi un entier relatif : on dit que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Cette inclusion se note :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Définition. – Les nombres décimaux sont les nombres qui s'écrivent comme quotient d'un entier (relatif) par une puissance de 10, c'est-à-dire par 1, 10, 100, 1 000 etc (ou plus généralement 10^k où k est un entier naturel). L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples. –

1. Par exemple, $0,2$ est un nombre décimal car on peut écrire $0,2 = \dfrac{2}{10}$. Donner deux autres exemples de nombres décimaux.
2. L'entier naturel 4 est-il un nombre décimal ? Et l'entier relatif -7 ?

Proposition. – L'ensemble des entiers relatifs est inclus dans l'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

Définition. – Les nombres rationnels sont les nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

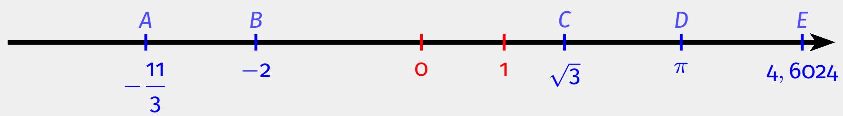
Exemples. –

1. Le nombre $\frac{2}{3}$ est le quotient des entiers 2 et 3 donc $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel.
2. Les nombres $\frac{4}{7}$, 3, -4 et $0,23$ sont-ils des nombres rationnels ?

Proposition. – L'ensemble des nombres décimaux est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$. On a donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

Définition. – À chaque point de la droite graduée ci-dessous, on a associé un nombre unique, qui est appelé son abscisse. Inversement, à chaque nombre correspond un unique point de la droite graduée.



Les nombres réels sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Proposition. – Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels, comme $\sqrt{2}$ (il faudra savoir le démontrer) ou π. Ces nombres sont appelés des nombres irrationnels.

2. Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition. – Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des réels tels que $a \leq x \leq b$. On définit de même les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$ et $]a; b[$.

Intervalles	**Ensemble des réels x tels que ...**	**Représentation graphique**
$[a; b]$	$a \leq x < b$	
$[a; b[$		
$]a; b]$		
$]a; b[$		

Définition. – Soit a un nombre réel. L'intervalle $[a; +\infty[$ est l'ensemble des réels tels que $x \geq a$. On définit de la même façon les intervalles $]a; +\infty[$, $]-\infty; a]$ et $]-\infty; a[$.

Intervalles	**Ensemble des réels x tels que ...**	**Représentation graphique**
$[a; +\infty[$	$x \geq a$	
$]a; +\infty[$		
$]-\infty; a]$		
$]-\infty; a[$		

3. Valeur absolue d'un nombre, distance entre deux nombres réels

Définition. – Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x le nombre noté $|x|$ défini par :

$$x = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples. – Donner la valeur absolue des nombres 5, $-2{,}4$, $\pi - 5$ et $\frac{1}{7} - 0{,}1$.

Proposition. – On retiendra les propriétés suivantes :

- La valeur absolue d'un nombre est positive ou nulle.
- Un nombre et son opposé ont la même valeur absolue.

Définition. – On appelle distance entre deux réels a et b le nombre $|b-a|$ (qui est aussi égal à $|a-b|$). Sur une droite graduée, si A est le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b, la distance entre a et b est égale à la distance AB.

Exemples. – Déterminer la distance entre 3 et -1, puis la distance entre -15 et 12.

Exemples. – Après avoir traduit chacune des égalités et inégalités suivantes à l'aide d'une distance, représenter l'ensemble des réels x tels que :

1. $|x-4|=2$
2. $|x-2|=3$
3. $|x+3|=1$
4. $|x+1|=2$
5. $|x-3|\leq 2$
6. $|x+7|<1$
7. $|x-5|\geq 3$
8. $|x+6|>1$

Proposition. – On remarquera que l'intervalle $[a-r;a+r]$ est l'ensemble des réels x tels que ....

Exemples. – Compléter chacune des phrases suivantes :

1. L'intervalle $[2;8]$ est l'ensemble des réels x tels que ....
2. L'intervalle $[2,25;6,35]$ est l'ensemble des réels x tels que ....
3. Traduire à l'aide d'une valeur absolue la condition $y\in[7,4;7,6]$.
....

4. Intersection et réunion de deux intervalles

Définition. – Soient I et J deux intervalles. L'intersection de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J. Cet intervalle est noté $I \cap J$ (et se lit « I inter J »).

Exemples. – Dans chacun des cas suivants, préciser l'intersection des intervalles I et J.

1. $I = [-3; 5]$ et $J =]-1; 7]$ ....
2. $I =]-3; -1]$ et $J =]-1; 10[$ ....
3. $I = [5; 10]$ et $J =]6; 7[$ ....
4. $I =]-\infty; 10[$ et $J =]-3; 12]$ ....
5. $I = [-2; +\infty[$ et $J =]-4; 6[$ ....
6. $I =]-10; 1]$ et $J = [1; +\infty[$ ....

Définition. – Soient I et J deux intervalles. La réunion de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J (ou aux deux!). Cet ensemble n'est pas nécessairement un intervalle : il est noté $I \cup J$ (se lit « I union J »).

Exemples. – Dans chacun des cas précédents, décrire le plus simplement possible la réunion des intervalles I et J.

1. $I = [-3; 5]$ et $J =]-1; 7]$ ....
2. $I =]-3; -1]$ et $J =]-1; 10[$ ....
3. $I = [5; 10]$ et $J =]6; 7[$ ....
4. $I =]-\infty; 10[$ et $J =]-3; 12]$ ....
5. $I = [-2; +\infty[$ et $J =]-4; 6[$ ....
6. $I =]-10; 1]$ et $J = [1; +\infty[$ ....

5. Encadrement décimal d'un réel

Définition. – L'encadrement décimal d'un réel x à 10^{-n} près (où n est un entier naturel non nul) est l'encadrement $d \leq x < d + 10^{-n}$ où d est un nombre décimal.

Exemples. – L'encadrement décimal de π à 10^{-4} près est donc $3{,}141\,5 \leq \pi < 3{,}141\,6$. Donner l'encadrement décimal de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près, puis celui de $\dfrac{215}{368}$ à 10^{-2} près.