Humberto Guerrero Salas

Programación Lineal aplicada

Complemento virtual

SIL

ECOE EDICIONES

Humberto Guerrero Salas

Programación Lineal aplicada

Complemento virtual

SIL

Guerrero Salas, Humberto
Programación lineal / Humberto Guerrero Salas. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2009.
280 p. ; 24 cm.
Incluye bibliografía.
ISBN 978-958-648-617-0
1. Programación lineal 2. Modelos matemáticos 3. CPM (Análisis de redes) 4. PERT (Análisis de redes) 5. Programación lineal - Problemas, ejercicios, etc. I. Tít.
519.72 cd 21 ed.
A1226199

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Colección: Ingeniería
Área: Ingeniería
Primera edición: Bogotá, D.C., agosto de 2009
ISBN: 978-958-648-617-0

Coordinación editorial: Adriana Gutiérrez M.
Autoedición: Cristina Castañeda Pedraza
Carátula: Magda Rocío Barrero

Este libro fue procesado por primera vez en los sistemas de gestión global de publicaciones de Publidisa en septiembre de 2009.

DEDICATORIA

A Dios,
a mi madre Laura María Salas Reyes (Q. E. P. D.)
a mi padre Saul Guerrero Martín (Q. E. P. D.)

A mi esposa Edilma Bautista Pulido
y a mis hijas Mónica Natalia y Angélica Rocío
A mis hermanos y especialmente a María Helena Guerrero Salas.

AGRADECIMIENTOS

Al terminar esta obra, me gustaría nombrar a muchas personas; lamentablemente no lo puedo hacer. Me perdonan a quienes omito.

Agradecimientos muy especiales:

Al Ing. *ORLANDO DE ANTONIO*, un gran amigo sin su apoyo y opiniones hubiera sido difícil llegar al final.

Al Ing. *JAIRO HUMBERTO TORRES ACOSTA,* mi maestro, colega y amigo, quien me inició en el tema de la investigación de operaciones.

Al doctor *JAIRO CORREA RODRIGUEZ* (Q.E.P.D), sus ideas fueron fundamentales en el inicio de este texto.

Al Ing. *WILSON HERNANDO SOTO URREA*, sus sugerencias y recomendaciones fueron valiosas.

A todo el equipo de trabajo de Ecoe Ediciones; ellos han hecho posible esta publicación.

Al personal de “SOFTWARE shop” quienes autorizaron el uso del paquete WINQSB para la solución de ejercicios de este texto. Esta empresa, distribuidor de software científico líder en Latinoamérica se puede contactar en www.SOFTWARE-shop.com

A todos mis estudiantes, durante los últimos 20 años.

Contenido general

PRÓLOGO

Al recibir del Ing. Humberto Guerrero Salas, la invitación para revisar el texto que en este momento tiene el lector en sus manos, mi primera impresión, fue que se trataba de un libro más de los muchos que actualmente se encuentran en el mercado.

Sin embargo, al adentrarme en una lectura rigurosa del mismo me causó gran curiosidad como el Ing. Guerrero, abordó los temas de una manera realmente extraordinaria, ya que el rigor pedagógico y didáctico con el que esta construido da un nuevo enfoque de la verdadera utilización de la investigación de operaciones, en especial de la programación, lineal, hoy en día. Empezando, por la descripción y formulación detallada en los primeros capítulos, sobre cómo realizar un óptimo planteamiento de un problema ingenieril, lo cual brinda al estudiante una motivación y herramientas sin precedentes para la utilización eficaz de las matemáticas como un instrumento práctico de la Ingeniería, que no poseen en otros textos avanzados de programación lineal.

Al continuar en los capítulos posteriores, el estudiante ya consolidado en el planteamiento de problemas, se encontrará con una metodología eficaz e innovadora en la resolución de los problemas e interpretación adecuada de las soluciones, producto de la experiencia y las investigaciones que el Ing. Guerrero ha realizado en su trayectoria profesional; siendo así, un texto ágil e innovador en el desarrollo de soluciones óptimas a partir del análisis de sensibilidad, permitiendo que el estudiante al reemplazar algunos de los parámetros mas significativos puede replantear un problema, sin tener que remitirse necesariamente al principio.

Por último, sólo espero que el presente texto sea aprovechado al máximo, por el futuro profesional, como un texto dinamizador e integrador de los procesos de optimización, un texto que de seguro se convertirá en el ámbito ingenieril de necesaria consulta.

Ing. Magíster. Doctorando Wilson Hernando Soto Urrea.

Introducción

En los ochenta cuando inicié mis estudios de ingeniería, siempre tuve una pasión por la ciencias exactas en especial las matemáticas, pero a medida que avanzaba mis estudios universitarios descubrí ciertas falencias en el aprendizaje de las matemáticas aplicadas; de ahí que mi propósito desde hace años, como docente de ingeniería en varias universidades del país, ha sido el elaborar un libro con una didáctica y una pedagogía innovadora, –que nace de mi larga experiencia como docente de *Investigación de Operaciones*–, que le permita al estudiante pasar los obstáculos que se presentan en su aprendizaje matemático con mayor facilidad y además con aplicaciones prácticas y del diario vivir en la ingeniería.

La investigación de operaciones, inicia con la argumentación de la programación lineal. Consulté, leí y estudié un sin número de textos (todos muy buenos) referentes al tema; pero nunca quedé satisfecho por la forma en que se abordaban los temas y especialmente las explicaciones, además quedaban muchas dudas sin resolver, que no me permitían profundizar como yo quería en el tema. Este hecho generó en mí, la inquietud de querer escribir un texto que hiciera claridad en las explicaciones y procesos, con el fin de obtener un resultado óptimo, que se ajuste a las verdaderas necesidades de la ingeniería en la sociedad de hoy. Resultado que necesariamente debe ser interpretado a la luz de las aplicaciones; y no en términos de variables. Es posible, que este último acontecimiento sea lo más motivante en la realización del presente texto; ya que primordialmente se hace énfasis en la generación o construcción de un modelo matemático a partir de una formulación y no lo que generalmente se hace; que es dar una función objetivo con unas restricciones para aplicar un algoritmo de solución. Es por esto que a través de todo el texto se tiene en cuenta la formulación del problema, construcción del modelo matemático, obtención de una solución óptima aplicando un procedimiento establecido dentro del texto, para finalmente realizar una interpretación práctica de la solución óptima.

El texto se divide en 8 capítulos, los cuales llevan una secuencia lógica en el desarrollo y avance en la adquisición de los conocimientos. Estos capítulos se resumen de la siguiente manera:

- Capítulo 1. Hace referencia a todas las generalidades de la programación lineal entre las cuales se mencionan los pasos para construir un modelo matemático, reglas de equivalencia, estructura general del modelo y usos de la programación lineal.

- Capítulo 2. Se avanza hacia el tema de la construcción de modelos a partir de una formulación teniendo en cuenta diferentes aplicaciones en producción, mezclas y distribución entre otros.

- Capítulo 3. Se trata paso a paso el método de solución gráfica de problemas de programación lineal, con su correspondiente formulación de las aplicaciones e interpretación de las respuestas.

- Capítulo 4. Se da un paso adelante a la aplicación del método simplex, nuevamente teniendo en cuenta la formulación e interpretación. Dentro de estas interpretaciones se realizan aplicaciones en cuanto a las diferentes respuestas que se pueden presentar tal como: solución única, solución múltiple, solución no acotada, no solución y solución degenerada.

- Capítulo 5. En este capítulo se presentan dos métodos alternativos de solución: método de doble fase y método dual simplex; con su correspondiente procedimiento e interpretación de las soluciones.

- Capítulo 6. Se aborda el tema de la dualidad en sus diferentes alternativas de solución, realizando comparación con las soluciones obtenidas a través del método simplex.

- Capítulo 7. Para este capítulo se pasa al análisis postóptimo de las soluciones. Se realizan aplicaciones de cambio en la disponibilidad de los recursos, cambio en costos o precios unitarios, cambio en recursos tecnológicos, nuevas restricciones y nuevos productos. En cada tipo de modificación se realizan ejemplificaciones de cuando se presenta cambio en la solución óptima y cuando no se presenta cambio en la misma.

- Capítulo 8. Se abordan los problemas de transporte, asignación y trasbordo; realizando la formulación, primera solución básica factible y el avance hacia la ortimización, con su correspondiente procedimiento e interpretación de la solución.

Al final del texto se ha colocado en el apéndice 1 el manejo y solución de los problemas con el paquete WINQSB y en el apéndice 2 la solución de algunos ejercicios seleccionados.

Vale la pena mencionar que este texto en su estructura es muy sencillo de comprender, pero, requiere obviamente de conocimientos elementales de matemáticas y algebra lineal (matemáticas primitivas). Además, el texto puede ser básico no sólo para ingeniería; sino también para cualquier profesión que esté interesada en el tema.

Para terminar, quiero agradecer a todas las personas que deseen colaborar con el mejoramiento de este texto enviando sus sugerencias a:

azhguerrero@yahoo.com.mx
sigma_humberto_guerrero@yahoo.com.mx

El autor.

Capítulo 1

Introducción a la programación lineal

PRESENTACIÓN

Se establece el proceso lógico que se debe llevar para el correcto planteamiento del modelo matemático de problemas de programación lineal y reglas de equivalencia de la función objetivo y las restricciones de un modelo de programación lineal; además de las formas generales del modelo de programación lineal y sus suposiciones.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de identificar un problema de programación lineal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer las diferentes formas generales del modelo de programación lineal.
- Identificar variables
- Aplicar las reglas de equivalencia.
- Identificar parámetros.

COMPETENCIAS

El estudiante aprenderá a identificar las diferentes formas de modelo de programación lineal, los proceso en los cuales pueda aplicar la programación lineal y seguir el procedimiento de obtención del modelo matemático de programación lineal.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá manejar los conceptos de planteamiento e identificación de variables, identificación de parámetros y aplicaciones de la programación lineal; así como el manejo de las reglas de equivalencia.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Manejo de ecuaciones lineales simultáneas.
- Conocimiento de propiedades de las desigualdades.
- Concepto de máximos y mínimos.

1.1. GENERALIDADES

La programación lineal es básicamente la lucha o disputa de una cantidad de actividades (productos) por unos recursos de carácter limitado, de tal forma que se obtenga un máximo de rendimiento.
Cuando se hace referencia a rendimiento, se está hablando de la optimización del sistema que puede ser de dos formas así:

- Maximización, cuando lo que se persigue es el máximo de utilidad o ingreso.
- Minimización, cuando se persigue un mínimo de costos o egresos de una empresa.

La programación lineal es una de las técnicas más útil de la investigación de operaciones una amplia gama de problemas empresariales, tales como: económicos, industriales, financieros, productivos, hospitalarios, etc.
Para visualizar mejor lo anterior se utiliza el siguiente ejemplo:

1.2. EJEMPLO PROTOTIPO

Una fábrica de muebles produce sillas, mesas y escritorios para los cuales ha establecido que rinden una contribución a las utilidades de $5.000, $8.000 y $6.000 por unidad respectivamente.

Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 100 metros de madera, 150 metros de tubo y 120 horas de mano de obra (horas-hombre).

Además, mediante un estudio se ha determinado que para producir una silla se requieren 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas de mano de obra; para producir una mesa se necesitan 3 metros de madera, 6 metros de tubo y 3 horas hombre de trabajo; mientras que para producir un escritorio se requieren 7 metros de madera, 4 metros de tubo y 3 horas de mano de obra.

Se desea plantear el modelo de programación lineal que se genera a fin de incrementar al máximo las utilidades de la compañía.

Análisis de la información

La información paramétrica que ofrece el modelo es la utilidad de cada uno de los artículos, los recursos disponibles y el consumo de cada recurso por cada unidad producida.
Por lo tanto hay que determinar qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar a fin de conseguir el máximo de utilidad la empresa. Esta cantidad se representa por medio de variables.
En resumen la información se puede presentar como se realiza en el siguiente cuadro:

RECURSO	PRODUCTO			DISPONIBLE SEMANAL
	SILLA	MESA	ESCRITORIO	
MADERA	5 m	3 m	7 m	100 metros
TUBO	3 m	6 m	4 m	150 metros
MANO OBRA	4 m	3 m	3 m	120 horas
UTILIDAD/UD	\$5000	\$8000	\$6000	
VARIABLE	X_1	X_2	X_3	

En donde las variables se definen de la siguiente forma:

X_1 = cantidad de sillas a producir por semana.

X_2 = cantidad de mesas a producir por semana.

X_3 = cantidad de escritorios a producir por semana.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, el objetivo es incrementar al máximo posible la utilidad total de la compañía, la cual está representada por la siguiente función lineal:
$5000X_1 + 8000X_2 + 6000X_3$ a esta ecuación se le denomina función objetivo.
La anterior función debe ser maximizada teniendo en cuenta que los recursos: madera, tubo y mano de obra son de carácter limitado y no se puede utilizar más de su disponibilidad así:

$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100$ metros. Restricción para la madera.

$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150$ metros. Restricción para el tubo.

$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120$ horas. Restricción para la mano de obra.

Las anteriores inecuaciones se les denominan restricciones funcionales del problema.

Por lógica, y sin haber estudiado demasiado, se sabe que no se pueden producir cantidades negativas, entonces todas las variables del problema se deben restringir a valores no negativos así:

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ estas son las llamadas restricciones de no negatividad.

En resumen, si se denota a la utilidad como Z el modelo matemático de programación lineal queda como se muestra a continuación:

$$\text{Max } Z = 5000X_1 + 8000X_2 + 6000X_3$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150 \text{ metros de tubo.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas de mano de obra.}$$

$$X_{1,} X_{2,} X_3 \geq 0$$

1.3. MODELO GENERAL DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Generalizando, si se tienen n productos o actividades y m recursos disponibles el problema se transforma en:

RECURSO	**PRODUCTO**					**b_i**
	1	**2**	**3**	**.......**	**n**	**DISPONIBLE**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}	b_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	....	a_{3n}	b_3
....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....
M	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	....	a_{mn}	b_m
C_J	c_1	c_2	c_3	....	C_n	
X_J	x_1	x_2	x_3	....	x_n	

Donde en forma generalizada se define lo siguiente:

- b_i = cantidad disponible del recurso i (i = 1, 2, 3,........, m)
- c_j = costo o precio unitario del producto o actividad j (j = 1, 2, 3, ...,n)
- X_j = cantidad a fabricar del artículo j (j = 1, 2, 3,...., n)
- a_{ij} = cantidad de recurso i (i = 1, 2, 3,........, m) necesario para fabricar una unidad del artículo j (j = 1, 2, 3, ...,n)

1.3.1. Forma estándar del modelo de programación lineal

Esta es la forma más conocida y trabajada del modelo de programación lineal. Su planteamiento se presenta enseguida:

$$MaxZ = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$$

s.a.

$$a_{11}X_1 = a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n\text{¡Ü}b_1$$

$a_{21}X_1 = a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n$¡Ü$b_2$

$a_{31}X_1 = a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots + a_{3n}X_n$¡Ü$b_3$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$a_{m1}X_1 = a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n$¡Ü$b_m$

$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ ¡YO

1.3.2. Forma matricial del modelo de programación lineal

Para definir la forma matricial del modelo de programación lineal se hace necesario definir todos los vectores y matrices que en el modelo intervienen así:

MATRIZ A: esta matriz contiene todos los elementos de asignación unitaria de recursos. En algunos textos se denomina matriz de coeficientes tecnológicos.

A =

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

VECTOR X: este vector contiene todas las variables del problema y está definido como vector columna.

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

VECTOR b: en este vector se involucran todas las disponibilidades de recursos o términos independientes. Está definido como un vector columna.

$$b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

VECTOR C: en este vector fila se involucran todos los coeficientes de costo, utilidad, ingreso o precio, según sea el caso

$$C = (C_1 \quad C_2 \quad C_3 \cdots \quad C_n)$$

VECTOR 0: el vector columna cero contiene tantos ceros como variables involucre el problema, y garantiza las restricciones de no negatividad.

$$0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El modelo matemático de programación lineal en su forma matricial es como se muestra a continuación:

$$MaxZ = (C_1 \quad C_2 \quad C_3 \cdots \quad C_n) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \leq \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1.3.3. Forma sumatorial

El modelo matemático de programación lineal utilizando sumatorias es como se muestra a continuación:

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j b_i \qquad \forall i = 1,2,3,\cdots,m$$

$$X_j \geq 0 \qquad \forall j = 1,2,3,\cdots,n$$

1.3.4. Forma Canónica del modelo de programación lineal

La forma canónica del modelo matemático de programación lineal, es tal vez la más simple como se encuentra este modelo y con base en ésta es como se desarrollan todas sus demostraciones. Su forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} &MaxZ = CX \\ &s.a. \\ &AX \leq b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

1.4. OTRAS FORMAS DEL MODELO

El lector puede observar que se ha utilizado en todas las formas una función objetivo de maximización y las restricciones funcionales son del tipo menor o igual que. Esto no indica que siempre es así, eso depende de la formulación del problema y puede incluir lo siguiente:

- La función objetivo puede ser de minimización.
- Las restricciones pueden ser del tipo mayor o igual.
- Las restricciones pueden ser de igualdad estrictamente.

Esto se podrá observar cuando se llegue al capítulo de métodos de solución.

1.5. PROCEDIMIENTO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Con base en lo escrito hasta acá y la experiencia del autor se recomiendan seguir estos pasos para la construcción de modelos matemáticos (no se nombra sólo hasta la construcción del modelo, sino además, hasta la implantación):

PASO 1: Formulación del modelo

A esto es lo que el autor llama literatura del problema, aquí se debe estructurar toda la información de parámetros y variables y la interactuación entre ellas.

PASO 2. Análisis de la información

En este paso se debe realizar minuciosamente el análisis de cada parámetro del modelo y cómo influye en él; además, de permitir una visualización de lo que se quiere conseguir (objetivo) y definir a grandes rasgos las limitantes del sistema.

PASO 3. Definición de variables

Este es talvez el paso más importante, pues si la variable queda mal definida; la solución del problema arrojará malos resultados, conllevando a malas decisiones. Aquí se debe establecer qué se desea conocer (en matemáticas, incógnitas), para lograr la solución de un problema en particular.

PASO 4. Establecer la función objetivo

Con base en la definición de las variables se debe estructurar que es lo que más le conviene a la empresa o persona donde se está realizando la solución del problema. En general se llama maximización a todo aquello que entra a la empresa en términos benéficos (puede haber alguien entrando basura); como por ejemplo maximizar ingresos, utilidades y productividad entre otras y se habla de minimización a todo lo que no le convenga a la empresa pero que necesariamente lo debe realizar. Se habla acá de minimizar egresos y costos básicamente; también se puede hablar de minimizar la creación de desperdicios o contaminantes. En esta función cada variable debe tener un coeficiente de rendimiento según sea maximizar o minimizar.

PASO 5. Determinar las restricciones

Definida perfectamente la función objetivo se debe evaluar qué restricciones impiden lograr un valor máximo o mínimo de la función objetivo; pues necesariamente no habrá recursos infinitos para su utilización (si esto fuera así no habría problema y estaríamos perdiendo el tiempo). Entonces se parte del hecho que hay unos recursos de carácter limitado, entre los cuales se pueden nombrar los siguientes: dinero disponible, mano de obra disponible, materia prima disponible, restricciones gubernamentales, capacidad de producción, capacidad de almacenaje, restricciones del mercado, etc. Al igual que la función objetivo, en cada una de las restricciones, cada variable debe tener un coeficiente. No olvide que las restricciones de no negatividad también forman parte de las restricciones.

PASO 6. Solución del modelo matemático

La función objetivo, junto con las restricciones (pasos 4 y 5) en conjunto, es lo que se llama el modelo matemático. Éste se debe solucionar en lo posible con una técnica de optimización (hay más técnicas, como por ejemplo la simulación que no arroja soluciones óptimas), la cual permite hallar los valores de las variables definidas en el paso tres.

PASO 7. Prueba del modelo y la solución
Con base en la solución del modelo, se debe realizar las pruebas pertinentes, especialmente corroborar en las restricciones, que se cumpla con la mejor utilización de los recursos y que la función objetivo tenga su valor óptimo. En este paso, se debe evaluar el funcionamiento del modelo con su respectiva solución; a fin de verificar el cumplimiento de los objetivos.

PASO 8. Implantación del modelo
Realizadas todas las pruebas de rigor en el punto anterior, no queda más que implementar la solución en la práctica. No olvide que la mayoría de modelos arrojan soluciones óptimas; que casi siempre en la realidad no funcionan perfectamente por diferentes factores. Por lo tanto no olvide aplicar el paso nueve.

PASO 9. Controlar y retroalimentar
En todo momento se debe estar atento a cualquier modificación en la información y parámetros del modelo; a fin de ir evaluando los posibles cambios que se deban realizar y que no descontrolen el sistema.

1.6. REGLAS DE EQUIVALENCIA[1]

Primera regla

Maximizar cX es equivalente a minimizar –cX

Ejemplo: Máx. $Z = 3X_1 + 4X_2$ es equivalente a Min $(-Z) = -3X_1 - 4X_2$.

O también se puede realizar a la inversa así:

Minimizar cX es equivalente a maximizar –cX

Ejemplo: Min $Z = 7X_1 + 9X_2$ es equivalente a Máx. $(-Z) = -7X_1 - 9X_2$.

Segunda regla

Una desigualdad $AX \leq b$ es equivalente a $-AX \geq -b$.

Ejemplo:

1 PRAWDA, Juan. *Métodos y modelos de investigación de operaciones*: volumen 1, pag. 69. Ed. Limusa, 1994.

$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150$ es equivalente a $-3X_1 - 6X_2 - 4X_3 \geq -150$.

Esta regla también se puede dar al revés así:

Una desigualdad $AX \geq b$ es equivalente a $-AX \leq -b$.

Ejemplo:

$3X_1 + 6X_2 \geq 150$ es equivalente a $-3X_1 - 6X_2 \leq -150$.

Tercera regla

Toda restricción de la forma $AX = b$ se puede establecer como la intersección de dos desigualdades así: $AX \leq b$ y $AX \geq b$.

Ejemplo: $4X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 120$ horas es equivalente a la intersección de las dos siguientes restricciones:

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \geq 120 \text{ horas.}$$

Cuarta Regla

Toda desigualdad de la forma $AX \leq b$ puede convertirse en igualdad mediante la adición de un vector H en el lado izquierdo de la restricción. Este vector contiene m componentes no negativas y se le denomina vector de holgura y a sus componentes variables de holgura. Es decir el vector queda así:

$$H = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \\ H_m \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100.$$
$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150.$$
$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120.$$

Es equivalente a:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 + H_1 = 100.$$
$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 + H_2 = 150.$$
$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 + H_3 = 120.$$
$$H_1, H_2, H_3 \geq 0$$

Quinta regla

Toda desigualdad de la forma AX ≥ b puede convertirse en igualdad mediante la resta de un vector S en el lado izquierdo de la restricción. Este vector contiene m componentes no negativas y se le denomina vector de exceso o superflúo y a sus componentes variables de exceso o superflúo. Es decir, el vector queda así:

$$S = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_m \end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 5X_1 + 3X_2 + 7X_3 &\geq 100. \\ 3X_1 + 6X_2 + 4X_3 &\geq 150. \\ 4X_1 + 3X_2 + 3X_3 &\geq 120. \end{aligned}$$

Es equivalente a:

$$\begin{aligned} 5X_1 + 3X_2 + 7X_3 - S_1 \qquad\qquad &= 100. \\ 3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \qquad - S_2 \qquad &= 150. \\ 4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \qquad\qquad - S_3 &= 120. \\ S_{1,} S_{2,} S_3 \geq 0 & \end{aligned}$$

Sexta regla

Una variable no restringida (en algunos textos se denomina irrestricta), es aquella que puede tomar cualquier clase de valor: positivos, cero o negativos; puede escribirse como la diferencia entre otras dos variables no negativas.

Ejemplo: si la variable X_1 se considera no restringida, es equivalente a expresar esta misma variable como: $X_1 = R_1 – R_2$. (Con R_1 y R_2 mayores o iguales que cero)

La variable X_1 será positiva si R_1 es mayor que R_2, será cero si R_1 es igual que R_2 y será negativa si R_1 es menor que R_2.

Estas reglas de equivalencia tendrán su máxima aplicación (especialmente la última) cuando se aborde el tema de dualidad.

1.7. SUPOSICIONES DE LA PROGRAMACION LINEAL[2]

En todo problema de programación lineal se consideran presentes las siguientes suposiciones:

Suposición de proporcionalidad

$$\text{Max } Z = 5000X_1 + 8000X_2 + 6000X_3$$

Sujeto a:

$$5X_1 + 3X_2 + 7X_3 \leq 100 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 6X_2 + 4X_3 \leq 150 \text{ metros de tubo.}$$

$$4X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 120 \text{ horas de mano de obra.}$$

La proporcionalidad se refiere en el caso del ejemplo prototipo de la sección 1.2, por una silla fabricada la utilidad es $5.000, por dos sillas fabricadas la utilidad es $10.000. Lo que quiere decir que la contribución a la utilidad por concepto de sillas depende del valor que tome la variable X_1 en este caso. De igual manera ocurre con el consumo de recursos en cada una de las restricciones, pues se sabe que cada silla requiere 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas de mano de obra; y el consumo total de cada recurso por concepto de la fabricación de sillas depende de la cantidad de sillas que se fabriquen o sea el valor que tome la variable.

Suposicion de aditividad

Para saber cuál es la utilidad total en el ejemplo prototipo se debe conocer el valor de cada variable (cantidad de sillas, mesas y escritorios); por lo tanto, también se establece la utilidad total generada por cada uno de los artículos y así poder sumar cada una de estas utilidades. Del mismo modo se procede para determinar cuánto es el recurso consumido para cada una las restricciones por la cantidad de producto fabricado y el total se halla sumando el consumo de cada producto. En conclusión la aditividad se refiere a que hay que sumar las utilidades generadas independientemente por cada artículo para establecer la utilidad total y para calcular el consumo total de cada recurso, también se suman los consumos independientes de los mismos.

Suposición de divisibilidad

Aquí se refiere a que en todo problema de programación lineal se supone que las variables pueden tomar cualquier valor fraccionario; o sea que para el problema de la sección 1.2 se podría decir que se va a fabricar 1/3 de escritorio.

---

2 WINSTON, Wayne. *Investigación de operaciones*. Pag 53. Editorial Thomson. Cuarta edición, 2004.

Suposición de certidumbre

Todo problema de programación lineal supone que se conocen exactamente los coeficientes de las variables en la función objetivo (costos, utilidades, etc.), los consumos unitarios de recurso (coeficientes de las variables en las restricciones) y la disponibilidad de cada uno de los recursos (lado derecho de las restricciones); esto es conocer perfectamente todos los parámetros del modelo. Con un solo parámetro que se desconozca, se genera incertidumbre.

Capítulo 2

Planteamiento de modelos de programación lineal

PRESENTACIÓN

Se presentan algunos ejemplos de aplicación de la programación lineal, haciendo énfasis en la construcción del modelo matemático.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de construir modelos matemáticos de programación lineal, dada una formulación del problema.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar variables de decisión del modelo.
- Identificar parámetros del modelo.
- Estructurar la función del objetivo.
- Estructurar las restricciones

COMPETENCIAS

El estudiante aprenderá a identificar procesos en los cuales pueda aplicar la programación lineal y construir modelos matemáticos de programación lineal con base en una formulación,. La aplicación se realizará en el entorno empresarialen producción, mercados, dietas entre otros.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá construir modelos de programación lineal a partir de una formulación, identificando variables y parámetros; así como manejar la aplicación práctica de la programación lineal.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Manejo de ecuaciones lineales simultáneas.
- Concepto de máximización y mínimización.
- Conocimiento de propiedades de las desigualdades.

Tal como se ha mencionado en el capítulo anterior, la aplicación de la programación lineal a través de toda su historia ha sido muy diversa. Por lo tanto en este capítulo se presentarán las formulaciones y planteamientos de modelos clásicos de este tema.

2.1. APLICACIONES EN PRODUCCIÓN

Ejercicio 2.1.1. La compañía SIGMA fabrica pupitres, sillas y mesas, para los cuales ha establecido que rinden una contribución a las utilidades de $ 5.000, $6.000 y $3.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 150 metros de madera, 120 metros de tubo y 200 horas-hombre de trabajo. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera si sabe que para producir un pupitre se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo; para producir una silla se requieren 3 metros de madera, 4 metros de tubo y 5 horas-hombre de trabajo; mientras que, para producir una mesa se requieren 2 metros de madera, 3 metros de tubo y 1 hora-hombre de trabajo.

Solución

Análisis de información

Para el planteamiento de este problema primero se organiza la información en la tabla 2.1.

TABLA 2.1.

RECURSO	PRODUCTO			DISPONIBILIDAD SEMANAL DEL RECURSO
	PUPITRES	SILLAS	MESAS	
MADERA	5 m	3 m	2 m	150 metros
TUBO	3 m	4 m	3 m	120 metros
HORAS-HOMBRE	4 h	5 h	1 h	200 horas
UTILIDAD/UNIDAD	$5.000	$6.000	$3.000	

Definición de variables

En la compañía SIGMA se debe decidir cuántos pupitres, sillas y mesas se deberán producir por semana para lograr un máximo de utilidad; por lo cual las variables de decisión son:

X_1 =cantidad de pupitres a producir por semana

X_2 =cantidad de sillas a producir por semana

X_3 =cantidad de mesas a producir por semana

Función objetivo

La compañía debe garantizar un máximo de utilidad, por lo tanto la función objetivo es la siguiente:

$$\text{Máx. } Z = 5.000\, X_1 + 6.000\, X_2 + 3.000\, X_3$$

Restricciones del modelo

Además, la compañía debe tener en cuenta las siguientes limitaciones en los recursos:

$$5X_1 + 3\,X_2 + 2X_3 \le 150 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 4\,X_2 + 3\,X_3 \le 120 \text{ metros de tubo.}$$

$$4\,X_1 + 5\,X_2 + X_3 \le 200 \text{ horas-hombre.}$$

También, se deben considerar las restricciones de no negatividad (restricciones de signo de las variables), ya que en este caso, no se pueden producir unidades negativas de ningún producto. Tales restricciones son las siguientes:

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Modelo matemático completo

En compendio, el modelo matemático de programación lineal para la compañía SIGMA queda de la siguiente manera:

$\text{Máx. } Z = 5.000\, X_1 + 6.000\, X_2 + 3.000\, X_3$

s.a.

$$5X_1 + 3\,X_2 + 2X_3 \le 150 \text{ metros de madera.}$$

$$3X_1 + 4\,X_2 + 3\,X_3 \le 120 \text{ metros de tubo.}$$

$$4\,X_1 + 5\,X_2 + X_3 \le 200 \text{ horas-hombre.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \ge 0 \text{ restricciones de no negatividad}$$

Ejercicio 2.1.2. La compañía BETA ha sacado del mercado un producto que ya no le era rentable, lo cual genera que haya una capacidad disponible semanal que no se esta utilizando en sus 3 departamentos así: 200 horas en corte, 240 horas en soldadura y 150 horas en empaque.

El departamento de producción propone que dicha capacidad sea utilizada en la producción de puertas, ventanas y claraboyas en la forma más eficiente posible, para dichos artículos se ha establecido un posible precio de venta de \$5.000, \$3.000 y \$4.000 por unidad respectivamente. Además se ha determinado que para producir una puerta se requiere de 2 horas en corte, 3 horas en soldadura y 5 horas en empaque. Para producir una ventana se requiere 5 horas en corte, 4 horas en soldadura y 1 hora en empaque; mientras que para producir una claraboya se requiere 4 horas en corte, 2 horas en soldadura y 3 horas en empaque.

Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que el departamento de mercadeo informo que mínimo se venderán 20 ventanas y como máximo 10 claraboyas.

Solución

Análisis de información

Primero y para mejor comprensión en la tabla 2.2 se resume la información de la compañía BETA.

TABLA 2.2.				
SECCIÓN	**PRODUCTO**			**DISPONIBLE POR SEMANA**
	PUERTA	**VENTANA**	**CLARABOYA**	
CORTE	2 h	5 h	4 h	200 horas
EMPAQUE	5 h	1 h	3 h	150 horas
SOLDADURA	3 h	4 h	2 h	240 horas
PRECIO VENTA	$5000	$3000	$4000	
VENTA		MIN 20	MAX 10	

Definición de variables

La compañía BETA debe establecer qué cantidad de puertas, ventanas y claraboyas debe producir semanalmente, por lo tanto las variables de decisión se definen de la siguiente forma:

X_1 =cantidad de puertas a producir por semana.

X_2 =cantidad de ventanas a producir por semana.

X_3 =cantidad de claraboyas a producir por semana.

Función objetivo

Como el precio de venta de cada artículo, genera el ingreso de la compañía, y éste debe ser lo más alto posible; la función objetivo se establece de la siguiente forma:

$$\text{Máx. } z = 5000\ X_1 + 3000\ X_2 + 4000\ X_3$$

Restricciones del modelo

Además, se debe tener en cuenta la disponibilidad limitada de los recursos, lo cual define las siguientes restricciones:

$2X_1 + 5X_2 + 4X_3 \leq 200$ horas disponibles en la sección de corte.

$5X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 150$ horas disponibles en la sección de empaque.

$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 240$ horas disponibles en la sección de soldadura.

También, se deben considerar las restricciones generadas por el pronóstico del departamento de mercadeo que son: dado que mínimo se venderán 20 ventanas, la producción de ventanas deberá ser mínimo 20, que en términos del modelo es $X_2 \geq 20$; y como máximo se venderán 10 claraboyas, su producción se restringe a máximo 10 unidades de la siguiente forma: $X_3 \leq 10$.
Unido a todo lo anterior, se definen las restricciones de no negatividad de la siguiente manera: $X_1, X_2, X_3 \geq 0$.

Modelo matemático completo

Por lo tanto el modelo matemático de programación lineal para la compañía BETA queda de la siguiente forma:

Máx. $z = 5.000\,X_1 + 3.000\,X_2 + 4.000\,X_3$

s.a.

$2X_1 + 5X_2 + 4X_3 \leq 200$ horas disponibles en la sección de corte.

$5X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 150$ horas disponibles en la sección de empaque.

$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 240$ horas disponibles en la sección de soldadura.

$X_2 \geq 20$ venta mínima de ventanas.

$X_3 \leq 10$ venta máxima de claraboyas.

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ restricciones de no negatividad.

Ejercicio 2.1.3. La compañía ALFA se dedica a la fabricación de esferos, estilógrafos y plumillas en dos tipos de talleres; en el primero de ellos se realiza el montaje y en el segundo la decoración. El departamento de producción determinó que para la fabricación de un paquete de 10 esferos se requiere de una hora de trabajo en montaje y 1.5 horas en decoración; que para la producción de un paquete de 10 estilógrafos se requiere de dos horas de montaje y 3 en decoración; mientras que para la producción de un paquete de 10 plumillas se necesita 1.5 y 2.5 horas respectivamente. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera a fin de maximizar el beneficio si se sabe que se dispone mensualmente de 100 horas para montaje y 175 para decoración; y que la utilidad generada por cada esfero es de $200, por cada estilógrafo es de $250 y por cada plumilla es de $225

Solución

Análisis de información

Para iniciar, en la tabla 2.3 se resume la información de la compañía ALFA.

TABLA 2.3.				
SECCIÓN	**PRODUCTO**			**DISPONIBLE POR MES**
	ESFERO	**ESTILÓGRAFO**	**PLUMILLA**	
MONTAJE	1 h	2 h	1.5 h	100 HORAS
DECORACIÓN	1.5 h	3 h	2.5 h	175 HORAS
UTILIDAD/UD	$200	$250	$225	

Definición de variables

Observe el lector que la utilidad viene dada por unidad, mientras que el consumo de horas de producción está dada por paquete de 10 unidades; por lo tanto las variables de decisión pueden estar definidas tanto por paquetes, como por unidades a fabricar. Por comodidad en el presente, se trabaja por paquete, por lo que las variables de decisión quedan de la siguiente manera:

X_1 =paquetes de esferos a producir por mes.

X_2 =Paquetes de estilógrafos a producir por mes

X_3 =paquetes de plumillas a producir por mes

Función objetivo

La compañía debe garantizar un máximo de utilidad, por lo que la función objetivo queda definida de la siguiente manera:

$$\text{Máx. } Z = 2.000\,X_1 + 2.500X_2 + 2.250X_3$$

En esta función objetivo, las utilidades se han multiplicado por 10 ya que la variable quedo estipulada en términos de paquete.

Restricciones del modelo

Al igual que en los ejemplos anteriores hay que considerar las limitaciones en la disponibilidad de los recursos así:

$$X_1 + 2\,X_2 + 1.5\,X_3 \leq 100 \text{ horas disponibles en montaje.}$$

$$1.5\,X_1 + 3\,X_2 + 2.5\,X_3 \leq 175 \text{ horas disponibles en decoración.}$$

Modelo matemático completo

En resumen, el modelo matemático de programación lineal para la producción de la compañía ALFA, junto con las restricciones de no negatividad, es como se presenta a continuación:

$$\text{Máx. } Z = 2.000\,X_1 + 2.500X_2 + 2.250X_3$$

s.a.

$X_1 + 2\,X_2 + 1.5\,X_3 \leq 100$ horas disponibles en montaje.

$1.5\,X_1 + 3\,X_2 + 2.5\,X_3 \leq 175$ horas disponibles en decoración.

$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0$ restricciones de no negatividad.

Ejercicio 2.1.4. La compañía GAMA fabrica camisas y blusas en una línea de producción con tres procesos que son: corte, ensamble y empaque. Se ha establecido que una camisa genera una utilidad de $7.000 y una blusa una utilidad de $9.000. Mediante un estudio de tiempos se estableció que una camisa requiere de 1 hora en corte, 3 horas en ensamble y ½ hora en empaque; mientras que una blusa requiere de ½ hora en corte, 4 horas en ensamble y 1 hora en empaque. Se sabe que la compañía GAMA trabaja 8 horas diarias durante 5 días a la semana. ¿Cómo queda el modelo de programación lineal si se sabe que actualmente se cuenta con 40 trabajadores en la sección de corte, 80 trabajadores en la sección de ensamble y 20 trabajadores en la sección de empaque?

Solución

Análisis de información

En la tabla 2.4 se presenta el resumen de la información de la compañía GAMA, teniendo en cuenta que las horas disponibles en cada proceso se calculan multiplicando los 5 días laborales en cada semana por 8 horas laborables por día; y este resultado multiplicado por la cantidad de trabajadores disponibles en cada proceso. Así, para el proceso de corte la disponibilidad es: (5 días)(8 horas/día)(40 trabajadores) = 1600 horas disponibles en la semana.

TABLA 2.4

PROCESO	PRODUCTO		TRABAJADORES	DISPONIBILIDAD HORAS/SEMANA
	CAMISA	BLUSA		
CORTE	1 h	½ h	40	1.600 HORAS
ENSAMBLE	3 h	4 h	80	3.200 HORAS
EMPAQUE	½ h	1 h	20	800 HORAS
UTILIDAD/UD	$7.000	$9.000		

Definición de variables

La compañía GAMA se debe preocupar por determinar que cantidad de camisas y blusas debe fabricar semanalmente, por lo cual las variables de decisión quedan de la siguiente manera:

X_1 = Cantidad de camisas a fabricar por semana.

X_2 = Cantidad de blusas a fabricar por semana.

Función objetivo

Ahora, el parámetro de rendimiento de la compañía es su utilidad, lo cual genera la siguiente función objetivo:

$$\text{Max } Z = 7.000\, X_1 + 9.000\, X_2$$

Restricciones del modelo

Además, se debe tener en cuenta la disponibilidad de horas en cada proceso. Esto define las siguientes restricciones:

$X_1 + 1/2\, X_2 \leq 1.600$ horas disponibles en el proceso de corte.

$3\, X_1 + 4\, X_2 \leq 3.200$ horas disponibles en el proceso de ensamble.

$1/2\, X_1 + X_2 \leq 800$ horas disponibles en el proceso de empaque.

Modelo matemático completo

Todo lo anterior, anexándole las restricciones de no negatividad; presenta el siguiente modelo en total:

$$\text{Max } Z = 7.000\, X_1 + 9.000\, X_2$$

s.a.

$X_1 + 1/2\, X_2 \leq 1.600$ horas disponibles en el proceso de corte.

$3\, X_1 + 4\, X_2 \leq 3.200$ horas disponibles en el proceso de ensamble.

$1/2\, X_1 + X_2 \leq 800$ horas disponibles en el proceso de empaque.

$X_1, \quad X_2 \geq 0$ restricciones de no negatividad.

Ejercicio 2.1.5. La compañía OMEGA está considerando la posibilidad de lanzar al mercado 2 nuevos productos, en las cantidades que mejor se acomoden a sus objetivos.

Los productos son pupitres unipersonales y bipersonales, para los cuales se ha estimado que contribuirán a las utilidades en 3.000 y 5.000 pesos por unidad respectivamente. Para la manufacturación de dichos productos se cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de madera, 500 metros de ángulo y 200 metros de paño.

Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requieren 2 metros de madera, 3 metros de ángulo y un metro de paño; mientras que para producir un pupitre bipersonal se requieren 3 metros de madera, 5 metros de ángulo y 4 metros de paño.

Solución

Análisis de información

Para iniciar en la tabla 2.5 se presenta la información resumida para la compañía OMEGA.

TABLA 2.5			
RECURSO	TIPO DE PUPITRE		DISPONIBILIDAD SEMANAL
	UNIPERSONAL	BIPERSONAL	
MADERA	2 m	3 m	300 metros
ANGULO	3 m	5 m	500 metros
PAÑO	1 m	4 m	200 metros
UTILIDAD/UD	\$3000	\$5000	

Definición de variables

En esta aplicación la compañía OMEGA debe decidir la cantidad de pupitres unipersonales y bipersonales que debe fabricar para obtener su máximo beneficio, lo cual permite definir las siguientes variables de decisión:

X_1= Cantidad de pupitres unipersonales a fabricar semanalmente

X_2= Cantidad de pupitres bipersonales a fabricar semanalmente

Función objetivo

El parámetro de rendimiento en esta oportunidad es la utilidad de la compañía por lo tanto se define la siguiente función objetivo:
$\text{Max } Z = 3.000X_1 + 5.000X_2$

Restricciones del modelo

También, debe considerarse la limitación en el consumo de los recursos, lo que permite generar las siguientes restricciones:

$2X_1 + 3X_2 \leq 300$ metros de madera disponibles.

$3X_1 + 5X_2 \leq 500$ metros de ángulo disponibles.

$X_1 + 4X_2 \leq 200$ metros de paño disponibles.

Modelo matemático completo

El modelo matemático de programación lineal para la empresa, adjuntándole las restricciones de no negatividad, en este caso queda como sigue:

Máx. $Z = 3.000X_1 + 5.000X_2$

s.a.

$2X_1 + 3X_2 \leq 300$ metros de madera disponibles.

$3X_1 + 5X_2 \leq 500$ metros de ángulo disponibles.

$X_1 + 4X_2 \leq 200$ metros de paño disponibles.

$X_1, \quad X_2 \geq 0$ restricciones de no negatividad.

2.2. APLICACIONES EN DIETAS

Ejercicio 2.2.1. Una compañía cervecera dispone de un jardín infantil para darle albergue a los hijos de los empleados. La nutricionista de la empresa estableció que a cada niño se le debe suministrar diariamente un mínimo 25 miligramos de calcio,15 miligramos de hierro y 24 miligramos de vitaminas, pero no más de 30 mg. En el transcurso del día los niños son alimentados con leche por valor de \$1.000 por litro, huevos a \$150 cada uno y compotas que cuestan a \$600 el frasco. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que un litro de leche contiene 2 miligramos de calcio, 3 miligramos de hierro y 1 miligramo de vitaminas; un huevo contiene 4 miligramos de calcio, 5 miligramos de hierro y 3 miligramos de vitaminas; mientras que un frasco de compota contiene 6 miligramos de calcio, un miligramo de hierro y 2 miligramos de vitaminas.

Solución

Análisis de información

Este tipo de problemas consiste en determinar la cantidad de alimentos que se deben comprar, para satisfacer unos requerimientos alimentitos de tal forma que el costo se haga mínimo. Para iniciar, en la tabla 2.6 se estructura la información de la empresa cervecera.

TABLA 2.6.

NUTRIENTE	ALIMENTO			REQUERIMIENTO DIARIO
	LECHE	HUEVOS	COMPOTA	
CALCIO	2 mg	4 mg	6 mg	MIN 25
HIERRO	3 mg	5 mg	1 mg	MIN 15
VITAMINAS	1 mg	3 mg	2 mg	MIN 24 y MAX 30
COSTO/UD	\$1000	\$150	\$600	

Definición de variables

El jardín infantil debe decidir qué cantidad de cada alimento debe suministrar a cada niño diariamente, por consiguiente las variables de decisión a utilizar se definen a continuación:

X_1 = cantidad de litros de leche a suministrar a cada niño por día.

X_2 = cantidad de huevos a suministrar a cada niño por día.

X_3 = cantidad de frascos de compota a suministrar a cada niño por día.

Función objetivo

Con base en lo dicho anteriormente, a la compañía en este caso le conviene invertir en los alimentos la menor cantidad de dinero posible, por lo tanto la función objetivo queda como sigue a continuación:

$$\text{Min. } Z = 1.000\ X_1 + 150\ X_2 + 600\ X_3$$

Restricciones del modelo

Para este caso, las restricciones tienen que ver con garantizar los requerimientos nutricionales de cada niño. Esto con base en la definición de la variable queda así:

$2X_1 + 4\ X_2 + 6X_3 \geq 25$ miligramos mínimo de consumo de calcio.

$3X_1 + 5\ X_2 + X_3 \geq 15$ miligramos mínimo de consumo de hierro.

$X_1 + 3\ X_2 + 2X_3 \geq 24$ miligramos mínimo de consumo de vitaminas.

$X_1 + 3\ X_2 + 2X_3 \leq 30$ miligramos máximo de consumo de vitaminas.

Observe, que estas dos últimas restricciones en su lado izquierdo son la misma, pero una garantiza un consumo mínimo y la otra un consumo máximo de vitaminas.

Modelo matemático completo

Por lo tanto el modelo completo, junto a las restricciones de no negatividad queda de la siguiente manera:

$$\text{Min. } Z = 1.000\ X_1 + 150\ X_2 + 600\ X_3$$

s.a.

$2X_1 + 4\ X_2 + 6X_3 \geq 25$ miligramos mínimo de consumo de calcio.

$3X_1 + 5\ X_2 + X_3 \geq 15$ miligramos mínimo de consumo de hierro.

$X_1 + 3\ X_2 + 2X_3 \geq 24$ miligramos mínimo de consumo de vitaminas.

$X_1 + 3\ X_2 + 2X_3 \leq 30$ miligramos máximo de consumo de vitaminas.

$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0$

2.3. APLICACIONES DE MEZCLA

Ejercicio 2.3.1. Una compañía siderurgica dispone de un horno, el cual debe ser cargado con 2 toneladas de materiales para elaborar una aleación de carácter especial, la cual por requisitos de calidad contener mínimo el 15% de cobre pero no más del 20% y máximo 17 % de fósforo. Para cargar el horno la compañía cuenta con hierro, tungsteno, níquel y carbono. Mediante un estudio químico se estableció que el hierro contiene 7 % de cobre y 9% de fósforo, el tungsteno contiene 11% de cobre y 3 % de fósforo, el níquel contiene 19 % de cobre y 8% de fósforo; mientras que el carbono contiene 4% de cobre y 17% de fósforo. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si sabe que un kilo de hierro cuesta $1.000, una libra de tungsteno cuesta $2.000, un kilo de níquel cuesta $3.000 y una libra de carbono cuesta $1.700.

Solución

Análisis de información

Con la información suministrada, se establece la información resumida de la tabla 2.7.

TABLA 2.7					
MATERIAL	MATERIALES DISPONIBLES PARA LA ALEACION				REQUISITO DE CALIDAD
	HIERRO	TUGSTENO	NIQUEL	CARBONO	
COBRE	7%	11%	19%	4%	MIN 15% y MAX 20 %
FOSFORO	9%	3%	8%	17%	MAX 17%
COSTOS/ KILO	$1.000	$4.000	$3.000	$3.400	

El lector observará que algunos costos estaban definidos por libra; en la tabla se pasó toda la información a kilos.

Definición de variables

El problema que tiene la siderúrgica consiste en determinar la cantidad en kilos de hierro, tungsteno, níquel y carbono que debe comprar para utilizar en la aleación, por consiguiente las variables se definen así:

X_1 = Kilos de hierro a utilizar en la aleación.

X_2 = Kilos de tungsteno a utilizar en la aleación.

X_3 = Kilos de níquel a utilizar en la aleación.

X_4 = Kilos de carbono a utilizar en la aleación.

Función objetivo

Con base en la anterior definición se establece que la compañía debe reducir el gasto en los materiales comprados, pero garantizando los requisitos de calidad, por lo tanto la función objetivo es:

$$\text{Min. } Z = 1.000\ X_1 + 4.000\ X_2 + 3.000\ X_3 + 3.400\ X_4$$

Restricciones del modelo

Para este problema las restricciones tienen que ver con garantizar los contenidos de cobre y fósforo en la aleación (requisitos de calidad). Por ejemplo el contenido de cobre en la aleación se halla multiplicando el porcentaje de cobre en cada material por la cantidad de kilos de dicho material (las variables en este caso) así: $0{,}07X1 + 0{,}11\ X_2 + 0{,}19X_3 + 0{,}04X_4$. Este contenido dice que debe ser mínimo el 15% de toda la aleación, razón muy lógica para multiplicar 0.15 por el contenido total de la aleación, en este caso 2.000 kilos. (se debe tener en cuenta que, las unidades deben ser consistentes a los dos lados de todas las restricciones. En este problema específico son kilos al lado izquierdo y kilos al lado derecho de las restricciones.

El total de restricciones de calidad de esta aplicación se presenta a continuación:

$$0{,}07X_1 + 0{,}11\ X_2 + 0{,}19X_3 + 0{,}04X_4 \geq 0{,}15(2000) \text{ mínimo de cobre.}$$

$$0{,}07X_1 + 0{,}11\ X_2 + 0{,}19X_3 + 0{,}04X_4 \leq 0{,}20(2000) \text{ máximo de cobre.}$$

$$0{,}09X_1 + 0{,}03\ X_2 + 0{,}08X_3 + 0{,}17\ X_4 \leq 0{,}17(2000) \text{ máximo de fósforo.}$$

Además, el horno debe ser cargado con dos toneladas de material, por lo tanto se genera la siguiente restricción:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 2.000 \text{ Kgr carga total del horno (dos toneladas)}$$

Modelo matemático completo

El modelo matemático en forma conjunta para este problema es como sigue:

$$\text{Min. } z = 1000\ X_1 + 4000\ X_2 + 3000\ X_3 + 3400\ X_4$$

s.a.

$$0{,}07X_1 + 0{,}11\ X_2 + 0{,}19X_3 + 0{,}04X_4 \geq 0{,}15(2000) \text{ mínimo de cobre.}$$

$$0{,}07X_1 + 0{,}11\ X_2 + 0{,}19X_3 + 0{,}04X_4 \leq 0{,}20(2000) \text{ máximo de cobre.}$$

$$0{,}09X_1 + 0{,}03\ X_2 + 0{,}08X_3 + 0{,}17\ X_4 \leq 0{,}17(2000) \text{ máximo de fósforo.}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 2000 \text{ carga total del horno.}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \text{ restricciones de no negatividad.}$$

Ejercicio 2.3.2. Una refinería produce gasolina corriente, gasolina extra y acpm para los cuales ha establecido un precio de venta de $4.000, $4.500 y $4.100 por galón respectivamente. Para la producción de esos combustibles la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 5000 galones de petróleo crudo y 7.000 galones de petróleo refinado. Además se ha establecido que el costo de un galón de petróleo crudo es $3.000 y el petróleo refinado cuesta $3.500 por galón. Por requerimientos de calidad se sabe que la gasolina corriente debe contener 40% de petróleo crudo y 60% de petróleo refinado; la gasolina extra debe contener 30% de petróleo crudo y 70% de petróleo refinado; mientras que el acpm debe contener 50 % de cada uno de los dos petróleos. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera con el fin de optimizar el beneficio de la compañía.

Solución

Análisis de información

Nuevamente y para no cambiar de procedimiento, en la tabla 2.8 se presenta una recopilación de la información.

TABLA 2.8					
TIPO DE PETROLEO	**COMBUSTIBLE FABRICADO**			**DISPONIBLE POR SEMANA**	**COSTO GALÓN**
	GASOLINA CORRIENTE	**GASOLINA EXTRA**	**ACPM**		
PETRÓLEO CRUDO	40%	30%	50%	5.000 gls	$3.000
PETRÓLEO REFINADO	60%	70%	50%	7.000 gls	$3.500
PRECIO VENTA GALÓN	$4.000	$4.500	$4.100		

Definición de variables

Este tipo de problemas especiales, donde disponemos del precio de venta de cada artículo y el costo de cada materia prima; y la obligación de distinguir de que esta compuesto cada producto terminado hace que se tengan que definir muchas variables. Por ejemplo, hay que distinguir el petróleo crudo en la gasolina corriente (esto seria una variable), el petróleo crudo en la gasolina extra (esto seria otra variable) y el petróleo crudo en el acpm (una tercera variable). Así se tendría que definir m*n variables, dependiendo de la cantidad de recursos y productos que se tengan. Para evitar esto, y definir todas las variables en un solo paso, se procede mediante las llamadas variables bidimensionales; donde una dimensión podría representar por ejemplo los recursos y la otra representaría los productos. Para el ejemplo específico de la refinería esta variable se define de la siguiente manera:

X_{IJ} = galones de producto j (j=1, 2 y 3) fabricados semanalmente; y obtenidos a partir del petróleo tipo i (i=1 y 2).

En este caso j=1 indica que es gasolina corriente, j=2 indica que es gasolina extra y j=3 indica que se refiere al acpm. Para i=1 indica la utilización de petróleo crudo e i=2 indica la utilización de petróleo refinado. Por ejemplo X_{12} representa la cantidad de galones de gasolina extra fabricados a partir de petróleo crudo; o cantidad de galones de petróleo crudo utilizados en la fabricación de gasolina extra. Las demás variables se interpretan de la misma manera con base en los subíndices que tenga la variable.

Función objetivo

Tomando en cuenta todo lo anterior, la función objetivo tiene que ver con establecer la utilidad de la compañía, ya que se tiene ingreso generado por las ventas y costos de cada tipo de materia prima, en este caso los tipos de petróleo. El ingreso se calcula multiplicando el precio de venta de cada galón por la cantidad producida así:

$$4.000(X_{11}+X_{21}) + 45.00(X_{12}+X_{22}) +4.100(X_{13} + X_{23}).$$

Para calcular el costo total de la fabricación se multiplica el costo de cada galón de petróleo por la cantidad utilizada de este mismo recurso así: $3.000(X_{11}+X_{12} +X_{13}) + 3.500(X_{21} + X_{22}+X_{23})$. Como ya se sabe, ingreso menos costos es igual a utilidad, entonces la función objetivo para este problema queda así:

$$\text{Max } Z= 4.000(X_{11}+X_{21}) + 4.500(X_{12}+X_{22}) +4.100(X_{13}+X_{23}) - 3.000(X_{11}+X_{12} +X_{13}) - 3500(X_{21} + X_{22}+X_{23})$$

Restricciones del modelo

Esta función objetivo debe estar restringida a la disponibilidad de los dos tipos de petróleo de la siguiente manera:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq$ 5.000 galones disponibles de petróleo crudo.

$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq$ 7.000 galones disponibles de petróleo refinado.

Además, se debe garantizar los porcentajes de cada uno de los petróleos en cada uno de los combustibles fabricados de la siguiente manera:

$0,4(X_{11} +X_{21}) = X_{11}$ garantiza el 40% de petróleo crudo en la gasolina corriente.

$0,6(X_{11} +X_{21}) = X_{21}$ garantiza el 60% de petróleo refinado en la gasolina corriente.

$0{,}3\ (X_{12}+X_{22})= X_{12}$ garantiza el 30% de petróleo crudo en la gasolina extra.

$0{,}7(X_{12}+X_{22})= X_{22}$ garantiza el 70% de petróleo refinado en la gasolina extra.

$0{,}5(X_{13} + X_{23})= X_{13}$ garantiza el 50% de petróleo crudo en el acpm.

$0{,}5(X_{13} + X_{23})= X_{23}$ garantiza el 50% de petróleo refinado en el acpm.

Y finalmente las restricciones de no negatividad se realizan en una sola así:

$X_{IJ} \geq 0$ para todo i (i= 1 y 2) y para todo j (j=1, 2 y 3).

Modelo matemático completo

En resumen, todo lo anterior deja el siguiente modelo:

$$\text{Max } Z= 4.000(X_{11}+X_{21}) + 4.500(X_{12}+X_{22}) +4.100(X_{13}+X_{23}) -$$

$$3.000(X_{11}+X_{12}+X_{13}) - 3.500(X_{21} + X_{22}+X_{23})$$

s.a.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 5000$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 7000$$

$$0{,}4(X_{11}+X_{21}) = X_{11}$$

$$0{,}6(X_{11}+X_{21}) = X_{21}$$

$$0{,}3\ (X_{12}+X_{22})= X_{12}$$

$$0{,}7(X_{12}+X_{22}) = X_{22}$$

$$0{,}5(X_{13} + X_{23})= X_{13}$$

$$0{,}5(X_{13} + X_{23})= X_{23}$$

$$X_{IJ} \geq 0$$

Obviamente, para poder resolver este ejercicio hay que realizar todas las operaciones algebraicas, para que cada variable quede con un único coeficiente y que el término independiente en las restricciones quede al lado derecho.

Ejercicio 2.3.3. Combustible ROMA produce gasolina blanca, roja y ACPM a partir de dos tipos de crudo A y B. Por requerimientos de calidad se requiere que la gasolina blanca contenga 30% de crudo A y 70% de crudo B; la gasolina roja debe contener 35% de crudo A y 65% de crudo B; mientras que el ACPM debe contener 60% de crudo A y 40% de crudo B. La compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 3.000 galones de crudo A y 4.500 galones de crudo B, los cuales adquiere a \$2.500 el galón de crudo A y \$3.200 el galón de B.

Planteé el modelo matemático de programación lineal que se genera si se sabe que la gasolina blanca se vende a $4.800 el galón, la roja a $ 5.100 el galón y el ACPM $4.300 el galón.

Solución
Analisis de información

Este problema tiene la misma estructura del problema anterior, por lo que no se van a realizar comentarios adicionales. En la tabla 2.9 se presenta en forma resumida la información del problema.

TABLA 2.9					
TIPO DE CRUDO	**COMBUSTIBLE FABRICADO**			**DISPONIBLE POR SEMANA**	**COSTO GALÓN**
	GASOLINA BLANCA	**GASOLINA ROJA**	**ACPM**		
CRUDO A	30%	35%	60%	3.000 gls	$2.500
CRUDO B	70%	65%	40%	4.500 gls	$3.200
PRECIO VENTA	$4.800	$5100	$4300		

Definición de variables

Al igual que en el modelo inmediatamente anterior, también se utiliza la variable bidimensional así:

X_{IJ} = galones de gasolina tipo j (j=1, 2 y 3) fabricados semanalmente; y obtenidos a partir del crudo tipo i (i=1 y 2).

Función objetivo

La función objetivo para este ejercicio; ingresos menos costos es como se muestra a continuación:

$$\text{Max } Z = 4.800(X_{11} + X_{21}) + 5.100(X_{12} + X_{22}) + 4.300(X_{13} + X_{23})$$
$$-2.500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) - 3.200(X_{21} + X_{22} + X_{23})$$

Restricciones del modelo

Sujeto a las restricciones de disponibilidad de los crudos así:

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} \leq 3.000$$
$$X_{21}+X_{22}+X_{23} \leq 4.500$$

Y garantizando todos los contenidos de cada crudo en cada tipo de combustible fabricado utilizando las siguientes restricciones:

$$X_{11} = 0.30(X_{11} + X_{21})$$
$$X_{21} = 0.70(X_{11} + X_{21})$$
$$X_{12} = 0.35(X_{12} + X_{22})$$
$$X_{22} = 0.65(X_{12} + X_{22})$$
$$X_{13} = 0.60(X_{13} + X_{23})$$
$$X_{23} = 0.40(X_{13} + X_{23})$$

Modelo matemático completo
En resumen, el modelo matemático total, incorporando las restricciones de no negatividad se transcribe a continuación:

$$\text{Max } Z = 4.800(X_{11} + X_{21}) + 5.100(X_{12} + X_{22}) + 4.300(X_{13} + X_{23})$$
$$-2.500(X_{11} + X_{12} + X_{13}) - 3.200(X_{21} + X_{22} + X_{23})$$

s.a.

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 3.000$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 4.500$$
$$X_{11} = 0.30(X_{11} + X_{21})$$
$$X_{21} = 0.70(X_{11} + X_{21})$$
$$X_{12} = 0.35(X_{12} + X_{22})$$
$$X_{22} = 0.65(X_{12} + X_{22})$$
$$X_{13} = 0.60(X_{13} + X_{23})$$
$$X_{23} = 0.40(X_{13} + X_{23})$$
$$X_{IJ} \geq 0$$

2.4. APLICACIONES EN DISTRIBUCIÓN

Ejercicio 2.4.1. Una embotelladora produce cerveza en 3 plantas ubicadas en Bogotá, Tocancipa y Barranquilla para las cuales se ha establecido que tienen una capacidad de producción de 5000, 3500 y 6000 cajas por semana respectivamente. La cerveza se vende a través de 4 distribuidores que están ubicados en Pasto, Riohacha, Zipaquira y Cali, en los cuales se ha establecido una demanda semanal de 2000, 3200, 1700 y 1800 cajas de cerveza. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera si el costo de transportar una canasta de la planta ubicada en Bogotá a Pasto es $75, a Riohacha es $90, a Zipaquira es $9 y a Cali es $67; El costo de transportar una canasta de la planta ubicada en Tocancipa a Pasto es $78, a Riohacha es $85, a Zipaquira es $4 y a Cali es $65; Mientras que, el costo de transportar una canasta de la planta ubicada en Barranquilla a Pasto es $150, a Riohacha es $17, a Zipaquira es $65 y a Cali es $147.

Solución

Análisis de información

Este tipo de ejercicio es el caso típico del modelo del transporte, cuya información se resume en la tabla 2.10.

TABLA 2.10					
PLANTA	DISTRIBUIDORES				CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN SEMANAL
	PASTO	RIOHACHA	ZIPAQUIRA	CALI	
BOGOTÁ	$75	$90	$9	$67	5.000
TOCANCIPA	$78	$85	$4	$65	3.500
BARRAN-QUILLA	$150	$17	$65	$147	6.000
DEMANDA SEMANAL	.2000	3.200	1.700	1.800	

Definición de variables

En este problema, para no definir independientemente las 12 variables involucradas, se hace necesario utilizar la variable bidimensional, ya que hay que distinguir en que planta se produce y a que distribuidor se envía (los costos difieren dependiendo del origen y el destino). Entonces, la variable en cuestión queda definida de la siguiente manera:

X_{IJ} = cantidad de cerveza producida en la planta i (i=1, 2 y 3)

para ser enviadas al distribuidor j (j=1, 2, 3 y 4).

En este caso la planta 1 representa a Bogotá, la planta 2 representa a Tocancipa y la planta 3 representa a Barranquilla; mientras que para el caso de los distribuidores 1, 2, 3 y 4 representan respectivamente a Pasto, Riohacha, Zipaquira y Cali.

Función objetivo

El parámetro de rendimiento para esta aplicación es el costo total de transporte por lo que la función objetivo queda de la siguiente manera:

Min $Z= 75X_{11} + 90X_{12} + 9X_{13} + 67X_{14}+ 78X_{21} + 85X_{22} + 4 X_{23}+65X_{24} + 150X_{31} + 17X_{32} + 65X_{33}+147X_{34}$.

Restricciones del modelo

Como se puede observar ninguna de las plantas puede enviar más de su capacidad de producción, por lo tanto hay que utilizar las siguientes restricciones:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} +X_{14} \leq 5.000$. Capacidad de producción de Bogotá.

$X_{21} + X_{22} + X_{23} +X_{24} \leq 3.500$. Capacidad de producción de Tocancipa.

$X_{31} + X_{32} + X_{33} +X_{34} \leq 6.000$. Capacidad de producción de Barranquilla.

Además, hay que garantizar que cada distribuidor reciba lo que realmente ha pedido (demanda). Esto se realiza mediante la utilización en el modelo de las siguientes restricciones:

$X_{11} +X_{21} +X_{31} = 2.000$. Demanda de Pasto.

$X_{12} +X_{22} +X_{32} = 3.200$. Demanda de Riohacha.

$X_{13} +X_{23} +X_{33} = 1.700$. Demanda de Zipaquira.

$X_{14} +X_{24} +X_{34} = 1.800$. Demanda de Cali.

Modelo matemático completo

El modelo matemático de programación lineal a resolver (si ese fuera el caso) en forma resumida se presenta a continuación:

Min $Z= 75X_{11} + 90X_{12} + 9X_{13} + 67X_{14}+ 78X_{21} + 85X_{22} + 4 X_{23}+65X_{24} + 150X_{31} + 17X_{32} + 65X_{33}+147X_{34}$.

s.a.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} +X_{14} \leq 5000$.

$X_{21} + X_{22} + X_{23} +X_{24} \leq 3500$.

$X_{31} + X_{32} + X_{33} +X_{34} \leq 6000$.

$X_{11} +X_{21} +X_{31} = 2000$.

$X_{12} +X_{22} +X_{32} = 3200$.

$X_{13} +X_{23} +X_{33} = 1700$.

$X_{14} +X_{24} +X_{34} = 1800$.

$X_{IJ} \geq 0$

Ejercicio 2.4.2. Cierta compañía manufacturera de computadores vende un tipo especial de equipo de procesamiento de información a través de cuatro distribuidores (A, B, C y D) a un precio unitario de $10.000, $15.000, $14.000 y $18.000 respectivamente. Este equipo es producido en tres plantas ensambladoras (I, II y III), en las cuales debido a su ubicación geográfica y dificultad para obtener las materias primas el costo de producción unitario del artículo es de $7.000 en la planta I, $9.500 en la planta II y $7.200 en la planta III. Además, se ha determinado que la capacidad de producción mensual de la planta I es 1000 unidades, de la planta II es 1.200 unidades y para la planta III es 597 unidades. También, se ha determinado que la demanda conjunta de los distribuidores A y B será por lo menos 600 equipos por mes, para el distribuidor C a lo sumo 550 equipos y en el distribuidor D se venderán máximo 380 equipos, pero no menos de 310. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera si el gerente de la compañía desea optimizar el beneficio y se informó por parte del departamento de distribución que el costo unitario de transporte de la planta I a cada uno de los distribuidores es $200, $300, $250 y $400 respectivamente; que este mismo costo para la planta II es $180, $190, $205 y $207 respectivamente; mientras que el costo de distribución de la planta III es $205, $108, $215 y $235 por unidad respectivamente para los distribuidores A, B, C y D

Solución

Analisis de información

En la tabla 2.11, se muestra resumida la información para la ensambladora de computadores.

TABLA 2.11						
PLANTA	DISTRIBUIDOR				COSTO POR UNIDAD	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN MENSUAL
	A	B	C	D		
I	$200	$300	$250	$400	$7.000	1.000
II	$180	$190	$205	$207	$9.500	1.200
III	$205	$108	$215	$235	$7.200	597
PRECIO VENTA UNITARIO	$10.000	$15000	$14000	$18000		
DEMANDA MENSUAL	MIN 600		MAX 550	MIN 310 MAX 380		

Definición de variables

Al igual que el ejercicio anterior, se utilizará variable bidimensional asi:

X_{IJ} = cantidad de equipos producidos en la planta i (i=1, 2 y 3) y enviados para ser vendidos en distribuidor j (j=1, 2, 3 y 4).

Los subíndices indicarán a qué planta y distribuidor se refiere la variable.

Función objetivo

Con base en la anterior definición, la función objetivo tomando en cuenta ingresos menos costos (utilidades de la empresa) queda estructurada de la siguiente manera:

Max $Z= 10.000(X_{11} + X_{21} + X_{31}) +15.000(X_{12} + X_{22} + X_{32})+ 14.000(X_{13}+ X_{23} + X_{33}) + 18.000(X_{14} + X_{24} + X_{34}) -7.000(X_{11}+ X_{12} +X_{13} +X_{14}) - 9.500(X_{21}+ X_{22} + X_{23} +X_{24}) -7.200(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) -200X_{11} -300X_{12} -250 X_{13} -400 X_{14} -180X_{21} -190 X_{22} -205 X_{23} -207X_{24} -205X_{31}-108X_{32} -215X_{33} -235 X_{34}$

Restricciones del modelo

Lo anterior está restringido a la capacidad de producción de las plantas así:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 1000$. Capacidad de producción planta I.

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 1200$. Capacidad de producción planta II.

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 597$. Capacidad de producción planta III.

Además, se generan las siguientes restricciones para garantizar la demanda de los distribuidores:

$X_{11} +X_{21} +X_{31} + X_{12} +X_{22} +X_{32} \geq 600$. Demanda conjunta de los distribuidores A y B.

$X_{13} +X_{23} +X_{33} \leq 550$. Demanda del distribuidor C.

$X_{14} +X_{24} +X_{34} \leq 380$. Demanda máxima del distribuidor D.

$X_{14} +X_{24} +X_{34} \geq 310$. Demanda mínima del distribuidor D.

Modelo matemático completo

Por lo tanto el modelo matemático de programación lineal para la ensambladora de computadores, incluyendo las restricciones de no negatividad queda expresado de la siguiente manera:

Max $Z = 10.000(X_{11} + X_{21} + X_{31}) +15.000(X_{12} + X_{22} + X_{32})+ 14.000(X_{13}+ X_{23} + X_{33}) + 18.000(X_{14} + X_{24} + X_{34}) -7.000(X_{11}+ X_{12} +X_{13} +X_{14}) - 9.500(X_{21}+ X_{22} + X_{23} +X_{24}) -7.200(X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34}) -200X_{11} -300X_{12} -250 X_{13} -400 X_{14} -180X_{21} -190 X_{22} -205 X_{23} -207X_{24} -205X_{31}-108X_{32} -215X_{33} -235 X_{34}$

s.a.

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 1000.$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 1200.$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 597.$

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 600.$

$X_{13} + X_{23} + X_{33} \leq 550.$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} \leq 380.$

$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 310.$

$X_{IJ} \geq 0$

Ejercicio 2.4.3. La compañía JOTA produce computadores en Bogota, Cali, y Barranquilla en cuyas plantas hay una capacidad de producción de 3.000, 1.500 y 4.000 unidades por semana respectivamente. El producto es comercializado a través de dos distribuidores ubicados en Medellín y Pasto para los cuales se ha establecido que tienen una demanda semanal de 3.200 y 5.700 equipos respectivamente. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que el costo de transportar un equipo de Bogotá a Medellín es $3.000 y a Pasto es $5.000; el costo de transportar un equipo de Cali a Medellín es $2.500 y a Pasto es $3.900; mientras que el costo de transportar un equipo de la planta de Barranquilla a Medellín es $2.100 y a Pasto es $7000.

Solución

La estructura de este problema es igual a la del modelo del transporte, por lo tanto se da en este momento la estructuración del modelo sin ninguna explicación adicional. En la tabla 2.12 se resume la información.

TABLA 2.12.

PLANTA	DISTRIBUIDOR		CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN SEMANAL
	MEDELLÍN	PASTO	
BOGOTÁ	$3.000	$5..000	3.000
CALI	$2.500	$3.900	1.500
BARRANQUILLA	$2.100	$7000	4.000
DEMANDA SEMANAL	3.200	5.700	

Definición de variables

X_{ij} = cantidad de equipos producidos en la planta i (i =1, 2 y 3) y enviada al distribuidor j (j =1 y 2)

El planteamiento total de este problema que da de la siguiente forma:

Función objetivo

Min $z= 3.000X_{11}+5.000X_{12}+2.500X_{21}+3.900X_{22}+2.100X_{31}+7.000X_{32}$

Restricciones del modelo

$X_{11}+X_{21}+X_{31}= 3.200.$ Demanda de Medellín.

$X_{12}+X_{22}+X_{32} = 5.700.$ Demanda de Pasto.

$X_{11}+X_{12} \leq 3.000.$ Capacidad de producción de Bogotá.

$X_{21}+X_{22} \leq 1.500.$ Capacidad de producción de Cali.

$X_{31}+X_{32} \leq 4.000.$ Capacidad de producción de Barranquilla.

$X_{IJ} \geq 0.$ Restricciones de no negatividad.

2.5. APLICACIONES EN ASIGNACIÓN

Ejercicio 2.5.1. La alcaldía de la ciudad de Bogotá está interesada en generar la forma más económica de asignar 4 proyectos a 4 contratistas diferentes. Como debe quedar planteado el modelo matemático de programación lineal que ayude a tomar la mejor decisión si se sabe que el costo del proyecto elaborado por cada uno de los contratistas es como aparece en la tabla 2.13. Además, por políticas gubernamentales se debe garantizar la asignación de un proyecto a cada contratista.

TABLA 2.13				
PROYECTO	CONSTRUCTORA			
	COLMENA	CONAVI	VILLAS	DAVIVIENDA
PARQUE	50	60	48	55
EDIFICIO	35	30	33	39
PUENTE	40	43	42	41
TÚNEL	27	30	25	29

Solución

Analisis de información

Este tipo de problema se puede asociar con el modelo del transporte, en donde todas las disponibilidades tienen valor uno y todas las demandas tiene valor uno.

Definición de variables

Las variables para este caso también son bidimensionales y el problema de la alcaldía consiste en determinar qué proyecto se le asigna a cada contratista o qué contratista se asigna a cada proyecto. La variable queda definida así:

X_{IJ} = Asignar el proyecto i (i=1, 2, 3 y 4) al contratista j (j=1, 2, 3 y 4)

Función objetivo

Por tanto, la función objetivo para este tipo de problema, tiene que ver con la minimización de la sumatoria de los costos multiplicados por su respectiva variable así:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z= \; & 50X_{11} + 60\,X_{12} + 48\,X_{13} + 55\,X_{14} \\
& + 35X_{21} + 30\,X_{22} + 33\,X_{23} + 39\,X_{24} \\
& + 40X_{31} + 43\,X_{32} + 42\,X_{33} + 41\,X_{34} \\
& + 27X_{41} + 30\,X_{42} + 25\,X_{43} + 29\,X_{44}
\end{aligned}
$$

Restricciones del modelo

El lector podrá pensar que se están asignando todos los proyectos a todos los contratistas; pero, esto de hecho no es así. Este problema se soluciona utilizando las siguientes restricciones:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$. Garantiza asignar el parque a un contratista.

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1$. Garantiza asignar el edificio a un contratista.

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1$. Garantiza asignar el puente a un contratista.

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1$. Garantiza asignar el túnel a un contratista.

Como se observa, está garantizado que se asignen todos los proyectos. Pero, ¿Qué garantiza que cada contratista reciba un proyecto? Esto se soluciona mediante la utilización dentro del modelo de las siguientes restricciones:

$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1$. Se garantiza asignarle un proyecto a Colmena.

$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1$. Se garantiza asignarle un proyecto a Conavi.

$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1$. Se garantiza asignarle un proyecto a Villas.

$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1$. Se garantiza asignarle un proyecto a Davivienda

Con lo anterior, se están utilizando todos los contratistas. Pero como el autor sabe que si usted está leyendo este texto, es porque es inteligente y puede pensar a vuelo de pájaro (rápidamente) que si a cada variable se le asigna valor de ¼ las restricciones se cumplen. Esto indicaría que cada contratista recibirá un cuarto de cada proyecto. Este problema se soluciona muy fácilmente dándole a todas las variables sólo dos posibles valores: cero si el proyecto no es asignado a un contratista y uno si el proyecto es asignado. A esto se le llama *variable binaria*.

Modelo matemático completo

De acuerdo con lo anterior; el planteamiento completo del modelo a resolver por parte de la alcaldía con base en sus requerimientos es como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z= \ & 50X_{11} + 60\,X_{12} + 48\,X_{13} + 55\,X_{14} \\
& + 35X_{21} + 30\,X_{22} + 33\,X_{23} + 39\,X_{24} \\
& + 40X_{31} + 43\,X_{32} + 42\,X_{33} + 41\,X_{34} \\
& + 27X_{41} + 30\,X_{42} + 25\,X_{43} + 29\,X_{44} \\
& \text{s.a.} \\
& X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1. \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1. \\
& X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1. \\
& X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1. \\
& X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1. \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1. \\
& X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1. \\
& X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1. \\
& X_{IJ} = 0 \text{ ó } 1.
\end{aligned}
$$

En este caso las restricciones de no negatividad se encuentran implícitas, pues la variable sólo tomará el valor de cero o uno.

Ejercicicio 2.5.2. La Policía Metropolitana de Bogotá en la zona Antonio Nariño tiene el siguiente requerimiento de oficiales dependiendo la hora del día así: de las 00.00 a las 4:00, 40 policías; de las 4:00 horas a las 8:00 horas, 25 policías; de las 8:00 horas a las 12:00 horas, 100 policías; de las 12:00 horas a las 16:00 horas, 80 policías; de las 16:00 horas a las 20:00 horas, 60 policías y de las 20:00 horas a las 24:00 horas, 45 policías. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera a fin de minimizar el número de policías que se asigne durante las 24 horas y que satisfaga con los requerimientos y que además se garantice que cada oficial asignado a un turno debe trabajar 8 horas consecutivas.

Solución

La tabla 2.14 resume la cantidad de oficiales que se requieren en cada turno de 4 horas. Además, se han establecido turnos con base en la hora para facilitar el planteamiento. Se sabe que quien inicia en algún turno, también, estará disponible en el siguiente.

TABLA 2.14		
TURNO	HORA	REQUERIMIENTO MÍNIMO
1	00:00 A 04:00	40
2	04:00 A 08:00	25
3	08:00 A 12:00	100
4	12:00 A 16:00	80
5	16:00 A 20:00	60
6	20:00 A 24:00	45

Definición de variables

El problema al que se enfrenta la policía metropolitana es decidir cuántos oficiales debe asignar para iniciar labores en cada una de las horas, de tal forma que se minimice la cantidad de policías utilizados. Pues, el personal que inicia a las 00.00 horas se encontrará laborando hasta las 08.00, los que inician actividades a las 04.00 horas estarán disponibles hasta las 12.00 horas y de igual forma en todos los turnos. Por lo tanto las variables tienen que ver con los agentes que inician labores en las diferentes horas así:

X_1 = Cantidad de policías que inician labores a las 00:00 horas

X_2 = Cantidad de policías que inician labores a las 04:00 horas

X_3 = Cantidad de policías que inician labores a las 08:00 horas

X_4 = Cantidad de policías que inician labores a las 12:00 horas

X_5 = Cantidad de policías que inician labores a las 16:00 horas

X_6 = Cantidad de policías que inician labores a las 20:00 horas

Función objetivo

Con base en lo anterior y teniendo en cuenta que el número de policías utilizados durante el día debe ser el menor posible, la función objetivo es la sumatoria de los oficiales que inician labores en los respectivos turnos. Esto en forma matemática se escribe así:

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_3 + X_5 + X_6$$

Restricciones del modelo

Lo anterior debe estar de acuerdo con las necesidades de personal en los diferentes intervalos de tiempo, por lo cual se establecen las siguientes restricciones:

$X_1 \geq 40$. Garantiza lo necesario del turno 1.

$X_1 + X_2 \geq 25.$ Garantiza lo necesario del turno 2.

$X_2 + X_3 \geq 100.$ Garantiza lo necesario del turno 3.

$X_3 + X_4 \geq 80.$ Garantiza lo necesario del turno 4.

$X_4 + X_5 \geq 60.$ Garantiza lo necesario del turno 5.

$X_5 + X_6 \geq 45.$ Garantiza lo necesario del turno 6.

Obsérvese bien, por ejemplo la segunda restricción; se están sumando los que inician a las 00.00 horas y los que inician a las 04.00; luego estos dos turnos estarán en el lapso comprendido entre las 04.00 y 08.00 horas, por lo tanto es el personal que labora en el turno 2.

Modelo matemático completo

De tal forma que incorporando las restricciones de no negatividad, el modelo matemático a resolver es el siguiente:

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_3 + X_5 + X_6 \\
\text{s.a.} \\
X_1 \geq 40. \\
X_1 + X_2 \geq 25. \\
X_2 + X_3 \geq 100. \\
X_3 + X_4 \geq 80. \\
X_4 + X_5 \geq 60. \\
X_5 + X_6 \geq 45. \\
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0
\end{array}
$$

Ejercicio 2.5.3. La defensa civil ha estimado las necesidades de personal dependiendo de las horas del día tal como se muestra en la tabla 2.15. Plantee un modelo matemático de programación lineal que garantice cumplir con los requerimientos de personal y que la cantidad utilizada durante el día sea lo más baja posible. Suponga que todo el personal asignado debe trabajar 8 horas consecutivas.

TABLA 2.15		
TURNO	**HORARIO**	**PERSONAL REQUERIDO**
1	00:00 – 04:00	20
2	04:00 – 08:00	25
3	08:00 – 12:00	15
4	12:00 – 16:00	12
5	16:00 – 20:00	18
6	20:00 – 24:00	30

Solución

Análisis de información

Dado que este problema en su estructura es igual al anterior, se establece directamente todo el modelo con la siguiente definición de variables:

Definición de variables

X_1= Voluntarios que inician labores a las 00.00 horas.

X_2= Voluntarios que inician labores a las 04.00 horas.

X_3= Voluntarios que inician labores a las 08.00 horas.

X_4= Voluntarios que inician labores a las 12.00 horas.

X_5= Voluntarios que inician labores a las 16.00 horas.

X_6= Voluntarios que inician labores a las 20.00 horas.

Modelo matemático completo

El modelo matemático de programación lineal queda de la siguiente manera:

$$\text{Min } z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

SA

$$\begin{aligned}
X_1 \quad & \geq 20 \\
X_1 + X_2 \quad & \geq 25 \\
X_2 + X_3 \quad & \geq 15 \\
X_3 + X_4 \quad & \geq 12 \\
X_4 + X_5 \quad & \geq 18 \\
X_5 + X_6 \quad & \geq 30 \\
X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 & \geq 0
\end{aligned}$$

2.6. APLICACIONES EN COMERCIALIZACIÓN

Ejercicio 2.6.1. La compañía COQUITO opera como comercializadora de vestidos para hombre, dama y trajes para niño; Para los cuales se ha establecido que ocupan un volumen por unidad de 0.05, 0.04 y 0.2 metros cúbicos respectivamente. Además, se sabe que un vestido para hombre cuesta $170.000, un vestido para dama cuesta $200.000 y un traje para niño cuesta $80.000. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera si se sabe que hay una disponibilidad de 30 metros cúbicos para almacenaje y $200.000.000 de presupuesto por mes. Suponga, que un vestido para hombre se vende en

\$250.000, un vestido para dama se vende en \$260.000 y un traje para niño se vende en \$120.000.

Solución

Análisis de información

Antes de pasar a la solución, en la tabla 2.16 se presenta un resumen de toda la información suministrada por la compañía COQUITO.

TABLA 2.16				
RECURSO	**PRODUCTO**			**RECURSO DISPONIBLE**
	VESTIDO HOMBRE	**VESTIDO DAMA**	**TRAJE NIÑO**	
VOLUMEN	0,05 m^3	0,04 m^3	0,02 m^3	30 m^3
COSTO/UNIDAD	\$170,000	\$200,000	\$80,000	\$200,000,000
PRECIO VENTA/UNIDAD	\$250,000	\$260,000	\$120000	

Definición de variables

El problema al que se enfrenta la compañía COQUITO es establecer que cantidad de vestidos para hombre, vestidos para dama y trajes para niño debe comprar para obtener un máximo de utilidad; por lo tanto la variable queda definida de la siguiente manera:

X_1 =cantidad de vestidos para hombre a comprar mensualmente.

X_2=cantidad de vestidos para dama a comprar mensualmente.

X_3= cantidad de trajes para niño a comprar mensualmente.

Función objetivo

Con base en la anterior definición, se establece la función objetivo teniendo en cuenta la diferencia entre los ingresos y el costo de la mercancía comprada. Los ingresos están dados por $250.000X_1 + 260.000X_2 + 120.000X_3$; mientras que los costos están dados por $170.000X_1 + 200.000X_2 + 80.000X_3$.

Entonces, la función objetivo queda de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = 25.000X_1 + 260.000X_2 + 120.000X_3 - 170.000X_1 - 200.000X_2 - 80.000X_3.$$

Simplificando esta expresión se obtiene lo siguiente:

$\text{Max } Z = 80.000X_1 + 60.000X_2 + 40.000X_3$ que representa la utilidad de la compañía.

Restricciones del modelo

Lo anterior está restringido a la capacidad de almacenamiento y el dinero disponible de la siguiente manera:

$170.000\ X_1 + 200.000\ X_2 + 80.000\ X_3 \leq 200.000.000$. Esto garantiza no consumir más del dinero disponible en el presupuesto.

$0.05\ X_1 + 0.04\ X_2 + 0.02\ X_3 \leq 30$. Esta restricción garantiza el consumo máximo de capacidad disponible para almacenamiento en la bodega.

Modelo matemático completo

En contexto, el modelo matemático de programación lineal para la compañía COQUITO, adicionando las restricciones de no negatividad, queda como aparece a continuación:

$$\text{Max } Z = 80.000X_1 + 60.000X_2 + 40.000X_3$$

s.a.

$$170.000X_1 + 200.000X_2 + 80.000X_3 \leq 200.000.000.$$

$$0.05X_1 + 0.04\ X_2 + 0.02\ X_3 \leq 30.$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0$$

2.7. APLICACIONES EN PUBLICIDAD

Ejercicio 2.7.1. La compañía VIDROCOL dispone de $3.800.000 para ser asignados a la publicidad de sus productos, se ha evaluado que un mensaje colocado en radio tiene un costo de $450.000; mientras que un mensaje colocado en televisión tiene un costo de $ 300.000. Además, la compañía está interesada en que del total de población en donde se difunda la publicidad, se capte mínimo a 8.000 mujeres y 7.000 hombres. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si sabe que el anuncio en radio se divulga a 2.000 mujeres y 1.200 hombres; mientras, que cada anuncio en televisión se divulga a 3500 mujeres y 4200 hombres.

Solución

Análisis de información

En la tabla 2.17 se establece un resumen de la información para la compañía VIDROCOL.

TABLA 2.17			
MEDIO PUBLICITARIO	**COSTO POR MENSAJE**	**MUJERES**	**HOMBRES**
RADIO	$450.000	2.000	1.200
TELEVISIÓN	$300.000	3.500	4.200
DISPONIBILIDAD	$3.800.000	MIN 8000	MIN 7.000

Definición de variables

A la compañía VIDROCOL le interesa averiguar que cantidad de mensajes debe colocar en cada medio publicitario, por lo tanto las variables a utilizar se definen de la siguiente manera:

X_1 =cantidad de anuncios por radio a contratar

X_2 =cantidad de anuncios por televisión a contratar

Función objetivo

Con base en la anterior definición a la compañía le interesa disminuir el costo total de los anuncios, por consiguiente la función objetivo queda como:

$$\text{Min. } z = 450.000\ X_1 + 300.000\ X_{2.}$$

Restricciones del modelo

Además, ésta función debe estar restringida al dinero disponible para invertir en los medios publicitarios y la cantidad mínima de mujeres y hombres que hay que captar. Estas restricciones quedan de la siguiente manera:

$450.000X_1 + 300.000\ X_2 \leq 3.800.000$ garantiza el consumo máximo de dinero; $2.000X_1 + 3.500\ X_2 \geq 8.000$ garantiza el mínimo de mujeres a captar y $1.200\ X_1 + 4.200\ X_2 \geq 7.000$ restringe al mínimo de hombres a captar.

Modelo matemático completo

Todo lo anterior, junto a las restricciones de no negatividad, se resume en el siguiente modelo:

$\text{Min. } z = 450.000\ X_1 + 300.000\ X_{2.}$

s.a.

$450.000X_1 + 300.000\ X_2 \leq 3.800.000$. Restricción de dinero.

$2.000X_1 + 3.500\ X_2 \geq 8.000$. Mínimo de mujeres.

$1.200\ X_1 + 4.200\ X_2 \geq 7000$. Mínimo de hombres.

$X_1, \quad X_2 \geq 0$

2.8. APLICACIONES EN EL MEDIO AMBIENTE

Ejercicio 2.8.1. Una compañía fabricante de productos químicos produce un tipo de producto de carácter especial, el cual requiere de tres tipos de materia prima (A, B y C) en las proporciones que mejor se estime conveniente. La manufacturación del producto da lugar a la aparición de dos unidades de contaminante por cada kilogramo de materia prima tipo A utilizada, 4 unidades de contaminante por cada kilogramo de materia prima tipo B empleada y 5 unidades de contaminante por cada kilogramo de materia prima del tipo C utilizada. Además, se sabe que la utilización de la materia tipo A produce una pérdida de $100 por kilogramo, mientras que utilizando la de los otros dos tipos se obtiene un beneficio de $200 por kilogramo. Para la utilización de la materia prima A se requiere de un litro de agua por cada kilogramo empleado, 2 litros de agua por la utilización de la materia prima B; en cambio el uso de un kilogramo de la materia prima C produce 1.5 litros de agua. También se requiere para la utilización de las materias primas A y C de 2 miligramos de producto radioactivo por kilogramo empleado; mientras que el uso de cada kilogramo de materia prima B produce un miligramo del mismo producto. Se requiere necesariamente consumir los 3 miligramos del producto radioactivo que hay en existencia. Plantee el modelo de programación lineal que se genera con el objetivo de minimizar la creación de contaminante, ya que es perjudicial para el medio ambiente; si se sabe que se dispone de 40 litros de agua y se desea obtener un beneficio mínimo de $1.250.

Solución

Análisis de información

La estructuración consolidada de la información de la compañía química se presenta en la tabla 2.18.

En dicha tabla se observa en la columna de ganancias para la materia prima tipo A, -100, lo que representa la perdida generada por este producto. Lo mismo en la columna de consumo de agua se representa con negativo la generación del mismo recurso y -1 en la columna de material radiactivo también indica generación de recurso y no consumo del mismo.

TABLA 2.18

MATERIA PRIMA	CONTAMINANTE GENERADO /Kg.	GANANCIA /Kg.	AGUA CONSUMIDA /Kg.	MATERIAL RADIOACTIVO /Kg.
A	2	-100	1	2
B	4	200	2	-1
C	5	200	-1.5	2
LIMITANTE		MIN 1250	40 LITROS	3 mg

Definición de variables

A la compañía química le interesa decidir qué cantidad de cada materia prima debe utilizar en el producto; lo que permite definir de la siguiente forma las variables:

X_1 = Kilos de materia prima A a utilizar en el producto.

X_2 = Kilos de materia prima B a utilizar en el producto.

X_3 = Kilos de materia prima C a utilizar en el producto.

Función objetivo

Con base en esto, lo que más le interesa a la compañía es reducir la creación de contaminante, por lo tanto su función objetivo tiene que ver con ello y queda de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

Restricciones del modelo

Para conseguir dicho objetivo se deben tener en cuenta las condiciones especificadas por la empresa en cuanto a la generación de utilidades mínimas, disponibilidad de agua y consumo de material radioactivo.

Para garantizar una mínima ganancia se utiliza la restricción $-100 X_1 + 200 X_2 + 200 X_3 \geq 1250$; para el consumo máximo de agua se tiene $X_1 + 2 X_2 - 1.5 X_3 \leq 1750$ y para consumir exactamente el producto radiactivo se genera la siguiente restricción: $2X_1 - X_2 + 2 X_3 = 3$.

Modelo matemático completo

Por consiguiente, el modelo matemático de programación lineal queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
\text{Min } Z = 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \quad \text{(creación de contaminante)} \\
-100 X_1 + 200 X_2 + 200 X_3 \geq 1.250. \text{ Ganancia mínima.} \\
X_1 + 2 X_2 - 1.5 X_3 \leq 40. \text{ Agua disponible.} \\
2X_1 - X_2 + 2 X_3 = 3. \text{ Consumo de material radioactivo.} \\
X_{1,} \quad X_{2,} \quad X_3 \geq 0
\end{array}$$

2.9. APLICACIONES AGRÍCOLAS

Ejercicio 2.9.1. Una asociación comunitaria establecida en la sabana de Bogotá, la cual está integrada por Madrid, Mosquera y Funza está interesada en establecer el programa de producción agrícola para el próximo año, teniendo en cuenta que en Funza hay una disponibilidad de 400 hectáreas de terreno y 600 metros cúbicos de agua; que en Mosquera la disponibilidad es de 600 hectáreas de terreno y 800 metros cúbicos de agua, mientras que para Madrid se estableció que la disponibilidad es de 300 hectáreas y 375 metros cúbicos de agua. El tipo de producto apropiado para la región se estableció en tres clases así: Clavel, Rosa y Margarita; para los cuales se determinó un rendimiento neto de $400, $300 y $100 respectivamente por hectárea sembrada. También se estableció que máximo se deben sembrar 600 hectáreas de rosas, 500 de clavel y 325 de margaritas; que el consumo de agua de cada uno de estos productos es el siguiente:

3 metros cúbicos por hectárea sembrada de clavel

2 metros cúbicos por hectárea sembrada de Rosa

1 metro cúbico por hectárea sembrada de margarita

Plantee el modelo de programación lineal que se genera con dicha información.

Solución

Analisis de información

En su concepción este problema se asemeja al ejercicio 2.4.1 de la compañía cervecera; sólo que aquí hay que distinguir el tipo de producto que se debe sembrar y en qué pueblo se debe hacer. La tabla 2.19 presenta un resumen de la información de la asociación comunitaria.

TABLA 2.19

PUEBLO	TIPO DE PRODUCTO			TERRENO HECTÁREAS	AGUA (m^3) DISPONIBLE
	CLAVEL	ROSA	MARGARITA		
MADRID				300	375
MOSQUERA				600	800
FUNZA				400	600
RENDIMIENTO/Ha	400	300	100		
SIEMBRA MÁXIMA	500	600	325		
AGUA/HECTÁREA	$3m^3$	$2m^3$	$1m^3$		

Definición de variables

A la asociación comunitaria le corresponde decidir que cantidad de hectáreas de cada pueblo debe sembrar con cada producto, por lo tanto y dada su concepción este problema por comodidad también se define mediante variables bidimensionales de la siguiente forma:

X_{IJ} = cantidad de hectáreas a sembrar de producto j(1,2,3) en el pueblo i(1,2,3)

Función objetivo

Obviamente, a la asociación le interesa tener un máximo de rendimiento por lo cual la función objetivo asociada es la siguiente:

$$Max\ Z= 400(X_{11} + X_{21} + X_{31})+ 300(X_{12}+ X_{22} +X_{32})+ 100(X_{13}+ X_{23} + X_{33})$$

Restricciones del modelo

Restricciones de terreno disponible en cada pueblo

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 300$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 600$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 400$$

Restricciones de agua disponible en cada pueblo.

$$3X_{11} +2X_{12} +X_{13} \leq 375$$
$$3X_{21} +2X_{22} +X_{23} \leq 800$$
$$3X_{31} +2X_{32} +X_{33} \leq 600$$

Restricciones de producción máxima de cada producto.

$$X_{11} +X_{21} +X_{31} \leq 500$$
$$X_{12} +X_{22} +X_{32} \leq 600$$
$$X_{13} +X_{23} +X_{33} \leq 325$$
$$X_{IJ} \geq 0$$

2.10. APLICACIONES FINANCIERAS

Ejercicio 2.10.1. Una corporación de ahorro y vivienda tiene disponible un total de $100.000.000 para ser asignados a sus diferentes líneas de crédito en el próximo año. En la tabla 2.20 se presentan las diferentes líneas de crédito, la tasa de interés anual generada por cada tipo de préstamo y las probabilidades de pérdida o no recuperación del dinero prestado. (Estas probabilidades se establecieron con base en datos históricos).

TABLA 2.20		
LÍNEA DE CRÉDITO	**INTERÉS**	**PROBABILIDAD DE PÉRDIDA**
AUTOMOVIL	0.25	0.07
VIVIENDA	0.22	0.02
NEGOCIO	0.35	0.01
ESTUDIO	0.15	0.05
LIBRE INVERSIÓN	0.30	0.08

Por políticas gubernamentales se debe asignar un mínimo del 40% de todos los préstamos a la línea de crédito de vivienda; y un máximo del 35% del total a préstamos para automóvil y negocio en forma conjunta. Además, el gerente de la compañía desea que el dinero perdido no sea superior al 5% del capital prestado.

Solución

Análisis de información

El problema de la corporación de ahorro y vivienda consiste en decidir cuánto dinero asignar a los préstamos de las diferentes líneas de crédito para el próximo año.

Definición de variables

Con base en lo anterior las variables del ejercicio quedan definidas de la siguiente manera:

X_1= Cantidad de dinero asignado a préstamo para automóvil.

X_2= Cantidad de dinero asignado a préstamo para vivienda.

X_3= Cantidad de dinero asignado a préstamo para negocio.

X_4= Cantidad de dinero asignado a préstamo para estudio.

X_5= Cantidad de dinero asignado a préstamo para libre inversión.

Función objetivo

Definidas las variables se procede a formular la función objetivo, la cual debe garantizar el máximo de ingresos generados por los intereses de los préstamos, y a ello restarle el dinero perdido por las cuentas irrecuperables. Esto queda así:

$$\text{Max } z = 0.25(0.93X_1) +0.22(0.98X_2) +0.35(0.99X_3) +0.15(0.95X_4) +0.3(0.92X_5) -0.07X_1 -0.02X_2 -0.01X_3 -0.05X_4 -0.08X_5$$

Observe el lector, que sólo se calculan ingresos por préstamos del 93% del capital prestado para automóvil y se resta el 7% del mismo capital; se supone que además del dinero perdido, tampoco se generan interés por ese dinero perdido.

Restricciones del modelo

Esta función objetivo se encuentra restringida a todas las políticas gubernamentales, disponibilidad de dinero y deseos del gerente.

El dinero disponible se restringe con la siguiente ecuación: $X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 \leq 100.000.000$. Se debe prestar mínimo el 40% del dinero para vivienda; esto se garantiza con $X_2 \geq 0.4(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$ y la suma de los prestamos para automóvil y negocio no deben superar el 35% así: $X_1+X_3 \leq 0.35(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$.

Además, como el total de dinero perdido es $0.07X_1+0.02X_2+0.01X_3+0.05X_4+0.08X_5$, el cual no debe ser mayor al 5% del total prestado, esto genera la siguiente ecuación:

$$\frac{0.07X_1+0.02X_2+0.01X_3+0.05X_4+0.08X_5}{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5} \leq 0.05$$

Modelo matemático completo

El modelo matemático de programación lineal para la corporación queda de la siguiente manera:

$$\text{Max } z = 0.25(0.93X_1) + 0.22(0.98X_2) + 0.35(0.99X_3) + 0.15(0.95X_4) + 0.3(0.92X_5) - 0.07X_1 - 0.02X_2 - 0.01X_3 - 0.05X_4 - 0.08X_5$$

s.a.

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5 \leq 100.000.000.$

$X_2 \geq 0.4(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5)$

$X_1+X_3 \leq 0.35(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5).$

$$\frac{0.07X_1+0.02X_2+0.01X_3+0.05X_4+0.08X_5}{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5} \leq 0.05$$

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

Ejercicio 2.10.2. Un inversionista debe establecer la política óptima de inversiones que debe realizar en los próximos tres años; para lo cual tiene disponibles hoy \$200.000.000 y puede invertir en cinco tipos posibles de acciones (I, II, III, IV y V). En la tabla 2.21 se relaciona el flujo de efectivo para el inversionista si invierte un peso hoy. Por ejemplo, si se invierte \$1 hoy en acciones tipo II, tendrá un ingreso de \$0.6 dentro de un año y \$1.2 dentro de dos años. (los negativos indican desembolsos y los positivos ingresos.

TABLA 2.21.

TIPO DE ACCIÓN	FLUJO DE EFECTIVO EN PESOS EN EL AÑO:			
	0 (HOY)	1	2	3
I	0	0	-1	1.7
II	-1	0.6	1.2	0
III	0	-1	0.5	1.1
IV	-1	1.1	0	0
V	-1	0	0	2.0

Suponga que el dinero no invertido en los cinco tipos diferentes de acción, se invierte en CDT (certificados de depósito a término) que generan un interés del 10% anual. Plantee un modelo matemático de programación lineal que maximice el dinero disponible al final del tercer año si se sabe que el inversionista no desea invertir más de $20.000.000 en cada tipo de acción.

Solución

Análisis de información

El problema que tiene hoy el inversionista es determinar qué cantidad de dinero coloca hoy en los diferentes tipos de acción y qué cantidad de dinero coloca en CDT en los diferentes años.

Definición de variables

Con base en lo anterior las variables se definen tal como aparece a continuación:

X_1= Cantidad de dinero invertido en acciones tipo I.

X_2= Cantidad de dinero invertido en acciones tipo II.

X_3= Cantidad de dinero invertido en acciones tipo III.

X_4= Cantidad de dinero invertido en acciones tipo IV.

X_5= Cantidad de dinero invertido en acciones tipo V.

X_6= Cantidad de dinero invertido en CDT en el año 0 (hoy).

X_7= Cantidad de dinero invertido en CDT en el año 1.

X_8= Cantidad de dinero invertido en CDT en el año 2.

Obsérvese, que estas últimas tres variables tienen que ver con el dinero no invertido en los diferentes años para los cinco tipos de acciones; el cual automáticamente se va a los CDT (no se guarda dinero debajo del colchón, sabiéndose que rinde más en otra parte).

Función objetivo

La función objetivo dice que se debe maximizar el dinero disponible al final del tercer año; este dinero es justamente el que ingresa en dicho año. Matemáticamente esto queda expresado como Max $Z = 1.7X_1+1.1X_3+2.0X_5 +1.10X_8$. Nótese bien que el único dinero que genera ingresos en el año tres es el de las inversiones realizadas en acciones tipo I, III y V; además, del dinero colocado en CDT en el año dos.

Restricciones del modelo

En los diferentes años el dinero invertido debe ser igual al dinero disponible; por lo tanto se establecerán restricciones en ese sentido para cada año.

En el año cero queda así: $X_2+X_4+X_5+X_6 = 200.000.000$.

En el año uno $X_3+X_7 = 0.6X_2+1.1X_4+1.1X_6$.

En el año dos $X_1+X_8 = 1.2X_2+0.5X_3+1.1X_7$.
Además, no se puede invertir más de $20.000.000 en cada tipo de acción; lo que se garantiza haciendo las primeras cinco variables menores e iguales a ese valor.

Modelo matemático completo

El modelo matemático de programación lineal queda de la siguiente forma:

$$\text{Max } Z = 1.7X_1+1.1X_3+2.0X_5+1.10X_8.$$

s.a.

$$\begin{aligned}
&X_2+X_4+X_5+X_6 = 200.000.000.\\
&X_3+X_7 = 0.6X_2+1.1X_4+1.1X_6.\\
&X_1+X_8 = 1.2X_2+0.5X_3+1.1X_7.\\
&X_1 \leq 20000.\\
&X_2 \leq 20.000.\\
&X_3 \leq 20.000.\\
&X_4 \leq 20.000.\\
&X_5 \leq 20.000.\\
&X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 \geq 0
\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

2.1. Una compañía siderúrgica produce ángulos y platinos los cuales rinden una contribución a las utilidades de $10.000 y $ 30.000 por metro respectivamente. Para la producción de estos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 250 libras de acero y 210 horas hombre. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un metro de ángulo se requieren 5 libras de acero y 3 horas hombre de trabajo, mientras que para producir un metro de platina se requieren 5 libras de acero y 7 horas hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar si se sabe que máximo se venderán 20 metros de platina diariamente?

2.2. Cierta compañía editorial produce libros y revistas de carácter especializado, los cuales venden a $30.000 y $25.000 por unidad respectivamente. Se ha estimado que hay una disponibilidad de 300 horas en revisión técnica, 350 horas en impresión y 400 horas en empaste semanalmente. Establezca la cantidad de libros y revistas que se deben producir por semana, si se sabe que para producir un libro se requieren 6h en revisión técnica, 5 en impresión y 10h en empaste, mientras que para producir una revista se requieren 5h en revisión técnica, 7 h en impresión, y 4h en empaste.

2.3. Una empresa de confecciones ha determinado que máximo venderá 40 pantalones por semana y mínimo 30 chaquetas por semana. Además, se sabe que para evitar tiempo ocioso se deben consumir mínimo 350 horas hombres por semana. Suponga que un pantalón para ser fabricado requiere de 7 horas hombre, mientras que una chaqueta necesita 5 horas hombre. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que un pantalón genera una utilidad de $2.000 y una chaqueta de $4.000?

2.4. La compañía Simak dispone de 180 horas por semana en el departamento de corte y 150 horas ensamble. Además, se ha establecido que para producir una chaqueta se requiere de 6 horas departamento corte y 3 horas de ensamble, mientras que para producir un buzo, se requiere de 3 horas departamento corte y 5 horas de departamento de ensamble. También, se ha establecido que el precio de venta de una chaqueta es de $50.000 y un buzo es de $40.000. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas ha estimado una venta mínima de 40 buzos?

2.5. Una nutricionista se encuentra en el proceso de decisión para establecer qué cantidad de 2 tipos de alimento (A y B) debe incorporar en una dieta sabiéndose que el costo por libra de cada uno de ellos es de $400 y $300 por libra respectivamente. Además, se ha establecido que una libra de alimento tipo A contiene 3 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de minerales y 4 miligramos de proteínas; mientras que una libra de alimento tipo b contiene 8 miligramos de vitaminas, 2 miligramos de minerales y 5 miligramos de proteínas. También, se debe garantizar consumir mínimo 240 miligramos de vitaminas, 120 miligramos de minerales y 200 miligramos de proteínas.

2.6. Cierta compañía fabrica billeteras y cinturones a un costo de $12.000 y $6.000 por unidad respectivamente. En la fabricación de dichos artículos se debe consumir como mínimo 180 horas hombre y mínimo 200 unidades de materia prima. Mediante un estudio se determinó que para producir una billetera se requiere 6 horas hombre y 4 unidades de materia prima, mientras que para fabricar un cinturón se requiere 3 horas hombre y 5 unidades de materia prima. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 billeteras?

2.7. Una compañía papelera produce cuadernos espirales y grapados a un costo de $200 y $400 respectivamente por unidad. Para la producción hay una disponibilidad diaria de 200 horas en corte y 150 horas en ensamble. Además, se ha establecido que la demanda conjunta de los 2 artículos será de 60 unidades. ¿Qué cantidad de cada tipo de cuaderno se debe fabricar si se sabe que para producir un cuaderno tipo espiral se requieren 5 horas en corte y 3 horas en ensamble y para producir un cuaderno grapado se requieren 4 horas en corte y 5 horas en ensamble?

2.8. La compañía Sigma, produce ACPM y biogasolina a un costo de $ 2.000 y $ 3.000 por galón respectivamente. Para ello se debe consumir un mínimo de 210 horas a la semana. Además el departamento de ventas ha determinado que máximo venderá 20 galones de ACPM y mínimo 10 de biogasolina. También se sabe que la producción de un galón de ACPM requiere 3 horas, mientras que un galón de Biogasolina, requiere 7 horas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el Gobierno Nacional da un subsidio de $ 6.000 por cada galón de biogasolina que se produzca?

2.9. Una fábrica de pupitres se dedica a la manufactura de pupitres unipersonales y bipersonales; los cuales generan utilidad unitaria de $7.000 y $12.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 500 metros de madera, 700 metros de tubo y 600 horas-hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar? si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de 2 metros de madera, 4 metros de tubo y 3horas-hombre de trabajo; mientras que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo.

2.10. Cierta compañía dedicada a la ornamentación ha sacado del mercado un producto que no le era rentable, lo que ocasiona que su planta de producción tenga una subutilización de 500 horas en la sección de corte, 300 horas en la sección de soldadura y 700 horas en la sección de ensamble. El departamento de mercadeo sugiere que dicha capacidad puede ser utilizada en la fabricación de puertas, ventanas y rejas en la mejor combinación posible. Para estos artículos se ha establecido un precio de venta de 25.000, 30.000 y 18.000 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir una puerta se requieren 5 horas en corte, 6 horas en soldadura y 4 horas en ensamble; para producir una ventana se requieren 2 horas en corte, 3 horas en ensamble y una hora en soldadura; mientras que para producir una reja se necesitan 8 horas en corte, 4 horas en soldadura y 5 horas en ensamble. Además, se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 20 rejas y máximo 30 puertas. Suponga que por las condiciones de la planta la producción de ventanas no debe exceder más del 20% de la producción total de la planta.

2.11. La porcicultura sigma tiene un criadero de marranos en Tibirita (Cundinamarca, Colombia), donde actualmente se están levantando 50 cerditos, para cada uno de los cuales se ha establecido que diariamente requiere un suministro mínimo de 50 miligramos de vitamina A, mínimo 70 miligramos de vitamina B y máximo 80 miligramos de vitamina C. Para lograr estos requerimientos vitamínicos, a los cerditos en su alimentación se le suministra cereal y mogollo, los cuales adquiere la compañía a $5.000 y $10.000 por kilo respectivamente. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar diariamente a cada cerdito, si se sabe que un kilo de cereal contiene 3 miligramos de vitamina A, 9 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de vitamina C; mientras que un kilo de mogollo contiene 10 miligramos de Vitamina A, 3 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C?

2.12. Acerías Bacatá prepara una aleación de tipo especial en un alto horno, el cual debe ser cargado con dos toneladas de material. Por requisitos de calidad dicha aleación debe contener mínimo 30% de sílice pero no más de 35%; y máximo 28% de aluminio. La compañía carga el horno con hierro, Zinc y Cobre, los cuales adquiere a 3.000, 7.000 y 6.000 pesos por kilo respectivamente. ¿Con qué cantidad de cada producto se debe alimentar el horno si se sabe que el hierro contiene 18% de sílice y 15% aluminio; el zinc contiene 7% de Sílice y 25% de aluminio; mientras que el cobre contiene 16 % de sílice y 5% de aluminio?

2.13. Una fábrica de muñecos de peluche fabrica osos y perros para los cuales ha establecido una utilidad de $8.000 y $5.000 por unidad respectivamente. El departamento de mercados ha establecido que mínimo se venderán 40 osos y máximo 50 perros. Determine qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el gerente de la compañía desea que la producción de osos sea mínimo de 20 unidades más que la producción de perros.

2.14. Estructuras Metálicas LTDA manufactura puertas y ventanas con utilidades de 400 y 900 pesos por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad por semana de 400 metros de ángulo y 480 metros de platina. Además, se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 metros de ángulo y 8 metros de platina; mientras que para producir una ventana se requiere de 8 metros de ángulo y 6 metros de platina ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas estimó que máximo se venderán 30 ventanas?

2.15. La compañía"**Sigma**" produce pupitres y sillas, para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de $5.000 y $6.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 20 horas hombre de trabajo, 32 horas máquina y 24 metros de materia prima. El gerente desea establecer que cantidad de pupitres y sillas debe fabricar a fin de incrementar al máximo su utilidad. Suponga, además, que para producir un pupitre se requieren 5 horas hombre de trabajo, 4 horas máquina y 8 metros de materia prima; mientras que para producir una silla se necesitan 4 horas hombre de trabajo, 8 horas máquina y tres metros de materia prima.

2.16. Electrodomésticos "La Hormiga" produce y vende televisores y equipos de sonido para los cuales ha establecido que debido a las condiciones del mercado un televisor genera una pérdida de $30.000, mientras que un equipo de sonido genera una utilidad de $40.000. Además, se sabe por un estudio de mercados que la venta máxima de televisores será de 70 unidades, mientras que para los equipos de sonido se ha establecido una venta mínima de 30 unidades. Para la comercialización de estos productos la compañía cuenta con un vendedor, el cual gana una comisión de $5 por televisor vendido y $8 por cada equipo de sonido vendido. Establezca qué cantidad de televisores y equipos de sonido se debe fabricar a fin de minimizar las pérdidas totales de la compañía y garantizar que el vendedor obtenga una comisión mínima por mes de $400.

2.17. Una compañía dedicada a la agricultura puede sembrar en su siguiente temporada papa y yuca, productos para los cuales ha establecido que generan una utilidad por hectáreas sembrada de $8 y $9 millones respectivamente. Para el cultivo de dichos productos se cuenta con una disponibilidad de 540 Litros de agua, 500 Kilos de abono y 800 Libras de fertilizante. ¿Qué cantidad de hectáreas de cada producto se deben sembrar si se sabe que para sembrar una hectárea de papa se necesitan 6 litros de agua, 5 kilos abono y 10 libras de fertilizante; mientras que para sembrar una hectárea de yuca se requieren 9 litros de agua, 10 kilos de abono, y 8 libras de fertilizante?

2.18. Una fábrica de muebles ha determinado que la demanda de bibliotecas para los próximos 4 meses es de 200, 300, 390 y 130 unidades respectivamente. Además, se sabe que actualmente la compañía puede generar inventario en cualquier mes y debe cumplir con su demanda a tiempo durante cada mes. La compañía tiene una capacidad para fabricar 200 bibliotecas por mes en tiempo regular con un costo de $15.000 por biblioteca y puede producir unidades adicionales en tiempo extra a un costo de $20.000 por biblioteca. Determine la cantidad de bibliotecas a producir en cada mes; tanto en tiempo regular, como en tiempo extra si se sabe que las unidades producidas y no vendidas en un determinado mes generan un costo de almacenaje de $1.200 por biblioteca (suponga que al final del cuarto mes no debe haber inventario).

2.19. Se ha establecido en una fábrica de muebles metálicos que en el departamento de corte hay una disponibilidad de 700 horas por semana, en el departamento de soldadura hay una disponibilidad de 500 horas por semana, mientras que en el departamento de ensamble hay una disponibilidad de 800 horas por semana. La fábrica manufactura salas y comedores para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 10.000 y 15.000 pesos por unidad respectivamente. Establezca la cantidad de salas y comedores a fabricar por semana si se sabe que para producir una sala se requieren 5 horas de proceso en corte, 2 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble; mientras que para producir un comedor se requieren 2 horas de proceso en corte, 6 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que máximo se venderán 30 salas y mínimo 10 comedores.

2.20. Bicisigma produce bicicletas y triciclos para los cuales ha establecido un precio de venta unitario de 9.000 y 7.000 pesos respectivamente. Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 630 horas en corte y 560 horas de soldadura, además se ha establecido que para producir una bicicleta se requieren 9 horas en corte y 7 horas en soldadura, mientras que para producir un triciclo se requieren 7 horas en corte y 8 horas en soldadura. Determinar qué cantidad de bicicletas y triciclos se deben fabricar si se sabe que el departamento de mercadeo ha establecido que mínimo se venderán entre los dos artículos 50 unidades.

2.21. Una empresa siderúrgica dispone de un alto horno el cual debe ser cargado con una tonelada de material. En dicho horno se fabrica un tipo de aleación especial la cual por requisitos de calidad debe tener mínimo 32% de aluminio pero no más del 40% y como máximo el 17% de silicio. La compañía cuenta con 4 tipos de material para los cuales se ha establecido el contenido de silicio y aluminio con su respectivo costo tal como aparece en la tabla 2.22.

TABLA 2.22			
Material	**Contenido silicio**	**Contenido aluminio**	**Costo**
Acero	7%	16%	5.000
Cobre	15%	5%	3.000
Níquel	12%	14%	3.000
Cromo	3%	10%	4.400

2.22. Una corporación de ahorro y vivienda cuenta con un total $30.000.000.00 para préstamos bancarios entre los cuales están considerados los préstamos para automóvil, vivienda, inversión rural, y préstamos personales. Mediante una evaluación del sistema financiero se sabe que los préstamos para automóvil generan un interés del 15% y tienen una probabilidad de incobrables del 10%; Los préstamos para vivienda generan interés del 8% y una probabilidad de incobrables del 5%. Los préstamos para inversión rural generan interés del 7% y probabilidad de incobrable del 20%; mientras que los préstamos personales generan un interés del 24% y tiene una probabilidad de incobrable del 25%. Por políticas gubernamentales la entidad debe asignar mínimo el 40% de los fondos prestados a préstamos para inversión rural y vivienda. Además, los préstamos para automóvil deben ser máximo el 50% de los préstamos para inversión rural y los préstamos personales no pueden exceder el 10% de los dineros prestados. Determine qué cantidad de dinero se debe asignar a cada tipo de préstamo si por política de la compañía se ha especificado que la cantidad total de pagos irrecuperables no puede exceder el 6%.

2.23. Una joyería produce y vende relojes para hombre y para dama, para los cuales ha establecido un costo por unidad de $3.000 y $2.000 respectivamente. El departamento de ventas ha establecido que mínimo se venderán 60 relojes para dama y 70 relojes para caballero. Además, se ha establecido que para producir un reloj para dama se requieren 5 horas de trabajo de un técnico, mientras para producir un reloj para hombre se requieren 8 horas de trabajo del técnico. Establezca la cantidad de relojes a producir si se sabe que la compañía tiene disponible 2 técnicos en la joyería, los cuales laboran 8 horas diarias y 25 días al mes.

2.24. La veterinaria "The Dog" cría cachorros para los cuales se ha establecido que máximo se les debe suministrar 630 miligramos de vitamina A, mínimo 350 miligramos de vitamina B y mínimo 320 miligramos de vitamina C (estos requerimientos son mensuales). Para garantizar esos requisitos vitamínicos los cachorros son alimentados con purina y ladrina los cuales compra la compañía a $8.000 y $10.000 por kilo respectivamente. Establecer qué cantidad de los dos alimentos se les debe suministrar mensualmente a cada cachorro si se sabe que un kilo de purina contiene 9 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 4 miligramos de vitamina C; mientras que un kilo de ladrina contiene 7 miligramos de vitamina A, 5 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

2.25. Una heladería dispone diariamente de 300 gramos de pulpa de fruta y 320 gramos de azúcar para la producción de paletas y helados, para los cuales se ha establecido una utilidad unitaria de 200 y 100 pesos respectivamente. El departamento de mercadeo ha establecido que en conjunto mínimo se venderán 90 unidades. Establezca la cantidad de paletas y helados que se deben fabricar diariamente, si se sabe que para producir una paleta se requieren 5 gramos de pulpa de fruta y 8 gramos de azúcar, mientras que para producir un helado se requieren 6 gramos de pulpa de fruta y 4 gramos de azúcar.

2.26. Una industria de acrílicos cuenta con una disponibilidad semanal para la fabricación de sus productos de 400 metros de fibra de vidrio, 360 litros de resina y 500 miligramos de catalizador. Con esos recursos la compañía fabrica tinas referencia Nápoles y referencia Milán para los cuales se ha establecido que generan una contribución a las utilidades de \$6.000 y \$9.000 cada tina respectivamente. ¿Qué cantidad de cada tipo de tina se debe fabricar si se sabe, que para producir una tina Nápoles se requieren 8 metros de fibra de vidrio, 6 litros de resina y 5 miligramos de catalizador; mientras que para producir una tina referencia Milán se requieren 5 metros de fibra, 6 litros de resina y 10 miligramos de catalizador?.

2.27. "El Palacio del Colesterol" produce y vende pasteles y empanadas para los cuales ha establecido una utilidad de \$400 por unidad de cada producto. Para la producción de esos artículos se dispone diariamente de 500 gramos de arroz y 360 gramos de harina. Además, se sabe que para producir un pastel se requieren 10 gramos de arroz y 6 gramos de harina y para producir una empanada se requieren 5 gramos de arroz y 6 gramos de harina. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar diariamente si se sabe que máximo se venderán 30 empanadas?.

2.28. Decoraciones "La Tapa" produce gabinetes para baño y cocina para los cuales ha fijado un precio de venta de \$20.000 y \$30.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 300 metros de acrílico y 240 metros de fibra. ¿Qué cantidad de gabinetes para baño y cocina se deben fabricar?, si se sabe que para producir un gabinete de baño se requieren 5 metros de acrílico y 3 metros de fibra, mientras que para un gabinete de cocina se requieren 6 metros de acrílico y 8 de fibra. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que mínimo se venderán 100 gabinetes para baño.

2.29. Un comercializador de tejidos de punto, distribuye sacos y blusas a un precio por unidad de \$5.000 y \$8.000 respectivamente. El departamento de mercadeo determinó que para el próximo mes máximo venderá 20 sacos y mínimo 15 blusas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe comprar si se sabe, que en conjunto entre los dos artículos se venderán mínimo 30 unidades?.

2.30. Una sociedad porcicultora ha establecido que a cada cerdo se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 14 miligramos de vitamina B y 16 miligramos de vitamina C. Para cumplir con esos requisitos vitamínicos, la sociedad compra para alimentar a los cerdos a un costo de \$3.000 un kilo de mineral y a \$6.000 un kilo de concentrado. ¿Qué cantidad de cada producto se le debe suministrar diariamente a cada cerdo?, si se sabe que un kilo de mineral contiene 6 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de C; mientras que un kilo de concentrado contiene 5 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de C.

2.31. Una importadora de joyas compra relojes para hombre a \$3.000 y relojes para dama a \$6.000 cada uno de ellos. Para preparar un reloj para hombre se requieren 6 horas y para preparar un reloj para dama se requieren 5 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de reloj se debe preparar? si se sabe que mínimo se venderán 10 relojes para hombre en la próxima semana, que hay una disponibilidad de 300 horas para la preparación de los relojes y que se desea invertir mínimo \$18.0000.

2.32."Dulcería Sweet" produce paquetes de dulces y chocolates, para los cuales ha establecido un costo de producción por paquete de \$5 y \$10 respectivamente. Actualmente la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 180 horas y se sabe que para producir un paquete de dulces se requiere de 3 horas, mientras que para producir un paquete de chocolates se requieren 6 horas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el mercado consumirá mínimo 70 paquetes entre los dos artículos?

2.33."Quimicos Protox" ha determinado que para la fabricación de un producto químico especial requiere de dos materias primas A y B. Se sabe que la utilización de un kilo de materia prima tipo A, se necesitan 2 litros de agua y 2 horas de trabajo y genera un costo de \$3, mientras que la utilización de un kilo de materia tipo B genera 3 litros de agua, consume 5 horas de trabajo y da una utilidad de \$7. ¿Qué cantidad de cada materia prima se debe utilizar en el producto químico si se sabe, que hay una disponibilidad de 60 litros de agua por semana y que se debe consumir mínimo 100 horas de trabajo?

2.34. Un fabricante de artículos decorativos tiene 6 metros de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará pinos decorativos. Con anterioridad se han vendido bien dos modelos, de manera que se dedicará a producir éstos dos. El fabricante estima que el modelo 1 requiere 2 metros de madera y 7 horas de tiempo disponible, mientras que para el modelo 2 se requieren un metro de madera y 8 horas de tiempo. Los precios de los modelos son $120 y $80 respectivamente. ¿Cuántos pinos decorativos de cada modelo se deben fabricar?

2.35. Una fábrica de muebles produce pupitres unipersonales, bipersonales y mesas, para los cuales ha establecido que rinden una utilidad unitaria de $3, $2 y $5. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 430 metros de madera, 460 metros de tubo y 420 metros de formica. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar a fin de incrementar las ganancias si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requieren un metro de madera, 3 metros de tubo y un metro de fórmica, que para producir un pupitre bipersonal se requieren 2 metros de madera y 4 metros de formica; mientras que para producir una mesa se necesita un metro de madera y 2 metros de tubo.

2.36. La industria de muebles "Data" produce sofás, sillas y poltronas para los cuales ha establecido que rinden una contribución unitaria a las utilidades de $15.000, $10.000 y $20.000 respectivamente. Para producir esos artículos la compañía tiene una disponibilidad mensual de 800 metros de paño, 900 metros de listón y 720 metros de resortes. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que para producir un sofá se requieren 10 metros de paño, 9 metros de listón y 12 metros de resortes, para producir una silla se requieren 5 metros de paño, 4 metros de listón y 6 metros de resortes; mientras que para fabricar una poltrona se requieren 8 metros de paño, 10 metros de listón y 5 metros de resorte.

2.37. La empresa "Zaza" produce salas y comedores en tres tipos de máquinas en las cuales hay una disponibilidad de 100, 80 y 160 horas por semana respectivamente. Además, se sabe que una sala requiere de 4 horas de proceso en la máquina 1, 16 horas de proceso en la máquina 2 y 14 horas de proceso en la máquina 3, mientras que un comedor requiere de 6 horas de proceso en la máquina 1 y 18 horas de proceso en la máquina 3. El departamento de costos ha estimado que cuesta $12 producir una sala y $ 11 producir un comedor. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar qué cantidad de cada producto se debe fabricar, si se sabe que un comedor se vende en $17 y una sala en $14. Suponga además que el departamento de mercadeo ha estimado que mínimo se venderán 5 salas.

2.38. La industria ganadera "Zitron", cría cabezas de ganado en una hacienda de los LLanos Orientales, el veterinario de la compañía ha establecido que a cada cabeza de ganado se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 40 miligramos de vitamina B y mínimo 60 miligramos de vitamina C. El ganado es alimentado con sal, ésta tiene un costo de $4000 por kilo, agua la cual tiene un costo de $1000 por litro y concentrado el cual tiene un costo de $1500 por frasco. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe dar a cada cabeza de ganado de tal forma que garantice los requerimientos vitamínicos del ganado si se sabe que 1 kilo de sal contiene 5 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de Vitamina C; un litro de agua contiene 1 miligramo de vitamina A, 4 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de Vitamina C; mientras que un frasco de concentrado contiene 10 miligramos de vitamina B y 6 miligramos de Vitamina C.

2.39. La compañía "Zamba", produce gasolina blanca, roja y verde, para las cuales se ha establecido un precio de venta por galón de $4000, $4500 y $4200 respectivamente, estos productos se obtienen a partir de petróleo y Kerosén de los cuales hay una disponibilidad diaria de 3000 y 3500 galones respectivamente. Además, se sabe que el costo, que se causa por explotar un galón de petróleo es de $2500 mientras que para un galón de kerosene es de $3000. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que por normas gubernamentales de calidad, la gasolina blanca debe contener 30% de petróleo y 70% de kerosén, la gasolina roja debe contener 45% de petróleo y 55% de kerosene, mientras que la gasolina verde debe contener 60% de petróleo y 40% de kerosén.

2.40. La empresa "Omicrón" debe asignar a una de sus rutas un máximo de 40 busetas y un mínimo de 80 buses. Además por caprichos del señor Gerente los buses asignados deben ser mínimo el doble de las busetas menos 60 unidades y se sabe que el costo por asignar una buseta a esa ruta es de $80.000, mientras que asignar un bus cuesta $40.000. ¿Qué cantidad de buses y busetas se debe asignar si se sabe que el gobierno nacional ofrece un subsidio de $90.000 por cada bus asignado?

2.41. La compañía "El Tornero Mayor" produce piñones y rodamientos los cuales le generan una contribución a las utilidades de $5.000 y $8.000 respectivamente por unidad. Para la producción de dichos artículos la Compañía cuenta semanalmente con 450 horas de trabajo en torno, 540 horas de fresadora y 420 horas de pulidora. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un piñón se requieren 5 horas de trabajo en el torno, 9 horas de trabajo en la fresadora y 6 horas de trabajo en la pulidora, mientras que para producir un rodamiento se requieren 9 horas de trabajo en el torno, 6 horas de trabajo en la fresadora y 7 de trabajo en la pulidora?

2.42. El hotel residencial "Alfa" dispone de habitaciones confortables y normales las cuales se alquilan a $4.500 y $3.500 por habitación respectivamente.

Dichas habitaciones son preparadas por Anita y Carmen, las camareras del hotel, para las cuales se ha establecido que tienen una disponibilidad diaria de 630 y 400 minutos respectivamente para el arreglo de las habitaciones. Además, se ha establecido que una habitación confortable requiere de 9 minutos de arreglo por parte de Anita y 5 minutos por parte de Carmen; mientras que una habitación normal requiere de 7 minutos de trabajo de Anita y 8 minutos de trabajo de Carmen, para quedar lista para alquiler. ¿Qué cantidad de cada tipo de habitaciones deben estar listas para la noche si se sabe que se espera alquilar mínimo 40 habitaciones entre los dos tipos?

2.43. La fábrica de muebles “Beta” produce salas y comedores para los cuales ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $9.000 y $10.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de madera y 320 metros de tubo. El departamento de producción estimó que para producir una sala se requieren 6 metros de madera y 4 metros de tubo, mientras que para producir un comedor se requieren 5 metros de madera y 8 metros de tubo. ¿Qué cantidad de salas y comedores se deben fabricar? si se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 90 unidades entre los dos productos.

2.44. Confecciones “Gamma” produce camisas y corbatas para las cuales ha establecido una utilidad unitaria de $5.000 y $2.000 respectivamente. El departamento de mercadeo ha pronosticado que máximo se venderán 50 camisas y mínimo 30 corbatas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el Gerente de la fábrica requiere que la cantidad de corbatas producidas debe ser mínimo 40 unidades debajo de la producción de camisas.

2.45. En el jardín infantil “Delta” se ha establecido que a cada niño diariamente se le debe proporcionar máximo 480 miligramos de vitaminas, mínimo 180 miligramos de hierro y mínimo 180 miligramos de minerales. Para lograr estos requisitos vitamínicos en el jardín se dispone de leche y fruta para los cuales se ha establecido un costo de $400 por un vaso de leche y $500 por una porción de frutas. Establezca qué cantidad de leche y fruta se le debe administrar diariamente a cada niño, si se sabe que un vaso de leche contiene 6 miligramos de vitaminas, 3 miligramos de hierro y 6 miligramos de minerales, mientras que una porción de fruta contiene 8 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de hierro y 3 miligramos de minerales.

2.46. La fábrica de calzado “Épsilon” produce zapatos para hombre y zapatos para dama a un costo de $20.000 cada uno de ellos. Además, se ha establecido, mediante un estudio de mercado que habrá una venta mínima de 20 zapatos para dama y que la venta mínima entre los dos artículos será de 50 unidades.

También, se sabe que hay una disponibilidad de 540 horas-hombre por semana para la producción de dichos artículos. ¿Qué cantidad de cada tipo de zapato se debe fabricar si se sabe que producir un par de zapatos para hombre se requieren 6 horas y un par de zapatos para dama requiere 9 horas?

2.47. La distribuidora de dulces "Zeta" compra cada paquete de mentas a $5 pesos y cada paquete de caramelos a $6. El departamento de mercadeo de la Compañía ha determinado que semanalmente mínimo se venderán 60 paquetes de mentas y mínimo 60 paquetes de caramelos. Además, se sabe que la Compañía semanalmente asigna para su presupuesto de compra de los dos artículos $300. ¿Qué cantidad de cada producto se debe comprar para garantizar las condiciones del mercado y que su costo sea el más bajo?

2.48. Cierta familia ha establecido que cada uno de sus integrantes debe consumir como mínimo 240 gramos de vitamina A y mínimo 320 gramos de vitamina B, al mes. Para cumplir con estos requerimientos vitamínicos la familia dentro de su mercado compra huevos a $300 la unidad y leche a $900 por litro. Por característica de los productos se sabe que un huevo contiene 6 gramos de vitamina A y 4 gramos de vitamina B; mientras que un litro de leche contiene 4 gramos de vitamina A y 8 gramos de vitamina B. ¿Qué cantidad de cada producto debe consumir cada miembro de la familia si se sabe que por recomendaciones medicas cada uno de ellos debe consumir mínimo 20 litros de leche al mes?

2.49. Cierta compañía automotriz ensambla automóviles y camiones los cuales deben pasar por el departamento de pintura y por el departamento de ensamble. Si el departamento de pintura se dedica solo a pintar camiones podrá pintar 40 camiones por día, mientras que si se dedica a pintar solo automóviles, podrá pintar 60 automóviles por día. Si el departamento de ensamble se dedica sólo a ensamblar automóviles podrá ensamblar 50 automóviles por día, y si se dedica sólo a ensamblar camiones podrá ensamblar 50 camiones por día. Además se sabe que cada camión genera una utilidad de $600.000 y que cada automóvil genera una utilidad de $400.000, suponga además que los vendedores de automóviles requieren que la compañía automotriz fabrique por lo menos 30 camiones y por lo menos 20 automóviles por día. Establezca la cantidad de camiones y la cantidad de automóviles que se deben fabricar por día.

2.50. Una compañía transportadora dispone de un taller de mantenimiento para las reparaciones a que haya lugar en sus buses y busetas; en el cual hay una disponibilidad de 630 horas mecánico semanalmente. Además se sabe que el costo por reparación de un bus es de 6 mil pesos mientras que el costo de reparación de una buseta es de 5 mil pesos. Por experiencia se sabe que para reparar un bus se necesitan 7 horas mientras que para la buseta se requieren 9 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe reparar semanalmente

si se sabe que mínimo se deben reparar 20 busetas y mínimo 30 buses a la semana?

2.51. Se ha establecido en confecciones Sigma que para fabricar un vestido para hombre se demoran 9 horas mientras que para fabricar un vestido de mujer se demoran 7 horas. Además, se ha establecido que un vestido para hombre genera una utilidad de $18000 y un vestido para dama genera una utilidad de $14000. El departamento de ventas ha establecido que en el próximo mes se venderán mínimo 40 vestidos para hombre y mínimo 20 vestidos para mujer. ¿Qué cantidad de cada tipo de vestido se de deben fabricar si se sabe que hay una disponibilidad de 600 horas mensuales para la confección?

2.52. Se ha establecido en La compañía Sigma que un par de tenis genera una pérdida de $2000 mientras que un par de zapatos genera una utilidad de $6000. Además se sabe que la venta mínima entre los dos artículos para el próximo mes es de 70 unidades y que por disponibilidad de materiales máximo se pueden producir 50 pares de tenis al mes. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar si se sabe que mínimo se venderán 40 pares de zapatos el próximo mes?

2.53. Un agricultor dispone de un terreno de 90 hectáreas, las cuales planea sembrar con yuca y papa en las cantidades que más le sea conveniente. Mediante un estudio se ha establecido que sembrar una hectárea de terreno con yuca consume 12 metros cúbicos de agua, 8 bultos de abono y 6 horas hombre de trabajo, mientras que sembrar una hectárea con papa consume 6 metros cúbicos de agua, 7 bultos de abono y 10 horas hombre de trabajo. El agricultor ha establecido que tiene una disponibilidad semanal de 720 metros cúbicos de agua, 540 bultos de abono y 600 horas hombre. ¿Qué cantidad de hectáreas se deben sembrar de cada producto, si se sabe que una hectárea sembrada de yuca genera una utilidad de $ 50.000 y una hectárea de sembrada con papa genera una utilidad de $80.000?

2.54. En cierta compañía constructora se ha establecido que diariamente hay una disponibilidad de 240 minutos por día por cada ayudante de construcción. Por estudio se sabe que el primer ayudante coloca un bloque en 6 minutos y un ladrillo en 4 minutos, mientras que el segundo ayudante coloca un bloque en 3 minutos y un ladrillo en 8 minutos. Además se ha establecido que el costo por la colocación de un bloque es de $50, mientras que colocar un ladrillo cuesta $60. ¿Qué cantidad de bloques y ladrillos se deben colocar diariamente si además se sabe que mínimo se deben colocar 50 ladrillos?

2.55. Una fábrica de muebles tiene una disponibilidad semanal de 150 metros de tubo, 270 metros de madera y 120 tornillos. Con estos recursos la compañía

desea fabricar camas dobles, camas sencillas y camarotes, los cuales pretende vender a $50, $25 y $20 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada articulo debe fabricar la compañía a fin de maximizar sus ingresos? si se sabe que una cama doble consume 10 metros de tubo, 5 metros de madera y 8 tornillos; una cama sencilla consume 6 metros de tubo, 3 metros de madera y 4 tornillos; mientras que un camarote consume 15 metros de tubo, 9 metros de madera y 15 tornillos.

2.56. Petroleos Colombia produce biogasolina, gasolina normal y acpm los cuales venden a un precio de 4.000, 5.000 y 4.500 pesos por galón respectivamente. Dichos combustibles son fabricados a partir de dos tipos de crudo llamados petróleo grado 1 y petróleo grado 2 de los cuales hay una disponibilidad de 100.000 y 150.000 galones por día respectivamente. Se ha establecido que el costo de explotación de cada galón de petróleo grado1 es 2500 pesos, mientras que la explotación de petróleo grado 2 cuesta $3.000 por galón. Establezca qué cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que la biogasolina debe contener 40 % de petróleo grado 1 y 60% de petróleo grado 2, la gasolina normal debe contener el 70% de petróleo grado 1 y 30% de petróleo grado 2; mientras que el acpm debe contener 50% de petróleo grado 1 y 50% de petróleo grado 2.

2.57. Combustibles "Dorada" produce cocinol, gasolina roja y gasolina extra los cuales vende a $3500, $5200 y $6300 por galón respectivamente.
Para la producción de dichos combustibles la compañía cuenta con una disponibilidad diaria de 1.000 galones de petróleo crudo y 1.500 galones de petróleo refinado. Además por requisitos de calidad el cocinol debe contener 80% de petróleo crudo y 20% de petróleo refinado; la gasolina roja debe contener 50% de cada uno de los petróleos y la gasolina extra debe contener 25% petróleo crudo y 75% petróleo refinado. Establezca qué cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que el costo de explotación de un galón de petróleo crudo es $2.500 y un galón de petróleo refinado es $3.000.

2.58. La compañía Sigma distribuye su artículo a través de tres distribuidores ubicados Tunja, Pasto y Mitú en las cuales se ha establecido una demanda mensual de 50, 40 y 30 Unidades respectivamente. El producto es manufacturado en 3 plantas ubicadas en Bogotá, Cali y Sopó las cuales tienen una capacidad de producción de 50, 20 y 60 unidades respectivamente. ¿Qué cantidad de producto debe enviar cada planta a cada distribuidor si se sabe que por transportar una unidad de la planta de Bogotá a Tunja se causa un costo de $5, a Pasto es $4 y a Mitu $3. El costo unitario de transporte para la planta de Cali es de $3 a Tunja, $4 a Pasto y $2 a Mitú; mientras que al mismo costo calculado para la planta de sopo es $4, $6 y $5 pesos respectivamente para Tunja, Pasto y Mitú?

2.59. La compañía Sigma produce computadores en Bogotá, Cali y Medellín, en cuyas plantas se dispone de una capacidad de producción de 5.000, 3.000 y 4.000 equipos por semana respectivamente. El producto es comercializado a través de tres distribuidoras ubicadas en Pasto, Tunja y Riohacha para los cuales se ha determinado una demanda semanal de 2.500, 3.700 y 2.100 equipos respectivamente. Plantee un modelo de programación lineal para establecer qué cantidad de equipos se debe enviar de cada planta a cada distribuidor si se sabe que transportar un equipo de la planta de Bogotá a Pasto cuesta 80 pesos, a Tunja cuesta 10 pesos y a Riohacha 75 pesos; transportar un equipo de la planta de Cali a Pasto cuesta 12 pesos, a Tunja cuesta 92 pesos y a Riohacha 170 pesos; Mientras que el mismo costo calculado para la planta ubicada en Medellín es de 160, 65 y 22 pesos respectivamente.

2.60. Una compañía cementera produce su artículo en sus plantas de Cali y Duitama en donde tiene una capacidad de producción de 15.000 y 20.000 bultos de cemento por mes respectivamente. El artículo es comercializado a través de 3 distribuidores ubicados en Bogota, Medellín y Cúcuta, para los cuales se ha establecido una demanda mensual de 10.000 ,14.000 y 12.000 bultos de cemento respectivamente. Determine qué cantidad de cemento se debe enviar de cada planta a cada distribuidor si se sabe que el costo de transporte por un bulto de cemento de la planta de Cali a Bogotá es de $200, a Medellín es $250 y a Cúcuta es $280; mientras que el costo de transportar un bulto de cemento desde Duitama a Bogota es $75, a Medellín es $160 y a Cúcuta es $205.

2.61. La compañía "Zoco", produce sus artículos en dos plantas ubicadas en Bogotá y Cali, para las cuales se ha establecido que tienen una capacidad de producción mensual de 3000 y 4000 unidades respectivamente. Dicho artículo es distribuido a través de tres comercializadoras ubicadas en Cúcuta, Tunja y Pasto para los cuales se ha establecido una demanda mensual de 1.500, 2.300 y 3.100 unidades respectivamente. Establezca la cantidad óptima que debe enviar a cada planta a cada distribuidor si se sabe que el costo de transportar una unidad de la planta de Bogotá a Cúcuta es de $200, a Tunja de $60 y a Pasto $210, mientras que el costo de transportar una unidad de la planta de Cali a Cúcuta es de $250, a Tunja es de $190 y a Pasto es de $35.

2.62. El Consorcio "Zebra", se ha comprometido con la alcaldía de la ciudad de Bogotá a construir un puente, un parque túnel. El consorcio tiene como alternativas asignarle la construcción de esos 3 proyectos a Conavi, Colmena y Las Villas. Con base en los presupuestos presentados por cada compañía constructora. Se ha establecido que Conavi cobra $500 por la construcción del puente, $700 por la construcción del parque y $450 por el túnel. Colmena cobra $550 por la construcción del puente, $600 por la construcción del parque y $300 por el túnel, mientras que las Villas cobra $500 por la construcción del puente, $510 por la construcción del parque y $480 por el túnel. Determine qué proyecto se debe asignar a cada constructor si se sabe que la Alcaldía de la ciudad le ha solicitado al consorcio "Zebra" que cada proyecto debe ser asignado a un contratista diferente.

2.63. La empresa Oruga manufactura su producto en 3 plantas ubicadas en Bogotá, Tunja y Cúcuta, en las cuales hay una capacidad de producción semanal de 150, 60 y 180 unidades respectivamente. El producto es distribuido a través de 3 distribuidores ubicados en Chia, Cali y Pasto para los cuales se ha establecido una demanda semanal de 150, 120 y 90 unidades respectivamente. Si se sabe que el costo de transportar una unidad de la planta de Bogotá a Chia es $15, a Cali es $12 y a Pasto es $9; de la planta ubicada en Tunja a Chia es $9, a Cali es $12 y a Pasto es $6; mientras que el costo calculado para la planta ubicada en Cúcuta son $12, $18 y $15 respectivamente para los distribuidores de Chia, Cali y Pasto. Solucione este problema suponiendo que se permiten transbordos entre plantas y entre distribuidores. Suponga que el costo de Bogotá a Tunja es $8, de Bogotá a Cúcuta es $10, de Tunja a Cúcuta es $12, de Chía a Cali es $14, de Chía a Pasto $13, de Cali a Pasto es $11 y las rutas en sentido contrario tienen el mismo costo.

2.64. Cuatro estaciones de servicio, ubicadas en la Gaitana, Suba, Usme y Sosiego (barrios de Bogotá) requieren 50.000, 40.000, 60.000 y 40.000 galones de gasolina por mes respectivamente. Es posible satisfacer estos requerimientos a partir de los depósitos ubicados en Laches, Fontibón y Usaquen que tienen una disponibilidad de 80.000, 100.000 y 50.000 galones por mes respectivamente. Los costos de despachar 1.000 galones de gasolina de cada depósito a cada estación de servicio son como aparece en la tabla 2.23.

TABLA 2.23				
DEPÓSITOS	**ESTACIONES DE SERVICIO**			
	GAITANA	**SUBA**	**USME**	**SOSIEGO**
LACHES	70	60	60	60
FONTIBÓN	50	80	60	70
USAQUEN	80	50	80	60

Determine las cantidades de gasolina que deben enviarse desde cada depósito cada estación de servicio, de manera que los requerimientos de los distribuidores sean satisfechos y los costos totales de transporte sean mínimos.

2.65. Cierta compañía está buscando la mejor forma de asignar cuatro trabajos a cuatro operarios de tal forma que se consiga el menor tiempo posible. En la tabla 2.24 se presenta el tiempo de realización de cada trabajo por parte de cada operario. Se debe tener en cuenta que se debe asignar un trabajo a cada operario. ¿De qué forma se deben asignar los trabajos?

TABLA 2.24				
TRABAJO	**OPERARIO**			
	JUAN	**PEDRO**	**JORGE**	**NICOLÁS**
PULIR	8	7	2	5
CORTAR	6	3	8	10
LIJAR	4	7	9	9
BRILLAR	8	10	8	1

Capítulo 3

Programación lineal: método gráfico

PRESENTACIÓN

En este capítulo se presenta el método de la solución gráfica de problemas de programación lineal incluyendo problemas de maximización y minimización.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de solucionar un problema de programación lineal utilizando el método gráfico; así como interpretar correctamente la solución y analizar el consumo de recursos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Graficar las restricciones con base en ecuaciones lineales para determinar el área factible de solución.
- Graficar la función objetivo para establecer el punto o puntos de solución óptima de problemas de programación lineal.
- Establecer la solución óptima del problema mediante el uso de ecuaciones simultáneas.
- Interpretar la solución del problema con base en el planteamiento y formulación del problema; así como el respectivo análisis de consumo de recursos.

COMPETENCIAS

El estudiante tendrá la capacidad de utilizar el método gráfico de solución de problemas de programación lineal; y con base en ésta interpretar el tipo de solución del problema.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá demostrar el manejo en el planteamiento de modelos de programación lineal, obtener la solución a través del meetodo gráfico e interpretar la solución.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Gráfica de las funciones lineales.
- Solución algebráica de sistemas de ecuaciones lineales.
- Concepto de meaximos y mínimos en una gráfica.

3.1. PROBLEMAS DE MAXIMIZACIÓN

3.1.1 Solución única

Un problema de programación lineal tiene solución única cuando un solo punto del área factible de solución, es la solución óptima del problema; por lógica ese punto óptimo debe ser un vértice del área factible de solución. Esto se puede observar en el siguiente ejercicio.

Ejercicicio 3.1.1. La compañía Sigma produce bibliotecas y escritorios para los cuales se ha establecido un precio de venta por unidad de $9.000 y $10.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad mensual de 700 metros de madera, 800 metros de tubo y 900 pliegos de papel de lija. ¿Qué cantidad de bibliotecas y escritorios se debe fabricar mensualmente si se sabe que una biblioteca consume 7 metros de madera, 10 metros de tubo y 6 pliegos de papel de lija; mientras que para producir un escritorio se requieren 10 metros de madera, 8 metros de tubo y 15 pliegos de papel de lija?

Solución

Análisis de la información

Para obtener una mejor visualización de la información, en la tabla 3.1 se presenta toda la información referente al problema de la compañía Sigma.

TABLA 3.1			
RECURSO	**PRODUCTO**		**DISPONIBILIDAD**
	BIBLIOTECA	**ESCRITORIO**	
MADERA	7 METROS	10 METROS	700 METROS
TUBO	10 METROS	8 METROS	800 METROS
LIJA	6 PLIEGOS	15 PLIEGOS	900 PLIEGOS
UTILIDAD	$9.000	$10.000	

Definición de variables

X_1 = Cantidad de bibliotecas a fabricar por mes

X_2 = Cantidad de escritorios a fabricar por mes

Planteamiento del modelo

Max $Z = 9000 X_1 + 10000X_2$

S.A.

$7 X_1 + 10 X_2 \leq$ 700 metros de madera

$10\ X_1 + \ \ 8\ X_2 \leq \ 800$ metros de tubo.

$6\ X_1 + 15\ X_2 \leq 900$ pliegos de papel de lija.

$X_1, \quad X_2 \geq \ 0$

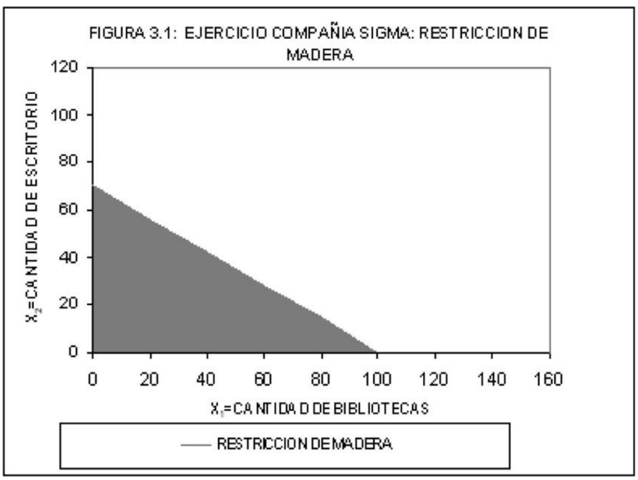
Para solucionar este ejercicio por medio del método gráfico, se debe necesariamente graficar cada una de las restricciones; inicialmente suponiendo una igualdad y en el gráfico se le da el sentido.

Primera restricción

Se supone la igualdad y se hallan los puntos de corte con los ejes; por ejemplo en esta primera restricción si X_1 es cero, despejando X_2 es igual a 70. esto conforma el par ordenado $(X_1,X_2) = (0,70)$ y de igual forma se calcula el otro punto, que genera el par ordenado (100,0) cuando X_2 toma el valor de cero en la misma restricción y se despeja X_1.

$$7X_1 + 10X_2 = 700 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 70 \therefore (0,70) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 100 \therefore (100,0) \end{cases}$$

Estos puntos de corte con los ejes se marcan en el gráfico y se juntan mediante una línea recta. En la figura 3.1 se muestra el área factible de esta restricción. Obsérvese que se ha sombreado toda la región comprendida desde la recta graficada hasta el origen, porque la restricción es menor o igual. El área sombreada es donde se garantiza consumir como máximo 700 metros de madera.

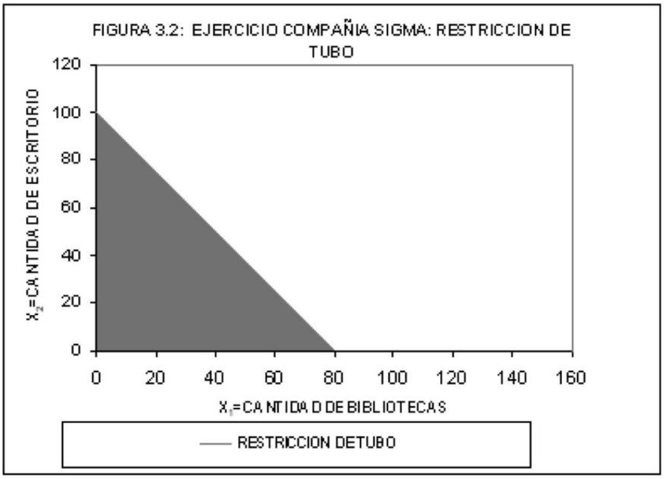


Segunda restricción

Aplicando el mismo procedimiento de la primera restricción para hallar los puntos de corte con los ejes se tiene:

$$10X_1 + 8X_2 = 800 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 100 \therefore (0,100) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 80 \therefore (80,0) \end{cases}$$

En la figura 3.2 se muestra el área factible para el recurso tubo. El área sombreada garantiza consumir como máximo 800 metros de tubo.

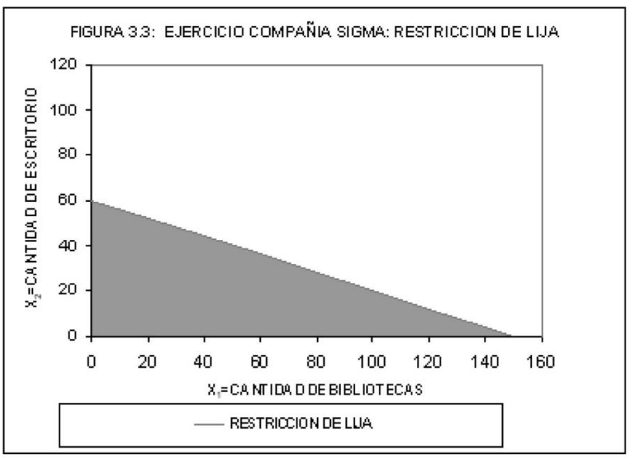


Tercera restricción

Utilizando el mismo procedimiento se obtiene:

$$6X_1 + 15X_2 = 900 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 60 \therefore (0,60) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 150 \therefore (150,0) \end{cases}$$

En la figura 3.3, el área sombreada corresponde a la disponibilidad de 900 pliegos de papel de lija (se puede consumir menos de esto, pues la restricción es menor o igual).



Para hallar el área factible de solución hay que hallar la intersección de todas las restricciones en un solo gráfico; esto se realizará en conjunto con la gráfica de la función objetivo que se muestra en la figura 3.4.

Función objetivo

La función objetivo tiene tres variables; por lo tanto para poder graficarla se debe suponer un valor arbitrario para Z. con base en este valor y utilizando el mismo procedimiento de las restricciones se grafica la función Z, que corresponde a lo siguiente:

MAX Z = 9 X_1 + 10 X_2 entonces:

Con Z = 900, se obtiene lo siguiente:

$$9X_1 + 10X_2 = 900 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 90 \therefore (0,90) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 100 \therefore (100,0) \end{cases}$$

Al observar el gráfico (figura 3.4); la recta Z= 900 queda por encima del área factible de solución, lo que indica que con esos recursos no se alcanzará una utilidad de 900 pesos.

Se probará entonces con un valor menor de Z, supóngase 500, se obtiene:

$$9X_1 + 10X_2 = 500 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 50 \therefore (0,50) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 55.55 \therefore (55.55,0) \end{cases}$$

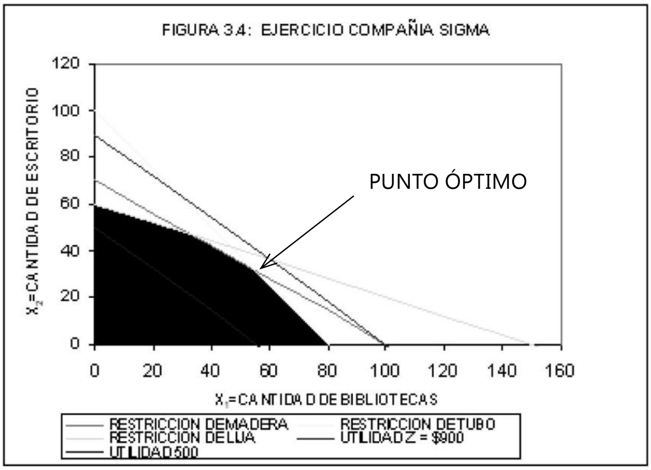
La recta Z=500 atraviesa el área factible de solución, lo que indica que en cualquier combinación de producción entre los dos artículos sobre esta recta quedarían sobrando recursos.

Para hallar el punto óptimo, basta con graficar una sola recta Z (con cualquier valor arbitrario) y si queda por encima del área factible, se traslada paralelamente hacia el origen hasta cuando toque el primer punto del área factible de solución y si queda cortando el área factible de solución, se traslada paralelamente en sentido contrario al origen hasta cuando toque el ultimo punto del área factible de solución. (el lector podrá comprobar que las rectas Z=900 y Z=500 son paralelas).

En general, el punto óptimo de un problema de maximización es el punto que se encuentra dentro del área factible de solución y está más lejano del origen teniendo en cuenta la inclinación de la función objetivo, Z.

Con base en esta definición, observe que si se traslada paralelamente la recta Z=900 hacia el origen (hasta tocar el primer punto del área factible de solución) o la recta Z=500 en sentido contrario al origen (hasta cuando toque el último punto del área factible de solución); llegarán a tocar el mismo punto (punto óptimo), que para nuestro ejemplo es la intersección entre la recta del límite máximo de consumo de madera y la recta de consumo máximo de tubo. En la figura 3.4 el área factible de solución es el área sombreada que es el área donde para cualquier cantidad de producción entre bibliotecas y escritorios alcanzan los recursos disponibles.

Entonces, el punto óptimo se halla encontrando la intersección entre estas dos restricciones de la siguiente manera:



Intersección entre:

$$7 X_1 + 10 X_2 = 700 \text{ restricción de madera.}$$

$$10 X1 + 8 X_2 = 800 \text{ restricción de tubo.}$$

Para hallar los valores de las variables de un sistema de éstos (sistema lineal de ecuaciones simultáneas) se puede realizar por igualación, sustitución, eliminación o cualquier otro método conocido.

Utilizando el método de eliminación así:

$$7 X_1 + 10 X_2 = 700)(-10)$$

$$10 X1 + 8 X_2 = 800)\ (7)$$

$$-44X_2 = -1400$$

Se multiplicó la primera ecuación por -10 y se le sumó a la segunda multiplicada por 7.

De tal forma que simplificando se obtiene el valor de $X_2 = \frac{350}{1}$, tomando este valor y reemplazándolo en cualquiera de las ecuaciones originales se halla el valor de la otra variable. Aquí se reemplazó en la primera ecuación así:

$7X_1 + 10\left(\frac{350}{1}\right) = 700$; despejando se obtiene lo siguiente:

$$X_1 = \frac{700 - \frac{3500}{11}}{7} = \frac{4200}{77} = \frac{600}{11}$$

Interpretación de la solución

Con base en esta solución, en la compañía SIGMA se deben producir 600/11 de bibliotecas (X1 = 600/11) y 350/11 de escritorios (X2 = 350/11). Con estas cantidades de producción se halla el ingreso máximo reemplazando la solución en la función objetivo así:

$$\text{MAX } Z = 9\left(\frac{600}{11}\right) + 10\left(\frac{350}{11}\right) = \frac{8900}{11}$$

El lector recordará que los precios de venta son $9000 y $10000 respectivamente; y que el problema ha sido resuelto con $9 y $10, por lo tanto el ingreso de la compañía es $8900000/11 (multiplicando por 1.000 el valor hallado de la función objetivo).

Análisis de recursos

Con base en la solución obtenida se puede calcular cuánto de cada recurso se consume y cuánto de cada recurso sobra; tan solo basta reemplazar los valores de las variables en cada una de las restricciones. En la tabla 3.2 se muestra este procedimiento.

TABLA 3.2

RECURSO	DISPONIBLE	CONSUMO	SOBRANTE
MADERA	700 METROS	7(600/11)+10(350/11)=700	0
TUBO	800 METROS	10(600/11)+8(350/11)=800	0
LIJA	900 METROS	6(600/11)+15(350/11)=8850/11	1050/11

Los datos de la tabla 3.2 indican que se consume toda la madera y todo el tubo (más que lógico, la solución óptima salió de la intersección de estas dos restricciones); y se consumen 8.850/11 de pliegos de papel de lija, por lo que quedan sobrando 1050/11 del mismo recurso.

3.1.2. Solución óptima múltiple

Una solución óptima múltiple se establece cuando al trasladar la recta Z no toca un solo punto extremo del área factible de solución; sino que por el contrario toca un segmento de recta. Cualquier combinación de producción sobre ese segmento de recta, será solución óptima para el problema. Para observar esto véase el ejercicio 3.1.2 descrito a continuación.

Ejercicio 3.1.2. La compañía Hierro Colado dispone semanalmente para la fabricación de sus artículos de 350 metros de lámina y 360 metros de ángulo. Además, se ha establecido que con esos recursos se fabrican puertas y ventanas para los cuales se ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 70 y 50 pesos por unidad respectivamente. También, se sabe por medio de un estudio de consumo de materiales que una puerta requiere de 7 metros de lámina y 4 metros de ángulo y que una ventana requiere de 5 metros de lámina y 9 metros de ángulo. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 puertas?

Solución
En la tabla 3.3 se presenta un resumen de la información de este ejercicio.

TABLA 3.3			
PRODUCTO RECURSO	**PUERTAS**	**VENTANAS**	**DISPONIBILIDAD**
LÁMINA	7 MET	5 MET	350 METROS
ANGULO	4 MET	9 MET	360 METROS
UTILIDAD UNITARIA	$70	$50	
VENTAS	MAX 40		

Utilizando el mismo procedimiento aplicado al ejercicio anterior, entonces se planteará primero el modelo.

Definición de variables

X_1 = Cantidad de puertas a fabricar por semana.

X_2 = Cantidad de ventanas a fabricar por semana.

Con base en esta definición el modelo a resolver se establece de la siguiente manera:

$$\text{MAX } Z = 70\,X_1 + 50X_2$$

S.A.

$7 X_1 + 5 X_2 \leq 350$. Restricción de metros de lámina.

$4 X_1 + 9 X_2 \leq 360$. Restricción de metros de ángulo.

$X_1 \leq 40$. Restricción de venta máxima de puertas.

$X_1, X_2 \geq 0$

A continuación se procede a graficar cada una de las restricciones sin ninguna explicación adicional; ya que este proceso es igual para cualquier tipo de problema. En la figura 3.5 se presenta la gráfica de todas las restricciones, junto con la función objetivo. Además, se sombrea el área factible de solución y el segmento de recta que corresponde a la solución óptima.

Primera restricción

$$7X_1 + 5X_2 = 350 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 70 \therefore (0,70) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50 \therefore (50,0) \end{cases}$$

Segunda restricción

$$4X_1 + 9X_2 = 360 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40 \therefore (0,40) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 90 \therefore (90,0) \end{cases}$$

Tercera restricción

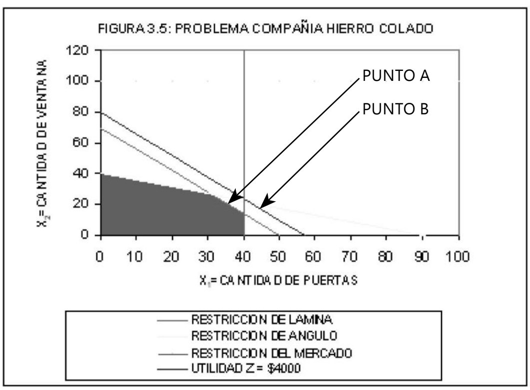
$$X_1 = 40.$$

Observará el lector que en esta restricción la única variable restringida es X_1; por lo tanto la otra variable puede tomar cualquier valor desde cero hasta el infinito. Esto se observa claramente en la figura 3.5.

Función objetivo

Dándole un valor a Z=4000 (arbitrario) se obtiene lo siguiente:

$$70X_1 + 50X_2 = 4000 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 80 \therefore (0,80) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 57.14 \therefore (57.14,0) \end{cases}$$



Tal como se observa en la figura 3.5 tanto el punto A como el punto B son solución óptima del problema; así como cualquier punto intermedio comprendido entre esos dos puntos. Si se toma la recta Z=4000, y se traslada paralelamente hacia el área factible de solución hasta que toque el primer punto de dicha área, tocará simultáneamente todos los puntos del segmento de recta AB. Por lo tanto se dice que este ejercicio tiene soluciones óptimas múltiples.

Como son infinitos puntos (soluciones) los que hay en el segmento de recta; entonces, sólo vamos a hallar los dos extremos. Estos dos extremos son justamente los puntos A y B.

Solución en el punto A

En este punto se interceptan las dos primeras restricciones (lámina y ángulo). Utilizando el método de eliminación, se multiplica la primera ecuación por -4 y la segunda por 7; seguidamente se suman para eliminar la variable X_1, y poder despejar la variable X_2.

$$\begin{array}{c} (7X_1 + 5X_2 = 350)\ (-4) \\ (4X_1 + 9X_2 = 360)\ (7) \\ \hline 43X_2 = 1120 \end{array}$$

$X_2 = \frac{1120}{43}$, teniendo el valor de X_2, se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de X_1 así:

$$7X_1 + 5\left(\frac{1120}{43}\right) = 350$$

$$X_1 = \frac{350 - \frac{5600}{43}}{7} = \frac{1350}{43}$$

Esto indica que se deben producir 1.350/43 de puertas y 1.120/43 de ventanas. La utilidad generada por esta solución se calcula de la siguiente manera:

$$MaxZ = 70\left(\frac{1.350}{43}\right) + 50\left(\frac{1.120}{43}\right) = \frac{94.500}{43} + \frac{56.000}{43} = \frac{150.500}{43} = \$3.500$$

TABLA 3.4			
PRODUCTO	DISPONIBILIDAD	CONSUMO	SOBRA
LÁMINA	350 METROS	7(1350/43)+5(1120/43)=350	0
ÁNGULO	360 METROS	4(1350/43)+9(1120/43)=360	0
VENTAS	40 UNIDADES	X_1=1350/43	370/43

Del análisis de recursos de esta solución presentado en la tabla 3.4, se concluye que se está consumiendo la totalidad de lámina y ángulo; mientras que de la restricción de venta máxima de puertas establecida en 40 unidades, se venden 370/43 menos. Pues, se están produciendo solo 1.350/43 de puertas. El lector curioso podrá comprobar que 1.350/43 + 370/43 da exactamente el límite de la restricción establecido en 40 unidades de venta máxima de puertas.

Solución en el punto B

En este punto se interceptan la segunda y la tercera restricción. Es decir de la restricción de ángulo y la venta máxima de puertas. De esta última restricción se parte del hecho que X_1 es igual a 40. Por lo tanto, sólo se reemplaza este valor en la restricción de ángulo para establecer el valor de X_2 de la siguiente manera:

$$70(40) + 5X_2 = 350$$

$$5X_2 = 350 - 280$$

$$X_2 = \frac{70}{5} = 14$$

Para obtener un máximo de la función objetivo de:

$$\text{MAX } Z = 70(40) + 50(14) = 3500.$$

Con base en esta solución se deben producir 40 puertas y 14 ventanas, para obtener una utilidad máxima de $3.500 por semana. Además, del análisis de recursos presentado en la tabla 3.5 se concluye que no se utilizan 74 metros de ángulo.

La utilidad de $3.500 pesos se obtiene para las dos soluciones halladas en este ejercicio; razón de sobra para tener soluciones óptimas múltiples.

TABLA 3.5			
RECURSO	**DISPONIBILIDAD**	**CONSUMO**	**SOBRA**
LÁMINA	350 METROS	7(40)+5(14)=350	0
ÁNGULO	360 METROS	4(40)+9(14)=286	74 MTS
VENTA	40 UNIDADES	X_1=40	0

3.1.3. Solución no acotada

En este tipo de problemas la solución se presenta en el infinito; ya que por más que uno traslade la recta Z paralelamente para buscar el punto más lejano del área factible de solución, nunca llegará. Esto se aprecia fácilmente con la aplicación del siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.1.3. Una fábrica de artesanías se dedica a la producción de bolsos y chaquetas, los cuales comercializa directamente a los clientes en la plaza España. La venta de un bolso genera una utilidad de $2.000 y consume 5 horas de mano de obra; mientras que la venta de una chaqueta genera una utilidad de $3.000 y consume 9 horas de mano de obra. Por políticas de la compañía se requiere no mantener en ocio a sus trabajadores y por lo tanto se debe consumir en la producción un mínimo de 450 horas de mano de obra por mes. ¿Qué cantidad de bolsos y chaquetas se debe fabricar, si por estudio de mercados se sabe que mínimo se venderán 20 chaquetas y como máximo 30 bolsos por mes?

Solución

En la tabla 3.6 se presenta en forma resumida la información de la empresa de artesanías.

TABLA 3.6			
PRODUCTO	**BOLSOS**	**CHAQUETAS**	**CONSUMO**
MANO DE OBRA	5 horas	9 horas	MIN 450 horas
VENTA MíNIMA		20	
VENTA MAXIMA	30		
UTILIDAD	$2.000	$3000	

Definición de variables

X_1 =Cantidad de bolsos a fabricar por mes.

X_2 =Cantidad de chaquetas a fabricar por mes.

Con base en la definición de las variables el modelo matemático de programación lineal queda de la siguiente forma:

Máx. $Z = 2000\,X_1 + 3000X_2$

Sujeto a

$5X_1 + 9\,X_2 \geq 450$

$X_1 \leq 30$

$X_2 \geq 20$

$X_1, \quad X_2 \geq 0$

Del mismo modo utilizado en los problemas anteriores se grafican las restricciones, se determina el área factible de solución y se grafica la función objetivo. Esto se visualiza en la figura 3.6.

Primera restricción

$$5X_1 + 9X_2 = 450 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 50 \therefore (0,50) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 90 \therefore (90,0) \end{cases}$$

En la figura 3.6, esta restricción se aprecia sombreada en sentido contrario al origen, situación más que lógica, por cuanto el sentido de la restricción dice que es mayor o igual.

Segunda restricción

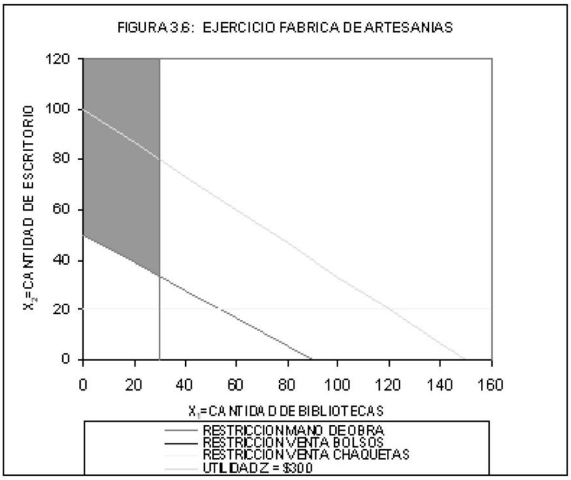
$X_1 \leq 30$. Para esta restricción se traza una línea recta donde la variable es igual a 30, y se extiende al infinito paralela al eje X_2.

Tercera restricción

$\mathbf{X_2} \geq 20$. El sentido de esta restricción es mayor o igual por lo que se traza una línea recta en X_2 igual a 20; y el área factible de esta restricción es de esta línea hasta el infinito.

Función objetivo

Para graficar la función objetivo se omiten los tres ceros (se divide por mil; e igual que en los ejercicios anteriores se supone un valor arbitrario de Z, en este caso de 300.



$$2X_1 + 3X_2 = 300 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 100 \therefore (0{,}100) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 150 \therefore (150{,}0) \end{cases}$$

Tal como se observa en la figura 3.6, el área factible de solución es la parte sombreada que termina hacia arriba en el infinito. Para este problema se está buscando un punto máximo; pero, si se trata de trasladar la recta Z en sentido contrario al origen hasta alcanzar el último punto del área factible de solución; no se llegaría nunca, pues este punto se encuentra en el infinito. Para todo tipo de problemas como éste; en el que el óptimo se encuentra en el infinito se dice que tienen **solución no acotada o ilimitada**.

3.1.4. Problema sin solución

Un problema no tiene solución cuando no tiene área factible de solución; esto es que no hay un solo punto que satisfaga la totalidad de las restricciones del problema. Para que un problema tenga solución debe tener por lo menos un punto común en todas las restricciones. Esto se puede observar mediante la realización del ejercicio 3.1.4.

Ejercicio 3.1.4. La compañía Epsilon produce baldosas y tabletas, las cuales generan una contribución a las utilidades de $5.000 y $4.000 por metro cuadrado respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad de 200 metros cuadrados de arena y 240 metros cuadrados de cemento por semana. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un metro cuadrado de baldosas se requieren 4 metros cuadrados de arena y 3 metros cuadrados de cemento; mientras que para producir un metro cuadrado de tableta se requieren 5 metros cuadrados de arena y 8 metros cuadrados de cemento?. Suponga además, que el cliente garantiza comprar como mínimo 50 metros cuadrados de tableta.

Solución

En la tabla 3.7 se presenta una mejor visualización de la información de la compañía Epsilon.

TABLA 3.7			
RECURSO	**PRODUCTO**		**DISPONIBILIDAD**
	BALDOSAS	**TABLETAS**	
ARENA	4 M^2	5 M^2	200 M^2
CEMENTO	3 M^2	8 M^2	240 M^2
VENTA MÍNIMA		50 M^2	
UTILIDAD	$5000	$4000	

Definición de variables

A esta compañía le interesa saber cuántos metros cuadrados de cada producto fabricar para obtener su máxima utilidad; por lo que las variables quedan definidas de la siguiente manera:

X_1 = metros cuadrados de baldosas a fabricar por semana.

X_2 = metros cuadrados de tabletas a fabricar por semana.

Por lo tanto el modelo matemático de programación lineal queda planteado de la siguiente forma:

$$\text{Máx. } Z = 5.000\, X_1 + 4.000\, X_2$$

S.A.

$$4\, X_1 + 5\, X_2 \leq 200$$

$$3\, X_1 + 8\, X_2 \leq 240$$

$$X_2 \geq 50$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

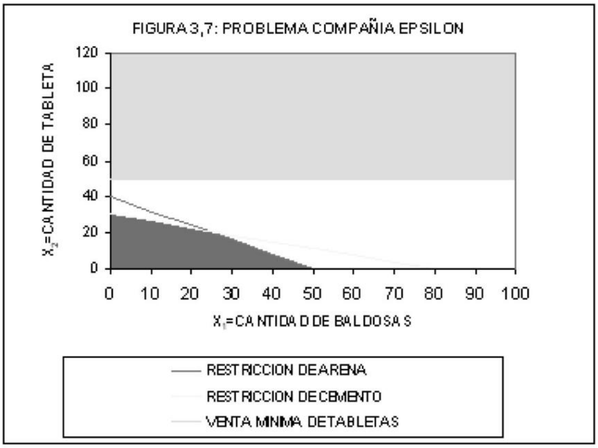
Para hallar la solución de este problema se comienza por graficar las restricciones de problema. Esto se muestra en la figura 3.7.

Primera restricción

$$4X_1 + 5X_2 = 200 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40 \therefore (0,40) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50 \therefore (50,0) \end{cases}$$

Segunda restricción

$$3X_1 + 8X_2 = 240 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 30 \therefore (0,30) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 80 \therefore (80,0) \end{cases}$$



Tercera restricción

$X_2 \geq 50.$

Como se puede observar en la figura 3.7, las primeras dos restricciones tiene un área común; pero ésta no se intercepta en ningún punto con el área factible de la tercera restricción, por lo tanto se concluye que el problema no tiene solución.

Como se puede notar no se graficó la función objetivo; lo cual no es necesario ya que a pesar de lo que diga la función objetivo el problema no tiene solución. Una explicación más técnica de esta aplicación es que la empresa se comprometió a vender 50 metros cuadrados de tabletas, sin contar que los recursos (arena y cemento); los cuales no alcanzan para producir esa cantidad. Para que este problema tenga solución hay que incrementar la capacidad de los recursos o disminuir la cantidad a vender.

Problemas de minimización

Solución única

No se va a repetir la definición de solución única nuevamente aquí, ya que el concepto es el mismo definido para un problema de maximización.

Ejercicio 3.2.1. Los Horses, una empresa dedicada al criadero de caballos de paso, ha establecido que a cada uno de ellos se le debe suministrar diariamente un mínimo de 200 miligramos de vitamina A, un mínimo de 160 miligramos de vitamina B y un mínimo de 150 miligramos de vitamina C. Los caballos son alimentados con matas de pasto y mineral, las cuales le cuestan a la compañía $300 por mata de pasto y $500 por libra de mineral. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar a cada caballo diariamente? si se sabe que una mata de pasto contiene 4 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 5 miligramos de vitamina C; mientras que una libra de mineral contiene 5 miligramos de vitamina A, 8 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C.

Solución

En la tabla 3.8 se especifican los costos de los alimentos, cantidad de vitaminas necesarias y el contenido de vitaminas de cada alimento. Recuerde el lector del primer capítulo que este problema es una aplicación de la dieta.

TABLA 3.8			
TIPO DE VITAMINA	TIPO DE ALIMENTO		MÍNIMO NECESARIO
	PASTO	MINERAL	
VITAMINA A	4 mg	5 mg	200 mg
VITAMINA B	2 mg	8 mg	160 mg
VITAMINA C	5 mg	3 mg	150 mg
COSTO	$300/mata	$500/libra	

X_1 = Matas de pasto que se deben suministrar a cada caballo diariamente.

X_2 = Libras de mineral que se deben suministrar a cada caballo diariamente.

De acuerdo con la anterior definición el modelo queda así:

$$\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 \geq 200$$
$$2\,X_1 + 8\,X_2 \geq 160$$
$$5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 150$$
$$X_1,\quad X_2 \geq 0$$

El procedimiento para graficar, tanto las restricciones como la función objetivo es el mismo que se utilizó para un problema de maximización.

Primera restricción

$$4X_1 + 5X_2 = 200 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40 \therefore (0,40) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50 \therefore (50,0) \end{cases}$$

Segunda restricción

$$2X_1 + 8X_2 = 160 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 20 \therefore (0,20) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 80 \therefore (80,0) \end{cases}$$

Tercera restricción

$$5X_1 + 3X_2 = 150 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 50 \therefore (0,50) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 30 \therefore (30,0) \end{cases}$$

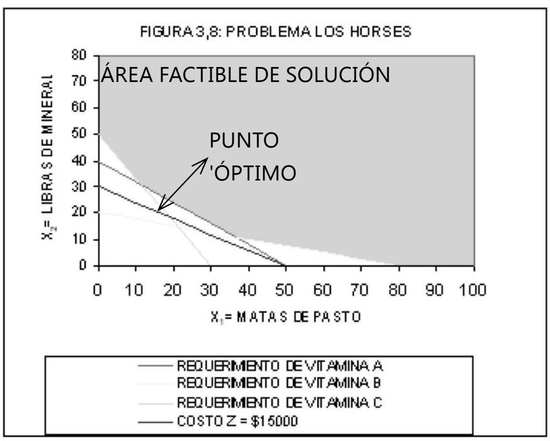
Obsérvese en la figura 3.8, que el área sombreada para las restricciones va en sentido contrario al origen, pues las restricciones son mayores o iguales. El área sombreada en esa gráfica es el área factible de solución del problema y tiende al infinito.

Función objetivo

Estableciendo un valor arbitrario de 15.000 para Z, se obtiene lo siguiente:

$$300X_1 + 500X_2 = 15000 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 30 \therefore (0,30) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50 \therefore (50,0) \end{cases}$$

La recta generada por Z = 15.000, también se puede apreciar en la figura 3.8. Para obtener el punto óptimo en un problema de minimización se busca el punto del área factible de solución más cercano al origen (al contrario de un problema de maximización, en el que se buscaba el más lejano del origen), teniendo en cuenta la inclinación (pendiente) de la función objetivo.



Obsérvese en la figura 3.8 que la recta Z = 15.000, quedó abajo del área factible de solución; entonces se traslada paralelamente hacia el área factible de solución, hasta tocar el primer punto y este se determina como el óptimo. En el caso en que la recta Z graficada quede cortando el área factible de solución, entonces se traslada paralelamente hacia el origen hasta tocar el último punto del área factible de solución. (Este será el punto óptimo).

Cálculo de las coordenadas en el punto óptimo

Como se puede apreciar en la figura 3.8, el punto óptimo se encuentra en la intersección del límite mínimo de consumo de vitaminas A y B; en este caso la intersección entre la primera y segunda restricción. Utilizando cualquier método algebraico se encontraran los valores de las variables.
Para este caso se multiplicará la segunda restricción por -2 y se le sumará la primera restricción, para efectos de eliminar la primer variable así:

$$(4X_1 + 5X_2 = 200)$$
$$(2X_1 + 8X_2 = 160)(-2)$$
$$\overline{\qquad -11X_2 = -120 \qquad}$$

$X_2 = \frac{120}{11}$, con base en este valor se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de la otra variable de la siguiente manera:

$$4X_1 + 5\left(120/11\right) = 200$$

$X_1 = \frac{200 - \frac{600}{11}}{4} = \frac{400}{11}$; con base en los resultados de las dos variables se obtiene un valor mínimo de la función objetivo así:

$$MinZ = 300\left(\frac{400}{11}\right) + 500\left(\frac{120}{11}\right) = \frac{180000}{11}$$

Con base en esta solución en la tabla 3.9 se presenta un análisis del consumo de vitaminas de cada caballo y cuánto está consumiendo por encima del mínimo requerido (última columna de la tabla).

TABLA 3.9			
TIPO DE VITAMINA	**REQUERIMIENTO MINIMO**	**CONSUMO DE VITAMINAS**	**CONSUMO ARRIBA DEL MINIMO**
VITAMINA A	200 mg	4(400/11)+5(120/11)=200	0
VITAMINA B	160 mg	2(400/11)+8(120/11)=160	0
VITAMINA C	150 mg	5(400/11)+3(120/11)=2360/11	710/11

Interpretación de la solución

De acuerdo con los resultados obtenidos a cada caballo se le debe suministrar diariamente 400/11 de matas de pasto y 120/11 de libras de mineral para obtener un costo mínimo de \$180.000/11. Además, cada caballo consumirá 200 miligramos de vitamina A, 160 miligramos de vitamina B y 2.360/11 miligramos de vitamina C (consume 710/11 miligramos de vitamina C por encima del requerimiento mínimo). El lector puede corroborar que 2360/11 – 710/11 da exactamente 150.

3.2.2. Solución óptima múltiple

Al igual que para un problema de maximización, también se puede obtener muchas soluciones óptimas en un problema de minimización. Esto ocurre cuando el óptimo se establece como un segmento de recta y no en un solo punto. El ejercicio 3.2.2 ejemplifica esta situación.

Ejercicio 3.2.2. Combustibles Dextra produce gasolina y ACPM a un costo de 2.000 y 4.000 pesos por galón respectivamente. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un galón de gasolina se requieren 4 horas hombre de trabajo, 6 horas máquina y 8 litros de petróleo; mientras que para producir un galón de ACPM se requieren 8 horas hombre de trabajo, 5 horas máquina y 10 litros de petróleo. Además, se sabe que para que no haya subutilización de los recursos se deben consumir mínimo 320 horas hombre y mínimo 300 horas máquina al mes. ¿Qué cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe hay una disponibilidad mensual de 800 litros de petróleo?

Solución

En la tabla 3.10 se presenta toda la información de la compañía Dextra.

TABLA 3.10				
RECURSO	PRODUCTO		DISPONIBILIDAD	CONSUMO MINIMO
	GASOLINA	ACPM		
HORAS HOMBRE	4 HORAS	8 HORAS		320 HORAS
HORAS MAQUINA	6 HORAS	5 HORAS		300 HORAS
PETROLEO	8 LITROS	10 LITROS	800 LITROS	
COSTO	\$2000	\$4000		

Definición de variables

X_1 = Galones de gasolina que se debe fabricar por mes.

X_2 = Galones de acpm que se debe fabricar por mes.

Teniendo en cuenta la definición de las variables el modelo matemático queda planteado de la siguiente manera.

Min. Z = 2000 X_1 + 4000 X_2

S.A.

4 X_1 + 8 X_2 ≥ 320

6 X_1 + 5 X_2 ≥ 300

8 X_1 + 10 X_2 ≤ 800

X_1, X_2 ≥ 0.

Nuevamente, siguiendo el mismo proceso utilizado hasta el momento; se grafican las restricciones y la función objetivo. Esto se muestra en la figura 3.9, donde se encuentra sombreada el área factible de solución; así como los puntos óptimos.

Primera restricción

$$4X_1 + 8X_2 = 320 \Rightarrow \begin{cases} si \to X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40 \therefore (0,40) \\ si \to X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 80 \therefore (80,0) \end{cases}$$

Segunda restricción

$$6X_1 + 5X_2 = 300 \Rightarrow \begin{cases} si \to X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 60 \therefore (0,60) \\ si \to X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 50 \therefore (50,0) \end{cases}$$

Tercera restricción

$$8X_1 + 10X_2 = 800 \Rightarrow \begin{cases} si \to X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 80 \therefore (0,80) \\ si \to X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 100 \therefore (100,0) \end{cases}$$

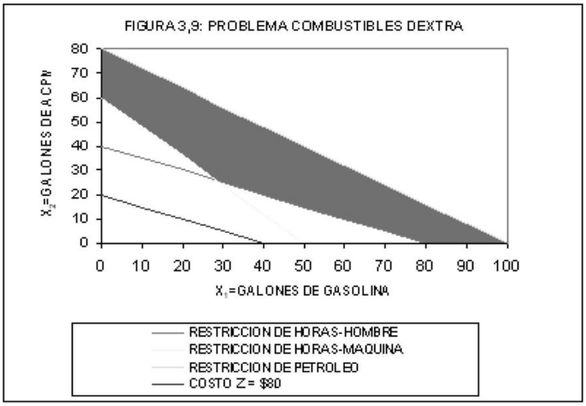
Función objetivo

En la función objetivo Min Z = 2000 X_1 + 4000 X_2 se van a omitir los tres ceros para facilidad en el cálculo y al final en la interpretación el resultado se multiplica por mil. Estableciendo un valor arbitrario de 80 para Z, se obtiene lo siguiente:

$$2X_1 + 4X_2 = 80 \Rightarrow \begin{cases} si \to X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 20 \therefore (0,20) \\ si \to X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 40 \therefore (40,0) \end{cases}$$

OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

La recta Z=80, quedó debajo del área factible de solución, por lo que se traslada paralelamente hacia esta área hasta que toque el primer punto de la misma. Se observa que toca simultáneamente el punto A y el punto B (créame o hágalo); y todos los puntos intermedios en este segmento de recta. Esto indica que el problema tiene muchas soluciónes óptimas.



En lo que respecta a este texto se hallará la solución en los dos puntos extremos del segmento de recta que es solución óptima del problema.

Solución en el punto a

Como se puede observar en la figura 3.9; en el punto A se intersectan las dos primeras restricciones. Entonces, se utiliza el siguiente procedimiento para encontrar los valores de las variables.

$$(4X_1 + 8X_2 = 320)*(6)$$
$$(6X_1 + 5X_2 = 300)(-4)$$
$$28X_2 = 720\text{, y despejando se obtiene:}$$
$$X_2 = 720/28 = 360/14 = 180/7$$

Tomando el valor de X_2 y reemplazándolo en cualquiera de estas dos restricciones se obtiene:

$4X_1 + 8(180/7) = 320$, despejando se obtiene que $X_1 = 200/7$. Con lo cual se obtiene un costo mínimo de: Min $Z = 2(200/7) + 4(180/7) = \$160$.

Interpretación de la solución en el punto A

Esta solución indica que se deben producir 200/7 de galones de gasolina (X_1=200/7) y 180/7 de galones de ACPM (X_2=180/7) para obtener un costo total mínimo de $160.000. (Recuerde que se había dividido por mil la función objetivo).

El lector podrá corroborar que se consume exactamente 320 horas hombre y 300 horas máquina. (Reemplace la solución en las restricciones. Además, de los 800 litros de petróleo disponibles, se consumen en la producción 3.400/7; por lo que están sobrando 2.200 litros de este recurso.

Solución en el punto B

Como se puede observar en la figura 3.9, la solución es directa y es X_1=80 y X_2=0; para obtener un costo mínimo de la siguiente forma:

$$\text{Min } Z = 2(80) + 4(0) = \$160.$$

Interpretación de la solución en el punto B.

Para esta solución se deben producir 80 galones de gasolina y cero galones de ACPM para obtener un costo mínimo de $160.000.

En esta solución se consumen exactamente 320 horas hombre, 480 horas máquina (recuerde que el mínimo a consumir es 300, por lo que se está consumiendo 180 horas máquina por encima del mínimo establecido) y 640 litros de petróleo (hay una disponibilidad de 800 litros; luego están sobrando 160). litros.

Obsérvese, que los dos valores de la función objetivo hallados son exactamente el mismo ($160.000); esto lógicamente debe ser así, pues se está asegurand o que el problema tiene soluciónes óptimas múltiples.

3.2.3. Solución no acotada

Recordando la definición de no acotamiento, se dice que el área factible de solución tiende al infinito y al trasladar la función objetivo no se llega aún punto óptimo; ya que éste también se encuentra en el infinito.

Ejercicio 3.2.3. La compañía Siderurgia Ltda. produce un tipo de aleación especial compuesta por sílice y aluminio; los cuales compra a $3.000 y $5.000 por kilogramo respectivamente. Además, se sabe que la utilización de un kilogramo de sílice consume 5 miligramos de material radioactivo y 2 litros de agua; mientras que la utilización de un kilogramo de aluminio consume 4 miligramos de material radioactivo y da lugar a la aparición de 3 litros de agua. Por política de la compañía se debe consumir mínimo 20 miligramos de material radiactivo y se cuenta con una disponibilidad de 6 litros de agua. ¿Qué cantidad de sílice y aluminio se debe utilizar en la aleación si se sabe que se debe utilizar como máximo 8 kilogramos de sílice y que el gobierno nacional subsidia con $15.000 la utilización de cada kilogramo de aluminio?

Solución

La tabla 3.11 muestra la información básica para la aleación que hay que producir; de lo cual hay que decir que el subsidio que suministra el gobierno se convierte en ingreso para la compañía, y además, el negativo en agua consumida para el aluminio indica que no se está consumiendo; sino todo lo contrario, la utilización del aluminio genera agua.

TABLA 3.11				
	SILICE	**ALUMINIO**	**CONSUMO**	**DISPONIBLE**
MATERIAL RADIOACTIVO	5 mg	4	MIN 20 mg	
AGUA CONSUMIDA	2 lt	-3 lt		6 litros
CONSUMO MÁXIMO	8 Kg			
COSTO	$3000	$5000		
SUBSIDIO		$15000		

Para el planteamiento de este ejercicio se definen las siguientes variables:

X_1 = Kilos de sílice a utilizar en la aleación.

X_2 = Kilos de aluminio a utilizar en la aleación.

Antes de generar el modelo vale la pena aclarar que se va a resolver como minimización de costos; por lo tanto el coeficiente que aparece en la variable X_2 sale de su costo de $5000 menos el subsidio del gobierno por $15.000 (5.000-15.000=-10.000), que es el coeficiente que aparece en la función objetivo para la segunda variable. Teniendo en cuenta estas observaciones, el modelo matemático de programación lineal queda planteado de la siguiente manera:

$$\text{Min } Z = 3.000\, X_1 \; -10.000\, X_2$$

Sujeto a

$$5\, X_1 + 4\, X_2 \geq 20$$

$$2\, X_1 - 3\, X_2 \leq 6$$

$$X_1 \qquad \leq 8$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

En este momento se procede a graficar las restricciones para determinar el área factible de solución; seguido de graficar la función objetivo para establecer el óptimo. En la figura 3.10 se puede apreciar cada una de las restricciones así como la función objetivo. Para hallar los puntos de corte con los ejes se utiliza el mismo procedimiento mencionado en todo el texto así:

Primera restricción

$$5X_1 + 4X_2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5 \therefore (0,5) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 4 \therefore (4,0) \end{cases}$$

Segunda restricción

$$2X_1 - 3X_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = -2 \therefore (0,-2) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3 \therefore (3,0) \end{cases}$$

Tercera restricción

$X_1 \leq 8$, esta restricción es directa con una paralela al eje X2, en donde $X_1 = 8$, y se demarca la parte menor o igual.

Función objetivo

Con un valor arbitrario de Z=30, se obtiene lo siguiente:

$$3X_1 - 10X_2 = 30 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = -3 \therefore (0,-3) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10 \therefore (10,0) \end{cases}$$

Hay que observar que se han tomado como coordenadas valores negativos; pero no se ha tomado como área factible de las restricciones las partes negativas, pues es claro que las variables deben tener la condición de no negatividad.

Interpretación de la solución

Para hallar el punto mínimo hay que trasladar la recta Z paralelamente hacia arriba (verifique que si subimos esta recta, el valor de Z disminuye), hasta cuando toque el último punto del área factible de solución.

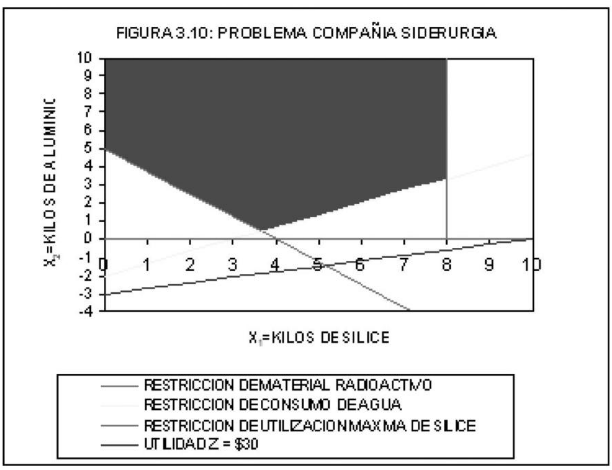


FIGURA 3.10: PROBLEMA COMPAÑIA SIDERURGIA

Entonces, como se puede observar en la figura 3.10, nunca se llegará a este punto; pues éste se encuentra localizado en el infinito. A ésto se le denomina solución óptima no acotada o ilimitada.

3.2.4. Problema sin solución

Nuevamente, aquí vale recordar que un problema no tiene solución si no hay un solo punto que satisfaga la totalidad de restricciones del problema.

Ejercicio 3.2.4. Una compañía fabricante de calzado "El Pie Feliz" ha establecido que máximo venderá 30 pares de zapatos y como mínimo 40 pares de tenis. Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 180 metros de cuero y se ha establecido que el costo de producción de cada par de zapatos es de \$5.000 y de cada par de tenis es de \$4.000.

Utilice el método gráfico para determinar que cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar a fin de minimizar los costos totales de fabricación, si se sabe que un par de zapatos consume 3 metros de cuero y un par de tenis consume 6 metros de cuero.

Solución

Para empezar a soluciónar este ejercicio se definen las variables siguientes:

X_1 = Cantidad de zapatos a producir por mes.

X_2 = Cantidad de tenis a producir por mes.

Con base en esta definición de variables, el planteamiento del modelo matemático queda como sigue a continuación:

$$\text{Min } Z = 5.000\,X_1 + 4.000\,X_2$$

S.A.

$$3\,X_1 + 6\,X_2 \leq 180$$

$$X_1 \leq 30$$

$$X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Para graficar nuevamente se hallan los puntos de corte con los ejes.

Primera restricción

$$3X_1 + 6X_2 = 180 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 30 \therefore (0,30) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 60 \therefore (60,0) \end{cases}$$

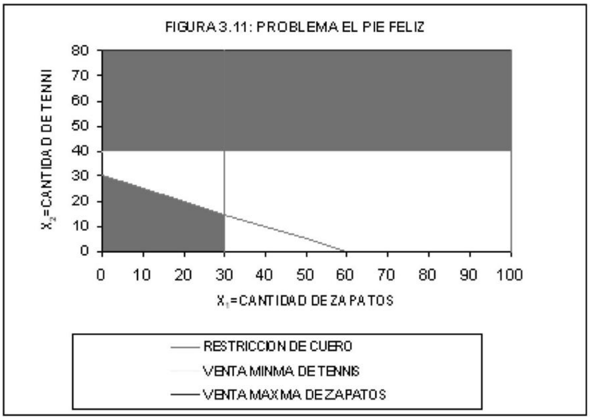
Esta restricción, su sentido dice que es menor e igual, por lo tanto se sombrea hacia el origen.

Segunda restricción

$X_1 \leq 30$, esta restricción, tan solo es trazar una recta paralela al eje X_2, donde $X_1 = 30$. Su área factible de solución es hacia el lado izquierdo para representar el menor o igual.

Tercera restricción

$X_2 \geq 40$, esta restricción, tan solo es trazar una recta paralela al eje X_1, donde $X_2 = 40$. Su factibilidad está dada de esa recta al infinito, pues su sentido es mayor o igual.



En la figura 3.11 la parte sombreada en rojo es el área factible para las dos primeras restricciones; mientras que la zona sombreada en azul es el área que satisface la tercera restricción. Como se puede observar, estos dos sombreados no se encuentran en ningún punto; por consiguiente el problema no tiene solución. La explicación comercial y técnica es que el departamento de ventas se ha con prometido a vender mucha cantidad de tenis, sin tener en cuenta los recursos limitados. No justifica realizar la representación gráfica de la función objetivo, ya que no tiene ninguna incidencia en la no solución.

3.2.5. Solución degenerada

Un problema de programación lineal genera solución básica factible degenerada cuando dentro del mismo hay restricciones de carácter redundante; es decir, hay más de una restricción que genera la misma área factible, por lo tanto la solución no varia si se elimina una de estas restricciones (si hay más de dos restricciones que generen la misma área factible, se pueden eliminar todas menos una y la solución no cambiará).

Ejercicio 3.2.5. La compañía Los Cristales, produce vidrios florentinos y martillados para los cuales ha establecido un costo de \$20.000 y \$40.000 por unidad respectivamente (una unidad equivale a un vidrio de 120 centímetros de ancho, 180 centímetros de largo y 5 milímetros de espesor). Para la fabricación de estos productos se cuenta con una disponibilidad semanal de 240 horas hombre, 420 horas horno y 480 unidades de materia prima. Establezca qué cantidad de cada tipo de vidrio se debe fabricar a fin de minimizar el costo de producción si se sabe que para producir un vidrio florentino se requieren 8 horas hombre, 6 horas en el horno y 16 unidades de materia prima; mientras que para producir un vidrio martillado se requieren 3 horas hombre, 7 horas de proceso en el horno y 6 unidades de materia prima. Suponga, que el departamento de ventas ha pronosticado que mínimo se venderán 40 vidrios entre los 2 tipos.

Solución

La compañía Los Cristales, debe decidir qué cantidad de vidrios florentinos y martillados debe producir de tal forma que satisfaga las condiciones y se genere el mínimo de costo total posible; de tal forma que las variables quedan definidas de la siguiente forma:

X_1 = Cantidad de vidrios florentinos a fabricar semanalmente.

X_2 = Cantidad de vidrios martillados a fabricar semanalmente.

De acuerdo con la anterior definición la función objetivo (minimización de costos) y las restricciones que conforma el modelo se establecen como aparece a continuación:

$$\text{Min } Z = 20.000\, X_1 + 40.000\, X_2$$

Sujeto a

$8X_1 + 3X_2 \leq 240$. Disponibilidad de horas hombre.

$6X_1 + 7X_2 \leq 420$. Disponibilidad de horas en el horno.

$16X_1 + 6X_2 \leq 480$. Disponibilidad de materia prima.

$X_1 + X_2 \geq 40$. Venta mínima entre los dos productos.

$X_1, X_2 \geq 0$

En este momento se procede a graficar las restricciones para determinar el área factible de solución; seguido de graficar la función objetivo para establecer el óptimo. En la figura 3.12 se puede apreciar cada una de las restricciones así como la función objetivo. Para hallar los puntos de corte con los ejes se utiliza el mismo procedimiento mencionado a través de todo el texto así:

Primera restricción

$$8X_1 + 3X_2 = 240 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 80 \therefore (0,80) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 30 \therefore (30,0) \end{cases}$$

Segunda restricción

$$6X_1 + 7X_2 = 420 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 60 \therefore (0,60) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 70 \therefore (70,0) \end{cases}$$

Tercera restricción

$$16X_1 + 6X_2 = 480 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 80 \therefore (0,80) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 30 \therefore (30,0) \end{cases}$$

Cuarta restricción

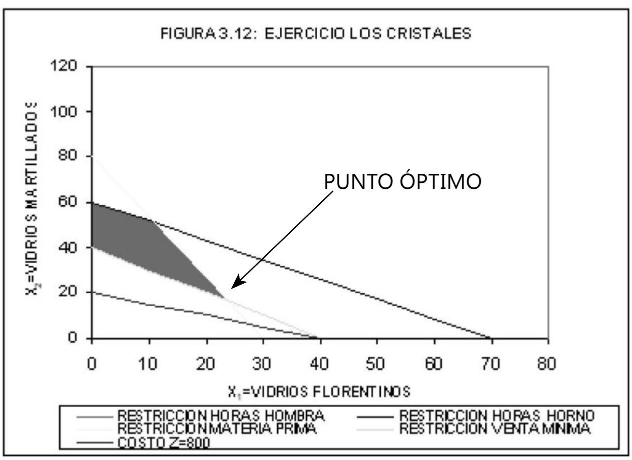
$$X_1 + X_2 = 40 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 40 \therefore (0,40) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 40 \therefore (40,0) \end{cases}$$

Observe el lector que los puntos de corte con los ejes de la primera y tercera restricción son los mismos, razón de más para que en la figura 3.12 aparezca una recta sobre la otra; y razón más que obvia de que se pueda eliminar una de estas restricciones sin que afecte la solución del problema.

Función objetivo

Tomando como valor arbitrario de Z=800, y dividiendo por mil la función objetivo, se obtiene lo siguiente:

$$20X_1 + 40X_2 = 800 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 20 \therefore (0,20) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 40 \therefore (40,0) \end{cases}$$



Tal como se puede apreciar el la figura 3.12; se traslada la recta Z=800 en sentido contrario al origen hasta que toque el primer punto del área factible de solución, que es justamente el punto señalado; en este caso la intersección de la restricción de venta mínima con la restricción de horas hombre o la restricción de materia prima (recuerde que estas dos restricciones están en la misma recta). Para hallar las coordenadas en el punto optimo se toma la intersección entre entre la tercera y la cuarta restricción.

Multiplicando la cuarta restricción y sumándosela a la tercera se obtiene lo siguiente:

$10X_1 = 240 \Rightarrow X_1 = 24$. Tomando este valor y reempezándolo en cualquiera de las restricciones interceptadas se obtiene lo siguiente (aquí se reemplaza en la cuarta restricción):

$$24 + X_2 = 40 \Rightarrow X_2 = 16.$$

Interpretación de la solución

Con base en estos valores se debe producir 24 vidrios florentinos y 14 vidrios martillados para obtener un costo mínimo de fabricación de $1.120.000; que se obtiene de reemplazar la solución en la función objetivo así:

$$20(24) + 40(16) = \$1120$$

Recuerde, que para graficar se dividió la función objetivo en mil; por lo tanto aquí se obtiene el valor multiplicando por mil.

El lector puede corroborar mediante un análisis de recursos que se utilizan 240 horas hombre, 480 unidades de materia prima y se fabrican exactamente las 40 unidades que como mínimo se debían fabricar; mientras que de horas en el horno se utilizan 256, por lo que quedan sobrando 164 horas.

3.2.6. Restricciones de igualdad

Hasta el momento se han resuelto todo tipo de problemas, exceptuando problemas que incluyan al menos una restricción de solo igualdad. El ejercicio 3.2.6 permite apreciar esta situación.

Ejercicio 3.2.6. Cierta compañía transportadora dispone de 12 camionetas y 6 camiones para el transporte de su producto. Actualmente la compañía debe entregar 80 toneladas de su producto y se sabe que una camioneta tiene capacidad para transportar 8 toneladas, mientras que un camión puede transportar 10 toneladas; además, se sabe que el costo que se genera por asignar una camioneta es de $3 por kilómetro y por asignar un camión es de $5 por kilómetro. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe asignar, si se sabe que la distancia a recorrer es de 100 kilómetros y que por cada camión dejado en reserva, se debe dejar mínimo una camioneta en reserva?

Solución

En la tabla 3.12 se presenta un resumen de la información a tener en cuenta en la solución del problema de la compañía transportadora. La decisión que se debe tomar en esta compañía es determinar que cantidad de camionetas y camiones debe asignar para satisfacer lo requerimientos; por lo que las variables de decisión quedan definidas de la siguiente manera:

X_1= cantidad de camionetas asignadas

X_2= cantidad de camiones asignados.

TABLA 3.12			
	CAMIONETAS	**CAMIONES**	**ENTREGA**
Disponibles	12	6	
Capacidad	8tn	10tn	80tn
Costo / Km.	\$3	\$5	
Reserva	Min 1	1	

Con base en la definición de las variables el modelo matemático de programación lineal se estructura de la siguiente manera:

Min. $Z = 300 X_1 + 500 X_2$ (Costo mínimo)
s.a.

$X_1 \leq 12$. restricción de disponibilidad de camionetas.

$X_2 \leq 6$. restricción de disponibilidad de camiones.

$8 X_1 + 10 X_2 = 80$. restricción de las toneladas a transportar.

$X_1 - X_2 \leq 6$ restricción de vehículos en reserva.

$X_1, X_2 \geq 0$

Observese, que la tercera restricción de este problema es estrictamente igual; pues se deben transportar exactamente 80 toneladas de producto y la función objetivo se ha multiplicado por 100; pues el costo está dado por kilómetro y son 100 kilómetros el recorrido.

Ademas, cabe aclarar la última restricción (restricción de reserva de camionetas y camiones) de la siguiente forma: se dice que por cada camion dejado en reserva se debe dejar mínimo una camioneta en reserva. La reserva de camionetas son las disponibles (12) menos las que se asignan (X_1) y la reserva de camiones son los disponibles (6) menos los que se asignen (X_2). Esto en términos matemáticos, utilizando las variables es:

$12 - X_1$ son las camionetas dejadas en reserva y $6 - X_2$ son los camiones dejados en reserva. El problema exige que debe ser mínimo una camioneta en reserva por cada camión en reserva; o sea que es mayor o como mínimo igual la cantidad dereserva de camionetas con respecto a la reserva de camiones. Por lo que esta relación genera la siguiente restricción.

$12 - X_1 \geq 6 - X_2$, dejando las variables a un solo lado se obtiene:

$- X_1 + X_2 \geq 6 - 12$, y reduciendo términos semejantes queda:

$- X_1 + X_2 \geq -6$; para que el lado derecho quede positivo, se multiplica por menos uno y el sentido de la desigualdad se invierte (recuerde las reglas de equivalencia), por lo que finalmente la restricción queda:

$X_1 - X_2 \leq 6$. Esta es justamente la restricción incorporada al problema.

A continuacion se procede a graficar todas la restricción es y la función objetivo. En la figura 3.13 se denota el area factible de solución (para este caso un segmento de recta) y el punto óptimo para este ejercicio.

Primera restricción

$X_1 = 12$, se traza una paralela al eje X_2 y se toma sólo la parte izquierda por lo que es menor o igual.

Segunda restricción

$X_2 = 6$, se traza una paralela al eje X_1 y se toma la parte de abajo por lo que la restricción es menor o igual.

Tercera restricción

$$8X_1 + 10X_2 = 80 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 8 \therefore (0,8) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 10 \therefore (10,0) \end{cases}$$

Observese, que esta restricción es exclusivamente de igual, por lo tanto no se toma ni hacia arriba ni hacia abajo; sólo es la recta.

Cuarta restricción

$$X_1 - X_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = -6 \therefore (0,-6) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 6 \therefore (6,0) \end{cases}$$

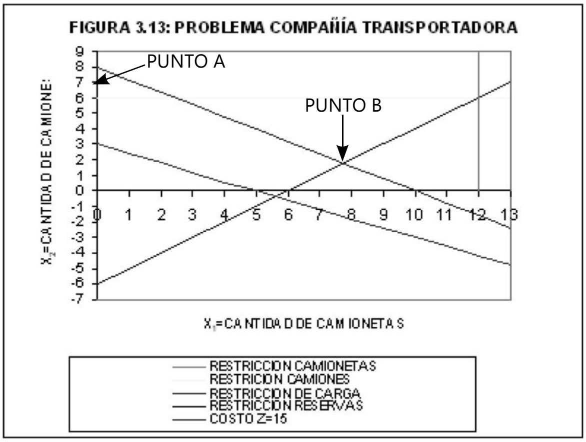
Para esta restricción se toma en cuenta graficarla con, puntos negativos, pero su región factible sólo considera valores positivos. No hay que olvidar las restricción es de no negatividad.

Función objetivo

Para graficar la función objetivo, se dividirá por cien y al final se realizará el proceso contrario. Con un valor arbitrario de Z=15 se obtiene lo siguiente:

$$3X_1 + 5X_2 = 15 \Rightarrow \begin{cases} si \rightarrow X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3 \therefore (0,3) \\ si \rightarrow X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 5 \therefore (5,0) \end{cases}$$

Necesariamente, el área factible de solución para este ejercicio, como se puede observar en la figura 3.13 es un segmento de recta, ya que hay una restricción de igualdad. Este segmento de recta es el comprendido entre el punto A y el punto B.



Acercando la recta Z=15 (paralelamente) hacia esta área factible de solución, se observa que el primer punto que toca es el punto B. Por lo tanto este es el punto óptimo que hace que la funcion objetivo tome el mínimo valor.
Para hallar las coordenadas en el punto óptimo hay que hallar la interseccion entre la tercera restricción (carga de 80 toneladas) y la cuarta restricción (reserva de vehículos); esto se halla con la intersección de las siguientes ecuaciones:

$$8\ X_1 + 10\ X_2 = 80$$

$$X_1 \ - \ X_2 = 6$$

Si se multiplica por diez la segunda de ellas y se le suma a la primera se obtiene que $18X_1 = 140$, por lo tanto $X_1 = 70/9$. reemplazando este valor en la segunda de estas restricciones se tiene que $70/9 - X_2 = 6$; luego $X_2 = 16/9$. Con base en esta solución se obtiene un valor mínimo de la función objetivo así: $3(70/9) + 5(16/9) = 290/9$. Lo anterior indica que se deben asignar al recorrido 70/9 de camionetas y 16/9 de camiones, para obtener un costo mínimo total de \$29.000/9. También, de acuerdo con la solución quedarán en reserva 38/9 de camionetas y 38/9 de camiones (no lo dude, confírmelo).

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1. Una compañía siderúrgica produce ángulos y platinos los cuales rinden una contribución a las utilidades de $10.000 y $ 30.000 por metro respectivamente. Para la producción de estos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 250 libras de acero y 210 horas hombre. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un metro de ángulo se requiere de 5 libras de acero y 3 horas hombre de trabajo, mientras que para producir un metro de platina se requiere de 5 libras de acero y 7 horas hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar si se sabe que máximo se venderán 20 metros de platina diariamente?

3.2. Cierta compañía editorial produce libros y revistas de carácter especializado, los cuales venden a 30.000 y 25.000 por unidad respectivamente. Se ha estimado que hay una disponibilidad de 300 horas en revisión técnica, 350 horas en impresión y 400 horas en empaste semanalmente. Establezca la cantidad de libros y revistas que se debe producir por semana, si se sabe que para producir un libro se requiere de 6h en revisión técnica, 5 en impresión y 10h en empaste, mientras que para producir una revista se requiere de 5h en revisión técnica, 7 h en impresión, y 4h en empaste.

3.3. Una empresa de confecciones ha determinado que máximo venderá 40 pantalones por semana y mínimo 30 chaquetas por semana. Además, se sabe que para evitar tiempo ocioso se debe consumir mínimo 350 horas hombres por semana. Suponga que un pantalón para ser fabricado requiere de 7 horas hombre, mientras que una chaqueta necesita 5 horas hombre. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que un pantalón genera una utilidad de $2.000 y una chaqueta de $4.000?

3.4. La compañía Simak dispone de 180 horas por semana en el departamento de corte y 150 horas ensamble. Además, se ha establecido que para producir una chaqueta se requiere de 6 horas departamento corte y 3 horas de ensamble, mientras que para producir un buzo, se requiere de 3 horas departamento corte y 5 horas de departamento de ensamble. También, se ha establecido que el precio de venta de una chaqueta es de $50.000 y un buzo es de $40.000. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas ha estimado una venta mínima de 40 buzos.

3.5. Una nutricionista se encuentra en el proceso de decisión de establecer que cantidad de 2 tipos de alimento (A y B) debe incorporar en una dieta sabiéndose que el costo por libra de cada uno de ellos es de $400 y $300 por libra respectivamente. Además, se ha establecido que una libra de alimento tipo A contiene 3 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de minerales y 4 miligramos de proteínas; mientras que una libra de alimento tipo b contiene 8 miligramos de vitaminas, 2 miligramos de minerales y 5 miligramos de proteínas. También, se debe garantizar consumir mínimo 240 miligramos de vitaminas, 120 miligramos de minerales y 200 miligramos de proteínas.

3.6. Cierta compañía fabrica billeteras y cinturones a un costo de $12,000 y $6,000 por unidad respectivamente. En la fabricación de dichos artículos se debe consumir como mínimo 180 horas hombre y mínimo 200 unidades de materia prima. Mediante un estudio se determinó que para producir una billetera se requiere 6 horas hombre y 4 unidades de materia prima, mientras que para fabricar un cinturón se requiere 3 horas hombre y 5 unidades de materia prima. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 billeteras?

3.7. Una compañía papelera produce cuadernos espirales y grapados a un costo de $200 y $400 respectivamente por unidad. Para la producción hay una disponibilidad diaria de 200 horas en corte y 150 horas en ensamble. Además, se ha establecido que la demanda conjunta de los 2 artículos será de 60 unidades. ¿Qué cantidad de cada tipo de cuaderno se debe fabricar si se sabe que para producir un cuaderno tipo espiral se requiere de 5 horas en corte y 3 horas en ensamble y para producir un cuaderno grapado se requiere de 4 horas en corte y 5 horas en ensamble?

3.8. La compañía Sigma, produce ACPM y Biogasolina a un costo de $ 2.000 y $ 3.000 por galón respectivamente. Para ello se debe consumir un mínimo de 210 horas a la semana. Además el departamento de ventas ha determinado que máximo venderá 20 galones de ACPM y mínimo 10 de Biogasolina. También se sabe que la producción de un galón de ACPM requiere de 3 horas, mientras que un galón de Biogasolina, requiere de 7 horas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el gobierno Nacional da un subsidio de $ 6.000 por cada galón de biogasolina que se produzca?

3.9. Una fábrica de pupitres se dedica a la manufacturación de pupitres unipersonales y bipersonales; los cuales generan utilidad unitaria de $7000 y $12.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos de la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 500 metros de madera, 700 metros de tubo y 600 horas-hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar? si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de 2 metros de madera, 4 metros de tubo y 3 horas-hombre de trabajo; mientras que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo.

3.10. Cierta compañía dedicada a la ornamentación ha sacado del mercado un producto que no le era rentable, lo que ocasiona que su planta de producción tenga una subutilización de 500 horas en la sección de corte, 300 horas en la sección de soldadura y 700 horas en la sección de ensamble. El departamento de mercadeo sugiere que dicha capacidad puede ser utilizada en la fabricación de puertas, ventanas y rejas en la mejor combinación posible. Para estos artículos se ha establecido un precio de venta de 25000, 30000 y 18000 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 horas en corte, 6 horas en soldadura y 4 horas en ensamble; para producir una ventana se requiere de 2 horas en corte, 3 horas en ensamble y una hora en soldadura; mientras que para producir una reja se necesita de 8 horas en corte, 4 horas en soldadura y 5 horas en ensamble. Además, se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 20 rejas y máximo 30 puertas. Suponga que por las condiciones de la planta la producción de ventanas no debe exceder más del 20% de la producción total de la planta.

3.11. La porcicultura sigma tiene un criadero de cerdos en Tibirita (Cundinamarca, Colombia), donde actualmente se están levantando 50 cerditos, para cada uno de los cuales se ha establecido que diariamente requiere un suministro mínimo de 50 miligramos de vitamina A, mínimo 70 miligramos de vitamina B y máximo 80 miligramos de vitamina C. Para lograr estos requerimientos vitamínicos, a los cerditos en su alimentación se le suministra cereal y mogollo, los cuales adquiere la compañía a $5000 y $10000 por kilo respectivamente. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar diariamente a cada cerdito? si se sabe que un kilo de cereal contiene 3 miligramos de vitamina A, 9 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de vitamina C; mientras que un kilo de mogollo contiene 10 miligramos de Vitamina A, 3 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

3.12. Acerías Bacatá prepara una aleación de tipo especial en un alto horno, el cual debe ser cargado con dos toneladas de material. Por requisitos de calidad dicha aleación debe contener mínimo 30% de sílice pero no más de 35%; y máximo 28% de aluminio. La compañía carga el horno con hierro, Zinc y Cobre, los cuales adquiere a 3000, 7000 y 6000 pesos por kilo respectivamente. ¿Con qué cantidad de cada producto se debe alimentar el horno si se sabe que el hierro contiene 18% de sílice y 15% aluminio; el zinc contiene 7% de sílice y 25% de aluminio; mientras que el cobre contiene 16 % de sílice y 5% de aluminio.

3.13. Una fábrica de muñecos de peluche fabrica osos y perros para los cuales ha establecido una utilidad de $8000 y $5000 por unidad respectivamente. El departamento de mercados ha establecido que mínimo se venderán 40 osos y máximo 50 perros. Determine que cantidad de cada uno de los artículos se

debe fabricar si se sabe que el gerente de la compañía desea que la producción de osos sea mínimo 20 unidades más que la producción de perros.

3.14. Estructuras Metálicas Ltda. manufactura puertas y ventanas con utilidades de 400 y 900 pesos por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad por semana de 400 metros de ángulo y 480 metros de platina. Además, se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 metros de ángulo y 8 metros de platina; mientras que para producir una ventana se requiere de 8 metros de ángulo y 6 metros de platina ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas estimó que máximo se venderán 30 ventanas?

3.15. La compañía"**SIGMA**" produce pupitres y sillas, para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de $5.000 y $6.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 20 horas hombre de trabajo, 32 horas maquina y 24 metros de materia prima. El gerente desea establecer que cantidad de pupitres y sillas debe fabricar a fin de incrementar al máximo su utilidad. Suponga, además, que para producir un pupitre se requiere de 5 horas hombre de trabajo, 4 horas máquina y 8 metros de materia prima; mientras que para producir una silla se necesita de 4 horas hombre de trabajo, 8 horas máquina y tres metros de materia prima.

3.16. Electrodomésticos "LA HORMIGA" produce y vende televisores y equipos de sonido para los cuales ha establecido que debido a las condiciones del mercado un televisor genera una pérdida de $30.000, mientras que un equipo de sonido genera una utilidad de $40.000. Además, se sabe por un estudio de mercados que la venta máxima de televisores será de 70 unidades mientras que para los equipos de sonido se ha establecido una venta mínima de 30 unidades. Para la comercialización de estos productos la compañía cuenta con un vendedor, el cual gana una comisión de $5 por televisor vendido y $8 por cada equipo de sonido vendido. Establezca qué cantidad de televisores y equipos de sonido se debe fabricar a fin de minimizar las pérdidas totales de la compañía y garantizar que el vendedor obtenga una comisión mínima por mes de $400.

3.17. Una compañía dedicada a la agricultura puede sembrar en su siguiente temporada papa y yuca, productos para los cuales ha establecido que generan una utilidad por hectáreas sembrada de $8 y $9 millones respectivamente. Para el cultivo de dichos productos se cuenta con una disponibilidad de 540 Litros de agua, 500 Kilos de abono y 800 Libras de fertilizante. ¿Que cantidad de hectáreas de cada producto se deben sembrar si se sabe que para sembrar una hectárea de papa se necesitan 6 litros de agua, 5 kilos de abono y 10 libras de fertilizante; mientras que para sembrar una hectárea de yuca se requiere de 9 litros de agua, 10 kilos de abono, y 8 libras de fertilizante?

3.18. Una fábrica de muebles ha determinado que la demanda de bibliotecas para los próximos 4 meses es de 200, 300, 390 y 130 unidades respectivamente. Además, se sabe que actualmente la compañía puede generar inventario en cualquier mes y debe cumplir con su demanda a tiempo durante cada mes. La compañía tiene una capacidad para fabricar 200 bibliotecas por mes en tiempo regular con un costo de $15.000 por biblioteca y puede producir unidades adicionales en tiempo extra a un costo de $20.000 por biblioteca. Determine la cantidad de bibliotecas a producir en cada mes; tanto en tiempo regular, como en tiempo extra si se sabe que las unidades producidas y no vendidas en un determinado mes generan un costo de almacenaje de $1.200 por biblioteca (suponga que al final del cuarto mes no debe haber inventario).

3.19. Se ha establecido en una fabrica de muebles metálicos que en el departamento de corte hay una disponibilidad de 700 horas por semana, en el departamento de soldadura hay una disponibilidad de 500 horas por semana, mientras que en el departamento de ensamble hay una disponibilidad de 800 horas por semana. La fábrica manufactura salas y comedores para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 10.000 y 15.000 pesos por unidad respectivamente. Establezca la cantidad de salas y comedores a fabricar por semana si se sabe que para producir una sala se requieren de 5 horas de proceso en corte, 2 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble; mientras que para producir un comedor se requieren 2 horas de proceso en corte, 6 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que máximo se venderán 30 salas y mínimo 10 comedores.

3.20. Bicisigma produce bicicletas y triciclos para los cuales ha establecido un precio de venta unitario de 9000 y 7000 pesos respectivamente. Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 630 horas en corte y 560 horas de soldadura, además se ha establecido que para producir una bicicleta se requiere de 9 horas en corte y 7 horas en soldadura, mientras que para producir un triciclo se requiere de 7 horas en corte y 8 horas en soldadura. Determinar que cantidad de bicicletas y triciclos se deben fabricar si se sabe que el departamento de mercadeo ha establecido que mínimo se venderán entre los dos artículos 50 unidades.

3.21. Una empresa siderúrgica dispone de un alto horno el cual debe ser cargado con una tonelada de material. En dicho horno se fabrica un tipo de aleación especial la cual por requisitos de calidad debe tener mínimo 32% de aluminio pero no más del 40% y como máximo el 17% de silicio. La compañía cuenta con 4 tipos de material para los cuales se ha establecido el contenido de silicio y aluminio con su respectivo costo tal como aparece en la tabla 3.13.

TABLA 3.13			
MATERIAL	**CONTENIDO SILICIO**	**CONTENIDO ALUMINIO**	**COSTO**
Acero	7%	16%	5000
Cobre	15%	5%	3000
Níquel	12%	14%	3000
Cromo	3%	10%	4400

3.22. Una corporación de ahorro y vivienda cuenta con un total $30.000.000.00 para préstamos bancarios entre los cuales esta préstamo para automóvil, vivienda, inversión rural, y préstamos personales. Mediante una evaluación del sistema financiero se sabe que los préstamos para automóvil generan un interés del 15% y tienen una probabilidad de incobrables del 10%; los préstamos para vivienda generan interés del 8% y una probabilidad de incobrables del 5%. Los préstamos para inversión rural generan interés del 7% y probabilidad de incobrable del 20%; mientras que los préstamos personales generan un interés del 24% y tiene una probabilidad de incobrable del 25%. Por políticas gubernamentales la entidad debe asignar mínimo el 40% de los fondos prestados a préstamos para inversión rural y vivienda. Además, los préstamos para automóvil deben ser máximo el 50% de los préstamos para inversión rural y los préstamos personales no pueden exceder el 10% de los dineros prestados. Determine qué cantidad de dinero se debe asignar a cada tipo de préstamo si por política de la compañía se ha especificado que la cantidad total de pagos irrecuperables no puede exceder el 6%.

3.23. Una joyería produce y vende relojes para hombre y para dama, para los cuales ha establecido un costo por unidad de $3.000 y $2.000 respectivamente. El departamento de ventas ha establecido que mínimo se venderán 60 relojes para dama y 70 relojes para caballero. Además, se ha establecido que para producir un reloj para dama se requiere de 5 horas de trabajo de un técnico, mientras para producir un reloj para hombre se requieren 8 horas de trabajo del técnico. Establezca la cantidad de relojes a producir si se sabe que la compañía tiene disponible 2 técnicos en la joyería, los cuales laboran 8 horas diarias y 25 días al mes.

3.24. La veterinaria "The Dog" cría cachorros para los cuales se ha establecido que máximo se les debe suministrar 630 miligramos de vitamina A, mínimo 350 miligramos de Vitamina B y mínimo 320 miligramos de vitamina C (estos requerimientos son mensuales). Para garantizar esos requisitos vitamínicos los cachorros son alimentados con purina y ladrina los cuales compra la compañía $8000 y $10000 por kilo respectivamente. Establecer qué cantidad de los dos alimentos se les debe suministrar mensualmente a cada cachorro si se sabe

que un kilo de purina contiene 9 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 4 miligramos de Vitamina C; mientras que un Kilo de ladrina contiene 7 miligramos de vitamina A, 5 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

3.25. Una heladería dispone diariamente de 300 gramos de pulpa de fruta y 320 gramos de azúcar para la producción de paletas y helados, para los cuales se ha establecido una utilidad unitaria de 200 y 100 pesos respectivamente. El departamento de mercadeo ha establecido que en conjunto mínimo se venderán 90 unidades. Establezca la cantidad de paletas y helados que se debe fabricar diariamente, si se sabe que para producir una paleta se requiere 5 gramos de pulpa de fruta y 8 gramos de azúcar, mientras que para producir un helado se requieren 6 gramos de pulpa de fruta y 4 gramos de azúcar.

3.26. Una industria de acrílicos cuenta con una disponibilidad semanal para la fabricación de sus productos de 400 metros de fibra de vidrio, 360 litros de resina y 500 miligramos de catalizador. Con esos recursos la compañía fabrica tinas referencia Nápoles y referencia Milán para los cuales se ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $6000 y $9000 cada tina respectivamente. ¿Qué cantidad de cada tipo de tina se debe fabricar si se sabe, que para producir una tina Nápoles se requieren 8 metros de fibra de vidrio, 6 litros de resina y 5 miligramos de catalizador; mientras que para producir una tina referencia Milán se requiere de 5 metros de fibra, 6 litros de resina y 10 miligramos de catalizador?.

3.27. "El palacio del colesterol" produce y vende pasteles y empanadas para los cuales ha establecido una utilidad de $400 por unidad de cada producto. Para la producción de esos artículos se dispone diariamente de 500 gramos de arroz y 360 gramos de harina. Además, se sabe que para producir un pastel se requiere de 10 gramos de arroz y 6 gramos de harina y para producir una empanada se requiere de 5 gramos de arroz y 6 gramos de harina. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar diariamente si se sabe que máximo se venderán 30 empanadas?.

3.28. Decoraciones "La Tapa" produce gabinetes para baño y cocina para los cuales ha fijado un precio de venta de $20.000 y $30.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 300 metros de acrílico y 240 metros de fibra. ¿Qué cantidad de gabinetes para baño y cocina se debe fabricar?, si se sabe que para producir un gabinete de baño se requiere de 5 metros de acrílico y 3 metros de fibra, mientras que para un gabinete de cocina se requiere de 6 metros de acrílico y 8 de fibra. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que mínimo se venderán 100 gabinetes para baño.

3.29. Un comercializador de tejidos de punto, distribuye sacos y blusas a un precio por unidad de \$5000 y \$8000 respectivamente. El departamento de mercadeo determinó que para el próximo mes máximo venderá 20 sacos y mínimo 15 blusas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe comprar si se sabe, que en conjunto entre los dos artículos se venderán mínimo 30 unidades?.

3.30. Una sociedad porcicultora ha establecido que a cada cerdo se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 14 miligramos de vitamina B y 16 miligramos de vitamina C. Para cumplir con esos requisitos vitamínicos, la sociedad compra para alimentar a los cerdos a un costo de \$3000 un kilo de mineral y a \$6000 un kilo de concentrado. ¿Qué cantidad de cada producto se le debe suministrar diariamente a cada cerdo?, si se sabe que un kilo de mineral contiene 6 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de C; mientras que un kilo de concentrado contiene 5 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de C.

3.31. Una importadora de joyas compra relojes para hombre a \$3000 y relojes para dama a \$6000 cada uno de ellos. Para preparar un reloj para hombre se requiere de 6 horas y para preparar un reloj para dama se requieren 5 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de reloj se debe preparar? si se sabe que mínimo se venderán 10 relojes para hombre en la próxima semana, que hay una disponibilidad de 300 horas para la preparación de los relojes y que se desea invertir mínimo \$180.000.

3.32."Dulcería Sweet" produce paquetes de dulces y chocolates, para los cuales ha establecido un costo de producción por paquete de \$5 y \$10 respectivamente. Actualmente la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 180 horas y se sabe que para producir un paquete de dulces se requiere de 3 horas, mientras que para producir un paquete de chocolates se requiere de 6 horas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el mercado consumirá mínimo 70 paquetes entre los dos artículos?

3.33."Químicos Protox" ha determinado que para la fabricación de un producto químico especial requiere de dos materias primas A y B. Se sabe que la utilización de un kilo de materia prima tipo A, se necesitan 2 litros de agua y 2 horas de trabajo y genera un costo de \$3, mientras que la utilización de un kilo de materia tipo B genera 3 litros de agua, consume 5 horas de trabajo y da una utilidad de \$7. ¿Qué cantidad de cada materia prima se debe utilizar en el producto químico si se sabe, que hay una disponibilidad de 60 litros de agua por semana y que se debe consumir mínimo 100 horas de trabajo?

3.34. Un fabricante de artículos decorativos tiene 6 metros de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará pinos decorativos. Con anterio-

ridad se han vendido bien dos modelos de manera que se dedicará a producir estos dos. El fabricante estima que el modelo 1 requiere 2 metros de madera y 7 horas de tiempo disponible, mientras que para el modelo 2 se requiere de un metro de madera y 8 horas de tiempo. Los precios de los modelos son $120 y $80 respectivamente. ¿Cuántos pinos decorativos de cada modelo se deben fabricar?

3.35. Una fábrica de muebles produce pupitres unipersonales, bipersonales y mesas para los cuales ha establecido que rinden una utilidad unitaria de $3, $2 y $5. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 430 metros de madera, 460 metros de tubo y 420 metros de formica. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar a fin de incrementar las ganancias si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de un metro de madera, 3 metros de tubo y un metro de fórmica, que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 2 metros de madera y 4 metros de fórmica; mientras que para producir una mesa se necesita un metro de madera y 2 metros de tubo.

3.36. La industria de muebles "Data" produce sofás, sillas y poltronas para los cuales ha establecido que rinden una contribución unitaria a las utilidades de $15.000, $10.000 y $20.000 respectivamente. Para producir esos artículos la compañía tiene una disponibilidad mensual de 800 metros de paño, 900 metros de listón y 720 metros de resortes. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que para producir un sofá se requiere 10 metros de paño, 9 metros de listón y 12 metros de resortes, para producir una silla se requieren 5 metros de paño, 4 metros de listón y 6 metros de resortes; mientras que para fabricar una poltrona se requiere de 8 metros de paño, 10 metros de listón y 5 metros de resorte.

3.37. La empresa "Zaza" produce salas y comedores en tres tipos de máquinas en las cuales hay una disponibilidad de 100, 80 y 160 horas por semana respectivamente. Además, se sabe que una sala requiere de 4 horas de proceso en la máquina 1, 16 horas de proceso en la máquina 2 y 14 horas de proceso en la máquina 3, mientras que un comedor requiere de 6 horas de proceso en la máquina 1 y 18 horas de proceso en la máquina 3. El departamento de costos ha estimado que cuesta $12 producir una sala y $ 11 producir un comedor. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada producto se debe fabricar, si se sabe que un comedor se vende en $17 y una sala en $14. Suponga además que el departamento de mercadeo ha estimado que mínimo se venderán 5 salas.

3.38. La industria ganadera "Zitron", cría cabezas de ganado de ganado en una hacienda de los llanos orientales, el veterinario de la compañía ha establecido

que a cada cabeza de ganado se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 40 miligramos de vitamina B y mínimo 60 miligramos de vitamina C. El ganado es alimentado con sal, ésta tiene un costo de $4000 por kilo, agua la cual tiene un costo de $1000 por litro y concentrado el cual tiene un costo de $1500 por frasco. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe dar a cada cabeza de ganado de tal forma que garantice los requerimientos vitamínicos del ganado si se sabe que 1 kilo de sal contiene 5 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C; Un litro de agua contiene 1 miligramo de vitamina A, 4 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de Vitamina C; mientras que un frasco de concentrado contiene 10 miligramos de vitamina B y 6 miligramos de vitamina C.

3.39. La compañía "Zamba", produce gasolina blanca, roja y verde, para las cuales se ha establecido un precio de venta por galón de $4000, $4500 y $4200 respectivamente, estos productos se obtienen a partir de petróleo y Kerosén de los cuales hay una disponibilidad diaria de 3000 y 3500 galones respectivamente. Además, se sabe que el costo, que se causa por explotar un galón de petróleo es de $2500 mientras que para un galón de kerosene es de $3000. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que por normas gubernamentales de calidad, la gasolina blanca debe contener 30% de petróleo y 70% de kerosén, la gasolina roja debe contener 45% de petróleo y 55% de kerosene, mientras que la gasolina verde debe contener 60% de petróleo y 40% de kerosén.

3.40. La empresa "Omicrón" debe asignar a una de sus rutas un máximo de 40 busetas y un mínimo de 80 buses. Además por caprichos del señor gerente los buses asignados deben ser mínimo el doble de las busetas menos 60 unidades y se sabe que el costo por asignar una buseta a esa ruta es de $80.000, mientras que asignar un bus cuesta $40.000. ¿Qué cantidad de buses y busetas se debe asignar si se sabe que el gobierno nacional ofrece un subsidio de $90.000 por cada bus asignado?

3.41. La compañía "El Tornero Mayor" produce piñones y rodamientos los cuales le generan una contribución a las utilidades de $5000 y $8000 respectivamente por unidad. Para la producción de dichos artículos la Compañía cuenta semanalmente con 450 horas de trabajo en torno, 540 horas de fresadora y 420 horas de pulidora. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un piñón se requiere de 5 horas de trabajo en el torno, 9 horas de trabajo en la fresadora y 6 horas de trabajo en la pulidora, mientras que para producir un rodamiento se requiere de 9 horas de trabajo en el torno, 6 horas de trabajo en la fresadora y 7 de trabajo en la pulidora?

3.42. El hotel residencial "Alfa" dispone de habitaciones confortables y normales las cuales se alquilan a $4500 y $3500 por habitación respectivamente. Dichas

habitaciones son preparadas por Anita y Carmen, las camareras del hotel, para las cuales se ha establecido que tienen una disponibilidad diaria de 630 y 400 minutos respectivamente para el arreglo de las habitaciones. Además, se ha establecido que una habitación confortable requiere de 9 minutos de arreglo por parte de Anita y 5 minutos por parte de Carmen; mientras que una habitación normal requiere de 7 minutos de trabajo de Anita y 8 minutos de trabajo de Carmen, para quedar lista para alquiler. ¿Qué cantidad de cada tipo de habitaciones deben estar listas para la noche si se sabe que se espera alquilar mínimo 40 habitaciones entre los dos tipos?

3.43. La fábrica de muebles "Beta" produce salas y comedores para los cuales ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $9000 y $10000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de madera y 320 metros de tubo. El departamento de producción estimó que para producir una sala se requiere de 6 metros de madera y 4 metros de tubo, mientras que para producir un comedor se requiere de 5 metros de madera y 8 metros de tubo. ¿Qué cantidad de salas y comedores se deben fabricar? si se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 90 unidades entre los dos productos.

3.44. Confecciones "Gamma" produce camisas y corbatas para las cuales ha establecido una utilidad unitaria de $5000 y $2000 respectivamente. El departamento de mercadeo ha pronosticado que máximo se venderán 50 camisas y mínimo 30 corbatas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el Gerente de la fábrica requiere que la cantidad de corbatas producidas debe ser mínimo 40 unidades debajo de la producción de camisas?

3.45. En el jardín infantil "Delta" se ha establecido que a cada niño diariamente se le debe proporcionar máximo 480 miligramos de vitaminas, mínimo 180 miligramos de hierro y mínimo 180 miligramos de minerales. Para lograr estos requisitos vitamínicos en el jardín se dispone de leche y fruta para los cuales se ha establecido un costo de $400 por un vaso de leche y $500 por una porción de frutas. Establezca qué cantidad de leche y fruta se le debe administrar diariamente a cada niño, si se sabe que un vaso de leche contiene 6 miligramos de vitaminas, 3 miligramos de hierro y 6 miligramos de minerales, mientras que una porción de fruta contiene 8 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de hierro y 3 miligramos de minerales.

3.46. La fábrica de calzado "Épsilon" produce zapatos para hombre y zapatos para dama a un costo de $20.000 cada uno de ellos. Además, se ha establecido, mediante un estudio de mercado que habrá una venta mínima de 20 zapatos para dama y que la venta mínima entre los dos artículos será de 50 unidades.

También, se sabe que hay una disponibilidad de 540 horas-hombre por semana para la producción de dichos artículos. ¿Qué cantidad de cada tipo de zapato se debe fabricar si se sabe que producir un par de zapatos para hombre se requieren 6 horas y un par de zapatos para dama requiere 9 horas?

3.47. La distribuidora de dulces "Zeta" compra cada paquete de mentas a $5 pesos y cada paquete de caramelos a $6. El departamento de mercadeo de la Compañía ha determinado que semanalmente mínimo se venderán 60 paquetes de mentas y mínimo 60 paquetes de caramelos. Además, se sabe que la Compañía semanalmente asigna para su presupuesto de compra de los dos artículos $300. ¿Qué cantidad de cada producto se debe comprar para garantizar las condiciones del mercado y que su costo sea el más bajo?

3.48. Cierta familia ha establecido que cada uno de sus integrantes debe consumir como mínimo 240 gramos de vitamina A y mínimo 320 gramos de vitamina B al mes. Para cumplir con estos requerimientos vitamínicos la familia dentro de su mercado compra huevos a $300 la unidad y leche a $900 por litro. Por característica de los productos se sabe que un huevo contiene 6 gramos de vitamina A y 4 gramos de vitamina B; mientras que un litro de leche contiene 4 gramos de vitamina A y 8 gramos de vitamina B. ¿Qué cantidad de cada producto debe consumir cada miembro de la familia si se sabe que por recomendaciones medicas cada uno de ellos debe consumir mínimo 20 litros de leche al mes?

3.49. Cierta compañía automotriz ensambla automóviles y camiones los cuales deben pasar por el departamento de pintura y por el departamento de ensamble. Si el departamento de pintura se dedica solo a pintar camiones podrá pintar 40 camiones por día, mientras que si se dedica a pintar solo automóviles, podrá pintar 60 automóviles por día. Si el departamento de ensamble se dedica solo a ensamblar automóviles podrá ensamblar 50 automóviles por día, y si se dedica solo a ensamblar camiones podrá ensamblar 50 camiones por día. Además se sabe que cada camión genera una utilidad de $600.000 y que cada automóvil genera una utilidad de $400.000, suponga además que los vendedores de automóviles requieren que la compañía automotriz fabrique por lo menos 30 camiones y por lo menos 20 automóviles por día. Establezca la cantidad de camiones y la cantidad de automóviles que se deben fabricar por día.

3.50. Una compañía transportadora dispone de un taller de mantenimiento para las reparaciones a que haya lugar en sus buses y busetas; en el cual hay una disponibilidad de 630 horas mecánico semanalmente. Además se sabe que el costo por reparación de un bus es de 6 mil pesos mientras que el costo de reparación de una buseta es de 5 mil pesos. Por experiencia se sabe que para reparar un bus se necesitan 7 horas mientras que para la buseta se requieren 9 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe reparar semanalmente

si se sabe que mínimo se deben reparar 20 busetas y mínimo 30 buses a la semana?

3.51. Se ha establecido en confecciones Sigma que para fabricar un vestido para hombre se demoran 9 horas mientras que para fabricar un vestido de mujer se demoran 7 horas. Además, se ha establecido que un vestido para hombre genera una utilidad de $18000 y un vestido para dama genera una utilidad de $14000. El departamento de ventas ha establecido que en el próximo mes se venderán mínimo 40 vestidos para hombre y mínimo 20 vestidos para mujer. ¿Qué cantidad de cada tipo de vestido se de deben fabricar si se sabe que hay una disponibilidad de 600 horas mensuales para la confección?

3.52. Se ha establecido en la compañía Sigma que un par de tenis genera una pérdida de $2000 mientras que un par de zapatos genera una utilidad de $6000. Además se sabe que la venta mínima entre los dos artículos para el próximo mes es de 70 unidades y que por disponibilidad de materiales máximo se pueden producir 50 pares de tenis al mes. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar si se sabe que mínimo se venderán 40 pares de zapatos el próximo mes?

3.53. Un agricultor dispone de un terreno de 90 hectáreas, las cuales planea sembrar con yuca y papa en las cantidades que más le sea conveniente. Mediante un estudio se ha establecido que sembrar una hectárea de terreno con yuca consume 12 metros cúbicos de agua, 8 bultos de abono y 6 horas hombre de trabajo, mientras que sembrar una hectárea con papa consume 6 metros cúbicos de agua, 7 bultos de abono y 10 horas hombre de trabajo. El agricultor ha establecido que tiene una disponibilidad semanal de 720 metros cúbicos de agua, 540 bultos de abono y 600 horas hombre. ¿Qué cantidad de hectáreas se deben sembrar de cada producto, si se sabe que una hectárea sembrada de yuca genera una utilidad de $ 50.000 y una hectárea de sembrada con papa genera una utilidad de $80.000?

3.54. En cierta compañía constructora se ha establecido que diariamente hay una disponibilidad de 240 minutos por día por cada ayudante de construcción. Por estudio se sabe que el primer ayudante coloca un bloque en 6 minutos y un ladrillo en 4 minutos, mientras que el segundo ayudante coloca un bloque en 3 minutos y un ladrillo en 8 minutos. Además se ha establecido que el costo por la colocación de un bloque es de $50, mientras que colocar un ladrillo cuesta $60. ¿Qué cantidad de bloques y ladrillos se deben colocar diariamente si además se sabe que mínimo se deben colocar 50 ladrillos?

3.55. Una fábrica de muebles tiene una disponibilidad semanal de 150 metros de tubo, 270 metros de madera y 120 tornillos. Con estos recursos la compañía

desea fabricar camas dobles, camas sencillas y camarotes, los cuales pretende vender a $50, $25 y $20 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada articulo debe fabricar la compañía a fin de maximizar sus ingresos? si se sabe que una cama doble consume 10 metros de tubo, 5 metros de madera y 8 tornillos; una cama sencilla consume 6 metros de tubo, 3 metros de madera y 4 tornillos; mientras que un camarote consume 15 metros de tubo, 9 metros de madera y 15 tornillos.

3.56. Petroleos Colombia produce biogasolina, gasolina normal y acpm los cuales venden a un precio de 4000, 5000 y 4500 pesos por galón respectivamente. Dichos combustibles son fabricados a partir de dos tipos de crudo llamados petróleo grado 1 y petróleo grado 2 de los cuales hay una disponibilidad de 100000 y 150000 galones por día respectivamente. Se ha establecido que el costo de explotación de cada galón de petróleo grado1 es 2500 pesos, mientras que la explotación de petróleo grado 2 cuesta 3000 por galón. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que la biogasolina debe contener 40 % de petróleo grado 1 y 60% de petróleo grado 2, la gasolina normal debe contener el 70% de petróleo grado 1 y 30% de petróleo grado 2; mientras que el acpm debe contener 50% de petróleo grado 1 y 50% de petróleo grado 2.

3.57. Combustibles "Dorada" produce cocinol, gasolina roja y gasolina extra los cuales vende a $3500, $5200 y $6300 por galón respectivamente.
Para la producción de dichos combustibles la compañía cuenta con una disponibilidad diaria de 1000 galones de petróleo crudo y 1500 galones de petróleo refinado. Además por requisitos de calidad el cocinol debe contener 80% de petróleo crudo y 20% de petróleo refinado; la gasolina roja debe contener 50% de cada uno de los petróleos y la gasolina extra debe contener 25% petróleo crudo y 75% petróleo refinado. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que el costo de explotación de un galón de petróleo crudo es $2500 y un galón de petróleo refinado es $3000.

Capítulo 4

Programación lineal: método simplex

PRESENTACIÓN

En este capítulo se presenta el método simplex de solución de problemas de programación lineal incluyendo problemas de maximización y minimización.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de solucionar un problema de programación lineal utilizando el método simplex; así como interpretar correctamente la solución y analizar el consumo de recursos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Manejar las reglas de equivalencia para llevar todas las desigualdades a igualdades.
- Dominar el procedimiento de avance hacia la optimalidad del método simplex.
- Determinar mediante el método simplex el momento en el que se llega a la solución óptima, tanto en problemas de maximización como de minimización.
- Identificar el tipo de solución del problema con el uso del tablero simplex.
- Interpretar las soluciones arrojadas.

COMPETENCIAS

El estudiante tendrá la capacidad de utilizar el método simplex en la solución de problemas de programación lineal; y con base en ésta interpretar el tipo de solución del problema; así como el uso de variables de holgura, de exceso y artificiales.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá demostrar el manejo en el planteamiento de modelos de programación lineal, obtener la solución a través del método simplex e interpretar la solución.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Gauss Jordan.
- Vectores y matrices.

Para la aplicación y solución de un problema mediante el método simplex se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

PASO 1. Lleve la función objetivo a maximización mediante la aplicación de la primera regla de la sección 1.6.

PASO 2. Transforme todas las restricciones a igualdades de la siguiente manera (esto se realiza para formar los vectores unitarios que generan la primera solución básica factible):

- Restricción ≤: sume una variable de holgura, tal como se realizó en la cuarta regla de equivalencia en la sección 1.6.
- Restricción ≥: reste una variable de sobrante y sume una variable artificial para generar el vector unitario. Penalice (restar) la función objetivo con la variable artificial, asignándole a ésta un coeficiente infinitamente grande. Por ejemplo $-MA_1$. (M tiende al infinito).
- Restricción =: sume una variable artificial para generar el vector unitario y penalice la función objetivo.

PASO 3. Lleve toda todos los coeficientes al tablero simplex tal como se muestra en la tabla 4.1.

- En el C_J ubique todos los coeficientes de las variables en la función objetivo.
- En el C_B coloque los coeficientes de la función objetivo, pero sólo de las variables básicas.
- Ubique en la base las variables básicas, que son aquellas que generan dentro de las restricciones los vectores unitarios. (siempre serán las variables de holgura y las variables artificiales)
- En el X_B se asignan los valores del término independiente en cada una de las restricciones (en el tablero inicial).
- Debajo de cada variable ubique el vector de cada una de ellas en las restricciones (coeficientes de las variables en las restricciones).

PASO 4. Evalué si la solución actual es óptima. Para esto calcule los Z_J-C_J de la siguiente manera:

$$Z_J - C_J = \sum_{B=1}^{m} (C_B K_B) - C_J \text{, donde:}$$

C_B son los coeficientes de las variables básicas en la función objetivo; C_J son los coeficientes de la función objetivo y K_B es cada uno de los vectores de las variables a través de las diferentes soluciones.

Los vectores C_B y K_B van cambiando de tablero en tablero a medida que se avanza hacia la solución óptima del problema.

Si todos los Z_J-C_J son mayores o iguales que cero; la solución se hace óptima. De lo contrario continúe con el paso 5.

TABLA 4.1											
FILA	**OPERACIÓN**	**C_J**						**BASE**	**X_B**	**COCIENTE**
		C_B	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	**H_3**			
F_1										
F_2										
F_3										
F_{Z1}		Z_J-C_J						Z=		

PASO 5. Seleccione la variable que entra a la base: entra a la base aquella variable que tenga el Z_J-C_J más negativo. En caso de haber empate entre dos a más variables; el empate se rompe arbitrariamente.

PASO 6. Seleccione la variable que sale de la base: para seleccionar la variable que abandonará la base aplique la siguiente regla: $MIN\left\{\frac{X_B}{K_B}\right\}$ teniendo en cuenta sólo aquellos valores de K_B mayores que cero (positivos). K_B es el vector columna de la variable que entra a la base.

PASO 7. Selección del pivote: el pivote es aquella posición donde se intercepta la columna de la variable que entra (K_B) y la fila de la variable que sale.

PASO 8. Mediante operaciones matriciales entre filas convierta la posición pivote en uno.

PASO 9. Utilizando operaciones matriciales convierta las demás posiciones del vector K_B en ceros.

PASO 10. Determine nuevamente el vector C_B y regrese al paso 4. Continúe con este ciclo hasta que se den las condiciones de optimalidad que pide el cuarto paso.
La aplicación del anterior procedimiento se apreciará con detalle en la aplicación de ejercicios.

4.1 PROBLEMAS DE MAXIMIZACIÓN

4.1.1 Solución única

Un problema de programación lineal tiene solución única cuando únicamente las variables básicas tiene valor de cero en los valores llamados Z_J-C_J.

Ejercicio 4.1.1. Para ejemplificar esto se tomará el ejercicio 3.1.1 del capítulo anterior cuya formulación y modelo matemático se transcribe a continuación.
La compañía Sigma produce bibliotecas y escritorios para los cuales se ha establecido un precio de venta por unidad de $9.000 y $10.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad mensual de 700 metros de madera, 800 metros de tubo y 900 pliegos de papel de lija. ¿Qué cantidad de bibliotecas y escritorios se debe fabricar mensualmente si se sabe que una biblioteca consume 7 metros de madera, 10 metros de tubo y 6 pliegos de papel de lija; mientras que para producir un escritorio se requieren 10 metros de madera, 8 metros de tubo y 15 pliegos de papel de lija?

X_1 = Cantidad de bibliotecas a fabricar por mes

X_2 = Cantidad de escritorios a fabricar por mes

PLANTEAMIENTO DEL MODELO

$$\text{Max } Z = 9000\,X_1 + 10000X_2$$

S.A.

$$7\,X_1 + 10\,X_2 \leq 700 \text{ metros de madera}$$

$$10\,X_1 + 8\,X_2 \leq 800 \text{ metros de tubo.}$$

$$6\,X_1 + 15\,X_2 \leq 900 \text{ pliegos de papel de lija.}$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

Para llevar este modelo al tablero simplex se requiere llevar a igualdad todas las restricciones; por lo cual, con base en las reglas de equivalencia a todas las restricciones menores o iguales se le agrega una variable de holgura. El problema queda como aparece a continuación (incluye los pasos 1 y 2).

$$\text{Máx. } Z = 9000\,X_1 + 10000\,X_2 + 0H_1 + 0H_2 + 0H_3$$

s.a.

$$7\,X_1 + 10\,X_2 + H_1 = 700$$

$$10\,X_1 + 8\,X_2 + H_2 = 800$$

$$6\,X_1 + 15\,X_2 + H_3 = 900$$

$$X_1, \quad X_2, \quad H_1, \quad H_2, \quad H_3 \geq 0$$

Como se puede observar, las variables de holgura también entran a formar parte de la función objetivo sin alterarla; por eso aparecen con coeficiente cero. El primer tablero simplex para este problema aparece en la tabla 3.2. (Aquí se ha realizado el paso 3 y parte del paso 4).

TABLA 4.2										
FILA	OPE-RA-CIÓN	C_J	9	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_1		0	7	10	1	0	0	H_1	700	700/10=70
F_2		0	10	8	0	1	0	H_2	800	800/8=100
F_3		0	6	15	0	0	1	H_3	900	900/15=60
F_{Z1}		Z_J-C_J	-9	-10	0	0	0	Z=0		

Para calcular el valor Z_J-C_J para la variable X_1 se realizó la siguiente operación (0*7)+(0*10)+(0*6)-9 = -9. Para los otros valores se procede de la misma forma, manteniendo fijo el C_B y cambiando las columnas de las variables.

Calculados estos valores, se observa que la solución no es óptima, ya que hay valores Z_J-C_J negativos. Aplicando el paso 5, se toma el valor más negativo de este renglón; que es el -10. Esto indica que entra a la base la variable X_2.

Seguidamente se selecciona la variable que sale de la base, tal como lo indica el paso 6; mediante la aplicación de la siguiente fórmula $MIN\left\{\frac{X_B}{K_B}\right\}$. Para esta iteración se realizan los siguientes cálculos $MIN\left\{\frac{700}{10},\frac{800}{8},\frac{900}{15}\right\}$; esto es . $MIN\{70;100;60\}$

Como se puede observar el mínimo es 60, que corresponde a la tercera posición de las variables básicas; por lo tanto sale de la base la variable H_3. Estos cálculos aparecen en la tabla 4.2 en la última columna titulada cociente.

Para aplicar el paso 7, el pivote es el número que se encuentra en la intersección de la columna de la variable X_2 (variable que entra a la base) y la fila de la variable H_3 (variable que sale de la base). En este caso es el número 15.

De aquí en adelante se opera con base en la posición pivote.

Esa posición se debe convertir en 1 (aplicación del paso 8); por la tanto toda esta fila se multiplica por 1/15. Esto se observa en la tabla 4.3. Por ejemplo para obtener 2/5 en la columna de X_1 se multiplicó 1/15 por 6. La operación se realiza en toda la fila por lo tanto el X_B también se calcula mediante esa operación así 1/15 por 900 es igual a 60.

Para convertir las demás posiciones de la columna de X_2 en cero (aplicación del paso 9) se toma como base la fila que se le genero el uno en el paso anterior. En este caso es la fila 6.

Para convertir en cero la posición de la fila 4 se multiplica la fila 6 por -10 y se le suma la fila 1. (Observe que la posición a convertir en cero es 10, por eso se multiplica por el mismo valor pero cambiado de signo y se le suma la fila donde se encuentra el 10). Opere mediante esta fórmula todas la columnas. Todas las operaciones aplicadas se encuentran en el tablero, junto con todos sus resultados.

TABLA 4.3											
FILA	OPERACIÓN	C_J	9	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_4	$F_6(-10)+F_1$	0	3	0	1	0	-2/3	H_1	100	100/3=33,33
F_5	$F_6(-8)+F_2$	0	34/5	0	0	1	-8/15	H_2	320	320/34/5=47
F_6	$F_3(1/15)$	10	2/5	1	0	0	1/15	X_2	60	60/2/5=150
F_{Z2}		Z_J-C_J	-5	0	0	0	2/3	Z=600		

Observe que el vector de X_2 ahora es unitario, pues, esta es una variable básica en la tabla 4.3. Para calcular el valor de Z se multiplica el C_B por X_B y se suman. En la tabla 4.3 se encuentran en la base H_1, H_2 y X_2 y por lo tanto el C_B es 0, 0 y 10; que son los valores de dichas variables en la función objetivo.
La solución presentada en la tabla 4.3 no es óptima, pues todavía hay valores negativos (-5 en la columna de X_1) en el renglón Z_J-C_J. Por lo tanto se regresa al paso 4.

En este caso entra a la base X_1 que es la variable que tiene el Z_J-C_J más negativo y sale de la base H_1 que es la variable que tiene el cociente menor. En la tabla 4.4 se presentan todos los cálculos de esta nueva iteración.

Obsérvese, que no todos los Z_J-C_J de la tabla 4.4 son mayores o iguales que cero; lo que indica que no se ha llegado a la solución óptima. Ahora, entra a la base H_3 y sale la variable de menor cociente que es H_2. Detalle, que no se evaluó para salir de la base la variable X_1, pues el valor K_B no cumple con la condición de ser positivo.

TABLA 4.4										
FILA	OPERACIÓN	C_J	9	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_7	F4(1/3)	9	1	0	1/3	0	-2/9	X_1	100/3	*
F_8	$F_7(-34/5)+F_5$	0	0	0	-34/15	1	44/45	H_2	280/3	280/3/44/45=95,45
F_9	$F_7(-2/5)+F_6$	10	0	1	-2/15	0	7/45	X_2	140/3	140/3/7/45=300
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	5/3	0	-4/9	Z=2300/3		

En la tabla 4.5 se presentan todos los cálculos y operaciones de esta nueva iteración. Como se puede observar ya se ha llegado a la solución óptima del problema; pues todos los Z_J-C_J de la tabla 4.5 son mayores o iguales que cero.

TABLA 4.5											
FILA	OPERACIÓN	C_J	9	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_{10}	$F_{11}(2/9)+F_7$	9	1	0	-2/11	5/22	0	X_1	600/11	
F_{11}	$F_8(45/44)$	0	0	0	-51/22	45/44	1	H_3	1050/11	
F_{12}	$F_{11}(-7/45)+F_9$	10	0	1	5/22	-7/44	0	X_2	350/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	7/11	5/11	0	Z=8900/11		

La tabla 4.6 presenta el desarrollo de este problema en su totalidad; con todas las operaciones.

Interpretación de la solución

Con base en la información obtenida en el último tablero se interpreta lo siguiente:

X_1 = 600/11. Se deben fabricar 600/11 (54.54) bibliotecas.

X_2 = 350/11. Se deben fabricar 350/11 (31.81) escritorios.

H_3 = 1050/11. Del recurso 3, en este caso pliegos de papel de lija, no se utilizan en la producción 1050/11 (95.45) pliegos.

Z = 8900/11. con base en las cantidades de cada artículo a fabricar se genera una utilidad de 8.900/11 ($809.0909). realmente, la utilidad es 8900000/11 ($809090.9); ya que para llevar la información al tablero simplex, la utilidad de cada artículo se dividió en 1.000.

Observe el lector, que ésta es la misma solución obtenida con el método gráfico.

4.1.2 Solución óptima multiple

Un problema de programación lineal tiene solución óptima múltiple cuando aparte de las variables básicas, hay por lo menos una variable no básica que tiene valor de cero en el Z_J-C_J.

Ejercicio 4.1.2. Para ejemplificar se tomará el ejercicio 3.1.2 del capítulo anterior cuya formulación y modelo matemático se transcribe a continuación: La compañía Hierro Colado dispone semanalmente para la fabricación de sus artículos de 350 metros de lámina y 360 metros de ángulo. Además, se ha establecido que con esos recursos se fabrican puertas y ventanas para los cuales se ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 70 y 50 pesos por unidad respectivamente. También, se sabe por medio de un estudio de consu-

TABLA 4.6

FILA	OPERACIÓN	C_J	9	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_1		0	7	10	1	0	0	H_1	700	700/10=70
F_2		0	10	8	0	1	0	H_2	800	800/8=100
F_3		0	6	15	0	0	1	H_3	900	900/15=60
F_{Z1}		Z_J-C_J	-9	-10	0	0	0	Z=0		
F_4	$F_6(-10)+F_1$	0	3	0	1	0	-2/3	H_1	100	100/3=33,33
F_5	$F_6(-8)+F_2$	0	34/5	0	0	1	-8/15	H_2	320	320/34/5=47
F_6	$F_3(1/15)$	10	2/5	1	0	0	1/15	X_2	60	60/2/5=150
F_{Z2}		Z_J-C_J	-5	0	0	0	2/3	Z=600		
F_7	$F_4(1/3)$	9	1	0	1/3	0	-2/9	X_1	100/3	*
F_8	$F_7(-34/5)+F_5$	0	0	0	-34/15	1	44/45	H_2	280/3	280/3/44/45=95,45
F_9	$F_7(-2/5)+F_6$	10	0	1	-2/15	0	7/45	X_2	140/3	140/3/7/45=300
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	5/3	0	-4/9	Z=2300/3		
F_{10}	$F_{11}(2/9)+F_7$	9	1	0	-2/11	5/22	0	X_1	600/11	
F_{11}	$F_8(45/44)$	0	0	0	-51/22	45/44	1	H_3	1050/11	
F_{12}	$F_{11}(-7/45)+F_9$	10	0	1	5/22	-7/44	0	X_2	350/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	7/11	5/11	0	Z=8900/11		

mo de materiales que una puerta requieren 7 metros de lámina y 4 metros de ángulo y que una ventana requieren 5 metros de lámina y 9 metros de ángulo. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 puertas?

Definición de variables

X_1 = Cantidad de puertas a fabricar por semana.

X_2 = Cantidad de ventanas a fabricar por semana.

Con base en esta definición el modelo a resolver se establece de la siguiente manera:

$$MAX\ Z = 70\ X_1 + 50X_2$$

S.A.

$7\ X_1 + 5\ X_2 \leq 350$. Restricción de metros de lámina.

$4\ X_1 + 9\ X_2 \leq 360$. Restricción de metros de ángulo.

$X_1 \leq 40$. Restricción de venta máxima de puertas.

$X_1,\ X_2 \geq 0$

Nuevamente se agregan variables de holgura al ejercicio para transformarlo en la siguiente estructura:

$$MAX\ Z= 70X_1+ 50X_2 +0H_1 + 0H_2 + 0H_3$$

S.A.

$$7\ X_1 + 5\ X_2 + H_1 = 350$$

$$4\ X_1 + 9\ X_2 + H_2 = 360$$

$$X_1 + H_3 = 40$$

$$X_1,\ X_2,\ H1,\ H2,\ H3 \geq 0.$$

Mediante la aplicación de los pasos definidos al principio de este capítulo se obtiene la información que se presenta en la tabla 4.7. Se deja a consideración del lector que verifique el procedimiento.

En esta solución se deben producir 40 puertas (X_1=40) y 14 ventanas (X_2=14) para obtener una utilidad de \$3.500. Además, del recurso 2 (metros de ángulo) no se utilizan 74 metros. Tal como se había definido; la variable H_3, es una variable no básica que toma valor Z_J-C_J igual a cero en la fila F_{Z3}, lo que indica que el problema tiene soluciones óptimas múltiples, y una de ellas es la que se presenta en este último cuadro.

TABLA 4.7

FILA	OPERACIÓN	C_J	70	50	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_1		0	7	5	1	0	0	H_1	350	350/7=50
F_2		0	4	9	0	1	0	H_2	360	360/4=90
F_3		0	1	0	0	0	1	H_3	40	40/1=40
F_{Z1}		Z_J-C_J	-70	-50	0	0	0	Z=0		
F_4	$F_6(-7)+F_1$	0	0	5	1	0	-7	H_1	70	70/5=14
F_5	$F_6(-4)+F_2$	0	0	9	0	1	-4	H_2	200	200/9=22,22
F_6	$F_3(1)$	70	1	0	0	0	1	X_1	40	*
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	-50	0	0	70	Z=2800		
F_7	$F_4(1/5)$	50	0	1	1/5	0	-7/5	X_2	14	*
F_8	$F_7(-9)+F_5$	0	0	0	-9/5	1	43/5	H_2	74	74/43/5=8,6
F_9	$F_7(0)+F_6$	70	1	0	0	0	1	X_1	40	40/1=40
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	10	0	0	Z=3500		

Para establecer la solución del otro extremo o vértice, se entra esta variable a la base y sale la correspondiente según la regla de salida de la base. En la tabla 4.8 se presenta esta nueva iteración.

Observe que ahora la variable que indica la solución óptima múltiple es la variable H_2 (variable no básica), que toma valor Z_J-C_J igual a cero. Esta solución dice que se deben fabricar 1.350/43 puertas y 1.120/43 ventanas; para obtener una utilidad de $3.500 (misma obtenida en la otra solución). Con estas cantidades a producir; se está fabricando 370/43 puertas por debajo de la producción máxima de 40 unidades.

TABLA 4.8										
FILA	OPERACIÓN	C_J	70	50	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_{10}	$F_{11}(27/5)+F_7$	50	0	1	-4/43	7/43	0	X_2	1120/43	
F_{11}	$F_8(5/43)$	0	0	0	-9/43	5/43	1	H_3	370/43	
F_{12}	$F_{11}(-1)+F_9$	70	1	0	9/43	-5/43	0	X_1	1350/43	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	10	0	0	Z=3500		

4.1.3. Solución no acotada

En este tipo de problemas, tal como se mencionó en el capítulo anterior; la solución se presenta en el infinito. Para el método simplex, esto se establece cuando no se puede determinar que variable sale de la base. Recordemos que la regla de salida de la base es la siguiente:
$Min \frac{X_B}{a_J}$, teniendo en cuenta que sólo se avalúan los cocientes que satisfagan la condición $a_J > 0$, (solo se evalúan valores positivos). Con base en esto, cuando no están dadas las condiciones de optimalidad y todos estos valores son negativos indica que el problema tiene solución no acotada o ilimitada. Esto se aprecia fácilmente con la aplicación del ejercicio 3.1.3 del capítulo anterior, cuya formulación y modelo se transcriben en el ejercicio 4.1.3.

Ejercicio 4.1.3. Una fábrica de artesanías se dedica a la producción de bolsos y chaquetas los cuales comercializa directamente a los clientes en la plaza España. La venta de un bolso genera una utilidad de $2.000 y consume 5 horas de mano de obra; mientras que la venta de una chaqueta genera una utilidad de $3.000 y consume 9 horas de mano de obra. Por políticas de la compañía se requiere de no mantener en ocio a sus trabajadores y por lo tanto se debe consumir en la producción un mínimo de 450 horas de mano de obra por mes. ¿Qué cantidad de bolsos y chaquetas se debe fabricar, si por estudio de mercados se sabe que mínimo se venderán 20 chaquetas y como máximo 30 bolsos por mes?

Definición de variables

X_1 =Cantidad de bolsos a fabricar por mes.

X_2 =Cantidad de chaquetas a fabricar por mes.

Máx. $Z = 2000 X_1 + 3000X_2$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
5X_1 + 9X_2 &\geq 450 \\
X_1 \quad\quad &\leq 30 \\
X_2 &\geq 20 \\
X_1, \quad X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Siguiendo el procedimiento de transformar todas las restricciones en restricciones de igualdad, utilizando las reglas de equivalencia del primer capítulo tenemos lo siguiente:

Máx. $Z = 2000 X_1 + 3000X_2 + 0S_1 + 0H_1 + 0S_2$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
5X_1 + 9X_2 - S_1 \quad\quad &= 450 \\
X_1 \quad\quad + H_1 \quad &= 30 \\
X_2 \quad\quad - S_2 &= 20 \\
X_1, \quad X_2, S_1, H_1, S_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Como el lector lo ha podido apreciar, el método simplex utiliza vectores unitarios para generar las diferentes soluciones. Las variables S_1 y S_2 (variables exceso o superfluo) tienen coeficiente negativo (-1) en las restricciones, lo cual no genera vectores unitarios. Para generar el vector unitario en estos casos se debe sumar una variable artificial a estas restricciones conservando la misma igualdad. Estas variables artificiales para que la igualdad se siga dando deben tomar valor cero; por lo tanto hay que penalizar la función objetivo; con un coeficiente infinitamente grande para estas variables en la función objetivo (en algunos textos a este método se le denomina **Metodo de Penalizacion o de la Gran M**. El modelo a llevar al tablero simplex que da como aparece a continuación (la función objetivo se ha dividido por 1000):

Máx. $Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 + 0H_1 - MA_2$

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
5X_1 + 9X_2 - S_1 \quad + A_1 \quad\quad &= 450 \\
X_1 \quad\quad\quad + H_1 \quad\quad &= 30
\end{aligned}
$$

$$X_2 \quad - S_2 \quad + A_2 = 20$$

$$X_1, \quad X_2, S_1, \quad S_2, \ A_1, \quad H_1, A_2 \geq 0.$$

En la tabla 4.9, se presenta todo el procedimiento del método simplex para este ejercicio.

Como se puede apreciar en el tablero, entra a la base la variable S_1 y para determinar que variable sale de la base hay que dividir por el vector de la misma variable (-1/9, 0, -1/9). Este vector no contiene ningún valor positivo; por lo tanto no se puede determinar que variable sale de la base y representa un problema con solución no acotada o ilimitada.

4.1.4. Problema sin solución

Se interpreta que un problema solucionado por el método simplex no tiene solución cuando se llega a las condiciones de optimalidad (todos los Z_J-C_J son mayores o iguales a cero) y por lo menos una variable artificial que da en la base con valor diferente de cero.

Ejercicio 4.1.4. Para explicar este concepto se utiliza el ejercicio 3.1.4 cuya formulación y modelo matemático se enuncia enseguida: la compañía Epsilon produce baldosas y tabletas, las cuales generan una contribución a las utilidades de $5.000 y $4.000 por metro cuadrado respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad de 200 metros cuadrados de arena y 240 metros cuadrados de cemento por semana. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un metro cuadrado de baldosas se requieren 4 metros cuadrados de arena y 3 metros cuadrados de cemento; mientras que para producir un metro cuadrado de tableta se requieren 5 metros cuadrados de arena y 8 metros cuadrados de cemento?. Suponga además, que el cliente garantiza comprar como mínimo 50 metros cuadrados de tableta.

Definición de variables

X_1 = metros cuadrados de baldosas a fabricar por semana.

X_2 = metros cuadrados de tabletas a fabricar por semana.

Máx. $Z = 5000\ X_1 + 4000\ X_2$

S.A.

$4\ X_1 + 5\ X_2 \leq 200$

$3\ X_1 + 8\ X_2 \leq 240$

$X_2 \geq 50$

$X_1, \quad X_2 \geq 0$

TABLA 4.9.

FILA	OPERA-CIÓN	C_J	2	3	0	0	-M	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	H_1	A_2			
F_1		-M	5	9	-1	0	1	0	0	A_1	450	450/9=50
F_2		0	1	0	0	0	0	1	0	H_1	30	*
F_3		-M	0	1	0	-1	0	0	1	A_2	20	20/1=20
F_{Z1}		Z_J-C_J	-5M-2	-10M-3	M	M	0	0	0	Z=-470M		
F_4	$F_6(-9)+F_1$	-M	5	0	-1	9	1	0	-9	A_1	270	270/9=30
F_5	F_2	0	1	0	0	0	0	1	0	H_1	30	*
F_6	F_3	3	0	1	0	-1	0	0	1	X_2	20	*
F_{Z2}		Z_J-C_J	-5M-2	0	M	-9M-3	0	0	10M+3	Z=270M+60		
F_7	$F_4(1/9)$	0	5/9	0	-1/9	1	1/9	0	-1	S_2	30	30/5/9=54
F_8	F_5	0	1	0	0	0	0	1	0	H_1	30	30/1=30
F_9	F_7+F_6	3	5/9	1	-1/9	0	1/9	0	0	X_2	50	50/5/9=90
F_{Z3}		Z_J-C_J	-1/3	0	-1/3	0	M+1/3	0	M	Z=150		
F_{10}	$F_{11}(-5/9)+F_7$	0	0	0	-1/9	1	1/9	-5/9	-1	S_2	40/3	*
F_{11}	F_8	2	1	0	0	0	0	1	0	X_1	30	*
F_{12}	$F_{11}(-5/9)+F_9$	3	0	1	-1/9	0	1/9	-5/9	0	X_2	100/3	*
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	-1/3	0	M+1/3	1/3	M	Z=160		

Llevando todas las restricciones a igualdades, generando todos los vectores unitarios a que haya lugar y penalizando la función objetivo; el ejercicio se establece así (la función objetivo se ha dividido por 1.000):

$$MAX\ Z = 5X_1 + 4X_2 - MA_1$$

S.A.

$$4X_1 + 5X_2 + H_1 = 200$$

$$3X_1 + 8X_2 + H_2 = 240$$

$$X_2 - S_1 + A_1 = 50$$

$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ H_1,\ H_2,\ A_1 \geq 0.$$

En la tabla 4.10 se presenta el tablero simplex para este ejercicio.

Como se puede apreciar en el tablero final; todos los valores Z_J-C_J son mayores o iguales a cero, por lo tanto la solución óptima del ejercicio ya está dada; sin embargo la variable artificial A_1 está en la base con valor de 20 (diferente de cero). Por lo tanto se concluye que el problema no tiene solución.

4.2. PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN

Para solucionar problemas de minimización se multiplicará la función objetivo por -1 (reglas de equivalencia), y se procederá de la misma manera que en un problema de maximización. Recuerde las reglas de equivalencia mencionadas en el primer capítulo. Si algún lector desea solucionar un problema con función objetivo de minimización, lo puede realizar; teniendo en cuenta que en el paso 5 descrito al principio del capítulo, seleccionará aquella variable que tenga el Z_J-C_J más positivo. La solución óptima se obtendrá cuando todos los valores Z_J-C_J sean menores o iguales a cero. Todos los demás pasos son iguales.

4.2.1. Solución única

No se va a repetir la definición de solución única nuevamente aquí, ya que el concepto es el mismo definido para un problema de maximización. Para ejemplificar el método simplex, con solución única se realizará el ejercicio 3.2.1 que se utilizó para el método gráfico en el capítulo anterior. La formulación de dicho ejercicio se transcribe en el ejercicio 4.2.1, tal como aparece a continuación:

Ejercicio 4.2.1. Los Horses, una empresa dedicada al criadero de caballos de paso, ha establecido que a cada uno de ellos se le debe suministrar diariamente un mínimo de 200 miligramos de vitamina A, un mínimo de 160 miligramos de vitamina B y un mínimo de 150 miligramos de vitamina C. Los caballos son alimentados con matas de pasto y mineral, las cuáles le cuestan a la compañía \$300 por mata de pasto y \$500 por libra de mineral. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar a cada caballo diariamente si se sabe que una mata de pasto

TABLA 4.10.

FILA	OPERACIÓN	C_J	5	4	0	0	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	A_1			
F_1		0	4	5	0	1	0	0	H_1	200	200/5=40
F_2		0	3	8	0	0	1	0	H_2	240	240/8=30
F_3		-M	0	1	-1	0	0	1	A_1	50	50/1=50
F_{Z1}		Z_J-C_J	-5	-M-4	M	0	0	0	Z=-50M		
F_4	F_5(-5)+F_1	0	17/8	0	0	1	-5/8	0	H_1	50	
F_5	F_2(1/8)	4	3/8	1	0	0	1/8	0	X_2	30	
F_6	F_5(-1)+F_3	-M	-3/8	0	-1	0	-1/8	1	A_1	20	
F_{Z2}		Z_J-C_J	3/8M-7/2	0	M	0	1/8M+1/2	0	Z=-20M+120		

contiene 4 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 5 miligramos de vitamina C; mientras que una libra de mineral contiene miligramos de vitamina A, 8 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C?

X_1 = Matas de pasto que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

X_2 = Libras de mineral que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

De acuerdo con la anterior definición el modelo queda así:

$$\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 \geq 200$$
$$2\,X_1 + 8\,X_2 \geq 160$$
$$5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 150$$
$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

Utilizando las reglas de equivalencia el problema se transforma en:

$$\text{Max. } (-Z) = -300\,X_1 - 500\,X_2 \; -MA_1 \; -MA_2 \; -MA_3$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 \; -S_1 \qquad +A_1 \qquad = 200$$
$$2\,X_1 + 8\,X_2 \qquad -S_2 \qquad +A_2 \qquad = 160$$
$$5\,X_1 + 3\,X_2 \qquad -S_3 \qquad +A_3 = 150$$
$$X_1, \quad X_2, S_1, S_2, \; S_3, \; A_1, \; A_2, \; A_3 \geq \; 0.$$

En la tabla 4.11 se presenta la solución de este problema a través del método simplex. De esta tabla se interpreta que a cada caballo diariamente se le deben suministrar 400/11 matas de pasto y 120/11 libras de mineral para garantizar los requerimientos vitamínicos. Con base en ello se obtiene un costo total mínimo de \$180.000/11. Además, cada caballo diariamente está consumiendo 700/11 más de vitamina C (por encima del nivel mínimo establecido; para este caso por encima de 150 miligramos). Como se puede observar en el último tablero, sólo las variables básicas tienen valor de cero en el renglón Z_J-C_J; lo que indica que el problema tiene solución única. (Mismo criterio utilizado para maximización).

4.2.2. Solución óptima múltiple

Al igual que para un problema de maximización, también se pueden obtener muchas soluciones óptimas en un problema de minimización. Esto ocurre con el mismo criterio de un problema de maximización cuando hay por lo menos una variable no básica que toma valor de cero en el renglón Z_J-C_J. Se utilizará para ejemplificar este tipo de solución el ejercicio 3.2.2 que se solucionó con el método gráfico en el capítulo anterior. Su formulación y modelo aparecen en el ejercicio 4.2.2 que se relata a continuación:

TABLA 4.11

FILA	OPERACIÓN	C_J	-300	-500	0	0	0	-M	-M	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3			
F_1		-M	4	5	-1	0	0	1	0	0	A_1	200	200/5=40
F_2		-M	2	8	0	-1	0	0	1	0	A_2	160	160/8=20
F_3		-M	5	3	0	0	-1	0	0	1	A_3	150	150/3=50
F_{Z1}		Z_J-C_J	-11M+300	-16M +500	M	M	M	0	0	0	-Z=-510M		
F_4	F_5(-5)+F_1	-M	11/4	0	-1	5/8	0	1	-5/8	0	A_1	100	100/11/4 =400/11
F_5	F_2(1/8)	-500	1/4	1	0	-1/8	0	0	1/8	0	X_2	20	20/1/4 =80
F_6	F_5(-3)+F_3	-M	17/4	0	0	3/8	-1	0	-3/8	1	A_3	90	90/17/4 =360/17
F_{Z2}		Z_J-C_J	-7M+175	0	M	-M+125/2	-M	0	2M-125/2	0	-Z=-190M-10000		
F_7	F_9(-11/4)+F_4	-M	0	0	-1	13/34	11/17	1	-13/34	-11/17	A_1	710/17	710/17/11/17 =71/11
F_8	F_9(-1/4)+F_5	-500	0	1	0	-5/34	1/17	0	5/34	-1/17	X_2	250/17	250/17/11/17 =250
F_9	F_6(4/17)	-300	1	0	0	3/34	-4/17	0	-3/34	4/17	X_1	360/17	*
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	M	-13/34M +800/17	-11/17M +700/17	0	47/34M-800/17	28/17M +700/17	-Z= -710/17M-233000/17		
F_{10}	F_7(17/11)	0	0	0	-17/11	13/22	1	17/11	-13/22	-1	S_3	710/11	
F_{11}	F_{10}(-1/17)+F_8	-500	0	1	1/11	-2/11	0	-1/11	2/11	0	X_2	120/11	
F_{12}	F_{10}(4/17)+F_9	-300	1	0	-4/11	5/22	0	4/11	-5/22	0	X_1	400/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	700/11	250/11	0	M-700/11	M-250/11	M	-Z= -180000/11		

Ejercicio 4.2.2. Combustibles Dextra produce gasolina y Acpm a un costo de 2.000 y 4.000 pesos por galón respectivamente. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un galón de gasolina se requiere de 4 horas hombre de trabajo, 6 horas máquina y 8 litros de petróleo; mientras que para producir un galón de ACPM se requiere de 8 horas hombre de trabajo, 5 horas máquina y 10 litros de petróleo. Además, se sabe que para que no haya subutilización de los recursos se debe consumir mínimo 320 horas hombre y mínimo 300 horas máquina al mes. ¿Qué cantidad de cada combustible se debe fabricar? Si se sabe hay una disponibilidad mensual de 800 litros de petróleo.

Definición de variables

X_1 = Galones de gasolina que se deben fabricar por mes.

X_2 = Galones de acpm que se deben fabricar por mes.

Teniendo en cuenta la definición de las variables el modelo matemático queda planteado de la siguiente manera.

$$\text{Min. } Z = 2000\,X_1 + 4000\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 8\,X_2 \geq 320$$
$$6\,X_1 + 5\,X_2 \geq 300$$
$$8\,X_1 + 10\,X_2 \leq 800$$
$$X_1, \quad X_2 \geq 0.$$

Para llevar este ejercicio al tablero simplex, se aplicarán las reglas de equivalencia de primer capítulo y se dividirá la función objetivo por mil. Este problema queda de la siguiente manera:

$$\text{Max. } (-Z) = -2X_1 - 4X_2 - MA_1 - MA_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 8\,X_2 - S_1 + A_1 = 320$$
$$6\,X_1 + 5\,X_2 - S_2 + A_2 = 300$$
$$8\,X_1 + 10\,X_2 + H_1 = 800$$
$$X_1, \quad X_2, S_1, \ S_2, \ A_1, \ A_2, \ H_1 \geq 0.$$

En la tabla 4.12 se presenta la solución de este ejercicio mediante el método simplex. La solución óptima de este problema se interpreta de la siguiente manera: se deben producir 200/7 galones de gasolina y 180/7 galones de acpm para obtener un costo mínimo de $160 (se realizó el ejercicio maximizando y se obtuvo –Z = -160). Además, se observa que sobran 2200/7 litros de petróleo.

TABLA 4.12.

FILA	OPERACIÓN	C_J	-2	-4	0	0	-M	-M	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	H_1			
F_1		-M	4	8	-1	0	1	0	0	A_1	320	320/8=40
F_2		-M	6	5	0	-1	0	1	0	A_1	300	300/5=60
F_3		0	8	10	0	0	0	0	1	H_1	800	800/10=80
F_{Z1}		Z_J-C_J	-10M+2	-13M-4	M	M	0	0	0	-Z=-620M		
F_4	F1(1/8)	-4	1/2	1	-1/8	0	1/8	0	0	X_2	40	40/1/2=80
F_5	F4(-5)+F2	-M	7/2	0	5/8	-1	-5/8	1	0	A_2	100	100/7/2=28,57
F_6	F4(-10)+F3	0	3	0	5/4	0	-5/4	0	1	H_1	400	400/3=133,33
F_{Z2}		Z_J-C_J	-7/2M	0	-5/8M+1/2	M	13/8M-1/2	0	0	-Z=-100M-160		
F_7	F8(-1-/2)+F4	-4	0	1	-3/14	1/7	3/14	-1/7	0	X_2	180/7	
F_8	F5(2/7)	-2	1	0	5/28	-2/7	-5/28	2/7	0	X_1	200/7	
F_9	F8(-3)+F6	0	0	0	5/7	6/7	-5/7	-6/7	1	H_1	2200/7	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	1/2	0	M-1/2	M	0	-Z= -160		

Tal como se observa en la fila F_{Z3} (Z_J-C_J) la variable S_2, tiene valor de cero; lo que indica que el problema tiene solución óptima múltiple. La solución presentada en dicho tablero es una de ellas. Para obtener el otro extremo que es solución óptima entra a la base S_2 y sale X_2. En la tabla 4.13 se presenta este procedimiento.

De la tabla 4.13 se deduce que se deben producir 80 galones de gasolina y no se debe producir acpm; para obtener un costo mínimo de $160. Además, S2 = 180 indica que por encima de 300 horas máquina, se están consumiendo 180 horas adicionales y H1= 160, indica que sobran o no se están utilizando 160 litros de petróleo.

TABLA 4.13.

FILA	OPERACIÓN	C_J	-2	-4	0	0	-M	-M	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	H_1			
F_{10}	F7(7)	0	0	7	-3/2	1	3/2	-1	0	S_2	180	180
F_{11}	F10(2/7) +F8	-2	1	2	-1/4	0	1/4	0	0	X_1	80	80
F_{12}	F10(-6/7) +F9	0	0	-6	2	0	-2	0	1	H_1	160	160
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	½	0	M-1/2	M	0	-Z= -160		

4.2.3. Solución no acotada

Recordando la definición de no acotamiento, se dice qué se da cuando no se puede determinar que variable sale de la base.

Ejercicio 4.2.3. Para esto se toma el ejercicio **3.2.3** que se solucionó mediante el método gráfico y cuya formulación y planteamiento se describen a continuación: la compañía Siderurgia Ltda produce un tipo de aleación especial compuesta por sílice y aluminio; los cuales compra a $3000 y $5000 por kilogramo respectivamente. Además, se sabe que la utilización de un kilogramo de sílice consume 5 miligramos de material radioactivo y 2 litros de agua; mientras que la utilización de un kilogramo de aluminio consume 4 miligramos de material radioactivo y da lugar a la aparición de 3 litros de agua. Por política de la compañía se debe consumir mínimo 20 miligramos de material radiactivo y se cuenta con una disponibilidad de 6 litros de agua. ¿Qué cantidad de sílice y aluminio se debe utilizar en la aleación si se sabe que se debe utilizar como máximo 8 kilogramos de sílice y que el Gobierno Nacional subsidia con $15.000 la utilización de cada kilogramo de aluminio?

Para el planteamiento de este ejercicio se definen las siguientes variables:

X_1 = Kilos de sílice a utilizar en la aleación.

X_2 = Kilos de aluminio a utilizar en la aleación.

Min Z = 3.000 X_1 -10.000 X_2

Sujeto a

$5 X_1 + 4 X_2 \geq 20$

$2 X_1 - 3 X_2 \leq 6$

$X_1 \leq 8$

$X_1, \quad X_2 \geq 0.$

Agregando todas las variables de holgura, de exceso y artificiales a este problema; para poderlo llevar al tablero simplex se transforma como aparece a continuación (también, se multiplica la función objetivo por -1 para llevarlo a minimización y por facilidad sus costos se dividen por mil):

Max (-Z) = -3 X_1 +10 X_2

Sujeto a

$5 X_1 + 4 X_2 - S_1 + A_1 = 20$

$2 X_1 - 3 X_2 + H_1 = 6$

$X_1 + H_2 = 8$

$X_1, \quad X_2, S_1, \quad A1, \quad H_1, \quad H_2 \geq 0.$

En la tabla 4.14 se presenta la solución de este ejercicio.

En este tablero se visualiza que debe entrar a la base S1, pero ningún valor de su vector es positivo; luego no se puede evaluar que variable sale de la base y por lo tanto el problema tiene solución no acotada o ilimitada

4.2.4. Problema sin solución

Vale la pena recordar que un problema no tiene solución si no hay un solo punto que satisfaga la totalidad de restricciones del problema. Para revisar cómo se identifica esto en el método simplex se trae el ejercicio 3.2.4 que se resolvió en el método gráfico y su formulación y planteamiento se transcriben en el ejercicio 4.2.4, tal como aparece enseguida:

Ejercicio 4.2.4. Una compañía fabricante de calzado "El Pie Feliz" ha establecido que máximo venderá 30 pares de zapatos y como mínimo 40 pares de tenis.

Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 180 metros de cuero y se ha establecido que el costo de producción de cada par de zapatos es de $5.000 y de cada par de tenis es de $4.000.

TABLA 4.14

FILA	OPERACIÓN	C_J	-3	10	0	-M	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	A_1	H_1	H_2			
F_1		-M	5	4	-1	1	0	0	A_1	20	20/5=4
F_2		0	2	-3	0	0	1	0	H_1	6	6/2=3
F_3		0	1	0	0	0	0	1	H_2	8	8/1=8
F_{Z1}		Z_J-C_J	-5M+3	-4M-10	M	0	0	0	-Z=-20M		
F_4	$F_5(-5)+F_1$	-M	0	23/2	-1	1	-5/2	0	A_1	5	5/23/2=10/23
F_5	$F_2(1/2)$	-3	1	-3/2	0	0	1/2	0	X_1	3	*
F_6	$F_5(-1)+F_3$	0	0	3/2	0	0	-1/2	1	H_2	5	5/3/2=10/3
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	-23/2M-11/2	M	0	5/2M-3/2	0	-Z=-5M-9		
F_7	$F_4(2/23)$	10	0	1	-2/23	2/23	-5/23	0	X_2	10/23	*
F_8	$F_7(3/2)+F_5$	-3	1	0	-3/23	3/23	4/23	0	X_1	84/23	84/23/4/23=21
F_9	$F_7(-3/2)+F_6$	0	0	0	3/23	-3/23	-4/23	1	H_2	100/23	*
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	-11/23	M+11/23	-62/23	0	-Z= -152/23		
F_{10}	$F_{11}(5/23)+F_7$	10	5/4	1	-1/4	1/4	0	0	X_2	5	*
F_{11}	$F_8(23/4)$	0	23/4	0	-3/4	3/4	1	0	H_1	21	*
F_{12}	$F_{11}(4/23)+F_9$	0	1	0	0	0	0	1	H_2	8	*
F_{Z4}		Z_J-C_J	31/2	0	-5/2	M+5/2	0	0	-Z= -50		

Utilice el método simplex para determinar que cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar a fin de minimizar los costos totales de fabricación, si se sabe que un par de zapatos consume 3 metros de cuero y un par de tenis consume 6 metros de cuero.

X_1 = Cantidad de zapatos a producir por mes.

X_2 = Cantidad de tenis a producir por mes.

Con base en esta definición de variables, el planteamiento del modelo matemático queda como sigue a continuación:

$$\text{Min } Z = 5000\, X_1 + 4000\, X_2$$

S.A.

$$3\, X_1 + 6\, X_2 \leq 180$$

$$X_1 \leq 30$$

$$X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Aplicando las reglas de equivalencia, el problema se transforma en:

$$\text{Max } (-Z) = -5\, X_1 - 4\, X_2 - MA_1$$

S.A.

$$3\, X_1 + 6\, X_2 + H_1 = 180$$

$$X_1 + H_2 = 30$$

$$X_2 - S_1 + A_1 = 40$$

$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ H_1,\ H_2,\ A_1 \geq 0.$$

En la tabla 4.15 se presenta la solución de este ejercicio utilizando el método simplex.

En este tablero están dadas las condiciones de optimalidad; pero la variable artificial quedo en la base con valor diferente de cero (A_1=10), lo que indica que el problema no tiene solución.

TABLA 4.15.											
FILA	OPE-RA-CIÓN	C_J	-5	-4	0	0	0	-M	BASE	X_B	CO-CIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	A_1			
F_1		0	3	6	0	1	0	0	H_1	180	180/6 =30
F_2		0	1	0	0	0	1	0	H_2	30	*
F_3		-M	0	1	-1	0	0	1	A_2	40	40/1=40
F_{Z1}		Z_J-C_J	5	-M+4	M	0	0	0	-Z= -40M		
F_4	F1(1/6)	-4	1/2	1	0	1/6	0	0	X_2	30	
F_5	F2	0	1	0	0	0	1	0	H_2	30	
F_6	F4(-1-)+F3	-M	-1/2	0	-1	-1/6	0	1	A_1	10	
F_{Z2}		Z_J-C_J	1/2M+5	4	M	1/6M-2/3	0	0	-Z= -10M-120		

4.2.5. Solución degenerada

Un problema de programación lineal genera solución básica factible degenerada cuando dentro del mismo hay restricciones de carácter redundante; es decir, hay más de una restricción que genera la misma área factible, por lo tanto la solución no varia si se elimina una de estas restricciones (si hay más de dos restricciones que generen la misma área factible, se pueden eliminar todas, menos una y la solución no cambiará). Lo anterior en el método simplex se refleja en el hecho que una variable básica en la solución tomará valor de cero. Mediante la realización del 3.2.5 que se resolvió en el capitulo anterior se visualizará es hecho. En el ejercicio 4.2.5 se trae la formulación y planteamiento de dicho ejercicio.

Ejercicio 4.2.5. La compañía Los Cristales, produce vidrios florentinos y martillados para los cuales ha establecido un costo de $20.000 y $40.000 por unidad respectivamente (una unidad equivale a un vidrio de 120 centímetros de ancho, 180 centímetros de largo y 5 milímetros de espesor). Para la fabricación de estos productos se cuenta con una disponibilidad semanal de 240 horas hombre, 420 horas horno y 480 unidades de materia prima. Establezca qué cantidad de cada tipo de vidrio se debe fabricar a fin de minimizar el costo de producción si se sabe que para producir un vidrio florentino se requieren 8 horas hombre, 6 horas en el horno y 16 unidades de materia prima; mientras que para producir un vidrio martillado se requieren 3 horas hombre, 7 horas de proceso en el horno y 6 unidades de materia prima. Suponga, que el departamento de ventas ha pronosticado que mínimo se venderán 40 vidrios entre los 2 tipos.

X_1 = Cantidad de vidrios florentinos a fabricar semanalmente.

X_2 = Cantidad de vidrios martillados a fabricar semanalmente.

$$\text{Min } Z = 20000\,X_1 + 40000\,X_2$$

Sujeto a

$8\,X_1 + 3\,X_2 \leq 240$. Disponibilidad de horas hombre.

$6\,X_1 + 7\,X_2 \leq 420$. Disponibilidad de horas en el horno.

$16\,X_1 + 6\,X_2 \leq 480$. Disponibilidad de materia prima.

$X_1 + X_2 \geq 40$. Venta mínima entre los dos productos.

$X_1, X_2 \geq 0$

Utilizando las reglas de equivalencia el modelo queda de la siguiente forma (se ha dividido la función objetivo por 1000):

$$\text{Máx. } (-Z) = -20X_1 - 40X_2 - MA_1$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
8\,X_1 + 3\,X_2 + H_1 &= 240.\\
6\,X_1 + 7\,X_2 + H_2 &= 420.\\
16\,X_1 + 6\,X_2 + H_3 &= 480.\\
X_1 + X_2 - S1 + A_1 &= 40.\\
X_1, X_2, S_1, H_1, H_2, H_3, A_1 &\geq 0.
\end{aligned}$$

En la tabla 4.16 se presenta la solución de este ejercicio con base en el método simplex. La solución de este problema dice que se deben producir 24 vidrios florentino y 16 vidrios martillados para obtener un costo mínimo de $1.120. Además, no se utilizan 164 horas de la disponibilidad del horno.

Como se puede apreciar la variable básica H_3 toma valor de cero estando en la base; lo que indica que el problema tiene solución básica factible degenerada (hay restricciones redundantes).

4.2.6. Restricciones de igualdad

Hasta el momento se han resuelto todo tipo de problemas, exceptuando problemas que incluyen al menos una restricción de sólo igualdad. El ejercicio 3.2.6 resuelto por el método gráfico permite apreciar esta situación. A continuación, en el ejercicio 4.2.6 se describe su formulación y planteamiento:

Ejercicio 4.2.6. Cierta compañía transportadora dispone de 12 camionetas y 6 camiones para el transporte de su producto. Actualmente la compañía debe entregar 80 toneladas de su producto y se sabe que una camioneta tiene capa-

TABLA 4.16.

FILA	OPERACIÓN	C_J	-20	-40	0	0	0	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	H_3	A_1			
F_1		0	8	3	0	1	0	0	0	H_1	240	240/8=30
F_2		0	6	7	0	0	1	0	0	H_2	420	420/6=70
F_3		0	16	6	0	0	0	1	0	H_3	480	480/16=30
F_4		-M	1	1	-1	0	0	0	1	A_1	40	40/1=40
F_{Z1}		Z_J-C_J	-M+20	-M+40	M	0	0	0	0	-Z= -40M		
F_5	F_1(1/8)	-20	1	3/8	0	1/8	0	0	0	X_1	30	30/3/8=80
F_6	F_5(-6)+F_2	0	0	19/4	0	-3/4	1	0	0	H_2	240	240/19/4=50.5
F_7	F_5(-16)+F_3	0	0	0	0	-2	0	1	0	H_3	0	*
F_8	F_5(-1)+F_4	-M	0	5/8	-1	-1/8	0	0	1	A_1	10	10/5/8=16
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	-5/8M+65/2	M	1/8M-5/2	0	0	0	-Z= -10M-600		
F_9	F_{12}(-3/8)+F_5	-20	1	0	3/5	1/5	0	0	-3/5	X_1	24	
F_{10}	F_{12}(-19/4)+F_6	0	0	0	38/5	1/5	1	0	-38/5	H_2	164	
F_{11}	F_7	0	0	0	0	-2	0	1	0	H_3	0	
F_{12}	F_8(8/5)	-40	0	1	-8/5	-1/5	0	0	8/5	X_2	16	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	52	4	0	0	M-52	-Z= -1120		

cidad para transportar 8 toneladas, mientras que un camión puede transportar 10 toneladas; además, se sabe que el costo que se genera por asignar una camioneta es de $3 por kilómetro y por asignar un camión es de $5 por kilómetro. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe asignar, si se sabe que la distancia a recorrer es de 100 kilómetros y que por cada camión dejado en reserva, se debe dejar mínimo una camioneta en reserva?

X_1= cantidad de camionetas asignadas

X_2= cantidad de camiones asignados.

Con base en la definición de las variables el modelo matemático de programación lineal se estructura de la siguiente manera:

Min. Z =300 X_1 + 500 X_2 (Costo mínimo)

s.a.

$X_1 \leq 12.$ restricción de disponibilidad de camionetas.

$X_2 \leq 6.$ restricción de disponibilidad de camiones.

$8X_1+10X_2 = 80.$ restricción de las toneladas a transportar.

$X_1 - X_2 \leq 6$ restricción de vehículos en reserva.

$X_1, X_2 \geq 0$

En este ejercicio lo único que hay que tener en cuenta es que la restricción de igualdad no se le suma variable de holgura, ni tampoco se le resta variable de exceso. Lo que hay que hacer es generar en vector unitario mediante la adición de una variable artificial; además, de penalizar la función objetivo.

El problema a solucionar por el método simplex se relaciona a continuación:

Max. (-Z) = -300 X_1 - 500 X_2 -MA_1

s.a.

$X_1 + H_1 = 12.$

$X_2 + H_2 = 6.$

$8X_1+10X_2 + A_1 = 80.$

$X_1 - X_2 + H_3 = 6$

$X_1, X_2, H_1, H_2, A_1, H_3 \geq 0.$

En la tabla 4.17 se presenta la solución de este ejercicio a través del metodo simplex.

Partiendo del supuesto de divisibilidad (se pueden asignar unidades fraccionarias) la compañía transportadora debe asignar 70/9 de camionetas y 16/9 de camiones para generar un costo mínimo de $29000/9. Además, quedan en reserva 38/9 de camionetas y 38/9 de camiones con lo cual se cumple la restricción de reserva de los vehículos.

TABLA 4.17.

FILA	OPERACIÓN	C_J	-300	-500	0	0	-M	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	A_1	H_3			
F_1		0	1	0	1	0	0	0	H_1	12	*
F_2		0	0	1	0	1	0	0	H_2	6	6/1=6
F_3		-M	8	10	0	0	1	0	A_1	80	80/10 = 8
F_4		0	1	-1	0	0	0	1	H_3	6	*
F_{Z1}		Z_j-C_j	-8M+300	-10M+500	0	0	0	0	-Z = - 80M		
F_5	F_1	0	1	0	-1	0	0	0	H_1	12	12/1=12
F_6	F_2	-500	0	1	0	1	0	0	X_2	6	*
F_7	$F_6(-10)+F_3$	-M	8	0	0	-10	1	0	A_1	20	20/8 = 2,5
F_8	$F_6 + F_4$	0	1	0	0	1	0	1	H_3	12	12/1=12
F_{Z2}		Z_j-C_j	-8M+300	0	0	10M-500	0	0	.-Z = - 20M-300		
F_9	$F_{11}(-1)+F_5$	0	0	0	1	5/4	-1/8	0	H_1	19/2	(19/2)/(5/4) = 7,6
F_{10}	F_6	-500	0	1	0	1	0	0	X_2	6	6/1=6
F_{11}	$F_7(1/8)$	-300	1	0	0	-5/4	1/8	0	X_1	5/2	*
F_{12}	$F_{11}(-1)+F_8$	0	0	0	0	9/4	-1/8	1	H_3	19/2	(19/2)/(9/4) = 4,2
F_{Z3}		Z_j-C_j	0	0	0	-125	M-75/2	0	-Z = -3750		
F_{13}	$F_{16}(-5/4)+F_9$	0	0	0	1	0	-1/18	-5/9	H_1	38/9	
F_{14}	$F_{16}(-1)+F_{10}$	-500	0	1	0	0	1/18	-4/9	X_2	16/9	
F_{15}	$F_{16}(5/4)+F_{11}$	-300	1	0	0	0	1/18	5/9	X_1	70/9	
F_{16}	$F_{12}(4/9)$	0	0	0	0	1	-1/18	4/9	H_2	38/9	
F_{Z4}		Z_j-C_j	0	0	0	0	M-400/9	500/9	-Z = -29000/9		

PROBLEMAS PROPUESTOS

En los ejercicios de este capítulo se pide solucionarlos por medio del método simplex, interpretar la solución y decir que tipo de solución tiene el problema.

4.1. Una compañía siderúrgica produce ángulos y platinos los cuales rinden una contribución a las utilidades de $10.000 y $ 30.000 por metro respectivamente. Para la producción de estos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 250 libras de acero y 210 horas hombre. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un metro de ángulo se requiere de 5 libras de acero y 3 horas hombre de trabajo, mientras que para producir un metro de platina se requiere de 5 libras de acero y 7 horas hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar si se sabe que máximo se venderán 20 metros de platina diariamente?

4.2. Cierta compañía editorial produce libros y revistas de carácter especializado, los cuales venden a 30.000 y 25.000 por unidad respectivamente. Se ha estimado que hay una disponibilidad de 300 horas en revisión técnica, 350 horas en impresión y 400 horas en empaste semanalmente. Establezca la cantidad de libros y revistas que se debe producir por semana, si se sabe que para producir un libro se requiere de 6h en revisión técnica, 5 en impresión y 10h en empaste, mientras que para producir una revista se requiere de 5h en revisión técnica, 7 h en impresión, y 4h en empaste.

4.3. Una empresa de confecciones ha determinado que máximo venderá 40 pantalones por semana y mínimo 30 chaquetas por semana. Además, se sabe que para evitar tiempo ocioso se debe consumir mínimo 350 horas hombres por semana. Suponga que un pantalón para ser fabricado requiere de 7 horas hombre, mientras que una chaqueta necesita 5 horas hombre. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que un pantalón genera una utilidad de $2.000 y una chaqueta de $4.000?

4.4. La compañía Simak dispone de 180 horas por semana en el departamento de corte y 150 horas ensamble. Además, se ha establecido que para producir una chaqueta se requiere de 6 horas departamento corte y 3 horas de ensamble, mientras que para producir un buzo, se requiere de 3 horas departamento corte y 5 horas de departamento de ensamble. También, se ha establecido que el precio de venta de una chaqueta es de $50.000 y un buzo es de $40.000. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas ha estimado una venta mínima de 40 buzos.

4.5. Una nutricionista se encuentra en el proceso de decisión de establecer que cantidad de 2 tipos de alimento (A y B) debe incorporar en una dieta sabiéndose que el costo por libra de cada uno de ellos es de $400 y $300 por libra respectivamente. Además, se ha establecido que una libra de alimento tipo A contiene 3 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de minerales y 4 miligramos de proteínas; mientras que una libra de alimento tipo b contiene 8 miligramos de vitaminas, 2 miligramos de minerales y 5 miligramos de proteínas. También, se debe garantizar consumir mínimo 240 miligramos de vitaminas, 120 miligramos de minerales y 200 miligramos de proteínas.

4.6. Cierta compañía fabrica billeteras y cinturones a un costo de $12,000 y $6,000 por unidad respectivamente. En la fabricación de dichos artículos se debe consumir como mínimo 180 horas hombre y mínimo 200 unidades de materia prima. Mediante un estudio se determinó que para producir una billetera se requiere 6 horas hombre y 4 unidades de materia prima, mientras que para fabricar un cinturón se requiere 3 horas hombre y 5 unidades de materia prima. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 billeteras?

4.7. Una compañía papelera produce cuadernos espirales y grapados a un costo de $200 y $400 respectivamente por unidad. Para la producción hay una disponibilidad diaria de 200 horas en corte y 150 horas en ensamble. Además, se ha establecido que la demanda conjunta de los 2 artículos será de 60 unidades. ¿Qué cantidad de cada tipo de cuaderno se debe fabricar si se sabe que para producir un cuaderno tipo espiral se requiere de 5 horas en corte y 3 horas en ensamble y para producir un cuaderno grapado se requiere de 4 horas en corte y 5 horas en ensamble?

4.8. La compañía Sigma, produce ACPM y Biogasolina a un costo de $ 2.000 y $ 3.000 por galón respectivamente. Para ello se debe consumir un mínimo de 210 horas a la semana. Además el departamento de ventas ha determinado que máximo venderá 20 galones de ACPM y mínimo 10 de Biogasolina. También se sabe que la producción de un galón de ACPM requiere de 3 horas, mientras que un galón de Biogasolina, requiere de 7 horas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el gobierno Nacional da un subsidio de $ 6.000 por cada galón de biogasolina que se produzca?

4.9. Una fábrica de pupitres se dedica a la manufacturación de pupitres unipersonales y bipersonales; los cuales generan utilidad unitaria de $7000 y $12.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos de la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 500 metros de madera, 700 metros de tubo y 600 horas-hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar? si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de 2 metros de madera, 4 metros de tubo y 3 horas-hombre de trabajo; mientras que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo.

4.10. Cierta compañía dedicada a la ornamentación ha sacado del mercado un producto que no le era rentable, lo que ocasiona que su planta de producción tenga una subutilización de 500 horas en la sección de corte, 300 horas en la sección de soldadura y 700 horas en la sección de ensamble. El departamento de mercadeo sugiere que dicha capacidad puede ser utilizada en la fabricación de puertas, ventanas y rejas en la mejor combinación posible. Para estos artículos se ha establecido un precio de venta de 25000, 30000 y 18000 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 horas en corte, 6 horas en soldadura y 4 horas en ensamble; para producir una ventana se requiere de 2 horas en corte, 3 horas en ensamble y una hora en soldadura; mientras que para producir una reja se necesita de 8 horas en corte, 4 horas en soldadura y 5 horas en ensamble. Además, se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 20 rejas y máximo 30 puertas. Suponga que por las condiciones de la planta la producción de ventanas no debe exceder más del 20% de la producción total de la planta.

4.11. La porcicultura sigma tiene un criadero de cerdos en Tibirita (Cundinamarca, Colombia), donde actualmente se están levantando 50 cerditos, para cada uno de los cuales se ha establecido que diariamente requiere un suministro mínimo de 50 miligramos de vitamina A, mínimo 70 miligramos de vitamina B y máximo 80 miligramos de vitamina C. Para lograr estos requerimientos vitamínicos, a los cerditos en su alimentación se le suministra cereal y mogollo, los cuales adquiere la compañía a $5000 y $10000 por kilo respectivamente. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar diariamente a cada cerdito? si se sabe que un kilo de cereal contiene 3 miligramos de vitamina A, 9 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de vitamina C; mientras que un kilo de mogollo contiene 10 miligramos de Vitamina A, 3 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

4.12. Acerías Bacatá prepara una aleación de tipo especial en un alto horno, el cual debe ser cargado con dos toneladas de material. Por requisitos de calidad dicha aleación debe contener mínimo 30% de sílice pero no más de 35%; y máximo 28% de aluminio. La compañía carga el horno con hierro, Zinc y Cobre, los cuales adquiere a 3000, 7000 y 6000 pesos por kilo respectivamente. ¿Con qué cantidad de cada producto se debe alimentar el horno si se sabe que el hierro contiene 18% de sílice y 15% aluminio; el zinc contiene 7% de sílice y 25% de aluminio; mientras que el cobre contiene 16 % de sílice y 5% de aluminio.

4.13. Una fábrica de muñecos de peluche fabrica osos y perros para los cuales ha establecido una utilidad de $8000 y $5000 por unidad respectivamente. El departamento de mercados ha establecido que mínimo se venderán 40 osos y máximo 50 perros. Determine que cantidad de cada uno de los artículos se

debe fabricar si se sabe que el gerente de la compañía desea que la producción de osos sea mínimo 20 unidades más que la producción de perros.

4.14. Estructuras Metálicas Ltda. manufactura puertas y ventanas con utilidades de 400 y 900 pesos por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad por semana de 400 metros de ángulo y 480 metros de platina. Además, se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 metros de ángulo y 8 metros de platina; mientras que para producir una ventana se requiere de 8 metros de ángulo y 6 metros de platina ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas estimó que máximo se venderán 30 ventanas?

4.15. La compañía"**SIGMA**" produce pupitres y sillas, para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de $5.000 y $6.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 20 horas hombre de trabajo, 32 horas máquina y 24 metros de materia prima. El gerente desea establecer que cantidad de pupitres y sillas debe fabricar a fin de incrementar al máximo su utilidad. Suponga, además, que para producir un pupitre se requiere de 5 horas hombre de trabajo, 4 horas máquina y 8 metros de materia prima; mientras que para producir una silla se necesita de 4 horas hombre de trabajo, 8 horas máquina y tres metros de materia prima.

4.16. Electrodomésticos "LA HORMIGA" produce y vende televisores y equipos de sonido para los cuales ha establecido que debido a las condiciones del mercado un televisor genera una pérdida de $30.000, mientras que un equipo de sonido genera una utilidad de $40.000. Además, se sabe por un estudio de mercados que la venta máxima de televisores será de 70 unidades mientras que para los equipos de sonido se ha establecido una venta mínima de 30 unidades. Para la comercialización de estos productos la compañía cuenta con un vendedor, el cual gana una comisión de $5 por televisor vendido y $8 por cada equipo de sonido vendido. Establezca qué cantidad de televisores y equipos de sonido se debe fabricar a fin de minimizar las pérdidas totales de la compañía y garantizar que el vendedor obtenga una comisión mínima por mes de $400.

4.17. Una compañía dedicada a la agricultura puede sembrar en su siguiente temporada papa y yuca, productos para los cuales ha establecido que generan una utilidad por hectáreas sembrada de $8 y $9 millones respectivamente. Para el cultivo de dichos productos se cuenta con una disponibilidad de 540 Litros de agua, 500 Kilos de abono y 800 Libras de fertilizante. ¿Que cantidad de hectáreas de cada producto se deben sembrar si se sabe que para sembrar una hectárea de papa se necesitan 6 litros de agua, 5 kilos de abono y 10 libras de fertilizante; mientras que para sembrar una hectárea de yuca se requiere de 9 litros de agua, 10 kilos de abono, y 8 libras de fertilizante?

4.18. Una fábrica de muebles ha determinado que la demanda de bibliotecas para los próximos 4 meses es de 200, 300, 390 y 130 unidades respectivamente. Además, se sabe que actualmente la compañía puede generar inventario en cualquier mes y debe cumplir con su demanda a tiempo durante cada mes. La compañía tiene una capacidad para fabricar 200 bibliotecas por mes en tiempo regular con un costo de $15.000 por biblioteca y puede producir unidades adicionales en tiempo extra a un costo de $20.000 por biblioteca. Determine la cantidad de bibliotecas a producir en cada mes; tanto en tiempo regular, como en tiempo extra si se sabe que las unidades producidas y no vendidas en un determinado mes generan un costo de almacenaje de $1.200 por biblioteca (suponga que al final del cuarto mes no debe haber inventario).

4.19. Se ha establecido en una fabrica de muebles metálicos que en el departamento de corte hay una disponibilidad de 700 horas por semana, en el departamento de soldadura hay una disponibilidad de 500 horas por semana, mientras que en el departamento de ensamble hay una disponibilidad de 800 horas por semana. La fábrica manufactura salas y comedores para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 10.000 y 15.000 pesos por unidad respectivamente. Establezca la cantidad de salas y comedores a fabricar por semana si se sabe que para producir una sala se requieren de 5 horas de proceso en corte, 2 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble; mientras que para producir un comedor se requieren 2 horas de proceso en corte, 6 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que máximo se venderán 30 salas y mínimo 10 comedores.

4.20. Bicisigma produce bicicletas y triciclos para los cuales ha establecido un precio de venta unitario de 9000 y 7000 pesos respectivamente. Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 630 horas en corte y 560 horas de soldadura, además se ha establecido que para producir una bicicleta se requiere de 9 horas en corte y 7 horas en soldadura, mientras que para producir un triciclo se requiere de 7 horas en corte y 8 horas en soldadura. Determinar que cantidad de bicicletas y triciclos se deben fabricar si se sabe que el departamento de mercadeo ha establecido que mínimo se venderán entre los dos artículos 50 unidades.

4.21. Una empresa siderúrgica dispone de un alto horno el cual debe ser cargado con una tonelada de material. En dicho horno se fabrica un tipo de aleación especial la cual por requisitos de calidad debe tener mínimo 32% de aluminio pero no más del 40% y como máximo el 17% de silicio. La compañía cuenta con 4 tipos de material para los cuales se ha establecido el contenido de silicio y aluminio con su respectivo costo tal como aparece en la tabla 3.13.

TABLA 3.13			
MATERIAL	**CONTENIDO SILICIO**	**CONTENIDO ALUMINIO**	**COSTO**
Acero	7%	16%	5000
Cobre	15%	5%	3000
Níquel	12%	14%	3000
Cromo	3%	10%	4400

4.22. Una corporación de ahorro y vivienda cuenta con un total $30.000.000.00 para préstamos bancarios entre los cuales esta préstamo para automóvil, vivienda, inversión rural, y préstamos personales. Mediante una evaluación del sistema financiero se sabe que los préstamos para automóvil generan un interés del 15% y tienen una probabilidad de incobrables del 10%; los préstamos para vivienda generan interés del 8% y una probabilidad de incobrables del 5%. Los préstamos para inversión rural generan interés del 7% y probabilidad de incobrable del 20%; mientras que los préstamos personales generan un interés del 24% y tiene una probabilidad de incobrable del 25%. Por políticas gubernamentales la entidad debe asignar mínimo el 40% de los fondos prestados a préstamos para inversión rural y vivienda. Además, los préstamos para automóvil deben ser máximo el 50% de los préstamos para inversión rural y los préstamos personales no pueden exceder el 10% de los dineros prestados. Determine qué cantidad de dinero se debe asignar a cada tipo de préstamo si por política de la compañía se ha especificado que la cantidad total de pagos irrecuperables no puede exceder el 6%.

4.23. Una joyería produce y vende relojes para hombre y para dama, para los cuales ha establecido un costo por unidad de $3.000 y $2.000 respectivamente. El departamento de ventas ha establecido que mínimo se venderán 60 relojes para dama y 70 relojes para caballero. Además, se ha establecido que para producir un reloj para dama se requiere de 5 horas de trabajo de un técnico, mientras para producir un reloj para hombre se requieren 8 horas de trabajo del técnico. Establezca la cantidad de relojes a producir si se sabe que la compañía tiene disponible 2 técnicos en la joyería, los cuales laboran 8 horas diarias y 25 días al mes.

4.24. La veterinaria "The Dog" cría cachorros para los cuales se ha establecido que máximo se les debe suministrar 630 miligramos de vitamina A, mínimo 350 miligramos de Vitamina B y mínimo 320 miligramos de vitamina C (estos requerimientos son mensuales). Para garantizar esos requisitos vitamínicos los cachorros son alimentados con purina y ladrina los cuales compra la compañía $8000 y $10000 por kilo respectivamente. Establecer qué cantidad de los dos alimentos se les debe suministrar mensualmente a cada cachorro si se sabe

que un kilo de purina contiene 9 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 4 miligramos de Vitamina C; mientras que un Kilo de ladrina contiene 7 miligramos de vitamina A, 5 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

4.25. Una heladería dispone diariamente de 300 gramos de pulpa de fruta y 320 gramos de azúcar para la producción de paletas y helados, para los cuales se ha establecido una utilidad unitaria de 200 y 100 pesos respectivamente. El departamento de mercadeo ha establecido que en conjunto mínimo se venderán 90 unidades. Establezca la cantidad de paletas y helados que se debe fabricar diariamente, si se sabe que para producir una paleta se requiere 5 gramos de pulpa de fruta y 8 gramos de azúcar, mientras que para producir un helado se requieren 6 gramos de pulpa de fruta y 4 gramos de azúcar.

4.26. Una industria de acrílicos cuenta con una disponibilidad semanal para la fabricación de sus productos de 400 metros de fibra de vidrio, 360 litros de resina y 500 miligramos de catalizador. Con esos recursos la compañía fabrica tinas referencia Nápoles y referencia Milán para los cuales se ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $6000 y $9000 cada tina respectivamente. ¿Qué cantidad de cada tipo de tina se debe fabricar si se sabe, que para producir una tina Nápoles se requieren 8 metros de fibra de vidrio, 6 litros de resina y 5 miligramos de catalizador; mientras que para producir una tina referencia Milán se requiere de 5 metros de fibra, 6 litros de resina y 10 miligramos de catalizador?.

4.27. "El palacio del colesterol" produce y vende pasteles y empanadas para los cuales ha establecido una utilidad de $400 por unidad de cada producto. Para la producción de esos artículos se dispone diariamente de 500 gramos de arroz y 360 gramos de harina. Además, se sabe que para producir un pastel se requiere de 10 gramos de arroz y 6 gramos de harina y para producir una empanada se requiere de 5 gramos de arroz y 6 gramos de harina. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar diariamente si se sabe que máximo se venderán 30 empanadas?.

4.28. Decoraciones "La Tapa" produce gabinetes para baño y cocina para los cuales ha fijado un precio de venta de $20.000 y $30.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 300 metros de acrílico y 240 metros de fibra. ¿Qué cantidad de gabinetes para baño y cocina se debe fabricar?, si se sabe que para producir un gabinete de baño se requiere de 5 metros de acrílico y 3 metros de fibra, mientras que para un gabinete de cocina se requiere de 6 metros de acrílico y 8 de fibra. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que mínimo se venderán 100 gabinetes para baño.

4.29. Un comercializador de tejidos de punto, distribuye sacos y blusas a un precio por unidad de \$5000 y \$8000 respectivamente. El departamento de mercadeo determinó que para el próximo mes máximo venderá 20 sacos y mínimo 15 blusas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe comprar si se sabe, que en conjunto entre los dos artículos se venderán mínimo 30 unidades?.

4.30. Una sociedad porcicultora ha establecido que a cada cerdo se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 14 miligramos de vitamina B y 16 miligramos de vitamina C. Para cumplir con esos requisitos vitamínicos, la sociedad compra para alimentar a los cerdos a un costo de \$3000 un kilo de mineral y a \$6000 un kilo de concentrado. ¿Qué cantidad de cada producto se le debe suministrar diariamente a cada cerdo?, si se sabe que un kilo de mineral contiene 6 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de C; mientras que un kilo de concentrado contiene 5 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de C.

4.31. Una importadora de joyas compra relojes para hombre a \$3000 y relojes para dama a \$6000 cada uno de ellos. Para preparar un reloj para hombre se requiere de 6 horas y para preparar un reloj para dama se requieren 5 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de reloj se debe preparar? si se sabe que mínimo se venderán 10 relojes para hombre en la próxima semana, que hay una disponibilidad de 300 horas para la preparación de los relojes y que se desea invertir mínimo \$180.000.

4.32."Dulceria Sweet" produce paquetes de dulces y chocolates, para los cuales ha establecido un costo de producción por paquete de \$5 y \$10 respectivamente. Actualmente la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 180 horas y se sabe que para producir un paquete de dulces se requiere de 3 horas, mientras que para producir un paquete de chocolates se requiere de 6 horas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el mercado consumirá mínimo 70 paquetes entre los dos artículos?

4.33."Químicos Protox" ha determinado que para la fabricación de un producto químico especial requiere de dos materias primas A y B. Se sabe que la utilización de un kilo de materia prima tipo A, se necesitan 2 litros de agua y 2 horas de trabajo y genera un costo de \$3, mientras que la utilización de un kilo de materia tipo B genera 3 litros de agua, consume 5 horas de trabajo y da una utilidad de \$7. ¿Qué cantidad de cada materia prima se debe utilizar en el producto químico si se sabe, que hay una disponibilidad de 60 litros de agua por semana y que se debe consumir mínimo 100 horas de trabajo?

4.34. Un fabricante de artículos decorativos tiene 6 metros de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará pinos decorativos. Con anterio-

ridad se han vendido bien dos modelos de manera que se dedicará a producir estos dos. El fabricante estima que el modelo 1 requiere 2 metros de madera y 7 horas de tiempo disponible, mientras que para el modelo 2 se requiere de un metro de madera y 8 horas de tiempo. Los precios de los modelos son \$120 y \$80 respectivamente. ¿Cuántos pinos decorativos de cada modelo se deben fabricar?

4.35. Una fábrica de muebles produce pupitres unipersonales, bipersonales y mesas para los cuales ha establecido que rinden una utilidad unitaria de \$3, \$2 y \$5. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 430 metros de madera, 460 metros de tubo y 420 metros de formica. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar a fin de incrementar las ganancias si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de un metro de madera, 3 metros de tubo y un metro de fórmica, que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 2 metros de madera y 4 metros de fórmica; mientras que para producir una mesa se necesita un metro de madera y 2 metros de tubo.

4.36. La industria de muebles "Data" produce sofás, sillas y poltronas para los cuales ha establecido que rinden una contribución unitaria a las utilidades de \$15.000, \$10.000 y \$20.000 respectivamente. Para producir esos artículos la compañía tiene una disponibilidad mensual de 800 metros de paño, 900 metros de listón y 720 metros de resortes. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que para producir un sofá se requiere 10 metros de paño, 9 metros de listón y 12 metros de resortes, para producir una silla se requieren 5 metros de paño, 4 metros de listón y 6 metros de resortes; mientras que para fabricar una poltrona se requiere de 8 metros de paño, 10 metros de listón y 5 metros de resorte.

4.37. La empresa "Zaza" produce salas y comedores en tres tipos de máquinas en las cuales hay una disponibilidad de 100, 80 y 160 horas por semana respectivamente. Además, se sabe que una sala requiere de 4 horas de proceso en la máquina 1, 16 horas de proceso en la máquina 2 y 14 horas de proceso en la máquina 3, mientras que un comedor requiere de 6 horas de proceso en la máquina 1 y 18 horas de proceso en la máquina 3. El departamento de costos ha estimado que cuesta \$12 producir una sala y \$ 11 producir un comedor. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada producto se debe fabricar, si se sabe que un comedor se vende en \$17 y una sala en \$14. Suponga además que el departamento de mercadeo ha estimado que mínimo se venderán 5 salas.

4.38. La industria ganadera "Zitron", cría cabezas de ganado de ganado en una hacienda de los llanos orientales, el veterinario de la compañía ha establecido

que a cada cabeza de ganado se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 40 miligramos de vitamina B y mínimo 60 miligramos de vitamina C. El ganado es alimentado con sal, ésta tiene un costo de $4000 por kilo, agua la cual tiene un costo de $1000 por litro y concentrado el cual tiene un costo de $1500 por frasco. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe dar a cada cabeza de ganado de tal forma que garantice los requerimientos vitamínicos del ganado si se sabe que 1 kilo de sal contiene 5 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C; Un litro de agua contiene 1 miligramo de vitamina A, 4 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de Vitamina C; mientras que un frasco de concentrado contiene 10 miligramos de vitamina B y 6 miligramos de vitamina C.

4.39. La compañía "Zamba", produce gasolina blanca, roja y verde, para las cuales se ha establecido un precio de venta por galón de $4000, $4500 y $4200 respectivamente, estos productos se obtienen a partir de petróleo y Kerosén de los cuales hay una disponibilidad diaria de 3000 y 3500 galones respectivamente. Además, se sabe que el costo, que se causa por explotar un galón de petróleo es de $2500 mientras que para un galón de kerosene es de $3000. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que por normas gubernamentales de calidad, la gasolina blanca debe contener 30% de petróleo y 70% de kerosén, la gasolina roja debe contener 45% de petróleo y 55% de kerosene, mientras que la gasolina verde debe contener 60% de petróleo y 40% de kerosén.

4.40. La empresa "Omicrón" debe asignar a una de sus rutas un máximo de 40 busetas y un mínimo de 80 buses. Además por caprichos del señor gerente los buses asignados deben ser mínimo el doble de las busetas menos 60 unidades y se sabe que el costo por asignar una buseta a esa ruta es de $80.000, mientras que asignar un bus cuesta $40.000. ¿Qué cantidad de buses y busetas se debe asignar si se sabe que el gobierno nacional ofrece un subsidio de $90.000 por cada bus asignado?

4.41. La compañía "El Tornero Mayor" produce piñones y rodamientos los cuales le generan una contribución a las utilidades de $5000 y $8000 respectivamente por unidad. Para la producción de dichos artículos la Compañía cuenta semanalmente con 450 horas de trabajo en torno, 540 horas de fresadora y 420 horas de pulidora. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un piñón se requiere de 5 horas de trabajo en el torno, 9 horas de trabajo en la fresadora y 6 horas de trabajo en la pulidora, mientras que para producir un rodamiento se requiere de 9 horas de trabajo en el torno, 6 horas de trabajo en la fresadora y 7 de trabajo en la pulidora?

4.42. El hotel residencial "Alfa" dispone de habitaciones confortables y normales las cuales se alquilan a $4500 y $3500 por habitación respectivamente. Dichas

habitaciones son preparadas por Anita y Carmen, las camareras del hotel, para las cuales se ha establecido que tienen una disponibilidad diaria de 630 y 400 minutos respectivamente para el arreglo de las habitaciones. Además, se ha establecido que una habitación confortable requiere de 9 minutos de arreglo por parte de Anita y 5 minutos por parte de Carmen; mientras que una habitación normal requiere de 7 minutos de trabajo de Anita y 8 minutos de trabajo de Carmen, para quedar lista para alquiler. ¿Qué cantidad de cada tipo de habitaciones deben estar listas para la noche si se sabe que se espera alquilar mínimo 40 habitaciones entre los dos tipos?

4.43. La fábrica de muebles "Beta" produce salas y comedores para los cuales ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $9000 y $10000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de madera y 320 metros de tubo. El departamento de producción estimó que para producir una sala se requiere de 6 metros de madera y 4 metros de tubo, mientras que para producir un comedor se requiere de 5 metros de madera y 8 metros de tubo. ¿Qué cantidad de salas y comedores se deben fabricar? si se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 90 unidades entre los dos productos.

4.44. Confecciones "Gamma" produce camisas y corbatas para las cuales ha establecido una utilidad unitaria de $5000 y $2000 respectivamente. El departamento de mercadeo ha pronosticado que máximo se venderán 50 camisas y mínimo 30 corbatas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el Gerente de la fábrica requiere que la cantidad de corbatas producidas debe ser mínimo 40 unidades debajo de la producción de camisas?

4.45. En el jardín infantil "Delta" se ha establecido que a cada niño diariamente se le debe proporcionar máximo 480 miligramos de vitaminas, mínimo 180 miligramos de hierro y mínimo 180 miligramos de minerales. Para lograr estos requisitos vitamínicos en el jardín se dispone de leche y fruta para los cuales se ha establecido un costo de $400 por un vaso de leche y $500 por una porción de frutas. Establezca qué cantidad de leche y fruta se le debe administrar diariamente a cada niño, si se sabe que un vaso de leche contiene 6 miligramos de vitaminas, 3 miligramos de hierro y 6 miligramos de minerales, mientras que una porción de fruta contiene 8 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de hierro y 3 miligramos de minerales.

4.46. La fábrica de calzado "Épsilon" produce zapatos para hombre y zapatos para dama a un costo de $20.000 cada uno de ellos. Además, se ha establecido, mediante un estudio de mercado que habrá una venta mínima de 20 zapatos para dama y que la venta mínima entre los dos artículos será de 50 unidades.

También, se sabe que hay una disponibilidad de 540 horas-hombre por semana para la producción de dichos artículos. ¿Qué cantidad de cada tipo de zapato se debe fabricar si se sabe que producir un par de zapatos para hombre se requieren 6 horas y un par de zapatos para dama requiere 9 horas?

4.47. La distribuidora de dulces "Zeta" compra cada paquete de mentas a $5 pesos y cada paquete de caramelos a $6. El departamento de mercadeo de la Compañía ha determinado que semanalmente mínimo se venderán 60 paquetes de mentas y mínimo 60 paquetes de caramelos. Además, se sabe que la Compañía semanalmente asigna para su presupuesto de compra de los dos artículos $300. ¿Qué cantidad de cada producto se debe comprar para garantizar las condiciones del mercado y que su costo sea el más bajo?

4.48. Cierta familia ha establecido que cada uno de sus integrantes debe consumir como mínimo 240 gramos de vitamina A y mínimo 320 gramos de vitamina B al mes. Para cumplir con estos requerimientos vitamínicos la familia dentro de su mercado compra huevos a $300 la unidad y leche a $900 por litro. Por característica de los productos se sabe que un huevo contiene 6 gramos de vitamina A y 4 gramos de vitamina B; mientras que un litro de leche contiene 4 gramos de vitamina A y 8 gramos de vitamina B. ¿Qué cantidad de cada producto debe consumir cada miembro de la familia si se sabe que por recomendaciones medicas cada uno de ellos debe consumir mínimo 20 litros de leche al mes?

4.49. Cierta compañía automotriz ensambla automóviles y camiones los cuales deben pasar por el departamento de pintura y por el departamento de ensamble. Si el departamento de pintura se dedica solo a pintar camiones podrá pintar 40 camiones por día, mientras que si se dedica a pintar solo automóviles, podrá pintar 60 automóviles por día. Si el departamento de ensamble se dedica solo a ensamblar automóviles podrá ensamblar 50 automóviles por día, y si se dedica solo a ensamblar camiones podrá ensamblar 50 camiones por día. Además se sabe que cada camión genera una utilidad de $600.000 y que cada automóvil genera una utilidad de $400.000, suponga además que los vendedores de automóviles requieren que la compañía automotriz fabrique por lo menos 30 camiones y por lo menos 20 automóviles por día. Establezca la cantidad de camiones y la cantidad de automóviles que se deben fabricar por día.

4.50. Una compañía transportadora dispone de un taller de mantenimiento para las reparaciones a que haya lugar en sus buses y busetas; en el cual hay una disponibilidad de 630 horas mecánico semanalmente. Además se sabe que el costo por reparación de un bus es de 6 mil pesos mientras que el costo de reparación de una buseta es de 5 mil pesos. Por experiencia se sabe que para reparar un bus se necesitan 7 horas mientras que para la buseta se requieren 9 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe reparar semanalmente

si se sabe que mínimo se deben reparar 20 busetas y mínimo 30 buses a la semana?

4.51. Se ha establecido en confecciones Sigma que para fabricar un vestido para hombre se demoran 9 horas mientras que para fabricar un vestido de mujer se demoran 7 horas. Además, se ha establecido que un vestido para hombre genera una utilidad de $18000 y un vestido para dama genera una utilidad de $14000. El departamento de ventas ha establecido que en el próximo mes se venderán mínimo 40 vestidos para hombre y mínimo 20 vestidos para mujer. ¿Qué cantidad de cada tipo de vestido se de deben fabricar si se sabe que hay una disponibilidad de 600 horas mensuales para la confección?

4.52. Se ha establecido en la compañía Sigma que un par de tenis genera una pérdida de $2000 mientras que un par de zapatos genera una utilidad de $6000. Además se sabe que la venta mínima entre los dos artículos para el próximo mes es de 70 unidades y que por disponibilidad de materiales máximo se pueden producir 50 pares de tenis al mes. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar si se sabe que mínimo se venderán 40 pares de zapatos el próximo mes?

4.53. Un agricultor dispone de un terreno de 90 hectáreas, las cuales planea sembrar con yuca y papa en las cantidades que más le sea conveniente. Mediante un estudio se ha establecido que sembrar una hectárea de terreno con yuca consume 12 metros cúbicos de agua, 8 bultos de abono y 6 horas hombre de trabajo, mientras que sembrar una hectárea con papa consume 6 metros cúbicos de agua, 7 bultos de abono y 10 horas hombre de trabajo. El agricultor ha establecido que tiene una disponibilidad semanal de 720 metros cúbicos de agua, 540 bultos de abono y 600 horas hombre. ¿Qué cantidad de hectáreas se deben sembrar de cada producto, si se sabe que una hectárea sembrada de yuca genera una utilidad de $ 50.000 y una hectárea de sembrada con papa genera una utilidad de $80.000?

4.54. En cierta compañía constructora se ha establecido que diariamente hay una disponibilidad de 240 minutos por día por cada ayudante de construcción. Por estudio se sabe que el primer ayudante coloca un bloque en 6 minutos y un ladrillo en 4 minutos, mientras que el segundo ayudante coloca un bloque en 3 minutos y un ladrillo en 8 minutos. Además se ha establecido que el costo por la colocación de un bloque es de $50, mientras que colocar un ladrillo cuesta $60. ¿Qué cantidad de bloques y ladrillos se deben colocar diariamente si además se sabe que mínimo se deben colocar 50 ladrillos?

4.55. Una fábrica de muebles tiene una disponibilidad semanal de 150 metros de tubo, 270 metros de madera y 120 tornillos. Con estos recursos la compañía

desea fabricar camas dobles, camas sencillas y camarotes, los cuales pretende vender a $50, $25 y $20 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada articulo debe fabricar la compañía a fin de maximizar sus ingresos? si se sabe que una cama doble consume 10 metros de tubo, 5 metros de madera y 8 tornillos; una cama sencilla consume 6 metros de tubo, 3 metros de madera y 4 tornillos; mientras que un camarote consume 15 metros de tubo, 9 metros de madera y 15 tornillos.

4.56. Petróleos Colombia produce biogasolina, gasolina normal y acpm los cuales venden a un precio de 4000, 5000 y 4500 pesos por galón respectivamente. Dichos combustibles son fabricados a partir de dos tipos de crudo llamados petróleo grado 1 y petróleo grado 2 de los cuales hay una disponibilidad de 100000 y 150000 galones por día respectivamente. Se ha establecido que el costo de explotación de cada galón de petróleo grado1 es 2500 pesos, mientras que la explotación de petróleo grado 2 cuesta 3000 por galón. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que la biogasolina debe contener 40 % de petróleo grado 1 y 60% de petróleo grado 2, la gasolina normal debe contener el 70% de petróleo grado 1 y 30% de petróleo grado 2; mientras que el acpm debe contener 50% de petróleo grado 1 y 50% de petróleo grado 2.

4.57. Combustibles "Dorada" produce cocinol, gasolina roja y gasolina extra los cuales vende a $3500, $5200 y $6300 por galón respectivamente.
Para la producción de dichos combustibles la compañía cuenta con una disponibilidad diaria de 1000 galones de petróleo crudo y 1500 galones de petróleo refinado. Además por requisitos de calidad el cocinol debe contener 80% de petróleo crudo y 20% de petróleo refinado; la gasolina roja debe contener 50% de cada uno de los petróleos y la gasolina extra debe contener 25% petróleo crudo y 75% petróleo refinado. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que el costo de explotación de un galón de petróleo crudo es $2500 y un galón de petróleo refinado es $3000.

Capítulo 5

Programación lineal: métodos especiales

PRESENTACIÓN

En el presente capítulo se presenta dos métodos alternativos de solución de problemas de programación lineal: el método de doble fase y el método dual simplex utilizados en problemas de maximización y minimización.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de solucionar un problema de programación lineal utilizando tanto el método de doble fase como el método dual simplex; así como interpretar correctamente la solución y analizar el consumo de recursos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Manejar las reglas de equivalencia para llevar todas las desigualdades a igualdades.
- Dominar el procedimiento de avance hacia la optimalidad del método simplex.
- Determinar mediante el método de doble fase el momento en el que se llega a la solución óptima, tanto en problemas de maximización como de minimización.
- Identificar el tipo de solución del problema con el uso del tablero simplex.
- Interpretar las soluciones arrojadas.

COMPETENCIAS

El estudiante tendrá la capacidad de utilizar el método de doble fase y el método dual simplex en la solución de problemas de programación lineal; y con base en ésta interpretar el tipo de solución del problema; así como el uso de variables de holgura, de exceso y artificiales.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá demostrar el manejo en el planteamiento de modelos de programación lineal, obtener la solución a través del método de dual simplex e interpretar la solución.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Gauss Jordan.
- Vectores y matrices.

5.1. MÉTODO DE DOBLE FASE

En esencia el método de doble fase opera igual al método simplex, sólo que se utiliza para aquellos problemas que involucran variables artificiales en su desarrollo. Recuerde que las variables artificiales se involucran para aquéllas restricciones de tipo ≥ y = exclusivamente.
Como su nombre lo indica; el método involucra dos fases y se realiza de la siguiente manera:

Primera fase: En ésta fase se soluciona utilizando la función objetivo $MinG = \sum_{j=1}^{k} Aj$ donde k es la cantidad de variables artificiales involucradas al problema a resolver. Las restricciones para esta fase son las mismas del problema original. Si esta fase genera solución se continua con la segunda fase; de lo contrario se concluye que el problema no tiene solución.

Segunda fase: para la segunda fase se retoma la función objetivo del problema original y se resuelve mediante el método simplex utilizando las restricciones generadas por el tablero óptimo de la primera fase (no se incluyen las variables artificiales).

Para la aplicación de este método se utilizarán los mismos problemas utilizados o resueltos mediante el método simplex en el capítulo anterior.

Ejercicio 5.1.1. Para la aplicación del método de doble fase se utilizará ejercicio 4.1.3 del capítulo anterior, cuya formulación y modelo se transcriben a continuación.

Una fábrica de artesanías se dedica a la producción de bolsos y chaquetas los cuales comercializa directamente a los clientes en la plaza España. La venta de un bolso genera una utilidad de $2.000 y consume 5 horas de mano de obra; mientras que la venta de una chaqueta genera una utilidad de $3.000 y consume 9 horas de mano de obra. Por políticas de la compañía se requiere de no mantener en ocio a sus trabajadores y por lo tanto se debe consumir en la producción un mínimo de 450 horas de mano de obra por mes. ¿Qué cantidad de bolsos y chaquetas se debe fabricar, si por estudio de mercados se sabe que mínimo se venderán 20 chaquetas y como máximo 30 bolsos por mes?

Definición de variables

X_1 =Cantidad de bolsos a fabricar por mes.

X_2 =Cantidad de chaquetas a fabricar por mes.

Máx. $Z = 2000\ X_1 + 3000X_2$

Sujeto a

$5X_1 + 9X_2 \geq 450$

$X_1 \leq 30$

$X_2 \geq 20$

$X_1, X_2 \geq 0$

Primera fase: Siguiendo el procedimiento descrito al principio del capítulo para la primera fase, el problema a resolver es el siguiente:

Min $G = A_1 + A_2$

Sujeto a

$5X_1 + 9X_2 - S_1 + A_1 = 450$

$X_1 + H_1 = 30$

$X_2 - S_2 + A_2 = 20$

$X_1, X_2, S_1, S_2, A_1, H_1, A_2 \geq 0$

En la tabla 5.1 se presenta la solución de este ejercicio a través del método simplex.

Segunda fase: tal como se explicó al inicio; se toma la función objetivo original y se utilizan las restricciones generadas por la primera fase sin incluir las variables artificiales. Teniendo en cuenta lo anterior el problema a resolver es el siguiente (en la tabla 5.2 se presenta la solución de dicho problema):

Máx. $Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0H_1 + 0S_2$

Sujeto a:

$5/9X_1 - 1/9S_1 + S_2 = 30$

$X_1 + H_1 = 30$

$5/9X_1 + X_2 - 1/9S_1 = 50.$

$X_1, X_2, S_1, S_2, H_1 \geq 0$

TABLA 5.1

FILA	OPERACIÓN	C_J	0	0	0	0	1	0	1	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	H_1	A_2			
F_1		1	5	9	-1	0	1	0	0	A_1	450	450/9=50
F_2		0	1	0	0	0	0	1	0	H_1	30	*
F_3		1	0	1	0	-1	0	0	1	A_2	20	20/1=20
F_{Z1}		Z_J-C_J	5	10	-1	-1	0	0	0	G=470		
F_4	F_6(-9)+F1	1	5	0	-1	9	1	0	-9	A_1	270	270/9=30
F_5	F_2	0	1	0	0	0	0	1	0	H_1	30	*
F_6	F_3	0	0	1	0	-1	0	0	1	X_2	20	*
F_{Z2}		Z_J-C_J	5	0	-1	9	0	0	-10	G=270		
F_7	F_4(1/9)	0	5/9	0	-1/9	1	-1/9	0	-1	S_2	30	
F_8	F_5	0	1	0	0	0	0	1	0	H_1	30	
F_9	F_7+F_6	0	5/9	1	-1/9	0	1/9	0	0	X_2	50	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	0	0	-1	0	-1	G=0		

TABLA 5.2											
FILA	OPERACIÓN	C_J	2	3	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	H_1			
F_1		0	5/9	0	-1/9	1	0	S_2	30	*
F_2		0	1	0	0	0	1	H_1	30	*
F_3		3	5/9	1	-1/9	0	0	X_2	50	*
F_{Z1}		Z_J-C_J	-1/3	0	-1/3	0	0	Z=150		

Como se puede apreciar de la tabla 5.2, entra a la base la variable X_1 o la variable S_1. Si entra S_1, no se puede establecer que variable sale de la base; lo que indica solución no acotada. A la misma conclusión se llegará si se toma como variable de entrada a la base la variable X_1. (Compruébelo, no sea perezoso).

Ejercicio 5.1.2. Para ejemplificar a través de este método un problema que no tiene solución, se traerá el ejercicio 3.1.4 cuya formulación y planteamiento se traen a continuación:

La compañía EPSILON produce baldosas y tabletas, las cuales generan una contribución a las utilidades de $5000 y $4000 por metro cuadrado respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad de 200 metros cuadrados de arena y 240 metros cuadrados de cemento por semana. ¿Que cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un metro cuadrado de baldosas se requiere de 4 metros cuadrados de arena y 3 metros cuadrados de cemento; mientras que para producir un metro cuadrado de tableta se requiere de 5 metros cuadrados de arena y 8 metros cuadrados de cemento?. Suponga además, que el cliente garantiza comprar como mínimo 50 metros cuadrados de tableta.

Definición de variables

X_1 = metros cuadrados de baldosas a fabricar por semana.

X_2 = metros cuadrados de tabletas a fabricar por semana.

Máx. $Z = 5000\ X_1 + 4000\ X_2$

S.A.

$4\ X_1 + 5\ X_2 \leq 200$

$3\ X_1 + 8\ X_2 \leq 240$

$X_2 \geq 50$

$X_1, \quad X_2 \geq 0$

Primera fase: El problema a resolver en la primera fase es el siguiente:

$$\text{Min } G = A_1$$

S.A.

$$4X_1 + 5X_2 + H_1 = 200$$

$$3X_1 + 8X_2 + H_2 = 240$$

$$X_2 - S_1 + A_1 = 50$$

$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ H_1,\ H_2,\ A_1 \geq 0.$$

En la tabla 5.3 se presenta la solución de este problema.

TABLA 5.3											
FILA	OPERACIÓN	C_J	0	0	0	0	0	1	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	A_1			
F_1		0	4	5	0	1	0	0	H_1	200	200/5 =40
F_2		0	3	8	0	0	1	0	H_2	240	240/8 =30
F_3		1	0	1	- 1	0	0	1	A_1	50	50/1 =50
F_{Z1}		Z_J-C_J	0	1	-1	0	0	0	G=50		
F_4	F_5(-5-)+F_1	0	17/8	0	0	1	-5/8	0	H_1	50	
F_5	F_2(1/8)	0	3/8	1	0	0	1/8	0	X_2	30	
F_6	F_5(-1-)+F_3	1	-3/8	0	-1	0	-1/8	1	A_1	20	
F_{Z2}		Z_J-C_J	-3/8	0	-1	0	-1/8	0	G=20		

Como se puede apreciar en la tabla 5.3 ya están dadas las condiciones de optimalidad (todos los Zj-Cj son ≤ 0); pero la variable artificial no salió de la base, lo que indica que el problema no tiene solución y por lo tanto no se pasa a la segunda fase.

Ejercicio 5.1.3. Mediante este ejercicio se pretende ejemplificar un problema con solución única. Para ello se utilizará el ejercicio 3.2.1 presentado en el tercer capítulo, para el cual su planteamiento y formulación son las siguientes:

Los Horses, una empresa dedicada al criadero de caballos de paso, ha establecido que a cada uno de ellos se le debe suministrar diariamente un mínimo de 200 miligramos de vitamina A, un mínimo de 160 miligramos de vitamina B y un mínimo de 150 miligramos de vitamina C. Los caballos son alimentados con matas de pasto y mineral, las cuales le cuestan a la compañía \$300 por mata de pasto y \$500 por libra de mineral. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar a cada caballo diariamente si se sabe que una mata de pasto contiene 4 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 5 miligramos de vitamina C; mientras que una libra de mineral contiene 5 miligramos de vitamina A, 8 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C?

X_1 = Matas de pasto que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

X_2 = Libras de mineral que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

De acuerdo con la anterior definición el modelo queda así:

$$\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 \geq 200$$
$$2\,X_1 + 8\,X_2 \geq 160$$
$$5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 150$$
$$X_1,\quad X_2 \geq 0$$

Para el desarrollo del ejercicio se procede a la aplicación de las dos fase tal como se explicó al principio del capítulo.

Primera fase. El problema a resolver en la primera fase se describe a continuación:

$$\text{Min } G = A_1 + A_2 + A_3$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 - S_1 + A_1 = 200$$
$$2\,X_1 + 8\,X_2 - S_2 + A_2 = 160$$
$$5\,X_1 + 3\,X_2 - S_3 + A_3 = 150$$
$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \geq 0.$$

En la tabla 5.4 se presenta la solución de este problema a través del método simplex.

A partir de la tabla anterior se estructura el modelo matemático a resolver en la segunda fase.

Segunda fase: El problema a resolver es el siguiente:

TABLA 5.4

FILA	OPERACIÓN	C_J	0	0	0	0	0	1	1	1	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3			
F_1		1	4	5	-1	0	0	1	0	0	A_1	200	200/5=40
F_2		1	2	8	0	-1	0	0	1	0	A_2	160	160/8=20
F_3		1	5	3	0	0	-1	0	0	1	A_3	150	150/3=50
F_{Z1}		Z_J-C_J	11	16	-1	-1	-1	0	0	0	G=510		
F_4	$F_5(-5)+F_1$	1	11/4	0	-1	5/8	0	1	-5/8	0	A_1	100	100/11/4=400/11
F_5	$F_2(1/8)$	0	1/4	1	0	-1/8	0	0	1/8	0	X_2	20	20/1/4=80
F_6	$F_5(-3)+F_3$	1	17/4	0	0	3/8	-1	0	-3/8	1	A_3	90	90/17/4=360/17
F_{Z2}		Z_J-C_J	7	0	-1	1	-1	0	-2	0	G=190		
F_7	$F_9(-11/4)+F_4$	1	0	0	-1	13/34	11/17	1	-13/34	-11/17	A_1	710/17	710/17/11/17=71/11
F_8	$F_9(-1/4)+F_5$	0	0	1	0	-5/34	1/17	0	5/34	-1/17	X_2	250/17	250/17/11/17=250
F_9	$F_6(4/17)$	0	1	0	0	3/34	-4/17	0	-3/34	4/17	X_1	360/17	*
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	-1	13/34	11/17	0	-47/34	-28/17	G= 710/17		
F_{10}	$F_7(17/11)$	0	0	0	-17/11	13/22	1	17/11	-13/22	-1	S_3	710/11	
F_{11}	$F_{10}(-1/17)+F_8$	0	0	1	1/11	-2/11	0	-1/11	2/11	0	X_2	120/11	
F_{12}	$F_{10}(4/17)+F_9$	0	1	0	-4/11	5/22	0	4/11	-5/22	0	X_1	400/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	G= 0		

$$\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 - S_1 + A_1 = 200$$
$$2\,X_1 + 8\,X_2 - S_2 + A_2 = 160$$
$$5\,X_1 + 3\,X_2 - S_3 + A_3 = 150$$
$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3,\ A_1,\ A_2,\ A_3 \geq 0.$$

Para trabajar este problema con criterio de maximización, se transforma la función objetivo multiplicándola por menos uno; se obtiene lo siguiente:

$$\text{Max. } (-Z) = -300\,X_1 - 500\,X_2$$

S.A.

$$-17/11 S_1 + 13/22 S_2 + S_3 = 710/11$$
$$X_2 + 1/11 S_1 - 2/11 S_2 = 120/11$$
$$X_1 - 4/11 S_1 + 5/22 S_2 = 400/11$$
$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \geq 0.$$

En la tabla 5.5 se presenta la solución de este problema.

TABLA 5.5

FILA	OPERACIÓN	C_J	-300	-500	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3			
F_1		0	0	0	-17/11	13/22	1	S_3	710/11	
F_2		-500	0	1	1/11	-2/11	0	X_2	120/11	
F_3		-300	1	0	-4/11	5/22	0	X_1	400/11	
F_{Z1}		Z_J-C_J	0	0	700/11	250/11	0	-Z= -180000/11		

De esta tabla se interpreta que a cada caballo diariamente se le deben suministrar 400/11 matas de pasto y 120/11 libras de mineral para garantizar los requerimientos vitamínicos. Con base en ello se obtiene un costo total mínimo de $180.000/11. Además, cada caballo diariamente está consumiendo 700/11 más de vitamina C (por encima del nivel mínimo establecido; para este caso por encima de 150 miligramos). Como se puede observar en el último tablero, solo las variables básicas tienen valor de cero en el renglón Z_J-C_J; lo que indica que el problema tiene solución única. Esta misma solución se obtuvo, tanto por el método gráfico como por el método simplex.

Ejercicio 5.1.4. Mediante este ejercicio se pretende ejemplificar un problema con solución óptima múltiple; para lo cual se trae el ejercicio 3.2.2 cuya formulación y planteamiento se trasladan a continuación:

Combustibles Dextra produce gasolina y Acpm a un costo de 2.000 y 4.000 pesos por galón respectivamente. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un galón de gasolina se requieren 4 horas hombre de trabajo, 6 horas máquina y 8 litros de petróleo; mientras que para producir un galón de Acpm se requiere de 8 horas hombre de trabajo, 5 horas máquina y 10 litros de petróleo. Además, se sabe que para que no haya subutilización de los recursos se debe consumir mínimo 320 horas hombre y mínimo 300 horas máquina al mes. ¿Qué cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe hay una disponibilidad mensual de 800 litros de petróleo?

Definición de variables

X_1 = Galones de gasolina que se deben fabricar por mes.

X_2 = Galones de acpm que se deben fabricar por mes.

Teniendo en cuenta la definición de las variables el modelo matemático queda planteado de la siguiente manera.

$$\text{Min. } Z = 2000 X_1 + 4000 X_2$$

S.A.

$$4 X_1 + 8 X_2 \geq 320$$

$$6 X_1 + 5 X_2 \geq 300$$

$$8 X_1 + 10 X_2 \leq 800$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0.$$

Primera fase: El problema a resolver en la primera fase es el siguiente:

$$\text{Min } G = A_1 + A_2$$

S.A.

$$4 X_1 + 8 X_2 - S_1 + A_1 = 320$$

$$6 X_1 + 5 X_2 - S_2 + A_2 = 300$$

$$8 X_1 + 10 X_2 + H_1 = 800$$

$$X_1, \quad X_2, S_1, \quad S_2, \quad A_1, \quad A_2, \quad H_1 \geq 0.$$

En la tabla 5.6 se presenta la solución de este ejercicio mediante el método simplex.

TABLA 5.6

FILA	OPERACIÓN	C_J	0	0	0	0	1	1	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	H_1			
F_1		1	4	8	-1	0	1	0	0	A_1	320	320/8=40
F_2		1	6	5	0	-1	0	1	0	A_1	300	300/5=60
F_3		0	8	10	0	0	0	0	1	H_1	800	800/10=80
F_{Z1}		Z_J-C_J	10	13	-1	-1	0	0	0	G=620		
F_4	F1(1/8)	0	1/2	1	-1/8	0	1/8	0	0	X_2	40	40/1/2=80
F_5	F4(-5)+F2	1	7/2	0	5/8	-1	-5/8	1	0	A_2	100	100/7/2=28,57
F_6	F4(-10)+F3	0	3	0	5/4	0	-5/4	0	1	H_1	400	400/3=133,33
F_{Z2}		Z_J-C_J	7/2	0	5/8	M	-13/8	0	0	G=100		
F_7	F8(-1/2)+F4	0	0	1	-3/14	1/7	3/14	-1/7	0	X_2	180/7	
F_8	F5(2/7)	0	1	0	5/28	-2/7	-5/28	2/7	0	X_1	200/7	
F_9	F8(-3)+F6	0	0	0	5/7	6/7	-5/7	-6/7	1	H_1	2200/7	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	0	0	-1	-1	0	G= 0		

Como se puede observar, el problema ha llegado a las condiciones de optimalidad; por lo tanto se puede continuar a la siguiente fase.

Segunda fase: El problema a resolver en la segunda fase se plantea a continuación:

$$MAX\ (-Z) = -2X_1 - 4X_2$$

S.A.

$$X_2 - 3/14S_1 + 1/7S_2 = 180/7$$

$$X_1 + 5/28S_1 - 2/7S_2 = 200/7$$

$$5/7S_1 + 6/7S_2 + H_1 = 2200/7$$

$$X_1,\ X_2,\ S_1,\ S_2,\ H_1 \geq 0.$$

La solución del problema se presenta en la tabla 5.7.

TABLA 5.7										
FILA	**OPERACIÓN**	C_J	**-2**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**BASE**	X_B	**COCIENTE**
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	H_1			
F_1	F8(-1/2)+F4	-4	0	1	-3/14	1/7	0	X_2	180/7	
F_2	F5(2/7)	-2	1	0	5/28	-2/7	0	X_1	200/7	
F_3	F8(-3)+F6	0	0	0	5/7	6/7	1	H_1	2200/7	
F_{Z1}		Z_J-C_J	0	0	1/2	0	0	-Z= -160		

La solución óptima de este problema se interpreta de la siguiente manera: se deben producir 200/7 galones de gasolina y 180/7 galones de acpm para obtener un costo mínimo de $160 (se realizó el ejercicio maximizando y se obtuvo –Z = -160). Además, se observa que sobran 2.200/7 litros de petróleo.

Tal como se observa en la fila F_{Z1} (Z_J-C_J) la variable S_2 (variable no básica), tiene valor de cero; lo que indica que el problema tiene solución óptima múltiple. La solución presentada en dicho tablero es una de ellas. El lector deberá entrar a la base S_2 y mediante la aplicación del método simplex obtener la otra solución extrema para este ejercicio.

5.2. MÉTODO DUAL SIMPLEX

El método dual simplex es otro caso especial de aplicación del método simplex y en el concepto del autor se debe utilizar para aquellos problemas en los que se involucren restricciones del tipo ≥. Además, se puede utilizar solamente cuando la función objetivo es minimización y los coeficientes en ella son positivos. Tal vez la mayor aplicación de este método se da en análisis de sensibilidad para obtener nuevas soluciones óptimas y su principal ventaja la constituye el hecho de no utilizar variables artificiales.

Para la aplicación de este método se deben seguir este procedimiento:

Paso 1. Lleve la función objetivo a maximización.

Paso 2. Mediante la utilización de las reglas de equivalencia, transforme las restricciones en igualdades.

Paso 3. Multiplique por menos uno todas las restricciones que no tienen vector unitario. (Siempre son las restricciones en donde se ha restado variable de exceso).

Paso 4. Lleve los coeficientes del modelo al tablero simplex, tal como se ha realizado hasta el momento.

Paso 5. Establecer la variable que sale de la base. Para esto se toma la variable que tenga el X_B más negativo. Si no hay negativos es porque la solución es óptima.

Paso 6. Establecer la variable que entra a la base. Para determinar que variable entra a la base se utiliza la siguiente relación: $Max\left\{\frac{Z_j - C_j}{K_B}\right\}$ teniendo en cuenta que sólo se evalúan aquellos valores de K_B menores que cero (negativos). K_B es el vector fila de la variable que sale de la base.

Paso 7. Selección del pivote: el pivote es aquella posición donde se intercepta la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale.

Paso 8. Mediante operaciones matriciales, idénticamente como en el método simplex avance hasta obtener la solución óptima. Esto se establece en el paso 5.

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de este método.

Ejercicio 5.2.1. Para la aplicación de este ejercicio se utilizará el ejercicio 3.2.1 presentado en el tercer capítulo, para el cual su planteamiento y formulación son las siguientes:

Los Horses, una empresa dedicada al criadero de caballos de paso, ha establecido que a cada uno de ellos se le debe suministrar diariamente un mínimo de

200 miligramos de vitamina A, un mínimo de 160 miligramos de vitamina B y un mínimo de 150 miligramos de vitamina C. Los caballos son alimentados con matas de pasto y mineral, las cuáles le cuestan a la compañía $300 por mata de pasto y $500 por libra de mineral. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar a cada caballo diariamente si se sabe que una mata de pasto contiene 4 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 5 miligramos de vitamina C; mientras que una libra de mineral contiene 5 miligramos de vitamina A, 8 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C.

X_1 = Matas de pasto que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

X_2 = Libras de mineral que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

De acuerdo con la anterior definición el modelo queda así:

$$\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 \geq 200$$

$$2\,X_1 + 8\,X_2 \geq 160$$

$$5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 150$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0.$$

Aplicando las reglas de equivalencia el problema queda como se presenta a continuación:

$$\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 5\,X_2 - S_1 = 200$$

$$2\,X_1 + 8\,X_2 - S_2 = 160$$

$$5\,X_1 + 3\,X_2 - S_3 = 150$$

$$X_1, \quad X_2, S_1, S_2, \quad S_3 \geq 0.$$

Obsérvese, que en ningún momento se han incorporado al problema variables artificiales; pero el método si requiere necesariamente de vectores unitarios, para lo cual se multiplica por menos uno todas las restricciones que no lo generen (transformar los coeficientes de las variables de exceso a uno positivo). Además de esto, se pasará la función objetivo a maximizar. Con base en esto el problema a solucionar es el siguiente:

$$\text{Max. } (-Z) = -300\,X_1 - 500\,X_2$$

S.A.

$$-4X_1 - 5X_2 + S_1 = -200$$
$$-2X_1 - 8X_2 + S_2 = -160$$
$$-5X_1 - 3X_2 + S_3 = -150$$
$$X_1, \quad X_2, \; S_1, \; S_2, \; S_3 \geq 0.$$

La solución de este modelo se presenta en la tabla 5.8.

En esta tabla se observa que se ha eliminado la columna cociente, y se ha agregado en cada iteración la fila cociente (Fc) para establecer la variable que entra a la base mediante la utilización del paso 6 del procedimiento. La solución presentada en el último tablero ya es óptima por cuanto no hay valores negativos en el X_B. Como se puede apreciar, esta solución es la misma determinada a través de los diferentes métodos y su interpretación es exactamente la misma.

Ejercicio 5.2.2. Mediante este ejercicio se pretende ejemplificar que no todas las restricciones deben ser ≥. Para esto se trae el ejercicio 3.2.2 cuya formulación y planteamiento se trasladan a continuación:

COMBUSTIBLES DEXTRA produce gasolina y Acpm a un costo de 2.000 y 4.000 pesos por galón respectivamente. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un galón de gasolina se requieren 4 horas hombre de trabajo, 6 horas máquina y 8 litros de petróleo; mientras que para producir un galón de Acpm se requieren 8 horas hombre de trabajo, 5 horas máquina y 10 litros de petróleo. Además, se sabe que para que no haya subutilización de los recursos se debe consumir mínimo 320 horas hombre y mínimo 300 horas máquina al mes. ¿Qué cantidad de cada combustible se debe fabricar Si se sabe hay una disponibilidad mensual de 800 litros de petróleo?

Definición de variables

X_1 = Galones de gasolina que se deben fabricar por mes.

X_2 = Galones de acpm que se deben fabricar por mes.

Teniendo en cuenta la definición de las variables el modelo matemático queda planteado de la siguiente manera:

$$\text{Min. } Z = 2000X_1 + 4000X_2$$

S.A.

$$4X_1 + 8X_2 \geq 320$$
$$6X_1 + 5X_2 \geq 300$$
$$8X_1 + 10X_2 \leq 800$$
$$X_1, \quad X_2 \geq 0.$$

TABLA 5.8

FILA	OPERACIÓN	C_J	-300	-500	0	0	0	BASE	X_B
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
F_1		0	-4	-5	1	0	0	S_1	-200
F_2		0	-2	-8	0	1	0	S_2	-160
F_3		0	-5	-3	0	0	1	S_3	-150
F_{Z1}		Z_J-C_J	300	500	0	0	0	-Z= 0	
F_{C1}	COCIENTE		300/-4-=-75	500/-5=-100					
F_4	F_1(-1/4)	-300	1	5/4	-1/4	0	0	X_1	50
F_5	F_4(2)+F_2	0	0	-11/2	-1/2	1	0	S_2	-60
F_6	F_4(5)+F_3	0	0	13/4	-5/4	0	1	S_3	100
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	125	75	0	0	-Z=-15000	
F_{C2}	COCIENTE			125/-11/2=-22,7	75/-1/2=-150				
F_7	F_8(-5/4)+F_4	-300	1	0	-4/11	5/22	0	X_1	400/11
F_8	F_5(-2/11)	-500	0	1	1/11	-2/11	0	X_2	120/11
F_9	F_8(-13/4)+F_6	0	0	0	-17/11	13/22	1	S_3	710/11
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	700/11	250/11	0	-Z=-180000/11	

El problema a resolver es el siguiente:

$$\text{Max. } (-Z) = -2X_1 - 4X_2$$

S.A.

$$4X_1 + 8X_2 - S_1 = 320$$
$$6X_1 + 5X_2 - S_2 = 300$$
$$8X_1 + 10X_2 + H_1 = 800$$
$$X_1, \quad X_2, S_1, \quad S_2, \quad H_1 \geq 0.$$

Multiplicando las primeras dos restricciones por menos uno se obtiene el siguiente problema:

$$\text{Max. } (-Z) = -2X_1 - 4X_2$$

S.A.

$$-4X_1 - 8X_2 + S_1 = -320$$
$$-6X_1 - 5X_2 + S_2 = -300$$
$$8X_1 + 10X_2 + H_1 = 800$$
$$X_1, \quad X_2, S_1, \quad S_2, \quad H_1 \geq 0.$$

En la tabla 5.9 se presenta la solución de este ejercicio mediante el método dual simplex.

La solución óptima de este problema está dada en el último tablero, ya que no hay valores negativos en $X_{B.}$ Dicha solución se interpreta de la siguiente manera: se deben producir 80 galones de gasolina y cero galones de acpm para obtener un costo mínimo de \$160 (se realizó el ejercicio maximizando y se obtuvo –Z = -160). Además, se observa que sobran 160 litros de petróleo.

TABLA 5.9

FILA	OPERACIÓN	C_J	-2	-4	0	0	0	BASE	X_B
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	H_1		
F_1		0	-4	-8	1	0	0	S_1	-320
F_2		0	-6	-5	0	1	0	S_2	-300
F_3		0	8	10	0	0	1	H_1	800
F_{Z1}		Z_J-C_J	2	4	0	0	0	-Z= 0	
F_{C1}	COCIENTE		2/-4=-1/2	4/-8=-1/2					
F_4	$F_1(-1/4)$	-2	1	2	-1/4	0	0	X_1	80
F_5	$F_4(6)+F_2$	0	0	7	-3/2	1	0	S_2	180
F_6	$F_4(-8)+F3$	0	0	-6	2	0	1	H_1	160
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	0	1/2	0	0	-Z=-160	

Tal como se observa en la fila F_{Z2} (Z_J-C_J) la variable S_2 (variable no básica), tiene valor de cero; lo que indica que el problema tiene solución óptima múltiple. La solución presentada en dicho tablero es una de ellas.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

En los ejercicios de este capítulo se pide solucionarlos por medio del método de doble fase y el método dual simplex, interpretar la solución y decir que tipo de solución tiene el problema. Si hay problemas que no se puedan solucionar por alguno de estos dos métodos; explicar ¿porque?

5.1. Una compañía siderúrgica produce ángulos y platinos los cuales rinden una contribución a las utilidades de $10.000 y $ 30.000 por metro respectivamente. Para la producción de estos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 250 libras de acero y 210 horas hombre. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un metro de ángulo se requiere de 5 libras de acero y 3 horas hombre de trabajo, mientras que para producir un metro de platina se requiere de 5 libras de acero y 7 horas hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar si se sabe que máximo se venderán 20 metros de platina diariamente?

5.2. Cierta compañía editorial produce libros y revistas de carácter especializado, los cuales venden a 30.000 y 25.000 por unidad respectivamente. Se ha estimado que hay una disponibilidad de 300 horas en revisión técnica, 350 horas en impresión y 400 horas en empaste semanalmente. Establezca la cantidad de libros y revistas que se debe producir por semana, si se sabe que para producir un libro se requiere de 6h en revisión técnica, 5 en impresión y 10h en empaste, mientras que para producir una revista se requiere de 5h en revisión técnica, 7 h en impresión, y 4h en empaste.

5.3. Una empresa de confecciones ha determinado que máximo venderá 40 pantalones por semana y mínimo 30 chaquetas por semana. Además, se sabe que para evitar tiempo ocioso se debe consumir mínimo 350 horas hombres por semana. Suponga que un pantalón para ser fabricado requiere de 7 horas hombre, mientras que una chaqueta necesita 5 horas hombre. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que un pantalón genera una utilidad de $2.000 y una chaqueta de $4.000?

5.4. La compañía Simak dispone de 180 horas por semana en el departamento de corte y 150 horas ensamble. Además, se ha establecido que para producir una chaqueta se requiere de 6 horas departamento corte y 3 horas de ensamble, mientras que para producir un buzo, se requiere de 3 horas departamento corte y 5 horas de departamento de ensamble. También, se ha establecido que el precio de venta de una chaqueta es de $50.000 y un buzo es de $40.000. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas ha estimado una venta mínima de 40 buzos.

5.5. Una nutricionista se encuentra en el proceso de decisión de establecer que cantidad de 2 tipos de alimento (A y B) debe incorporar en una dieta sabiéndose que el costo por libra de cada uno de ellos es de $400 y $300 por libra respectivamente. Además, se ha establecido que una libra de alimento tipo A contiene 3 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de minerales y 4 miligramos de proteínas; mientras que una libra de alimento tipo b contiene 8 miligramos de vitaminas, 2 miligramos de minerales y 5 miligramos de proteínas. También, se debe garantizar consumir mínimo 240 miligramos de vitaminas, 120 miligramos de minerales y 200 miligramos de proteínas.

5.6. Cierta compañía fabrica billeteras y cinturones a un costo de $12,000 y $6,000 por unidad respectivamente. En la fabricación de dichos artículos se debe consumir como mínimo 180 horas hombre y mínimo 200 unidades de materia prima. Mediante un estudio se determinó que para producir una billetera se requiere 6 horas hombre y 4 unidades de materia prima, mientras que para fabricar un cinturón se requiere 3 horas hombre y 5 unidades de materia prima. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 billeteras?

5.7. Una compañía papelera produce cuadernos espirales y grapados a un costo de $200 y $400 respectivamente por unidad. Para la producción hay una disponibilidad diaria de 200 horas en corte y 150 horas en ensamble. Además, se ha establecido que la demanda conjunta de los 2 artículos será de 60 unidades. ¿Qué cantidad de cada tipo de cuaderno se debe fabricar si se sabe que para producir un cuaderno tipo espiral se requiere de 5 horas en corte y 3 horas en ensamble y para producir un cuaderno grapado se requiere de 4 horas en corte y 5 horas en ensamble?

5.8. La compañía Sigma, produce ACPM y Biogasolina a un costo de $ 2.000 y $ 3.000 por galón respectivamente. Para ello se debe consumir un mínimo de 210 horas a la semana. Además el departamento de ventas ha determinado que máximo venderá 20 galones de ACPM y mínimo 10 de Biogasolina. También se sabe que la producción de un galón de ACPM requiere de 3 horas, mientras que un galón de Biogasolina, requiere de 7 horas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el gobierno Nacional da un subsidio de $ 6.000 por cada galón de biogasolina que se produzca?

5.9. Una fábrica de pupitres se dedica a la manufacturación de pupitres unipersonales y bipersonales; los cuales generan utilidad unitaria de $7000 y $12.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos de la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 500 metros de madera, 700 metros de tubo y 600 horas-hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar? si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de 2 metros de madera, 4 metros de tubo y 3 horas-hombre de trabajo; mientras que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo.

5.10. Cierta compañía dedicada a la ornamentación ha sacado del mercado un producto que no le era rentable, lo que ocasiona que su planta de producción tenga una subutilización de 500 horas en la sección de corte, 300 horas en la sección de soldadura y 700 horas en la sección de ensamble. El departamento de mercadeo sugiere que dicha capacidad puede ser utilizada en la fabricación de puertas, ventanas y rejas en la mejor combinación posible. Para estos artículos se ha establecido un precio de venta de 25000, 30000 y 18000 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 horas en corte, 6 horas en soldadura y 4 horas en ensamble; para producir una ventana se requiere de 2 horas en corte, 3 horas en ensamble y una hora en soldadura; mientras que para producir una reja se necesita de 8 horas en corte, 4 horas en soldadura y 5 horas en ensamble. Además, se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 20 rejas y máximo 30 puertas. Suponga que por las condiciones de la planta la producción de ventanas no debe exceder más del 20% de la producción total de la planta.

5.11. La porcicultura sigma tiene un criadero de cerdos en Tibirita (Cundinamarca, Colombia), donde actualmente se están levantando 50 cerditos, para cada uno de los cuales se ha establecido que diariamente requiere un suministro mínimo de 50 miligramos de vitamina A, mínimo 70 miligramos de vitamina B y máximo 80 miligramos de vitamina C. Para lograr estos requerimientos vitamínicos, a los cerditos en su alimentación se le suministra cereal y mogollo, los cuales adquiere la compañía a $5000 y $10000 por kilo respectivamente. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar diariamente a cada cerdito? si se sabe que un kilo de cereal contiene 3 miligramos de vitamina A, 9 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de vitamina C; mientras que un kilo de mogollo contiene 10 miligramos de Vitamina A, 3 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

5.12. Acerías Bacatá prepara una aleación de tipo especial en un alto horno, el cual debe ser cargado con dos toneladas de material. Por requisitos de calidad dicha aleación debe contener mínimo 30% de sílice pero no más de 35%; y máximo 28% de aluminio. La compañía carga el horno con hierro, Zinc y Cobre, los cuales adquiere a 3000, 7000 y 6000 pesos por kilo respectivamente. ¿Con qué cantidad de cada producto se debe alimentar el horno si se sabe que el hierro contiene 18% de sílice y 15% aluminio; el zinc contiene 7% de sílice y 25% de aluminio; mientras que el cobre contiene 16 % de sílice y 5% de aluminio.

5.13. Una fábrica de muñecos de peluche fabrica osos y perros para los cuales ha establecido una utilidad de $8000 y $5000 por unidad respectivamente. El departamento de mercados ha establecido que mínimo se venderán 40 osos y máximo 50 perros. Determine que cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el gerente de la compañía desea que la producción de osos sea mínimo 20 unidades más que la producción de perros.

5.14. Estructuras Metálicas Ltda. manufactura puertas y ventanas con utilidades de 400 y 900 pesos por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad por semana de 400 metros de ángulo y 480 metros de platina. Además, se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 metros de ángulo y 8 metros de platina; mientras que para producir una ventana se requiere de 8 metros de ángulo y 6 metros de platina ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas estimó que máximo se venderán 30 ventanas?

5.15. La compañía"**SIGMA**" produce pupitres y sillas, para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de $5.000 y $6.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 20 horas hombre de trabajo, 32 horas maquina y 24 metros de materia prima. El gerente desea establecer que cantidad de pupitres y sillas debe fabricar a fin de incrementar al máximo su utilidad. Suponga, además, que para producir un pupitre se requiere de 5 horas hombre de trabajo, 4 horas máquina y 8 metros de materia prima; mientras que para producir una silla se necesita de 4 horas hombre de trabajo, 8 horas máquina y tres metros de materia prima.

5.16. Electrodomésticos "LA HORMIGA" produce y vende televisores y equipos de sonido para los cuales ha establecido que debido a las condiciones del mercado un televisor genera una pérdida de $30.000, mientras que un equipo de sonido genera una utilidad de $40.000. Además, se sabe por un estudio de mercados que la venta máxima de televisores será de 70 unidades mientras que para los equipos de sonido se ha establecido una venta mínima de 30 unidades. Para la comercialización de estos productos la compañía cuenta con un vendedor, el cual gana una comisión de $5 por televisor vendido y $8 por cada equipo de sonido vendido. Establezca qué cantidad de televisores y equipos de sonido se debe fabricar a fin de minimizar las pérdidas totales de la compañía y garantizar que el vendedor obtenga una comisión mínima por mes de $400.

5.17. Una compañía dedicada a la agricultura puede sembrar en su siguiente temporada papa y yuca, productos para los cuales ha establecido que generan una utilidad por hectáreas sembrada de $8 y $9 millones respectivamente. Para el cultivo de dichos productos se cuenta con una disponibilidad de 540 Litros de agua, 500 Kilos de abono y 800 Libras de fertilizante. ¿Que cantidad de hectáreas de cada producto se deben sembrar si se sabe que para sembrar una hectárea de papa se necesitan 6 litros de agua, 5 kilos de abono y 10 libras de fertilizante; mientras que para sembrar una hectárea de yuca se requiere de 9 litros de agua, 10 kilos de abono, y 8 libras de fertilizante?

5.18. Una fábrica de muebles ha determinado que la demanda de bibliotecas para los próximos 4 meses es de 200, 300, 390 y 130 unidades respectivamente. Además, se sabe que actualmente la compañía puede generar inventario en cualquier mes y debe cumplir con su demanda a tiempo durante cada mes. La compañía tiene una capacidad para fabricar 200 bibliotecas por mes en tiempo regular con un costo de $15.000 por biblioteca y puede producir unidades adicionales en tiempo extra a un costo de $20.000 por biblioteca. Determine la cantidad de bibliotecas a producir en cada mes; tanto en tiempo regular, como en tiempo extra si se sabe que las unidades producidas y no vendidas en un determinado mes generan un costo de almacenaje de $1.200 por biblioteca (suponga que al final del cuarto mes no debe haber inventario).

5.19. Se ha establecido en una fabrica de muebles metálicos que en el departamento de corte hay una disponibilidad de 700 horas por semana, en el departamento de soldadura hay una disponibilidad de 500 horas por semana, mientras que en el departamento de ensamble hay una disponibilidad de 800 horas por semana. La fábrica manufactura salas y comedores para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 10.000 y 15.000 pesos por unidad respectivamente. Establezca la cantidad de salas y comedores a fabricar por semana si se sabe que para producir una sala se requieren de 5 horas de proceso en corte, 2 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble; mientras que para producir un comedor se requieren 2 horas de proceso en corte, 6 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que máximo se venderán 30 salas y mínimo 10 comedores.

5.20. Bicisigma produce bicicletas y triciclos para los cuales ha establecido un precio de venta unitario de 9000 y 7000 pesos respectivamente. Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 630 horas en corte y 560 horas de soldadura, además se ha establecido que para producir una bicicleta se requiere de 9 horas en corte y 7 horas en soldadura, mientras que para producir un triciclo se requiere de 7 horas en corte y 8 horas en soldadura. Determinar que cantidad de bicicletas y triciclos se deben fabricar si se sabe que el departamento de mercadeo ha establecido que mínimo se venderán entre los dos artículos 50 unidades.

5.21. Una empresa siderúrgica dispone de un alto horno el cual debe ser cargado con una tonelada de material. En dicho horno se fabrica un tipo de aleación especial la cual por requisitos de calidad debe tener mínimo 32% de aluminio pero no más del 40% y como máximo el 17% de silicio. La compañía cuenta con 4 tipos de material para los cuales se ha establecido el contenido de silicio y aluminio con su respectivo costo tal como aparece en la tabla 3.13.

TABLA 3.13			
MATERIAL	**CONTENIDO SILICIO**	**CONTENIDO ALUMINIO**	**COSTO**
Acero	7%	16%	5000
Cobre	15%	5%	3000
Níquel	12%	14%	3000
Cromo	3%	10%	4400

5.22. Una corporación de ahorro y vivienda cuenta con un total $30.000.000.00 para préstamos bancarios entre los cuales esta préstamo para automóvil, vivienda, inversión rural, y préstamos personales. Mediante una evaluación del sistema financiero se sabe que los préstamos para automóvil generan un interés del 15% y tienen una probabilidad de incobrables del 10%; los préstamos para vivienda generan interés del 8% y una probabilidad de incobrables del 5%. Los préstamos para inversión rural generan interés del 7% y probabilidad de incobrable del 20%; mientras que los préstamos personales generan un interés del 24% y tiene una probabilidad de incobrable del 25%. Por políticas gubernamentales la entidad debe asignar mínimo el 40% de los fondos prestados a préstamos para inversión rural y vivienda. Además, los préstamos para automóvil deben ser máximo el 50% de los préstamos para inversión rural y los préstamos personales no pueden exceder el 10% de los dineros prestados. Determine qué cantidad de dinero se debe asignar a cada tipo de préstamo si por política de la compañía se ha especificado que la cantidad total de pagos irrecuperables no puede exceder el 6%.

5.23. Una joyería produce y vende relojes para hombre y para dama, para los cuales ha establecido un costo por unidad de $3.000 y $2.000 respectivamente. El departamento de ventas ha establecido que mínimo se venderán 60 relojes para dama y 70 relojes para caballero. Además, se ha establecido que para producir un reloj para dama se requiere de 5 horas de trabajo de un técnico, mientras para producir un reloj para hombre se requieren 8 horas de trabajo del técnico. Establezca la cantidad de relojes a producir si se sabe que la compañía tiene disponible 2 técnicos en la joyería, los cuales laboran 8 horas diarias y 25 días al mes.

5.24. La veterinaria "The Dog" cría cachorros para los cuales se ha establecido que máximo se les debe suministrar 630 miligramos de vitamina A, mínimo 350 miligramos de Vitamina B y mínimo 320 miligramos de vitamina C (estos requerimientos son mensuales). Para garantizar esos requisitos vitamínicos los cachorros son alimentados con purina y ladrina los cuales compra la compañía \$8000 y \$10000 por kilo respectivamente. Establecer qué cantidad de los dos alimentos se les debe suministrar mensualmente a cada cachorro si se sabe que un kilo de purina contiene 9 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 4 miligramos de Vitamina C; mientras que un Kilo de ladrina contiene 7 miligramos de vitamina A, 5 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

5.25. Una heladería dispone diariamente de 300 gramos de pulpa de fruta y 320 gramos de azúcar para la producción de paletas y helados, para los cuales se ha establecido una utilidad unitaria de 200 y 100 pesos respectivamente. El departamento de mercadeo ha establecido que en conjunto mínimo se venderán 90 unidades. Establezca la cantidad de paletas y helados que se debe fabricar diariamente, si se sabe que para producir una paleta se requiere 5 gramos de pulpa de fruta y 8 gramos de azúcar, mientras que para producir un helado se requieren 6 gramos de pulpa de fruta y 4 gramos de azúcar.

5.26. Una industria de acrílicos cuenta con una disponibilidad semanal para la fabricación de sus productos de 400 metros de fibra de vidrio, 360 litros de resina y 500 miligramos de catalizador. Con esos recursos la compañía fabrica tinas referencia Nápoles y referencia Milán para los cuales se ha establecido que generan una contribución a las utilidades de \$6000 y \$9000 cada tina respectivamente. ¿Qué cantidad de cada tipo de tina se debe fabricar si se sabe, que para producir una tina Nápoles se requieren 8 metros de fibra de vidrio, 6 litros de resina y 5 miligramos de catalizador; mientras que para producir una tina referencia Milán se requiere de 5 metros de fibra, 6 litros de resina y 10 miligramos de catalizador?.

5.27. "El palacio del colesterol" produce y vende pasteles y empanadas para los cuales ha establecido una utilidad de \$400 por unidad de cada producto. Para la producción de esos artículos se dispone diariamente de 500 gramos de arroz y 360 gramos de harina. Además, se sabe que para producir un pastel se requiere de 10 gramos de arroz y 6 gramos de harina y para producir una empanada se requiere de 5 gramos de arroz y 6 gramos de harina. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar diariamente si se sabe que máximo se venderán 30 empanadas?.

5.28. Decoraciones "La Tapa" produce gabinetes para baño y cocina para los cuales ha fijado un precio de venta de \$20.000 y \$30.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 300 metros de acrílico y 240 metros de fibra. ¿Qué cantidad de gabinetes para baño y cocina se debe fabricar?, si se sabe que para producir un gabinete de baño se requiere de 5 metros de acrílico y 3 metros de fibra, mientras que para un gabinete de cocina se requiere de 6 metros de acrílico y 8 de fibra. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que mínimo se venderán 100 gabinetes para baño.

5.29. Un comercializador de tejidos de punto, distribuye sacos y blusas a un precio por unidad de $5000 y $8000 respectivamente. El departamento de mercadeo determinó que para el próximo mes máximo venderá 20 sacos y mínimo 15 blusas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe comprar si se sabe, que en conjunto entre los dos artículos se venderán mínimo 30 unidades?.

5.30. Una sociedad porcicultora ha establecido que a cada cerdo se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 14 miligramos de vitamina B y 16 miligramos de vitamina C. Para cumplir con esos requisitos vitamínicos, la sociedad compra para alimentar a los cerdos a un costo de $3000 un kilo de mineral y a $6000 un kilo de concentrado. ¿Qué cantidad de cada producto se le debe suministrar diariamente a cada cerdo?, si se sabe que un kilo de mineral contiene 6 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de C; mientras que un kilo de concentrado contiene 5 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de C.

5.31. Una importadora de joyas compra relojes para hombre a $3000 y relojes para dama a $6000 cada uno de ellos. Para preparar un reloj para hombre se requiere de 6 horas y para preparar un reloj para dama se requieren 5 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de reloj se debe preparar? si se sabe que mínimo se venderán 10 relojes para hombre en la próxima semana, que hay una disponibilidad de 300 horas para la preparación de los relojes y que se desea invertir mínimo $180.000.

5.32."Dulceria Sweet" produce paquetes de dulces y chocolates, para los cuales ha establecido un costo de producción por paquete de $5 y $10 respectivamente. Actualmente la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 180 horas y se sabe que para producir un paquete de dulces se requiere de 3 horas, mientras que para producir un paquete de chocolates se requiere de 6 horas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el mercado consumirá mínimo 70 paquetes entre los dos artículos?

5.33."Químicos Protox" ha determinado que para la fabricación de un producto químico especial requiere de dos materias primas A y B. Se sabe que la utilización de un kilo de materia prima tipo A, se necesitan 2 litros de agua y 2 horas de trabajo y genera un costo de $3, mientras que la utilización de un kilo de materia tipo B genera 3 litros de agua, consume 5 horas de trabajo y da una utilidad de $7. ¿Qué cantidad de cada materia prima se debe utilizar en el producto químico si se sabe, que hay una disponibilidad de 60 litros de agua por semana y que se debe consumir mínimo 100 horas de trabajo?

5.34. Un fabricante de artículos decorativos tiene 6 metros de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará pinos decorativos. Con anterioridad se han vendido bien dos modelos de manera que se dedicará a producir estos dos. El fabricante estima que el modelo 1 requiere 2 metros de madera y 7 horas de tiempo disponible, mientras que para el modelo 2 se requiere de un metro de madera y 8 horas de tiempo. Los precios de los modelos son $120 y $80 respectivamente. ¿Cuántos pinos decorativos de cada modelo se deben fabricar?

5.35. Una fábrica de muebles produce pupitres unipersonales, bipersonales y mesas para los cuales ha establecido que rinden una utilidad unitaria de $3, $2 y $5. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 430 metros de madera, 460 metros de tubo y 420 metros de formica. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar a fin de incrementar las ganancias si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de un metro de madera, 3 metros de tubo y un metro de fórmica, que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 2 metros de madera y 4 metros de fórmica; mientras que para producir una mesa se necesita un metro de madera y 2 metros de tubo.

5.36. La industria de muebles "Data" produce sofás, sillas y poltronas para los cuales ha establecido que rinden una contribución unitaria a las utilidades de $15.000, $10.000 y $20.000 respectivamente. Para producir esos artículos la compañía tiene una disponibilidad mensual de 800 metros de paño, 900 metros de listón y 720 metros de resortes. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que para producir un sofá se requiere 10 metros de paño, 9 metros de listón y 12 metros de resortes, para producir una silla se requieren 5 metros de paño, 4 metros de listón y 6 metros de resortes; mientras que para fabricar una poltrona se requiere de 8 metros de paño, 10 metros de listón y 5 metros de resorte.

5.37. La empresa "Zaza" produce salas y comedores en tres tipos de máquinas en las cuales hay una disponibilidad de 100, 80 y 160 horas por semana respectivamente. Además, se sabe que una sala requiere de 4 horas de proceso en la máquina 1, 16 horas de proceso en la máquina 2 y 14 horas de proceso en la máquina 3, mientras que un comedor requiere de 6 horas de proceso en la máquina 1 y 18 horas de proceso en la máquina 3. El departamento de costos ha estimado que cuesta $12 producir una sala y $ 11 producir un comedor. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada producto se debe fabricar, si se sabe que un comedor se vende en $17 y una sala en $14. Suponga además que el departamento de mercadeo ha estimado que mínimo se venderán 5 salas.

5.38. La industria ganadera "Zitron", cría cabezas de ganado de ganado en una hacienda de los llanos orientales, el veterinario de la compañía ha establecido que a cada cabeza de ganado se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 40 miligramos de vitamina B y mínimo 60 miligramos de vitamina C. El ganado es alimentado con sal, ésta tiene un costo de $4000 por kilo, agua la cual tiene un costo de $1000 por litro y concentrado el cual tiene un costo de $1500 por frasco. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe dar a cada cabeza de ganado de tal forma que garantice los requerimientos vitamínicos del ganado si se sabe que 1 kilo de sal contiene 5 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C; Un litro de agua contiene 1 miligramo de vitamina A, 4 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de Vitamina C; mientras que un frasco de concentrado contiene 10 miligramos de vitamina B y 6 miligramos de vitamina C.

5.39. La compañía "Zamba", produce gasolina blanca, roja y verde, para las cuales se ha establecido un precio de venta por galón de $4000, $4500 y $4200 respectivamente, estos productos se obtienen a partir de petróleo y Kerosén de los cuales hay una disponibilidad diaria de 3000 y 3500 galones respectivamente. Además, se sabe que el costo, que se causa por explotar un galón de petróleo es de $2500 mientras que para un galón de kerosene es de $3000. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que por normas gubernamentales de calidad, la gasolina blanca debe contener 30% de petróleo y 70% de kerosén, la gasolina roja debe contener 45% de petróleo y 55% de kerosene, mientras que la gasolina verde debe contener 60% de petróleo y 40% de kerosén.

5.40. La empresa "Omicrón" debe asignar a una de sus rutas un máximo de 40 busetas y un mínimo de 80 buses. Además por caprichos del señor gerente los buses asignados deben ser mínimo el doble de las busetas menos 60 unidades y se sabe que el costo por asignar una buseta a esa ruta es de $80.000, mientras que asignar un bus cuesta $40.000. ¿Qué cantidad de buses y busetas se debe asignar si se sabe que el gobierno nacional ofrece un subsidio de $90.000 por cada bus asignado?

5.41. La compañía "El Tornero Mayor" produce piñones y rodamientos los cuales le generan una contribución a las utilidades de $5000 y $8000 respectivamente por unidad. Para la producción de dichos artículos la Compañía cuenta semanalmente con 450 horas de trabajo en torno, 540 horas de fresadora y 420 horas de pulidora. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un piñón se requiere de 5 horas de trabajo en el torno, 9 horas de trabajo en la fresadora y 6 horas de trabajo en la pulidora, mientras que para producir un rodamiento se requiere de 9 horas de trabajo en el torno, 6 horas de trabajo en la fresadora y 7 de trabajo en la pulidora?

5.42. El hotel residencial "Alfa" dispone de habitaciones confortables y normales las cuales se alquilan a $4500 y $3500 por habitación respectivamente. Dichas habitaciones son preparadas por Anita y Carmen, las camareras del hotel, para las cuales se ha establecido que tienen una disponibilidad diaria de 630 y 400 minutos respectivamente para el arreglo de las habitaciones. Además, se ha establecido que una habitación confortable requiere de 9 minutos de arreglo por parte de Anita y 5 minutos por parte de Carmen; mientras que una habitación normal requiere de 7 minutos de trabajo de Anita y 8 minutos de trabajo de Carmen, para quedar lista para alquiler. ¿Qué cantidad de cada tipo de habitaciones deben estar listas para la noche si se sabe que se espera alquilar mínimo 40 habitaciones entre los dos tipos?

5.43. La fábrica de muebles "Beta" produce salas y comedores para los cuales ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $9000 y $10000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de madera y 320 metros de tubo. El departamento de producción estimó que para producir una sala se requiere de 6 metros de madera y 4 metros de tubo, mientras que para producir un comedor se requiere de 5 metros de madera y 8 metros de tubo. ¿Qué cantidad de salas y comedores se deben fabricar? si se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 90 unidades entre los dos productos.

5.44. Confecciones "Gamma" produce camisas y corbatas para las cuales ha establecido una utilidad unitaria de $5000 y $2000 respectivamente. El departamento de mercadeo ha pronosticado que máximo se venderán 50 camisas y mínimo 30 corbatas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el Gerente de la fábrica requiere que la cantidad de corbatas producidas debe ser mínimo 40 unidades debajo de la producción de camisas?

5.45. En el jardín infantil "Delta" se ha establecido que a cada niño diariamente se le debe proporcionar máximo 480 miligramos de vitaminas, mínimo 180 miligramos de hierro y mínimo 180 miligramos de minerales. Para lograr estos requisitos vitamínicos en el jardín se dispone de leche y fruta para los cuales se ha establecido un costo de $400 por un vaso de leche y $500 por una porción de frutas. Establezca qué cantidad de leche y fruta se le debe administrar diariamente a cada niño, si se sabe que un vaso de leche contiene 6 miligramos de vitaminas, 3 miligramos de hierro y 6 miligramos de minerales, mientras que una porción de fruta contiene 8 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de hierro y 3 miligramos de minerales.

5.46. La fábrica de calzado "Épsilon" produce zapatos para hombre y zapatos para dama a un costo de $20.000 cada uno de ellos. Además, se ha establecido, mediante un estudio de mercado que habrá una venta mínima de 20 zapatos para dama y que la venta mínima entre los dos artículos será de 50 unidades. También, se sabe que hay una disponibilidad de 540 horas-hombre por semana para la producción de dichos artículos. ¿Qué cantidad de cada tipo de zapato se debe fabricar si se sabe que producir un par de zapatos para hombre se requieren 6 horas y un par de zapatos para dama requiere 9 horas?

5.47. La distribuidora de dulces "Zeta" compra cada paquete de mentas a $5 pesos y cada paquete de caramelos a $6. El departamento de mercadeo de la Compañía ha determinado que semanalmente mínimo se venderán 60 paquetes de mentas y mínimo 60 paquetes de caramelos. Además, se sabe que la Compañía semanalmente asigna para su presupuesto de compra de los dos artículos $300. ¿Qué cantidad de cada producto se debe comprar para garantizar las condiciones del mercado y que su costo sea el más bajo?

5.48. Cierta familia ha establecido que cada uno de sus integrantes debe consumir como mínimo 240 gramos de vitamina A y mínimo 320 gramos de vitamina B al mes. Para cumplir con estos requerimientos vitamínicos la familia dentro de su mercado compra huevos a $300 la unidad y leche a $900 por litro. Por característica de los productos se sabe que un huevo contiene 6 gramos de vitamina A y 4 gramos de vitamina B; mientras que un litro de leche contiene 4 gramos de vitamina A y 8 gramos de vitamina B. ¿Qué cantidad de cada producto debe consumir cada miembro de la familia si se sabe que por recomendaciones medicas cada uno de ellos debe consumir mínimo 20 litros de leche al mes?

5.49. Cierta compañía automotriz ensambla automóviles y camiones los cuales deben pasar por el departamento de pintura y por el departamento de ensamble. Si el departamento de pintura se dedica solo a pintar camiones podrá pintar 40 camiones por día, mientras que si se dedica a pintar solo automóviles, podrá pintar 60 automóviles por día. Si el departamento de ensamble se dedica solo a ensamblar automóviles podrá ensamblar 50 automóviles por día, y si se dedica solo a ensamblar camiones podrá ensamblar 50 camiones por día. Además se sabe que cada camión genera una utilidad de $600.000 y que cada automóvil genera una utilidad de $400.000, suponga además que los vendedores de automóviles requieren que la compañía automotriz fabrique por lo menos 30 camiones y por lo menos 20 automóviles por día. Establezca la cantidad de camiones y la cantidad de automóviles que se deben fabricar por día.

5.50. Una compañía transportadora dispone de un taller de mantenimiento para las reparaciones a que haya lugar en sus buses y busetas; en el cual hay una disponibilidad de 630 horas mecánico semanalmente. Además se sabe que el costo por reparación de un bus es de 6 mil pesos mientras que el costo de reparación de una buseta es de 5 mil pesos. Por experiencia se sabe que para reparar un bus se necesitan 7 horas mientras que para la buseta se requieren 9 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe reparar semanalmente si se sabe que mínimo se deben reparar 20 busetas y mínimo 30 buses a la semana?

5.51. Se ha establecido en confecciones Sigma que para fabricar un vestido para hombre se demoran 9 horas mientras que para fabricar un vestido de mujer se demoran 7 horas. Además, se ha establecido que un vestido para hombre genera una utilidad de $18000 y un vestido para dama genera una utilidad de $14000. El departamento de ventas ha establecido que en el próximo mes se venderán mínimo 40 vestidos para hombre y mínimo 20 vestidos para mujer. ¿Qué cantidad de cada tipo de vestido se de deben fabricar si se sabe que hay una disponibilidad de 600 horas mensuales para la confección?

5.52. Se ha establecido en la compañía Sigma que un par de tenis genera una pérdida de $2000 mientras que un par de zapatos genera una utilidad de $6000. Además se sabe que la venta mínima entre los dos artículos para el próximo mes es de 70 unidades y que por disponibilidad de materiales máximo se pueden producir 50 pares de tenis al mes. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar si se sabe que mínimo se venderán 40 pares de zapatos el próximo mes?

5.53. Un agricultor dispone de un terreno de 90 hectáreas, las cuales planea sembrar con yuca y papa en las cantidades que más le sea conveniente. Mediante un estudio se ha establecido que sembrar una hectárea de terreno con yuca consume 12 metros cúbicos de agua, 8 bultos de abono y 6 horas hombre de trabajo, mientras que sembrar una hectárea con papa consume 6 metros cúbicos de agua, 7 bultos de abono y 10 horas hombre de trabajo. El agricultor ha establecido que tiene una disponibilidad semanal de 720 metros cúbicos de agua, 540 bultos de abono y 600 horas hombre. ¿Qué cantidad de hectáreas se deben sembrar de cada producto, si se sabe que una hectárea sembrada de yuca genera una utilidad de $ 50.000 y una hectárea de sembrada con papa genera una utilidad de $80.000?

5.54. En cierta compañía constructora se ha establecido que diariamente hay una disponibilidad de 240 minutos por día por cada ayudante de construcción. Por estudio se sabe que el primer ayudante coloca un bloque en 6 minutos y un ladrillo en 4 minutos, mientras que el segundo ayudante coloca un bloque en 3 minutos y un ladrillo en 8 minutos. Además se ha establecido que el costo por la colocación de un bloque es de $50, mientras que colocar un ladrillo cuesta $60. ¿Qué cantidad de bloques y ladrillos se deben colocar diariamente si además se sabe que mínimo se deben colocar 50 ladrillos?

5.55. Una fábrica de muebles tiene una disponibilidad semanal de 150 metros de tubo, 270 metros de madera y 120 tornillos. Con estos recursos la compañía desea fabricar camas dobles, camas sencillas y camarotes, los cuales pretende vender a \$50, \$25 y \$20 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada articulo debe fabricar la compañía a fin de maximizar sus ingresos? si se sabe que una cama doble consume 10 metros de tubo, 5 metros de madera y 8 tornillos; una cama sencilla consume 6 metros de tubo, 3 metros de madera y 4 tornillos; mientras que un camarote consume 15 metros de tubo, 9 metros de madera y 15 tornillos.

5.56. Petróleos colombia produce biogasolina, gasolina normal y acpm los cuales venden a un precio de 4000, 5000 y 4500 pesos por galón respectivamente. Dichos combustibles son fabricados a partir de dos tipos de crudo llamados petróleo grado 1 y petróleo grado 2 de los cuales hay una disponibilidad de 100000 y 150000 galones por día respectivamente. Se ha establecido que el costo de explotación de cada galón de petróleo grado1 es 2500 pesos, mientras que la explotación de petróleo grado 2 cuesta 3000 por galón. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que la biogasolina debe contener 40 % de petróleo grado 1 y 60% de petróleo grado 2, la gasolina normal debe contener el 70% de petróleo grado 1 y 30% de petróleo grado 2; mientras que el acpm debe contener 50% de petróleo grado 1 y 50% de petróleo grado 2.

5.57. Combustibles "DORADA" produce cocinol, gasolina roja y gasolina extra los cuales vende a \$3500, \$5200 y \$6300 por galón respectivamente.
Para la producción de dichos combustibles la compañía cuenta con una disponibilidad diaria de 1000 galones de petróleo crudo y 1500 galones de petróleo refinado. Además por requisitos de calidad el cocinol debe contener 80% de petróleo crudo y 20% de petróleo refinado; la gasolina roja debe contener 50% de cada uno de los petróleos y la gasolina extra debe contener 25% petróleo crudo y 75% petróleo refinado. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que el costo de explotación de un galón de petróleo crudo es \$2500 y un galón de petróleo refinado es \$3000.

Capítulo 6

Programación lineal: dualidad

PRESENTACIÓN

En el presente capítulo se presenta el proceso de transformación de un problema de programación lineala su respectivo dual; obteniéndose la solución óptima del mismo y la solución del problema primo. Esto incluye problemas de maximización y minimización.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de transformar un problema de programación lineal a su respectivo dual y utilizando el método simplex obtener la solución del mismo; así como interpretar correctamente la solución tanto del dual como del primal.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Transformar correctamente un problema de programación lineal en su respectivo dual asociado.
- Manejar las reglas de equivalencia para llevar todas las desigualdades a igualdades.
- Dominar el procedimiento de avance hacia la optimalidad del método simplex.
- Determinar mediante el método simplex la solución óptima del problema dual tanto en problemas de maximización como de minimización.
- Identificar el tipo de solución tanto del problema dual, como del problema primal.
- Realizar interpretaciones económicas con el uso de los precios sombra.

COMPETENCIAS

El estudiante tendrá la capacidad de transformar problemas de programación lineal en su respectivo dual, obtener la solución óptima e interpretar tanto la solución dual como la solución primal.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá demostrar el manejo en el planteamiento de modelos de programación lineal, obtener la solución a través del método de dual simplex e interpretar la solución.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Gauss Jordan.
- Vectores y matrices.

A todos los problemas que se han trabajado (de aquí en adelante se llamará problema primo o primal) está asociado un problema dual; de tal forma que solucionado el problema dual automáticamente se está solucionando el problema primo.

En la tabla 6.1 se presentan algunas estructuras primas con su correspondiente modelo dual; para que a partir de allí se pueda generalizar una tabla que permita transformar cualquier tipo de problema.

TABLA 6.1	
PROBLEMA PRIMO	PROBLEMA DUAL
$MaxZ = CX$ $s.a.$ $AX \leq b$ $X \geq 0$	$MinD = b^T Y$ $s.a.$ $A^T Y \geq C^T$ $Y \geq 0$
$MaxZ = CX$ $s.a.$ $AX = b$ $X \geq 0$	$MinD = b^T Y$ $s.a.$ $A^T Y \geq C^T$ $Y \ldots NR$
$MaxZ = CX$ $s.a.$ $AX \geq b$ $X \geq 0$	$MinD = b^T Y$ $s.a.$ $A^T Y \geq C^T$ $Y \leq 0$
$MinZ = CX$ $s.a.$ $AX \geq b$ $X \geq 0$	$MaxD = b^T Y$ $s.a.$ $A^T Y \leq C^T$ $Y \geq 0$
$MinZ = CX$ $s.a.$ $AX = b$ $X \geq 0$	$MaxD = b^T Y$ $s.a.$ $A^T Y \leq C^T$ $Y \ldots NR$

En esta tabla la T colocada como exponente indica que es la transpuesta, NR indica que la respectiva variable es no restringida (puede tomar valores negativos, cero o positivos) y Y son las variables duales del problema.
Con base en la información de la tabla 6.1 se obtiene la información generalizada para transformar cualquier tipo de problema sin importar su tamaño, sentido de sus restricciones y comportamiento independiente de las variables.

En la tabla 6.2 se presenta esta información.

TABLA 6.2.	
PROBLEMA PRIMO	**PROBLEMA DUAL**
Maximización	Minimización
Restricción ≤	Variable ≥ 0
Restricción =	Variable nr
Restricción ≥	Variable ≤ 0
Variable ≥ 0	Restricción ≥
Variable nr	Restricción =
Variable ≤ 0	Restricción ≤

Para aclarar el uso de la tabla 6.2 hay que decir que si el problema primo es de maximización, la conversión para obtener el dual se realiza de izquierda a derecha; mientras que, si el problema original es de minimización la transformación a dual se obtiene de derecha a izquierda. En conclusión, como se puede observar, cada variable genera una restricción y cada restricción genera una variable en el problema dual.

La dualidad es sólo un proceso de convertir un problema en otro. A partir de allí se soluciona el problema con el método simplex tal como se observará en los ejemplos.

El lector se preguntará ¿y para qué se transforma y se resuelve un nuevo problema? La respuesta a este interrogante es muy sencilla; puede pasar que al transformar un problema quede con menos restricciones, lo que facilitará enormemente los cálculos. Recuerde que cada restricción genera una variable y viceversa; lo que quiere decir que un problema de m*n queda transformado en un problema de n*m.

Obviamente, al solucionar el problema primo se tiene la solución del problema dual y al solucionar el dual se obtiene la solución del problema primo.
En la tabla 6.3 se presentan las fórmulas a las cuales responde el método simplex; con las cuales se establecerá la solución del problema dual.

<table>
<tr><th colspan="9">TABLA 6.3</th></tr>
<tr><td>C_J</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">BASE</td><td rowspan="2">X_B</td></tr>
<tr><td>C_B</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td><td>H_1</td><td>H_2</td><td>H_3</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3" rowspan="3">$B^{-1}a_J$</td><td colspan="3" rowspan="3">B^{-1}</td><td></td><td rowspan="3">$B^{-1}b$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Z_J-C_J</td><td colspan="3">$C_BB^{-1}a_J-C_J$</td><td colspan="3">C_BB^{-1}</td><td colspan="2">$Z = C_BX_B$</td></tr>
</table>

En esta tabla de fórmulas se define lo siguiente:

B^{-1}: matriz en cada una de las iteraciones conformada por lo que inicialmente era la matriz identidad.

a_j : vector de asignación unitaria de recursos para cada variable.

b : vector de disponibilidad de recursos.

C_B : coeficientes de las variables básicas en la función objetivo.

C_j : coeficientes de la función objetivo.

X_B : vector solución.

Con base en la notación anterior y en el teorema que dice que: en condiciones de optimalidad el valor de la función objetivo del problema primo es igual al valor de la función objetivo del problema dual, se tiene lo siguiente:

$$Z = D.$$

$$C_B X_B = b^T Y$$

$$C_B B^{-1} b = b^T Y.$$

Por propiedades matriciales esto se puede expresar como:

$$C_B B^{-1} b = Y^T b.$$

Simplificando términos se obtiene:

$$C_B B^{-1} = Y^T.$$

Y justamente el Y^T es el vector que contiene las variables duales; por lo que se puede concluir que la solución del problema dual se encuentra en el renglón Z_J-C_J de las variables que originalmente conformaban la matriz identidad. En la tabla, la parte sombreada, que corresponde a las variables de holgura. Recuerde que la solución del problema primo se encuentra en el X_B. Si el problema que se soluciona es el problema dual; las los soluciones invierten su posición.
Ahora que ya se sabe en dónde está la solución del problema dual y la solución del problema primo; se puede pasar a las aplicaciones, las cuales por conveniencia e interpretación se utilizarán los mismos problemas solucionados en el capítulo 4, a través del método simplex.

6.1. PROBLEMAS DE MAXIMIZACIÓN

6.1.1. Solución única

Un problema de programación lineal cuyo problema primal tenga solución única, su correspondiente dual también tendrá solución única.

Ejercicio 6.1.1. Para ejemplificar esto se tomará el ejercicio 3.1.1 del capítulo tercero cuya formulación y modelo matemático se transcribe a continuación.
La compañía Sigma produce bibliotecas y escritorios para los cuales se ha establecido un precio de venta por unidad de $9.000 y $10.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad mensual de 700 metros de madera, 800 metros de tubo y 900 pliegos de papel de lija. ¿Qué cantidad de bibliotecas y escritorios se debe fabricar mensualmente si se sabe que una biblioteca consume 7 metros de madera, 10 metros de tubo y 6 pliegos de papel de lija; mientras que para producir un escritorio se requiere10 metros de madera, 8 metros de tubo y 15 pliegos de papel de lija?

X1 = Cantidad de bibliotecas a fabricar por mes

X2 = Cantidad de escritorios a fabricar por mes

PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Max Z = $9000\,X_1 + 10000X_2$

S.A.

$7\,X_1 + 10\,X_2 \leq$ 700 metros de madera

$10\,X_1 + 8\,X_2 \leq$ 800 metros de tubo.

$6\,X_1 + 15\,X_2 \leq$ 900 pliegos de papel de lija.

$X_1, \quad X_2 > \quad 0$

De este problema primo se estructuran los siguientes vectores y matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{Bmatrix} 700 \\ 800 \\ 900 \end{Bmatrix} \qquad A = \begin{Bmatrix} 7 & 10 \\ 10 & 8 \\ 6 & 15 \end{Bmatrix}$$

A partir de las anteriores se obtiene sus transpuestas; las cuales quedan como aparece a continuación:

$$C^T = \begin{Bmatrix} 9 \\ 10 \end{Bmatrix} \qquad b^T = \begin{pmatrix} 700 & 800 & 900 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{Bmatrix} 7 & 10 & 6 \\ 10 & 8 & 15 \end{Bmatrix}$$

El problema dual en su estructura general es el siguiente:

$$MinD = b^T Y$$
$$s.a.$$
$$A^T Y \geq C^T$$
$$Y \geq 0$$

Con base en los vectores y matrices específicas de este problema se obtiene lo siguiente:

$$\text{Min D} = \begin{pmatrix}700 & 800 & 900\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}Y1\\Y2\\Y3\end{Bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{Bmatrix}7 & 10 & 6\\10 & 8 & 15\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}Y1\\Y2\\Y3\end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix}9\\10\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}Y1\\Y2\\Y3\end{Bmatrix} \geq \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

Haciendo las respectivas multiplicaciones, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\text{Min D} = 700Y_1 + 800Y_2 + 900Y_3$$

S.A.

$$7Y_1 + 10Y_2 + 6Y_3 \geq 9$$

$$10Y_1 + 8Y_2 + 15Y_3 \geq 10$$

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3 \geq 0.$$

Con las mismas técnicas utilizadas en el capítulo 4 del método simplex; el problema a resolver es el siguiente:

$$\text{Max } (-D) = -700Y_1 - 800Y_2 - 900Y_3 - MA_1 - MA_2$$

S.A.

$$7Y_1 + 10Y_2 + 6Y_3 - S_1 + A_1 = 9$$

$$10Y_1 + 8Y_2 + 15Y_3 - S_2 + A_2 = 10$$

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, S_1, S_2, A_1, A_2 \geq 0.$$

En la tabla 6.4 se muestra la solución de este problema.

Con base en los resultados de esta tabla se obtiene la solución primal en el renglón Zj – Cj (ahí se señalan los valores de las variables) y la solución dual en el X_B.

La solución del problema primo es X_1=600/11, X_2=350/11 y H_3=1050/11; misma solución obtenida mediante la solución del problema primo con el método simplex. Para efectos de comparar las dos soluciones a continuación se presenta la tabla 4.5; que indica el tablero óptimo del problema primo.

TABLA 6.4												
FILA	OPERACIÓN	C_J	-700	-800	-900	0	0	-M	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2			
F_1		-M	7	10	6	-1	0	1	0	A_1	9	9/6=1,5
F_2		-M	10	8	15	0	-1	0	1	A_2	10	10/15=0,66
F_{Z1}		Z_J-C_J	-17M +700	-18M +800	-21M +900	M	M	0	0	-D= -19M		
F_3	F_4(-6)+F_1	-M	3	34/5	0	-1	2/5	1	-2/5	A_1	5	5/34/5=25/34
F_4	F_2(1/15)	-900	2/5	8/15	1	0	-1/15	0	1/15	Y_3	2/3	2/3/8/15=30/24
F_{Z2}		Z_J-C_J	-3M +340	-34/5M -320	0	M	-2/5M +60	0	7/5M-60	-D= = -5M-600		
F_5	F_3(5/34)	-800	15/34	1	0	-5/34	1/17	5/34	-1/17	Y_2	25/34	25/34/15/34 =25/15
F_6	F_5(-8-/15)+F_4	-900	22/51	0	1	4/51	-5/51	-4/51	5/51	Y_3	14/51	14/51/22/51 =14/22
F_{Z3}		Z_J-C_J	-700/17	0	0	800/17	700/17	M-800/17	M-700/17	-D = -14200/17		
F_7	F_8(-15-/34)+F_5	-800	0	1	-45/44	-5/22	7/44	5/22	-7/44	Y_2	5/11	
F_8	F_6(51/22)	-700	1	0	51/22	2/11	-5/22	-2/11	5/22	Y_1	7/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	1050/11	600/11	350/11	M-600/11	M-350/11	-D=- 8900/11		
SOLUCIÓN PRIMAL			H_1	H_2	H_3	X_1	X_2	X_1	X_2			

TABLA 4.5										
FILA	OPERACIÓN	C_J	9	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3			
F_{10}	$F_{11}(2/9)+F_7$	9	1	0	-2/11	5/22	0	X_1	600/11	
F_{11}	$F_8(45/44)$	0	0	0	-51/22	45/44	1	H_3	1050/11	
F_{12}	$F_{11}(-7/45)+F_9$	10	0	1	5/22	-7/44	0	X_2	350/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	7/11	5/11	0	Z=8900/11		
SOLUCIÓN DUAL			S_1	S_2	Y_1	Y_2	Y_3			

Observe el lector que la solución obtenida para el problema dual en las dos tablas es exactamente la misma; Y_1=7/11, Y_2=5/11 y Y_3=0. Además, el valor de la función objetivo dual es igual al valor de la función objetivo primal; con un valor de 8.900/11.

Por lógicas razones, la interpretación de la solución del problema es la misma entregada en el capítulo 4.

6.1.2. Solución óptima múltiple

Como definición inicial se sabe que si un problema primo tiene soluciones optimas múltiples; su respectivo dual tiene solución degenerada (por lo menos una variable básica en la solución toma valor de cero). Para apreciar esto se trae el ejercicio 4.1.2 del capitulo cuarto; el cual se transcribe en su formulación y planteamiento en el ejercicio 6.1.2.

Ejercicio 6.1.2. La compañía Hierro Colado dispone semanalmente para la fabricación de sus artículos de 350 metros de lámina y 360 metros de ángulo. Además, se ha establecido que con esos recursos se fabrican puertas y ventanas para los cuales se ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 70 y 50 pesos por unidad respectivamente. También, se sabe por medio de un estudio de consumo de materiales que una puerta requieren 7 metros de lámina y 4 metros de ángulo y que una ventana requieren 5 metros de lámina y 9 metros de ángulo. ¿Qué cantidad de cada articulo se debe fabricar? si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 puertas.

Definición de variables

X_1 = Cantidad de puertas a fabricar por semana.

X_2 = Cantidad de ventanas a fabricar por semana.

Con base en esta definición el modelo a resolver se establece de la siguiente manera:

$MAX\ Z = 70\ X_1 + 50X_2$

S.A.

$7\ X_1 + 5\ X_2 \leq$ 350. Restricción de metros de lámina.

$4\ X_1 + 9\ X_2 \leq$ 360. Restricción de metros de ángulo.

$X_1 \leq$ 40. Restricción de venta máxima de puertas.

$X_1,\ X_2 \geq 0$

A continuación se trae la solución óptima del problema primo presentada en la tabla 4.8; agregándole la solución dual.

TABLA 4.8										
FILA	**OPERACIÓN**	**C_J**	**70**	**50**	**0**	**0**	**0**	**BASE**	**X_B**	**COCIENTE**
		C_B	**X_1**	**X_2**	**H_1**	**H_2**	**H_3**			
F_{10}	$F_{11}(27/5)+F_7$	50	0	1	-4/43	7/43	0	X_2	1120/43	
F_{11}	$F_8(5/43)$	0	0	0	-9/43	5/43	1	H_3	370/43	
F_{12}	$F_{11}(-1)+F_9$	70	1	0	9/43	-5/43	0	X_1	1350/43	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	10	0	0	Z=3500		
SOLUCIÓN DUAL			S_1	S_2	Y_1	Y_2	Y_3			

Recuerde que este problema tiene solución óptima múltiple por que una variable no básica, en este caso H_2 toma valor de cero en el renglón Zj-Cj. (solución dual para Y_2).

El modelo dual para la compañía Hierro Colado queda de la siguiente manera:

$Min\ D= 350Y_1 +360Y_2 +40Y_3$

S.A.

$7Y_1 +4Y_2 + Y_3 \geq 70$

$5Y_1 +9Y_2 \geq 50$

$Y_1,\ Y_2,\ Y_3 \geq 0.$

Agregando las variables de exceso y artificiales; el problema a resolver es el siguiente:

$Max\ (-D)= -350Y_1 -360Y_2 -40Y_3 -MA_1 -MA_2$

S.A.

$7Y_1 +4Y_2 + Y_3 -S_1 +A_1 = 70$

$$5Y_1 + 9Y_2 \qquad -S_2 \qquad +A_2 = 50$$

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, S_1, \ S_2, \ A_1, \ A_2 \geq 0.$$

En la tabla 6.5 se presenta la solución de este problema; además, de especificarse la solución del problema original o primo.

TABLA 6.5

FILA	OPERACIÓN	C_J	-350	-360	-40	0	0	-M	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2			
F_1		-M	7	4	1	-1	0	1	0	A_1	70	70/4=17.5
F_2		-M	5	9	0	0	-1	0	1	A_2	50	50/9=5.5
F_{Z1}		Z_J-C_J	-12M +350	-13M +360	-M +40	M	M	0	0	-D= -120M		
F_3	F_4(-6)+F_1	-M	43/9	0	1	-1	4/9	1	-4/9	A_1	430/9	430/9/43/9=10
F_4	F_2(1/15)	-360	5/9	1	0	0	-1/9	0	1/9	Y_2	50/9	50/9/5/9=10
F_{Z2}		Z_J-C_J	-43/9M +150	0	-M+40	M	-4/9M +40	0	13/9M -40	-D= = -430/9-2000		
F_5	F_3(5/34)	-350	1	0	9/43	-9/43	4/43	9/43	-4/43	Y_1	10	
F_6	F_5(-8/15)+F_4	-360	0	1	-5/43	5/43	-7/43	-5/43	7/43	Y_2	0	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	370/43	1350/43	1120/43	M-1350/43	M-1120/43	-D = -3500		
SOLUCION PRIMAL			H_1	H_2	H_3	X_1	X_2	X_1	X_2			

De la tabla anterior se observa que el problema tiene solución degenerada, ya que la variable Y_2 está en la base con valor de cero; lo que indica que el problema primo tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es la que se observa en el renglón Zj-Cj de este tablero. Si se hubiera querido obtener la otra solución extrema, en la segunda iteración se tendría que sacar de la base la variable Y_2. Además, se pueden comparar las soluciones de las tablas 4.8 y 6.5 para corroborar la igualdad de las soluciones.

6.1.3. Solución no acotada

Cuando un problema primo genera solución no acotada; al resolver su correspondiente dual, éste presentará un problema sin solución. Para evaluar este hecho se trae el ejercicio 4.1.3 con su respectiva solución óptima. Todo esto se traslada en el ejercicio 6.1.3 a continuación.

Ejercicio 6.1.3. Una fábrica de artesanías se dedica a la producción de bolsos y chaquetas los cuales comercializa directamente a los clientes en la plaza España. La venta de un bolso genera una utilidad de $2.000 y consume 5 horas de mano de obra; mientras que la venta de una chaqueta genera una utilidad de $3.000 y consume 9 horas de mano de obra. Por políticas de la compañía se requiere de no mantener en ocio a sus trabajadores y por lo tanto se debe consumir en la producción un mínimo de 450 horas de mano de obra por mes. ¿Que cantidad de bolsos y chaquetas se debe fabricar, si por estudio de mercados se sabe que mínimo se venderán 20 chaquetas y como máximo 30 bolsos por mes?

Definicion de variables

X_1 =Cantidad de bolsos a fabricar por mes.

X_2 =Cantidad de chaquetas a fabricar por mes.

Máx. $Z = 2000 X_1 + 3000X_2$

Sujeto a

$5X_1 + 9 X_2 \geq 450$

$X_1 \leq 30$

$X_2 \geq 20$

$X_1, \quad X_2 \geq 0.$

A continuación se trae del capítulo cuarto, la tabla 4.9, donde se presenta la solución óptima del problema primo.

TABLA 4.9.												
FILA	OPERACIÓN	C_J	2	3	0	0	-M	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	H_1	A_2			
F_{10}	F_{11}(-5-/9)+F_7	0	0	0	-1/9	1	1/9	-5/9	-1	S_2	40/3	*
F_{11}	F_8	2	1	0	0	0	0	1	0	X_1	30	*
F_{12}	F_{11}(-5-/9)+F_9	3	0	1	-1/9	0	1/9	-5/9	0	X_2	100/3	*
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	-1/3	0	M+1/3	1/3	M	Z=160		

Como se puede apreciar en el tablero, entra a la base la variable S_1 y no se puede determinar que variable sale de la base. Por lo tanto el problema tiene solución no acotada.

Ahora, veamos que pasa con este problema al transformarlo a dual y solucionarlo.

El dual asociado a este problema es el siguiente:

$$\text{Min } D= 450Y_1 +30Y_2 +20Y_3$$

S.A.

$$5Y_1 + Y_2 \geq 2$$

$$9Y_1 + Y_3 \geq 3$$

$$Y_1 \leq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \leq 0.$$

En esta estructura, las variables Y_1 y Y_3, su comportamiento independiente es ≤ 0. Esto es lógico; recuerde que se concluyó que cada restricción genera una variable y viceversa. En este caso la primera y tercera restricciones tienen sentido ≥, de la tabla 6.2 en la columna izquierda una restricción de este tipo genera en la columna de la derecha una variable ≤ 0.

Para transformar estas dos variables a no negativas, se multiplican los coeficientes de las variables por menos uno. Por lo tanto el problema se traduce en:

$$\text{Min } D= -450Y_1 +30Y_2 -20Y_3$$

S.A.

$$-5Y_1 + Y_2 \geq 2$$

$$-9Y_1 - Y_3 \geq 3$$

$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3 \geq 0$

El problema a llevar al tablero simplex, cuya solución se presenta en la tabla 6.6, queda como aparece a continuación:

$$\text{Max } (-D) = 450Y_1 - 30Y_2 + 20Y_3 - MA_1 - MA_2$$

S.A.

$$-5Y_1 + Y_2 \quad -S_1 \quad +A_1 \quad = 2$$

$$-9Y_1 \quad -Y_3 \quad -S_2 \quad +A_2 = 3$$

TABLA 6.6												
FILA	**OPE-RACIÓN**	**C_J**	**450**	**-30**	**20**	**0**	**0**	**-M**	**-M**	**BASE**	**X_B**	**CO-CIENTE**
		C_B	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**			
F_1		-M	-5	1	0	-1	0	1	0	A_1	2	2/1=2
F_2		-M	-9	0	-1	0	-1	0	1	A_2	3	*
F_{Z1}		Z_J-C_J	14M-450	-M +30	M-20	M	M	0	0	-D= -5M		
F_3	F_1	-30	-5	1	0	-1	0	1	0	Y_2	2	
F_4	F_2	-M	-9	0	-1	0	-1	0	1	A_2	3	
F_{Z2}		Z_J-C_J	9M-300	0	M-20	30	M	M-30	0	-D= = -3M-60		

$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, S_1, \ S_2, \ A_1, \ A_2 \geq 0.$

De la anterior tabla se concluye que el problema dual no tiene solución, ya que la variable artificial quedo en la base con valor diferente de cero. Por lo tanto el problema original o primo tiene solución no acotada.

6.1.4. Problema sin solución

Como se puede concluir a partir del problema anterior, un problema primo que no tenga solución; su respectivo dual debe generar un problema con solución no acotada.

Para ejemplificar lo anterior se desarrolla el ejercicio 6.1.4 a continuación.

Ejercicio 6.1.4. Este ejercicio corresponde al ejercicio 4.1.4 cuya formulación y modelo matemático se enuncia enseguida: La compañía Epsilon produce baldosas y tabletas, las cuales generan una contribución a las utilidades de \$5.000 y \$4.000 por metro cuadrado respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad de 200 metros cuadrados de arena y 240 metros cuadrados de cemento por semana. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un metro cuadrado de baldosas se requieren 4 metros cuadrados de arena y 3 metros cuadrados de cemento; mientras que para producir un metro cuadrado de tableta se requieren 5 metros cuadrados de arena y 8 metros cuadrados de cemento?. Suponga además, que el cliente garantiza comprar como mínimo 50 metros cuadrados de tableta.

Definición de variables

X_1 = metros cuadrados de baldosas a fabricar por semana.

X_2 = metros cuadrados de tabletas a fabricar por semana.

Máx. $Z = 5000\ X_1 + 4000\ X_2$

S.A.

$4\ X_1 + 5\ X_2 \leq 200$

$3\ X_1 + 8\ X_2 \leq 240$

$X_2 \geq 50$

$X_1,\quad X_2 \geq 0$

A continuación se trae la 4.10, donde se presenta la solución óptima obtenida para este problema en el capítulo cuarto.

TABLA 4.10.											
FILA	OPERACIÓN	C_J	5	4	0	0	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	A_1			
F_4	$F_5(-5-)+F_1$	0	17/8	0	0	1	-5/8	0	H_1	50	
F_5	$F_2(1/8)$	4	3/8	1	0	0	1/8	0	X_2	30	
F_6	$F_5(-1-)+F_3$	-M	-3/8	0	-1	0	-1/8	1	A_1	20	
F_{Z2}		Z_J-C_J	3/8M-7/2	0	M	0	1/8M+1/2	0	Z=-20M+120		

Como se puede apreciar en el tablero óptimo; todos los valores Z_J-C_J son mayores o iguales a cero, por lo tanto la solución óptima del ejercicio ya está dada; sin embargo la variable artificial A_1 está en la base con valor de 20 (diferente de cero). Por lo tanto se concluye que el problema no tiene solución.
La estructura dual para este ejercicio es la que se presenta enseguida:

Min $D= 200Y_1 +240Y_2 +50Y_3$

S.A.

$4Y_1 +3Y_2 \geq 5$

$5Y_1 +8Y_2 +Y_3 \geq 4$

$Y_1, \quad Y_2 \geq 0, \; Y_3 \leq 0.$

En esta estructura, la variable Y_3, su comportamiento independiente es ≤ 0. por lo tanto se hace necesario transformarla a variable no negativa. Por lo tanto el problema se traduce en:

$$\text{Min } D = 200Y_1 + 240Y_2 - 50Y_3$$

S.A.

$$4Y_1 + 3Y_2 \geq 5$$

$$5Y_1 + 8Y_2 - Y_3 \geq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2, Y_3 \geq 0$$

El problema a llevar al tablero simplex, cuya solución se presenta en la tabla 6.7, queda como aparece a continuación:

$$\text{Max } (-D) = -200Y_1 - 240Y_2 + 50Y_3 - MA_1 - MA_2$$

S.A.

$$4Y_1 + 3Y_2 - S_1 + A_1 = 5$$

$$5Y_1 + 8Y_2 - Y_3 - S_2 + A_2 = 4$$

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, S_1, \; S_2, \; A_1, \; A_2 \geq 0.$$

Tal como se observa en la tabla 6.7, no se ha llegado a la solución optima, pero no se puede establecer que variable sale de la base. Esto indica que el problema dual tiene solución no acotada y por lo tanto el problema original ó primo no tiene solución.

6.2. PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN

Para transformar problemas de minimización no se debe olvidar que en la tabla 6.2 se debe mirar primero la columna derecha, para observar que genera en la columna izquierda. Después de transformado el problema se procede de igual manera con el método simplex.

6.2.1. Solución única

Ejercicio 6.2.1. Los Horses, una empresa dedicada al criadero de caballos de paso, ha establecido que a cada uno de ellos se le debe suministrar diariamente un mínimo de 200 miligramos de vitamina A, un mínimo de 160 miligramos de vitamina B y un mínimo de 150 miligramos de vitamina C. Los caballos son alimentados con matas de pasto y mineral, las cuales le cuestan a la compañía \$300 por mata de pasto y \$500 por libra de mineral. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar a cada caballo diariamente si se sabe que una mata de pasto contiene 4 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina

TABLA 6.7

FILA	OPERACIÓN	C_J	-200	-240	50	0	0	-M	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	A_1	A_2			
F_1		-M	4	3	0	-1	0	1	0	A_1	5	5/3=1.6
F_2		-M	5	8	-1	0	-1	0	1	A_2	4	4/8=0.5
F_{Z1}		Z_J-C_J	-9M +200	-11M +240	M -50	M	M	0	0	-D= -9M		
F_3	F_4(-3)+F_1	-M	17/8	0	3/8	-1	3/8	1	-3/8	A_1	7/2	7/2/17/8=1.6
F_4	F_2(1/8)	-240	5/8	1	-1/8	0	-1/8	0	1/8	Y_2	½	1/2/5/8=0.8
F_{Z2}		Z_J-C_J	-17/8M +50	0	-3/8M -20	M	-3/8M +30	0	11/8M -30	-D=-7/2M-120		
F_5	F_6(-17/8)+F_3	-M	0	-17/5	4/5	-1	4/5	1	-4/5	A_1	9/5	9/5/4/5=9/4
F_6	F_9(8/5)	-200	1	8/5	-1/5	0	-1/5	0	1/5	Y_1	4/5	*
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	17/5M -80	-4/5M -10	M	-4/5M +40	0	9/5M -40	-D=-9/5M-160		
F_7	F_5(5/4)	50	0	-17/4	1	-5/4	1	5/4	-1	Y_3	9/4	*
F_8	F_7(1/5)+F_6	-200	1	3/4	0	-1/4	0	1/4	0	Y_1	5/4	5/4/3/4=5/3
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	-245/2	0	-25/2	50	M+25/2	M-50	-D=-275/2		
F_9	F_{10}(17/4)+F_7	50	17/3	0	1	-8/3	1	8/3	-1	Y_3	28/3	*
F_{10}	F_8(4/3)	-240	4/3	1	0	-1/3	0	1/3	0	Y_2	5/3	*
F_{Z5}		Z_J-C_J	490/3	0	0	-160/3	50	M+160/3	M-50	-D= 200/3		

B y 5 miligramos de vitamina C; mientras que una libra de mineral contiene 5 miligramos de vitamina A, 8 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C? (obsérvese que este problema es el mismo ejercicio 4.2.1 solucionado en el capítulo 4).

X_1 = Matas de pasto que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

X_2 = Libras de mineral que se debe suministrar a cada caballo diariamente.

De acuerdo con la anterior definición el modelo queda así:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min. } Z = 300\,X_1 + 500\,X_2 \\
&\text{S.A.} \\
&4\,X_1 + 5\,X_2 \geq 200 \\
&2\,X_1 + 8\,X_2 \geq 160 \\
&5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 150 \\
&X_1,\quad X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Aquí se trae el tablero óptimo de la tabla 4.11, en donde se ha adicionado la solución dual correspondiente a la última fila de la tabla.

La estructura dual para el problema de los Horses, queda como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } D = 200Y_1 + 160Y_2 + 150Y_3 \\
&\text{S.A.} \\
&4Y_1 + 2Y_2 + 5Y_3 \leq 300 \\
&5Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 \leq 500 \\
&Y_1,\quad Y_2,\quad Y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

El problema a llevar al tablero simplex, cuya solución se presenta en la tabla 6.8, queda como aparece a continuación:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } D = 200Y_1 + 160Y_2 + 150Y_3 \\
&\text{S.A.} \\
&4Y_1 + 2Y_2 + 5Y_3 + H_1 \leq 300 \\
&5Y_1 + 8Y_2 + 3Y_3 + H_2 \leq 500 \\
&Y_1,\quad Y_2,\quad Y_3,\quad H_1,\quad H_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

El lector podrá corroborar lo fácil de solucionar el anterior problema, comparado con el que se solucionó en el capítulo 4.

TABLA 4.11

FILA	OPERACIÓN	C_J	-300	-500	0	0	0	-M	-M	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3			
F_{10}	$F_7(17/11)$	0	0	0	-17/11	13/22	1	17/11	-13/22	-1	S_3	710/11	
F_{11}	$F_{10}(-1/17)+F_8$	-500	0	1	1/11	-2/11	0	-1/11	2/11	0	X_2	120/11	
F_{12}	$F_{10}(4/17)+F_9$	-300	1	0	-4/11	5/22	0	4/11	-5/22	0	X_1	400/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	700/11	250/11	0	M-700/11	M-250/11	M	-Z= -180000/11		
SOLUCIÓN DUAL			S_1	S_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_1	Y_2	Y_3			

TABLA 6.8

FILA	**OPERACIÓN**	**C_J**	**200**	**160**	**150**	**0**	**0**	**BASE**	**X_B**	**COCIENTE**
		C_B	**Y_1**	**Y_2**	**Y_3**	**H_1**	**H_2**			
F_1		0	4	2	5	1	0	H_1	300	300/4=75
F_2		0	5	8	3	0	1	H_2	500	500/5=100
F_{Z1}		Z_J-C_J	-200	-160	-150	0	0	D = 0		
F_3	F1(1/4)	200	1	1/2	5/4	1/4	0	Y_1	75	75/1/2=150
F_4	F3(-5)+F2	0	0	11/2	-13/4	-5/4	1	H_2	125	125/11/2=22.7
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	-60	100	50	0	D = 15000		
F_5	F6(-1/2)+F3	200	1	0	17/11	4/11	-1/11	Y_1	700/11	
F_6	F4(2/11)	160	0	1	-13/22	-5/22	2/11	Y_2	250/11	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	710/11	400/11	120/11	D = 180000/11		
SOLUCIÓN PRIMAL			H_1	H_2	H_3	X_1	X_2			

Tal como se puede apreciar en los dos tableros se encuentran las dos soluciones: problema primo y problema dual.
La interpretación de la solución es la misma que se dio en el capítulo 4 para este problema.

6.2.2. Solución óptima múltiple

Al igual que para un problema de maximización, si el problema tiene solución óptima múltiple, su correspondiente dual tiene solución degenerada. En el ejercicio 6.2.2 se puede apreciar en detalle este hecho.

Ejercicio 6.2.2. Este ejercicio corresponde al mismo solucionado por el método simplex en el capítulo cuarto como de ejercicio 4.2.2. De este ejercicio se trae el tablero óptimo para permitir comparar la congruencia entre las respuestas del dual y el primal. El ejercicio dice: Combustibles Dextra produce gasolina y Acpm a un costo de 2.000 y 4.000 pesos por galón respectivamente. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un galón de gasolina se requiere de 4 horas hombre de trabajo, 6 horas máquina y 8 litros de petróleo; mientras que para producir un galón de Acpm se requiere de 8 horas hombre de trabajo, 5 horas maquina y 10 litros de petróleo. Además, se sabe que para que no haya subutilización de los recursos se debe consumir mínimo 320 horas hombre y mínimo 300 horas máquina al mes. ¿Qué cantidad de cada combustible se debe fabricar Si se sabe hay una disponibilidad mensual de 800 litros de petróleo?

Definición de variables

X_1 = Galones de gasolina que se deben fabricar por mes.

X_2 = Galones de acpm que se deben fabricar por mes.

Teniendo en cuenta la definición de las variables el modelo matemático queda planteado de la siguiente manera.

$$\text{Min. } Z = 2000\,X_1 + 4000\,X_2$$

S.A.

$$4\,X_1 + 8\,X_2 \geq 320$$

$$6\,X_1 + 5\,X_2 \geq 300$$

$$8\,X_1 + 10\,X_2 \leq 800$$

$$X_1,\quad X_2 \geq 0.$$

En la tabla 4.13 se presenta la solución óptima del problema primo. A ésta se le adicionó la solución dual del problema.

TABLA 4.13.												
FILA	OPERA-CIÓN	C_J	-2	-4	0	0	-M	-M	0	BASE	X_B	CO-CIEN-TE
		C_B	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	H_1			
F_{10}	F7(7)	0	0	7	-3/2	1	3/2	-1	0	S_2	180	180
F_{11}	F10(2/7) +F8	-2	1	2	-1/4	0	1/4	0	0	X_1	80	80
F_{12}	F10(-6/7) +F9	0	0	-6	2	0	-2	0	1	H_1	160	160
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	½	0	M-1/2	M	0	-Z= -160		
SOLUCION DUAL			H_1	H_2	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2	Y_3			

En la tabla 4.13, la solución del problema dual es: Y_1=1/2, Y_2=0 y Y_3=0. Esta solución es la misma obtenida en la tabla 6.9, en donde se resuelva el problema dual.

El problema dual asociado a este ejercicio es el siguiente:

$$\text{Max } D= 320Y_1 +300Y_2 +800Y_3$$

S.A.

$$4Y_1 +6Y_2 + 8Y_3 \leq 2$$

$$8Y_1 +5Y_2 +10Y_3 \leq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2 \geq 0 \quad Y_3 \leq 0.$$

Esta última variable hay que transformarla en no negativa, por lo tanto el problema traduce en lo siguiente:

$$\text{Max } D= 320Y_1 +300Y_2 -800Y_3$$

S.A.

$$4Y_1 +6Y_2 - 8Y_3 \leq 2$$

$$8Y_1 +5Y_2 -10Y_3 \leq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3 \geq 0 \quad .$$

El problema a llevar al tablero simplex, cuya solución se presenta en la tabla 6.9, queda como aparece a continuación:

$$\text{Max } D= 320Y_1 +300Y_2 -800Y_3$$

S.A.

$$4Y_1 +6Y_2 - 8Y_3 +H_1 \leq 2$$

$$8Y_1 +5Y_2 -10Y_3 +H_2 \leq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad H_1, \quad H_2 \geq 0$$

TABLA 6.9

FILA	OPERACIÓN	C_J	320	300	-800	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2			
F_1		0	4	6	-8	1	0	H_1	2	2/4 =1/2
F_2		0	8	5	-10	0	1	H_2	4	4/8 =1/2
F_{Z1}		Z_J-C_J	-320	-300	800	0	0	D = 0		
F_3	$F_1(1/4)$	320	1	3/2	-2	1/4	0	Y_1	1/2	
F_4	$F_3(-8)+F_2$	0	0	-7	6	-2	1	H_2	0	
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	180	160	80	0	D = 160		
SOLUCIÓN PRIMAL			H_1	H_2	H_3	X_1	X_2			

De la tabla 6.8 se concluye que el problema dual tiene solución degenerada, por cuanto la variable H_2 se encuentra en la base con valor de cero; y el problema original (primo) tiene múltiples soluciones. Además, se observa que la solución arrojada en este tablero para el problema original es X_1=80 y X_2=0 con un costo mínimo de $160. Si se desea obtener la otra solución extrema se debe sacar de la base la variable H_2, en el momento en que en la primera iteración dio empate en la regla de salida de la base (cociente igual a ½).

6.2.3. Solución no acotada

Tal como se interpreto en los problemas de maximización; cuando el problema primo tiene solución no acotada, el problema dual arroja no solución.

Ejercicio 6.2.3. Esta aplicación corresponde al ejercicio 4.2.3 que se solucionó mediante el método simplex en el capítulo 4. Su formulación, planteamiento y solución óptima se describen a continuación: La compañía SIDERURGIA LTDA produce un tipo de aleación especial compuesta por sílice y aluminio; los cuales compra a $3.000 y $5.000 por kilogramo respectivamente. Además, se sabe que la utilización de un kilogramo de sílice consume 5 miligramos de material radioactivo y 2 litros de agua; mientras que la utilización de un kilogramo de aluminio consume 4 miligramos de material radioactivo y da lugar a la aparición de 3 litros de agua. Por política de la compañía se debe consumir mínimo 20 miligramos de material radiactivo y se cuenta con una disponibilidad de 6 litros de agua. ¿Qué cantidad de sílice y aluminio se debe utilizar en la aleación si se sabe que se debe utilizar como máximo 8 kilogramos de sílice y que el gobierno nacional subsidia con $15000 la utilización de cada kilogramo de aluminio?
Para el planteamiento de este ejercicio se definen las siguientes variables:

X_1 = Kilos de sílice a utilizar en la aleación.

X_2 = Kilos de aluminio a utilizar en la aleación.

Min Z = $3000 X_1 -10000 X_2$

Sujeto a

$5 X_1 + 4 X_2 \geq 20$

$2 X_1 - 3 X_2 \leq 6$

$X_1 \leq 8$

$X_1, X_2 \geq 0.$

En la tabla 4.14 se presenta la solución óptima de este ejercicio.

TABLA 4.14												
FILA	**OPERA-CIÓN**	**C_J**	**-3**	**10**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**BASE**	**X_B**	**CO-CIEN-TE**
		C_B	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**A_1**	**H_1**	**H_2**			
F_{10}	$F_{11}(5/23) + F_7$	10	5/4	1	-1/4	1/4	0	0	X_2	5	*
F_{11}	$F_8(23/4)$	0	23/4	0	-3/4	3/4	1	0	H_1	21	*
F_{12}	$F_{11}(4/23) + F_9$	0	1	0	0	0	0	1	H_2	8	*
F_{Z4}		Z_J-C_J	31/2	0	-5/2	M+5/2	0	0	-Z= -50		

En este tablero se visualiza que debe entrar a la base S1, pero ningún valor de su vector es positivo; luego no se puede evaluar qué variable sale de la base y por lo tanto el problema tiene solución no acotada o ilimitada.

El problema dual asociado a esta estructura es como se plantea enseguida:

Max D= $20Y_1 +6Y_2 +8Y_3$

S.A.

$5Y_1 +2Y_2 + Y_3 \leq 3$

$4Y_1 -3Y_2 \leq -10$

$Y_1 \geq 0 \quad Y_2, Y_3 \leq 0.$

En la segunda restricción de este problema, se encuentra un número negativo (-10); lo que no es permitido por el método. Luego lo primero que hay que hacer es multiplicar esta restricción por menos uno. Aplicando este procedimiento se obtiene:

Max D= $20Y_1 +6Y_2 +8Y_3$

S.A.

$5Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 3$

$-4Y_1 + 3Y_2 \geq 10$

$Y_1 \geq 0 \quad Y_2, Y_3 \leq 0.$

El paso siguiente es hacer cumplir las restricciones de no negatividad para Y_2 y Y_3. Para hacer esto el problema queda convertido en:

Max $D= 20Y_1 - 6Y_2 - 8Y_3$

S.A.

$5Y_1 - 2Y_2 - Y_3 \leq 3$

$-4Y_1 - 3Y_2 \geq 10$

$Y_1, \quad Y_2, Y_3 \geq 0.$

El problema a llevar al tablero simplex, cuya solución se presenta en la tabla 6.10, queda como aparece a continuación:

Max $D= 20Y_1 - 6Y_2 - 8Y_3 - MA_1$

S.A.

$5Y_1 - 2Y_2 - Y_3 \quad + H_1 \quad = 3$

$-4Y_1 - 3Y_2 \quad - S_1 \quad + A_1 = 10$

$Y_1, \quad Y_2, Y_3, \; S_1, H_1, \; A_1 \geq 0.$

TABLA 6.10

FILA	**OPE-RA-CIÓN**	C_J	**20**	**-6**	**-8**	**0**	**0**	**-M**	**BASE**	X_B	**CO-CIENTE**
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	H_1	A_1			
F_1		0	5	-2	-1	0	1	0	H_1	3	
F_2		-M	-4	-3	0	-1	0	1	A_1	10	
F_{Z1}		Z_J-C_J	4M -20	3M+6	8	M	0	0	D = -10M		

Como se puede observar en la tabla 6.10, la solución optima del ejercicio se da en la primera iteración; quedando en la base la variable artificial con valor distinto de cero (10). Eso indica que el problema dual no tiene solución y por lo tanto el ejercicio primo tiene solución no acotada.

6.2.4. Problema sin solución

Como se ha podido observar, un problema sin solución tendrá en su dual una solución no acotada. Para observar este hecho véase el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6.2.4. Este ejercicio traído del capítulo 4, es el mismo que en su momento se denominó ejercicio 4.2.4. De este ejercicio se trae su formulación y planteamiento primal; además, de extractar la solución óptima del mismo en la tabla 4.15. La aplicación dice así: Una compañía fabricante de calzado "EL PIE FELIZ" ha establecido que máximo venderá 30 pares de zapatos y como mínimo 40 pares de tenis.

Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 180 metros de cuero y se ha establecido que el costo de producción de cada par de zapatos es de \$5.000 y de cada par de tenis es de \$4.000.

Utilice el método simplex para determinar que cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar a fin de minimizar los costos totales de fabricación, si se sabe que un par de zapatos consume 3 metros de cuero y un par de tenis consume 6 metros de cuero.

X_1 = Cantidad de zapatos a producir por mes.

X_2 = Cantidad de tenis a producir por mes.

Con base en esta definición de variables, el planteamiento del modelo matemático queda como sigue a continuación:

$$\text{Min } Z = 5000\,X_1 + 4000\,X_2$$

S.A.

$$3\,X_1 + 6\,X_2 \leq 180$$

$$X_1 \leq 30$$

$$X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

En la tabla 4.15 (traída del capítulo cuarto) se presenta la solución del problema primo; en este tablero están dadas las condiciones de optimización; pero la variable artificial quedó en la base con valor diferente de cero (A_1=10), lo que indica que el problema no tiene solución.

El problema dual asociado a este problema se plantea a continuación:

$$\text{Max } D = 180Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3$$

S.A.

$$3Y_1 + Y_2 \leq 5$$

$$6Y_1 + Y_3 \leq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2 \leq 0 \quad Y_3 \geq 0.$$

TABLA 4.15.

FILA	OPERACIÓN	C_J	-5	-4	0	0	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	A_1			
F_1		0	3	6	0	1	0	0	H_1	180	180/6=30
F_2		0	1	0	0	0	1	0	H_2	30	*
F_3		-M	0	1	-1	0	0	1	A_2	40	40/1=40
F_{Z1}		Z_J-C_J	5	-M+4	M	0	0	0	-Z= -40M		
F_4	F_1(1/6)	-4	1/2	1	0	1/6	0	0	X_2	30	
F_5	F_2	0	1	0	0	0	1	0	H_2	30	
F_6	F_4(-1)+F_3	-M	-1/2	0	-1	-1/6	0	1	A_1	10	
F_{Z2}		Z_J-C_J	1/2M+5	4	M	1/6M-2/3	0	0	-Z= -10M-120		

El paso siguiente es hacer cumplir las restricciones de no negatividad para Y_1 y Y_2. Al hacer esto el problema queda convertido en:

$$\text{Max } D = -180Y_1 - 30Y_2 + 40Y_3$$

S.A.

$$-3Y_1 - Y_2 \leq 5$$

$$-6Y_1 + Y_3 \leq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2, Y_3 \geq 0.$$

El problema a llevar al tablero simplex, cuya solución se presenta en la tabla 6.11, queda como aparece a continuación:

$$\text{Max } D = -180Y_1 - 30Y_2 + 40Y_3$$

S.A.

$$-3Y_1 - Y_2 + H_1 \leq 5$$

$$-6Y_1 + Y_3 + H_2 \leq 4$$

$$Y_1, \quad Y_2, Y_3, H_1, H_2 \geq 0.$$

TABLA 6.11

FILA	OPERACIÓN	C_J	-180	-30	40	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	H_1	H_2			
F_1		0	-3	-1	0	1	0	H_1	5	*
F_2		0	-6	0	1	0	1	H_2	4	4/1=4
F_{Z1}		Z_J-C_J	180	30	-40	0	0	D = 0		
F_3	F_1	0	-3	-1	0	1	0	H_1	5	*
F_4	F_2	40	-6	0	1	0	1	Y_3	4	*
F_{Z2}		Z_J-C_J	-60	30	0	0	0	D = 160		

De la tabla 6.11 se concluye que al no poderse determinar qué variable sale de la base, el problema dual tiene solución no acotada; y por lo tanto el problema primo no tiene solución, que es justamente lo que se interpreto con base en la tabla 4.15.

6.2.5. Solución degenerada

Cuando un problema de programación lineal presenta solución degenerada, su problema dual presenta soluciones múltiples. Estos dos conceptos son recíprocos tal como ya se observó en los ejercicios 6.1.1 y 6.2.1 (ambos tienen soluciones múltiples); que al solucionar su dual presentó solución degenerada. En el ejercicio 6.2.5 plantea solucionar el dual de un ejercicio cuyo problema primo tiene solución degenerada. Este es el mismo ejercicio 4.2.5 que se solucionó en el cuarto capítulo.

Ejercicio 6.2.5. La compañía Los Cristales, produce vidrios florentinos y martillados para los cuales ha establecido un costo de $20.000 y $40.000 por unidad respectivamente (una unidad equivale a un vidrio de 120 centímetros de ancho, 180 centímetros de largo y 5 milímetros de espesor). Para la fabricación de estos productos se cuenta con una disponibilidad semanal de 240 horas hombre, 420 horas horno y 480 unidades de materia prima. Establezca que cantidad de cada tipo de vidrio se debe fabricar a fin de minimizar el costo de producción si se sabe que para producir un vidrio florentino se requieren 8 horas hombre, 6 horas en el horno y 16 unidades de materia prima; mientras que para producir un vidrio martillado se requieren 3 horas hombre, 7 horas de proceso en el horno y 6 unidades de materia prima. Suponga, que el departamento de ventas ha pronosticado que mínimo se venderán 40 vidrios entre los 2 tipos.

X_1 = Cantidad de vidrios florentinos a fabricar semanalmente.

X_2 = Cantidad de vidrios martillados a fabricar semanalmente.

Min $Z = 20000\,X_1 + 40000\,X_2$

Sujeto a

$8\,X_1 + 3\,X_2 \leq 240$. Disponibilidad de horas hombre.

$6\,X_1 + 7\,X_2 \leq 420$. Disponibilidad de horas en el horno.

$16\,X_1 + 6\,X_2 \leq 480$. Disponibilidad de materia prima.

$X_1 + X_2 \geq 40$. Venta mínima entre los dos productos.

$X_1, \quad X_2 \geq 0$

En la tabla 4.16 se presenta la solución óptima de este ejercicio con base en el método simplex. La solución de este problema dice que se deben producir 24 vidrios florentinos y 16 vidrios martillados para obtener un costo mínimo de $1.120. Además, no se utilizan 164 horas de la disponibilidad del horno.

TABLA 4.16.													
FILA	OPE-RA-CIÓN	C_J	-20	-40	0	0	0	0	-M	BASE	X_B	CO-CIENTE
		C_B	X_1	X_2	S_1	H_1	H_2	H_3	A_1			
F_9	$F_{12}(-3/8)+F_5$	-20	1	0	3/5	1/5	0	0	-3/5	X_1	24	
F_{10}	$F_{12}(-19/4)+F_6$	0	0	0	38/5	1/5	1	0	-38/5	H_2	164	
F_{11}	F_7	0	0	0	0	-2	0	1	0	H_3	0	
F_{12}	$F_8(8/5)$	-40	0	1	-8/5	-1/5	0	0	8/5	X_2	16	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	0	52	4	0	0	M-52	-Z= -1120		
SOLUCIÓN DUAL			H_1	H_2	Y_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4			

Como se puede apreciar la variable básica H_3 toma valor de cero estando en la base; lo que indica que el problema tiene solución básica factible degenerada (hay restricciones redundantes).

Para este ejercicio su correspondiente dual se plantea enseguida así:

$$\text{Max } D = 240Y_1 + 420Y_2 + 480Y_3 + 40Y_4$$

s.a.

$$8Y_1 + 6Y_2 + 16Y_3 + Y_4 \leq 20$$

$$3Y_1 + 7Y_2 + 6Y_3 + Y_4 \leq 40$$

$$Y_1,\quad Y_2,\quad Y_3 \leq 0,\quad Y_4 \geq 0$$

Para poder trabajar este problema se hace necesario cumplir con las restricciones de no negatividad; por lo tanto el problema queda como aparece a continuación:

$$\text{Max } D = -240Y_1 - 420Y_2 - 480Y_3 + 40Y_4$$

s.a.

$$-8Y_1 - 6Y_2 - 16Y_3 + Y_4 \leq 20$$

$$-3Y_1 - 7Y_2 - 6Y_3 + Y_4 \leq 40$$

$$Y_1,\quad Y_2,\quad Y_3, Y_4 \geq 0$$

El problema que se debe llevar al tablero simplex, queda con la siguiente estructura:

$$\text{Max } D = -240Y_1 - 420Y_2 - 480Y_3 + 40Y_4$$

s.a.

$$-8Y_1 - 6Y_2 - 16Y_3 + Y_4 + H_1 \leq 20$$
$$-3Y_1 - 7Y_2 - 6Y_3 + Y_4 + H_2 \leq 40$$
$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ Y_4,\ H_1,\ H_2 \geq 0$$

En la tabla 6.12 se presenta el tablero simplex con la solución de este problema.

TABLA 6.12											
FILA	**OPERACIÓN**	C_J	**-240**	**-420**	**-480**	**40**	**0**	**0**	**BASE**	X_B	**COCIENTE**
		C_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	H_1	H_2			
F_1		0	-8	-6	-16	1	1	0	H_1	20	20/1=20
F_2		0	-3	-7	-6	1	0	1	H_2	40	40/1=40
F_{Z1}		Z_J-C_J	240	420	480	-40	0	0	D = 0		
F_3	F_1	40	-8	-6	-16	1	1	0	Y_4	20	*
F_4	$F_3(-1)+F_2$	0	5	-1	10	0	-1	1	H_2	20	20/5=4
F_{Z2}		Z_J-C_J	-80	180	160	0	40	0	D = 800		
F_5	$F_6(8)+F_3$	40	0	-38/5	0	1	-3/5	8/5	Y_4	52	
F_6	$F_4(1/5)$	-240	1	-1/5	2	0	-1/5	1/5	Y_1	4	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	164	0	0	24	16	D = 1120		
SOLUCION PRIMAL			H_1	H_2	H_3	S_1	X_1	X_2			

De la tabla 6.12 se concluye que el problema dual tiene soluciones múltiples, dado que la variable Y_3 que no se encuentra en la base toma valor de cero en el renglón Zj-Cj (F_{Z3}); por lo tanto el problema primo tiene solución básica factible degenerada, tal como se había concluido. Como se puede observar la solución del problema primo es la misma obtenida con el método simplex para el problema original.

6.2.6. Restricciones de igualdad

Se han trabajado en dualidad todo tipo de ejercicios, pero ninguno de ellos plantea restricciones estrictamente de igualdad. Para ejemplificar este tipo de problemas se utilizará el ejercicio 4.2.6 resuelto mediante el método simplex en el capítulo 4. Este ejercicio se transcribe en el ejercicio 6.2.6 a continuación.

Ejercicio 6.2.6. Cierta compañía transportadora dispone de 12 camionetas y 6 camiones para el transporte de su producto. Actualmente la compañía debe entregar 80 toneladas de su producto y se sabe que una camioneta tiene capacidad para transportar 8 toneladas, mientras que un camión puede transportar

10 toneladas; además, se sabe que el costo que se genera por asignar una camioneta es de $3 por kilómetro y por asignar un camión es de $5 por kilómetro. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe asignar, si se sabe que la distancia a recorrer es de 100 kilómetros y que por cada camión dejado en reserva, se debe dejar mínimo una camioneta en reserva?

X_1= cantidad de camionetas asignadas

X_2= cantidad de camiones asignados.

Con base en la definición de las variables el modelo matemático de programación lineal se estructura de la siguiente manera:

Min. $Z = 300 X_1 + 500 X_2$ (Costo mínimo)

s.a.

$X_1 \leq 12.$ restricción de disponibilidad de camionetas.

$X_2 \leq 6.$ restricción de disponibilidad de camiones.

$8 X_1 + 10 X_2 = 80.$ restricción de las toneladas a transportar.

$X_1 - X_2 \leq 6$ restricción de vehiculos en reserva.

$X_1, X_2 \geq 0$

En la tabla 4.17 que se trae del capítulo 4, se presenta unicamente la solución optima del problema por medio del metodo simplex.

TABLA 4.17.

FILA	OPERACIÓN	C_J	-300	-500	0	0	-M	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	H_1	H_2	A_1	H_3			
F_{13}	$F_{16}(-5-/4)+F_9$	0	0	0	1	0	-1/18	-5/9	H_1	38/9	
F_{14}	$F_{16}(-1)+F_{10}$	-500	0	1	0	0	1/18	-4/9	X_2	16/9	
F_{15}	$F_{16}(5/4)+F_{11}$	-300	1	0	0	0	1/18	5/9	X_1	70/9	
F_{16}	$F_{12}(4/9)$	0	0	0	0	1	-1/18	4/9	H_2	38/9	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	0	0	0	M-400/9	500/9	-Z = -29000/9		
SOLUCIÓN DUAL			H_1	H_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4			

En la tabla anterior, para la solución dual se extracta que Y3=400/9, Y4=500/9 y las demás variables son igual a cero. El lector se preguntará ¿Por qué Y3=400/9, si en la tabla aparece M-400/9? La respuesta es bastante sencilla; cuando la solución se toma a partir de las columnas de las variables artificiales, se quita la

M y se omite el signo. Lo mismo ocurre con todos los problemas, sino regrese y observe la tabla 6.5.

El problema dual asociado al ejercicio de la compañía transportadora es el siguiente:

$$\text{Max } D = 12Y_1 + 6Y_2 + 80Y_3 + 6Y_4$$

S.A.

$$Y_1 \quad + 8Y_3 + Y_4 \leq 300$$

$$Y_2 + 10Y_3 - Y_4 \leq 500$$

$$Y_1, Y_2 \leq 0, Y_3 \text{ NR}, Y_4 \leq 0.$$

Se observa que la variable Y_3 es no restringida (generado por la restricción de igualdad); lo cual no es permitido por el método simplex. Lo primero que se realiza es convertir dicha variable en variables no negativas. Para esto se utiliza la sexta regla de equivalencia vista en el primer capítulo; definiendo la variable Y_3 en función de la diferencia de otras dos variables así:

$Y_3 = R_1 – R_2$, con R_1 y R_2 mayores o iguales que cero. Aplicando esta modificación al problema, el modelo queda de la siguiente manera:

$$\text{Max } D = 12Y_1 + 6Y_2 + 80R_1 - 80R_2 + 6Y_4$$

S.A.

$$Y_1 \quad + 8R_1 - 8R_2 + Y_4 \leq 300$$

$$Y_2 + 10R_1 - 10R_2 - Y_4 \leq 500$$

$$Y_1, Y_2 \leq 0, R_1, R_2, Y_4 \leq 0.$$

Ahora, hay que transformar las variables que son menores o iguales que cero en variables no negativas; el problema queda transformado en:

$$\text{Max } D = -12Y_1 - 6Y_2 + 80R_1 - 80R_2 - 6Y_4$$

S.A.

$$-Y_1 \quad + 8R_1 - 8R_2 - Y_4 \leq 300$$

$$-Y_2 + 10R_1 - 10R_2 + Y_4 \leq 500$$

$$Y_1, Y_2, R_1, R_2, Y_4 \geq 0.$$

La anterior estructura ya permite trabajar el problema mediante el método simplex; adicionándole las variables de holgura, el problema a llevar al tablero es el siguiente:

$$\text{Max } D = -12Y_1 - 6Y_2 + 80R_1 - 80R_2 - 6Y_4$$

S.A.

$$-Y_1 \quad +8R_1 - 8R_2 - Y_4 + H_1 \leq 300$$

$$-Y_2 + 10R_1 - 10R_2 + Y_4 + H_2 \leq 500$$

$$Y_1, Y_2, R_1, R_2, Y_4, H_1, H_2 \geq 0.$$

En la tabla 6.13 se presenta la solución de este problema mediante el método simplex.

TABLA 6.13

FILA	OPERACIÓN	C_J	-12	-6	80	-80	-6	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	Y_1	Y_2	R_1	R_2	Y_4	H_1	H_2			
F_1		0	-1	0	8	-8	-1	1	0	H_1	300	300/8=75/2
F_2		0	0	-1	10	-10	1	0	1	H_2	500	500/10=50
F_{Z1}		Z_J-C_J	12	6	-80	80	6	0	0	D = 0		
F_3	$F_1(1/8)$	80	-1/8	0	1	-1	-1/8	1/8	0	R_1	75/2	*
F_4	$F_3(-10)$ $+F_2$	0	5/4	-1	0	0	9/4	-5/4	1	H_2	125	125/(9/4)=500/9
F_{Z2}		Z_J-C_J	2	6	0	0	-4	10	0	D = 3000		
F_5	$F_6(1/8)$ $+F_3$	80	-1/18	-1/18	1	-1	0	1/18	1/18	R_1	400/9	
F_6	$F_4(4/9)$	-6	5/9	-4/9	0	0	1	-5/9	4/9	Y_4	500/9	
F_{Z3}		Z_J-C_J	38/9	38/9	0	0	0	70/9	16/9	D = 29000/9		
SOLUCION PRIMAL			H_1	H_2	A_1	A_1	H_3	X_1	X_2			

Como se puede observar, la solución encontrada en la tabla 6.13 es la misma obtenida mediante el método simplex para el problema primo. Esta solución ofrece la misma interpretación dada en el capítulo cuarto. Por lo tanto la compañía transportadora debe asignar 70/9 de camionetas y 16/9 de camiones para generar un costo mínimo de $29.000/9. Además, quedan en reserva 38/9 de camionetas y 38/9 de camiones con lo cual se cumple la restricción de reserva de los vehículos.

6.3 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

La interpretación económica de las variables duales tiene que ver con analizar qué sucede con una solución óptima dado un cambio muy ligero (unitario) en la disponibilidad de recursos, ya sea incrementando o decrementando.

Lo anterior hace definir lo que se llama ***precio sombra*** de un determinado recurso, el cual se define de la siguiente manera: el precio sombra para el recurso i se denota como Y_i, mide el valor marginal de este recurso, es decir, la tasa a la cual cambia el valor óptimo de la función objetivo Z, cuando se modifica una unidad la disponibilidad del recurso i.

Si se toma el vector de disponibilidad de recursos b y se modifica en una pequeña cantidad Δb, de tal modo que la base óptima actual no cambie; el vector solución X_B seguirá siendo óptimo, si es que se cumple la siguiente condición: $X_B=B^{-1}(b+\Delta b)\geq 0X_B$. De esta forma, B no ha cambiado y por lo tanto B^{-1} tampoco; pero recordará el lector que la función objetivo dual que es $D=Y^Tb$, si cambia, ya que depende del vector de disponibilidad de recursos b y se transforma en $D=Y^T(b+\Delta b)$. Resolviendo las operaciones se obtiene la siguiente ecuación: $D=Y^T b+ Y^T \Delta b$.tal como se enuncio en las fórmulas, al principio de este capítulo, $Y^T b=Z$. Por lo tanto la ecuación se modifica a $D=Z+ Y^T \Delta b$. Como los cambios deben ser unitarios, $\Delta b=1$ sencillamente, el nuevo valor de la función objetivo dual es $D=Z+ Y^T$. Al determinarse un nuevo valor de la función objetivo dual, también indica una modificación de la función objetivo del problema original la cual estaría dada de la siguiente manera: $Z^*=Z+ Y_i$. Donde Y_i es justamente la solución dual. En los ejercicios 6.3.1 a 6.3.3 se ejemplifica la aplicación de esto. Para estas aplicaciones se tomará como base el ejercicio 6.1.1 que se desarrolló al principio de este capitulo. La solución para el problema de la compañía Sigma es X_1=600/11, X_2=350/11 y H_3=1050/11. La solución obtenida para el problema dual es Y_1=7/11, Y_2=5/11 y Y_3=0. Además, el valor de la función objetivo es 8900/11.

Ejercicio 6.3.1. ¿Cuánto es la utilidad para la compañía, si se incrementa en un metro la disponibilidad de madera?

En este caso se está hablando del primer recurso, por lo tanto la variable a considerar es la primera en la solución dual, esto es, Y_1=7/11. Por lo tanto la nueva utilidad generada se calcula como: $Z^*=Z+ Y_i$. Aplicando los valores se obtiene: $Z^*=8900/11 + 7/11 = 8907/11$

En general, si se aumenta o se disminuye en un metro la disponibilidad de madera la utilidad aumenta o disminuye en su precio sombra, para este caso en 7/11.

Ejercicio 6.3.2. Evaluar la utilidad cuando se disminuye en 1 metro la disponibilidad de tubo.
En este caso se está hablando del segundo recurso cuyo precio sombra es Y_2=5/11. Por lo tanto la utilidad disminuye en este valor. La nueva utilidad se determina como: $Z^*=8900/11 - 5/11 = 8895/11$. En conclusión, un incremento o decremento en un metro de tubo generará un incremento o decremento en la utilidad de $5/11.

Ejercicio 6.3.3. ¿Qué sucede si se incrementa en un pliego la disponibilidad de papel de lija?

La solución dual para la tercera variable es $Y_3=0$. Por lo tanto este cambio no genera incremento en la utilidad. Esto es muy lógico, se esta diciendo en la solución inicial que sobran 1050/11 de pliegos de lija; por lo tanto un cambio de un pliego de lija no afecta la solución.
Se han evaluado, únicamente cambios unitarios. Para cambios que no sean unitarios se debe remitir al capitulo 7 (análisis de sensibilidad).

PROBLEMAS PROPUESTOS

En los ejercicios de este capitulo se pide transformarlos al problema dual asociado; solucionar el problema dual e interpretar la solución primal y la solución dual.

6.1. Una compañía siderúrgica produce ángulos y platinos los cuales rinden una contribución a las utilidades de $10.000 y $ 30.000 por metro respectivamente. Para la producción de estos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 250 libras de acero y 210 horas hombre. Mediante un estudio se ha establecido que para producir un metro de ángulo se requiere de 5 libras de acero y 3 horas hombre de trabajo, mientras que para producir un metro de platina se requiere de 5 libras de acero y 7 horas hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los productos se debe fabricar si se sabe que máximo se venderán 20 metros de platina diariamente?

6.2. Cierta compañía editorial produce libros y revistas de carácter especializado, los cuales venden a 30.000 y 25.000 por unidad respectivamente. Se ha estimado que hay una disponibilidad de 300 horas en revisión técnica, 350 horas en impresión y 400 horas en empaste semanalmente. Establezca la cantidad de libros y revistas que se debe producir por semana, si se sabe que para producir un libro se requiere de 6h en revisión técnica, 5 en impresión y 10h en empaste, mientras que para producir una revista se requiere de 5h en revisión técnica, 7 h en impresión, y 4h en empaste.

6.3. Una empresa de confecciones ha determinado que máximo venderá 40 pantalones por semana y mínimo 30 chaquetas por semana. Además, se sabe que para evitar tiempo ocioso se debe consumir mínimo 350 horas hombres por semana. Suponga que un pantalón para ser fabricado requiere de 7 horas hombre, mientras que una chaqueta necesita 5 horas hombre. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que un pantalón genera una utilidad de $2.000 y una chaqueta de $4.000?

6.4. La compañía Simak dispone de 180 horas por semana en el departamento de corte y 150 horas ensamble. Además, se ha establecido que para producir una chaqueta se requiere de 6 horas departamento corte y 3 horas de ensamble, mientras que para producir un buzo, se requiere de 3 horas departamento corte y 5 horas de departamento de ensamble. También, se ha establecido que el precio de venta de una chaqueta es de $50.000 y un buzo es de $40.000. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas ha estimado una venta mínima de 40 buzos.

6.5. Una nutricionista se encuentra en el proceso de decisión de establecer que cantidad de 2 tipos de alimento (A y B) debe incorporar en una dieta sabiéndose que el costo por libra de cada uno de ellos es de $400 y $300 por libra respectivamente. Además, se ha establecido que una libra de alimento tipo A contiene 3 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de minerales y 4 miligramos de proteínas; mientras que una libra de alimento tipo b contiene 8 miligramos de vitaminas, 2 miligramos de minerales y 5 miligramos de proteínas. También, se debe garantizar consumir mínimo 240 miligramos de vitaminas, 120 miligramos de minerales y 200 miligramos de proteínas.

6.6. Cierta compañía fabrica billeteras y cinturones a un costo de $12,000 y $6,000 por unidad respectivamente. En la fabricación de dichos artículos se debe consumir como mínimo 180 horas hombre y mínimo 200 unidades de materia prima. Mediante un estudio se determinó que para producir una billetera se requiere 6 horas hombre y 4 unidades de materia prima, mientras que para fabricar un cinturón se requiere 3 horas hombre y 5 unidades de materia prima. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el departamento de mercados estableció que máximo se venderán 40 billeteras?

6.7. Una compañía papelera produce cuadernos espirales y grapados a un costo de $200 y $400 respectivamente por unidad. Para la producción hay una disponibilidad diaria de 200 horas en corte y 150 horas en ensamble. Además, se ha establecido que la demanda conjunta de los 2 artículos será de 60 unidades. ¿Qué cantidad de cada tipo de cuaderno se debe fabricar si se sabe que para producir un cuaderno tipo espiral se requiere de 5 horas en corte y 3 horas en ensamble y para producir un cuaderno grapado se requiere de 4 horas en corte y 5 horas en ensamble?

6.8. La compañía Sigma, produce ACPM y Biogasolina a un costo de $ 2.000 y $ 3.000 por galón respectivamente. Para ello se debe consumir un mínimo de 210 horas a la semana. Además el departamento de ventas ha determinado que máximo venderá 20 galones de ACPM y mínimo 10 de Biogasolina. También se sabe que la producción de un galón de ACPM requiere de 3 horas, mientras que un galón de Biogasolina, requiere de 7 horas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el gobierno Nacional da un subsidio de $ 6.000 por cada galón de biogasolina que se produzca?

6.9. Una fábrica de pupitres se dedica a la manufacturación de pupitres unipersonales y bipersonales; los cuales generan utilidad unitaria de $7000 y $12.000 respectivamente. Para la producción de dichos artículos de la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 500 metros de madera, 700 metros de tubo y 600 horas-hombre de trabajo. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar? si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de 2 metros de madera, 4 metros de tubo y 3 horas-hombre de trabajo; mientras que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 horas-hombre de trabajo.

6.10. Cierta compañía dedicada a la ornamentación ha sacado del mercado un producto que no le era rentable, lo que ocasiona que su planta de producción tenga una subutilización de 500 horas en la sección de corte, 300 horas en la sección de soldadura y 700 horas en la sección de ensamble. El departamento de mercadeo sugiere que dicha capacidad puede ser utilizada en la fabricación de puertas, ventanas y rejas en la mejor combinación posible. Para estos artículos se ha establecido un precio de venta de 25000, 30000 y 18000 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 horas en corte, 6 horas en soldadura y 4 horas en ensamble; para producir una ventana se requiere de 2 horas en corte, 3 horas en ensamble y una hora en soldadura; mientras que para producir una reja se necesita de 8 horas en corte, 4 horas en soldadura y 5 horas en ensamble. Además, se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 20 rejas y máximo 30 puertas. Suponga que por las condiciones de la planta la producción de ventanas no debe exceder más del 20% de la producción total de la planta.

6.11. La porcicultura sigma tiene un criadero de cerdos en Tibirita (Cundinamarca, Colombia), donde actualmente se están levantando 50 cerditos, para cada uno de los cuales se ha establecido que diariamente requiere un suministro mínimo de 50 miligramos de vitamina A, mínimo 70 miligramos de vitamina B y máximo 80 miligramos de vitamina C. Para lograr estos requerimientos vitamínicos, a los cerditos en su alimentación se le suministra cereal y mogollo, los cuales adquiere la compañía a $5000 y $10000 por kilo respectivamente. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe suministrar diariamente a cada cerdito? si se sabe que un kilo de cereal contiene 3 miligramos de vitamina A, 9 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de vitamina C; mientras que un kilo de mogollo contiene 10 miligramos de Vitamina A, 3 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

6.12. Acerías Bacatá prepara una aleación de tipo especial en un alto horno, el cual debe ser cargado con dos toneladas de material. Por requisitos de calidad dicha aleación debe contener mínimo 30% de sílice pero no más de 35%; y máximo 28% de aluminio. La compañía carga el horno con hierro, Zinc y Cobre, los cuales adquiere a 3000, 7000 y 6000 pesos por kilo respectivamente. ¿Con qué cantidad de cada producto se debe alimentar el horno si se sabe que el hierro contiene 18% de sílice y 15% aluminio; el zinc contiene 7% de sílice y 25% de aluminio; mientras que el cobre contiene 16 % de sílice y 5% de aluminio.

6.13. Una fábrica de muñecos de peluche fabrica osos y perros para los cuales ha establecido una utilidad de $8000 y $5000 por unidad respectivamente. El departamento de mercados ha establecido que mínimo se venderán 40 osos y máximo 50 perros. Determine que cantidad de cada uno de los artículos se

debe fabricar si se sabe que el gerente de la compañía desea que la producción de osos sea mínimo 20 unidades más que la producción de perros.

6.14. Estructuras Metálicas Ltda. manufactura puertas y ventanas con utilidades de 400 y 900 pesos por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad por semana de 400 metros de ángulo y 480 metros de platina. Además, se sabe que para producir una puerta se requiere de 5 metros de ángulo y 8 metros de platina; mientras que para producir una ventana se requiere de 8 metros de ángulo y 6 metros de platina ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que el departamento de ventas estimó que máximo se venderán 30 ventanas?

6.15. La compañía"**SIGMA**" produce pupitres y sillas, para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de $5.000 y $6.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 20 horas hombre de trabajo, 32 horas máquina y 24 metros de materia prima. El gerente desea establecer que cantidad de pupitres y sillas debe fabricar a fin de incrementar al máximo su utilidad. Suponga, además, que para producir un pupitre se requiere de 5 horas hombre de trabajo, 4 horas máquina y 8 metros de materia prima; mientras que para producir una silla se necesita de 4 horas hombre de trabajo, 8 horas máquina y tres metros de materia prima.

6.16. Electrodomésticos "LA HORMIGA" produce y vende televisores y equipos de sonido para los cuales ha establecido que debido a las condiciones del mercado un televisor genera una pérdida de $30.000, mientras que un equipo de sonido genera una utilidad de $40.000. Además, se sabe por un estudio de mercados que la venta máxima de televisores será de 70 unidades mientras que para los equipos de sonido se ha establecido una venta mínima de 30 unidades. Para la comercialización de estos productos la compañía cuenta con un vendedor, el cual gana una comisión de $5 por televisor vendido y $8 por cada equipo de sonido vendido. Establezca qué cantidad de televisores y equipos de sonido se debe fabricar a fin de minimizar las pérdidas totales de la compañía y garantizar que el vendedor obtenga una comisión mínima por mes de $400.

6.17. Una compañía dedicada a la agricultura puede sembrar en su siguiente temporada papa y yuca, productos para los cuales ha establecido que generan una utilidad por hectáreas sembrada de $8 y $9 millones respectivamente. Para el cultivo de dichos productos se cuenta con una disponibilidad de 540 Litros de agua, 500 Kilos de abono y 800 Libras de fertilizante. ¿Que cantidad de hectáreas de cada producto se deben sembrar si se sabe que para sembrar una hectárea de papa se necesitan 6 litros de agua, 5 kilos de abono y 10 libras de fertilizante; mientras que para sembrar una hectárea de yuca se requiere de 9 litros de agua, 10 kilos de abono, y 8 libras de fertilizante?

6.18. Una fábrica de muebles ha determinado que la demanda de bibliotecas para los próximos 4 meses es de 200, 300, 390 y 130 unidades respectivamente. Además, se sabe que actualmente la compañía puede generar inventario en cualquier mes y debe cumplir con su demanda a tiempo durante cada mes. La compañía tiene una capacidad para fabricar 200 bibliotecas por mes en tiempo regular con un costo de $15.000 por biblioteca y puede producir unidades adicionales en tiempo extra a un costo de $20.000 por biblioteca. Determine la cantidad de bibliotecas a producir en cada mes; tanto en tiempo regular, como en tiempo extra si se sabe que las unidades producidas y no vendidas en un determinado mes generan un costo de almacenaje de $1.200 por biblioteca (suponga que al final del cuarto mes no debe haber inventario).

6.19. Se ha establecido en una fabrica de muebles metálicos que en el departamento de corte hay una disponibilidad de 700 horas por semana, en el departamento de soldadura hay una disponibilidad de 500 horas por semana, mientras que en el departamento de ensamble hay una disponibilidad de 800 horas por semana. La fábrica manufactura salas y comedores para los cuales ha determinado que rinden una contribución a las utilidades de 10.000 y 15.000 pesos por unidad respectivamente. Establezca la cantidad de salas y comedores a fabricar por semana si se sabe que para producir una sala se requieren de 5 horas de proceso en corte, 2 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble; mientras que para producir un comedor se requieren 2 horas de proceso en corte, 6 horas de proceso en soldadura y 3 horas de proceso en ensamble. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que máximo se venderán 30 salas y mínimo 10 comedores.

6.20. Bicisigma produce bicicletas y triciclos para los cuales ha establecido un precio de venta unitario de 9000 y 7000 pesos respectivamente. Para la producción de estos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 630 horas en corte y 560 horas de soldadura, además se ha establecido que para producir una bicicleta se requiere de 9 horas en corte y 7 horas en soldadura, mientras que para producir un triciclo se requiere de 7 horas en corte y 8 horas en soldadura. Determinar que cantidad de bicicletas y triciclos se deben fabricar si se sabe que el departamento de mercadeo ha establecido que mínimo se venderán entre los dos artículos 50 unidades.

6.21. Una empresa siderúrgica dispone de un alto horno el cual debe ser cargado con una tonelada de material. En dicho horno se fabrica un tipo de aleación especial la cual por requisitos de calidad debe tener mínimo 32% de aluminio pero no más del 40% y como máximo el 17% de silicio. La compañía cuenta con 4 tipos de material para los cuales se ha establecido el contenido de silicio y aluminio con su respectivo costo tal como aparece en la tabla 3.13.

TABLA 3.13			
MATERIAL	**CONTENIDO SILICIO**	**CONTENIDO ALUMINIO**	**COSTO**
Acero	7%	16%	5000
Cobre	15%	5%	3000
Níquel	12%	14%	3000
Cromo	3%	10%	4400

6.22. Una corporación de ahorro y vivienda cuenta con un total $30.000.000.00 para préstamos bancarios entre los cuales esta préstamo para automóvil, vivienda, inversión rural, y préstamos personales. Mediante una evaluación del sistema financiero se sabe que los préstamos para automóvil generan un interés del 15% y tienen una probabilidad de incobrables del 10%; los préstamos para vivienda generan interés del 8% y una probabilidad de incobrables del 5%. Los préstamos para inversión rural generan interés del 7% y probabilidad de incobrable del 20%; mientras que los préstamos personales generan un interés del 24% y tiene una probabilidad de incobrable del 25%. Por políticas gubernamentales la entidad debe asignar mínimo el 40% de los fondos prestados a préstamos para inversión rural y vivienda. Además, los préstamos para automóvil deben ser máximo el 50% de los préstamos para inversión rural y los préstamos personales no pueden exceder el 10% de los dineros prestados. Determine qué cantidad de dinero se debe asignar a cada tipo de préstamo si por política de la compañía se ha especificado que la cantidad total de pagos irrecuperables no puede exceder el 6%.

6.23. Una joyería produce y vende relojes para hombre y para dama, para los cuales ha establecido un costo por unidad de $3.000 y $2.000 respectivamente. El departamento de ventas ha establecido que mínimo se venderán 60 relojes para dama y 70 relojes para caballero. Además, se ha establecido que para producir un reloj para dama se requiere de 5 horas de trabajo de un técnico, mientras para producir un reloj para hombre se requieren 8 horas de trabajo del técnico. Establezca la cantidad de relojes a producir si se sabe que la compañía tiene disponible 2 técnicos en la joyería, los cuales laboran 8 horas diarias y 25 días al mes.

6.24. La veterinaria “The Dog” cría cachorros para los cuales se ha establecido que máximo se les debe suministrar 630 miligramos de vitamina A, mínimo 350 miligramos de Vitamina B y mínimo 320 miligramos de vitamina C (estos requerimientos son mensuales). Para garantizar esos requisitos vitamínicos los cachorros son alimentados con purina y ladrina los cuales compra la compañía $8000 y $10000 por kilo respectivamente. Establecer qué cantidad de los dos alimentos se les debe suministrar mensualmente a cada cachorro si se sabe

que un kilo de purina contiene 9 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 4 miligramos de Vitamina C; mientras que un Kilo de ladrina contiene 7 miligramos de vitamina A, 5 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de vitamina C.

6.25. Una heladería dispone diariamente de 300 gramos de pulpa de fruta y 320 gramos de azúcar para la producción de paletas y helados, para los cuales se ha establecido una utilidad unitaria de 200 y 100 pesos respectivamente. El departamento de mercadeo ha establecido que en conjunto mínimo se venderán 90 unidades. Establezca la cantidad de paletas y helados que se debe fabricar diariamente, si se sabe que para producir una paleta se requiere 5 gramos de pulpa de fruta y 8 gramos de azúcar, mientras que para producir un helado se requieren 6 gramos de pulpa de fruta y 4 gramos de azúcar.

6.26. Una industria de acrílicos cuenta con una disponibilidad semanal para la fabricación de sus productos de 400 metros de fibra de vidrio, 360 litros de resina y 500 miligramos de catalizador. Con esos recursos la compañía fabrica tinas referencia Nápoles y referencia Milán para los cuales se ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $6000 y $9000 cada tina respectivamente. ¿Qué cantidad de cada tipo de tina se debe fabricar si se sabe, que para producir una tina Nápoles se requieren 8 metros de fibra de vidrio, 6 litros de resina y 5 miligramos de catalizador; mientras que para producir una tina referencia Milán se requiere de 5 metros de fibra, 6 litros de resina y 10 miligramos de catalizador?.

6.27. "El palacio del colesterol" produce y vende pasteles y empanadas para los cuales ha establecido una utilidad de $400 por unidad de cada producto. Para la producción de esos artículos se dispone diariamente de 500 gramos de arroz y 360 gramos de harina. Además, se sabe que para producir un pastel se requiere de 10 gramos de arroz y 6 gramos de harina y para producir una empanada se requiere de 5 gramos de arroz y 6 gramos de harina. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar diariamente si se sabe que máximo se venderán 30 empanadas?.

6.28. Decoraciones "La Tapa" produce gabinetes para baño y cocina para los cuales ha fijado un precio de venta de $20.000 y $30.000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad mensual de 300 metros de acrílico y 240 metros de fibra. ¿Qué cantidad de gabinetes para baño y cocina se debe fabricar?, si se sabe que para producir un gabinete de baño se requiere de 5 metros de acrílico y 3 metros de fibra, mientras que para un gabinete de cocina se requiere de 6 metros de acrílico y 8 de fibra. Suponga además que el departamento de mercadeo estableció que mínimo se venderán 100 gabinetes para baño.

6.29. Un comercializador de tejidos de punto, distribuye sacos y blusas a un precio por unidad de $5000 y $8000 respectivamente. El departamento de mercadeo determinó que para el próximo mes máximo venderá 20 sacos y mínimo 15 blusas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe comprar si se sabe, que en conjunto entre los dos artículos se venderán mínimo 30 unidades?.

6.30. Una sociedad porcicultora ha establecido que a cada cerdo se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 14 miligramos de vitamina B y 16 miligramos de vitamina C. Para cumplir con esos requisitos vitamínicos, la sociedad compra para alimentar a los cerdos a un costo de $3000 un kilo de mineral y a $6000 un kilo de concentrado. ¿Qué cantidad de cada producto se le debe suministrar diariamente a cada cerdo?, si se sabe que un kilo de mineral contiene 6 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 2 miligramos de C; mientras que un kilo de concentrado contiene 5 miligramos de vitamina A, 2 miligramos de vitamina B y 8 miligramos de C.

6.31. Una importadora de joyas compra relojes para hombre a $3000 y relojes para dama a $6000 cada uno de ellos. Para preparar un reloj para hombre se requiere de 6 horas y para preparar un reloj para dama se requieren 5 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de reloj se debe preparar? si se sabe que mínimo se venderán 10 relojes para hombre en la próxima semana, que hay una disponibilidad de 300 horas para la preparación de los relojes y que se desea invertir mínimo $180.000.

6.32."Dulceria Sweet" produce paquetes de dulces y chocolates, para los cuales ha establecido un costo de producción por paquete de $5 y $10 respectivamente. Actualmente la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 180 horas y se sabe que para producir un paquete de dulces se requiere de 3 horas, mientras que para producir un paquete de chocolates se requiere de 6 horas. ¿Qué cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que el mercado consumirá mínimo 70 paquetes entre los dos artículos?

6.33."Químicos Protox" ha determinado que para la fabricación de un producto químico especial requiere de dos materias primas A y B. Se sabe que la utilización de un kilo de materia prima tipo A, se necesitan 2 litros de agua y 2 horas de trabajo y genera un costo de $3, mientras que la utilización de un kilo de materia tipo B genera 3 litros de agua, consume 5 horas de trabajo y da una utilidad de $7. ¿Qué cantidad de cada materia prima se debe utilizar en el producto químico si se sabe, que hay una disponibilidad de 60 litros de agua por semana y que se debe consumir mínimo 100 horas de trabajo?

6.34. Un fabricante de artículos decorativos tiene 6 metros de madera y 28 horas disponibles, durante las cuales fabricará pinos decorativos. Con anterio-

ridad se han vendido bien dos modelos de manera que se dedicará a producir estos dos. El fabricante estima que el modelo 1 requiere 2 metros de madera y 7 horas de tiempo disponible, mientras que para el modelo 2 se requiere de un metro de madera y 8 horas de tiempo. Los precios de los modelos son $120 y $80 respectivamente. ¿Cuántos pinos decorativos de cada modelo se deben fabricar?

6.35. Una fábrica de muebles produce pupitres unipersonales, bipersonales y mesas para los cuales ha establecido que rinden una utilidad unitaria de $3, $2 y $5. Para la producción de dichos artículos la compañía cuenta con una disponibilidad semanal de 430 metros de madera, 460 metros de tubo y 420 metros de formica. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar a fin de incrementar las ganancias si se sabe que para producir un pupitre unipersonal se requiere de un metro de madera, 3 metros de tubo y un metro de fórmica, que para producir un pupitre bipersonal se requiere de 2 metros de madera y 4 metros de fórmica; mientras que para producir una mesa se necesita un metro de madera y 2 metros de tubo.

6.36. La industria de muebles "Data" produce sofás, sillas y poltronas para los cuales ha establecido que rinden una contribución unitaria a las utilidades de $15.000, $10.000 y $20.000 respectivamente. Para producir esos artículos la compañía tiene una disponibilidad mensual de 800 metros de paño, 900 metros de listón y 720 metros de resortes. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada artículo se debe fabricar si se sabe que para producir un sofá se requiere 10 metros de paño, 9 metros de listón y 12 metros de resortes, para producir una silla se requieren 5 metros de paño, 4 metros de listón y 6 metros de resortes; mientras que para fabricar una poltrona se requiere de 8 metros de paño, 10 metros de listón y 5 metros de resorte.

6.37. La empresa "Zaza" produce salas y comedores en tres tipos de máquinas en las cuales hay una disponibilidad de 100, 80 y 160 horas por semana respectivamente. Además, se sabe que una sala requiere de 4 horas de proceso en la máquina 1, 16 horas de proceso en la máquina 2 y 14 horas de proceso en la máquina 3, mientras que un comedor requiere de 6 horas de proceso en la máquina 1 y 18 horas de proceso en la máquina 3. El departamento de costos ha estimado que cuesta $12 producir una sala y $ 11 producir un comedor. Plantee el modelo matemático de programación lineal que se genera para determinar que cantidad de cada producto se debe fabricar, si se sabe que un comedor se vende en $17 y una sala en $14. Suponga además que el departamento de mercadeo ha estimado que mínimo se venderán 5 salas.

6.38. La industria ganadera "Zitron", cría cabezas de ganado de ganado en una hacienda de los llanos orientales, el veterinario de la compañía ha establecido

que a cada cabeza de ganado se le debe suministrar diariamente mínimo 30 miligramos de vitamina A, mínimo 40 miligramos de vitamina B y mínimo 60 miligramos de vitamina C. El ganado es alimentado con sal, ésta tiene un costo de $4000 por kilo, agua la cual tiene un costo de $1000 por litro y concentrado el cual tiene un costo de $1500 por frasco. ¿Qué cantidad de cada alimento se le debe dar a cada cabeza de ganado de tal forma que garantice los requerimientos vitamínicos del ganado si se sabe que 1 kilo de sal contiene 5 miligramos de vitamina A, 7 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de vitamina C; Un litro de agua contiene 1 miligramo de vitamina A, 4 miligramos de vitamina B y 3 miligramos de Vitamina C; mientras que un frasco de concentrado contiene 10 miligramos de vitamina B y 6 miligramos de vitamina C.

6.39. La compañía "Zamba", produce gasolina blanca, roja y verde, para las cuales se ha establecido un precio de venta por galón de $4000, $4500 y $4200 respectivamente, estos productos se obtienen a partir de petróleo y Kerosén de los cuales hay una disponibilidad diaria de 3000 y 3500 galones respectivamente. Además, se sabe que el costo, que se causa por explotar un galón de petróleo es de $2500 mientras que para un galón de kerosene es de $3000. Plantee el modelo de programación lineal que se genera si se sabe que por normas gubernamentales de calidad, la gasolina blanca debe contener 30% de petróleo y 70% de kerosén, la gasolina roja debe contener 45% de petróleo y 55% de kerosene, mientras que la gasolina verde debe contener 60% de petróleo y 40% de kerosén.

6.40. La empresa "Omicrón" debe asignar a una de sus rutas un máximo de 40 busetas y un mínimo de 80 buses. Además por caprichos del señor gerente los buses asignados deben ser mínimo el doble de las busetas menos 60 unidades y se sabe que el costo por asignar una buseta a esa ruta es de $80.000, mientras que asignar un bus cuesta $40.000. ¿Qué cantidad de buses y busetas se debe asignar si se sabe que el gobierno nacional ofrece un subsidio de $90.000 por cada bus asignado?

6.41. La compañía "El Tornero Mayor" produce piñones y rodamientos los cuales le generan una contribución a las utilidades de $5000 y $8000 respectivamente por unidad. Para la producción de dichos artículos la Compañía cuenta semanalmente con 450 horas de trabajo en torno, 540 horas de fresadora y 420 horas de pulidora. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar si se sabe que para producir un piñón se requiere de 5 horas de trabajo en el torno, 9 horas de trabajo en la fresadora y 6 horas de trabajo en la pulidora, mientras que para producir un rodamiento se requiere de 9 horas de trabajo en el torno, 6 horas de trabajo en la fresadora y 7 de trabajo en la pulidora?

6.42. El hotel residencial "Alfa" dispone de habitaciones confortables y normales las cuales se alquilan a $4500 y $3500 por habitación respectivamente. Dichas

habitaciones son preparadas por Anita y Carmen, las camareras del hotel, para las cuales se ha establecido que tienen una disponibilidad diaria de 630 y 400 minutos respectivamente para el arreglo de las habitaciones. Además, se ha establecido que una habitación confortable requiere de 9 minutos de arreglo por parte de Anita y 5 minutos por parte de Carmen; mientras que una habitación normal requiere de 7 minutos de trabajo de Anita y 8 minutos de trabajo de Carmen, para quedar lista para alquiler. ¿Qué cantidad de cada tipo de habitaciones deben estar listas para la noche si se sabe que se espera alquilar mínimo 40 habitaciones entre los dos tipos?

6.43. La fábrica de muebles "Beta" produce salas y comedores para los cuales ha establecido que generan una contribución a las utilidades de $9000 y $10000 por unidad respectivamente. Para la producción de dichos artículos se cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de madera y 320 metros de tubo. El departamento de producción estimó que para producir una sala se requiere de 6 metros de madera y 4 metros de tubo, mientras que para producir un comedor se requiere de 5 metros de madera y 8 metros de tubo. ¿Qué cantidad de salas y comedores se deben fabricar? si se sabe que el departamento de ventas ha estimado que mínimo se venderán 90 unidades entre los dos productos.

6.44. Confecciones "Gamma" produce camisas y corbatas para las cuales ha establecido una utilidad unitaria de $5000 y $2000 respectivamente. El departamento de mercadeo ha pronosticado que máximo se venderán 50 camisas y mínimo 30 corbatas. ¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar si se sabe que el Gerente de la fábrica requiere que la cantidad de corbatas producidas debe ser mínimo 40 unidades debajo de la producción de camisas?

6.45. En el jardín infantil "Delta" se ha establecido que a cada niño diariamente se le debe proporcionar máximo 480 miligramos de vitaminas, mínimo 180 miligramos de hierro y mínimo 180 miligramos de minerales. Para lograr estos requisitos vitamínicos en el jardín se dispone de leche y fruta para los cuales se ha establecido un costo de $400 por un vaso de leche y $500 por una porción de frutas. Establezca qué cantidad de leche y fruta se le debe administrar diariamente a cada niño, si se sabe que un vaso de leche contiene 6 miligramos de vitaminas, 3 miligramos de hierro y 6 miligramos de minerales, mientras que una porción de fruta contiene 8 miligramos de vitaminas, 6 miligramos de hierro y 3 miligramos de minerales.

6.46. La fábrica de calzado "Épsilon" produce zapatos para hombre y zapatos para dama a un costo de $20.000 cada uno de ellos. Además, se ha establecido, mediante un estudio de mercado que habrá una venta mínima de 20 zapatos para dama y que la venta mínima entre los dos artículos será de 50 unidades.

También, se sabe que hay una disponibilidad de 540 horas-hombre por semana para la producción de dichos artículos. ¿Qué cantidad de cada tipo de zapato se debe fabricar si se sabe que producir un par de zapatos para hombre se requieren 6 horas y un par de zapatos para dama requiere 9 horas?

6.47. La distribuidora de dulces "Zeta" compra cada paquete de mentas a $5 pesos y cada paquete de caramelos a $6. El departamento de mercadeo de la Compañía ha determinado que semanalmente mínimo se venderán 60 paquetes de mentas y mínimo 60 paquetes de caramelos. Además, se sabe que la Compañía semanalmente asigna para su presupuesto de compra de los dos artículos $300. ¿Qué cantidad de cada producto se debe comprar para garantizar las condiciones del mercado y que su costo sea el más bajo?

6.48. Cierta familia ha establecido que cada uno de sus integrantes debe consumir como mínimo 240 gramos de vitamina A y mínimo 320 gramos de vitamina B al mes. Para cumplir con estos requerimientos vitamínicos la familia dentro de su mercado compra huevos a $300 la unidad y leche a $900 por litro. Por característica de los productos se sabe que un huevo contiene 6 gramos de vitamina A y 4 gramos de vitamina B; mientras que un litro de leche contiene 4 gramos de vitamina A y 8 gramos de vitamina B. ¿Qué cantidad de cada producto debe consumir cada miembro de la familia si se sabe que por recomendaciones medicas cada uno de ellos debe consumir mínimo 20 litros de leche al mes?

6.49. Cierta compañía automotriz ensambla automóviles y camiones los cuales deben pasar por el departamento de pintura y por el departamento de ensamble. Si el departamento de pintura se dedica solo a pintar camiones podrá pintar 40 camiones por día, mientras que si se dedica a pintar solo automóviles, podrá pintar 60 automóviles por día. Si el departamento de ensamble se dedica solo a ensamblar automóviles podrá ensamblar 50 automóviles por día, y si se dedica solo a ensamblar camiones podrá ensamblar 50 camiones por día. Además se sabe que cada camión genera una utilidad de $600.000 y que cada automóvil genera una utilidad de $400.000, suponga además que los vendedores de automóviles requieren que la compañía automotriz fabrique por lo menos 30 camiones y por lo menos 20 automóviles por día. Establezca la cantidad de camiones y la cantidad de automóviles que se deben fabricar por día.

6.50. Una compañía transportadora dispone de un taller de mantenimiento para las reparaciones a que haya lugar en sus buses y busetas; en el cual hay una disponibilidad de 630 horas mecánico semanalmente. Además se sabe que el costo por reparación de un bus es de 6 mil pesos mientras que el costo de reparación de una buseta es de 5 mil pesos. Por experiencia se sabe que para reparar un bus se necesitan 7 horas mientras que para la buseta se requieren 9 horas. ¿Qué cantidad de cada tipo de vehículo se debe reparar semanalmente

si se sabe que mínimo se deben reparar 20 busetas y mínimo 30 buses a la semana?

6.51. Se ha establecido en confecciones Sigma que para fabricar un vestido para hombre se demoran 9 horas mientras que para fabricar un vestido de mujer se demoran 7 horas. Además, se ha establecido que un vestido para hombre genera una utilidad de $18000 y un vestido para dama genera una utilidad de $14000. El departamento de ventas ha establecido que en el próximo mes se venderán mínimo 40 vestidos para hombre y mínimo 20 vestidos para mujer. ¿Qué cantidad de cada tipo de vestido se de deben fabricar si se sabe que hay una disponibilidad de 600 horas mensuales para la confección?

6.52. Se ha establecido en la compañía Sigma que un par de tenis genera una pérdida de $2000 mientras que un par de zapatos genera una utilidad de $6000. Además se sabe que la venta mínima entre los dos artículos para el próximo mes es de 70 unidades y que por disponibilidad de materiales máximo se pueden producir 50 pares de tenis al mes. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se deben fabricar si se sabe que mínimo se venderán 40 pares de zapatos el próximo mes?

6.53. Un agricultor dispone de un terreno de 90 hectáreas, las cuales planea sembrar con yuca y papa en las cantidades que más le sea conveniente. Mediante un estudio se ha establecido que sembrar una hectárea de terreno con yuca consume 12 metros cúbicos de agua, 8 bultos de abono y 6 horas hombre de trabajo, mientras que sembrar una hectárea con papa consume 6 metros cúbicos de agua, 7 bultos de abono y 10 horas hombre de trabajo. El agricultor ha establecido que tiene una disponibilidad semanal de 720 metros cúbicos de agua, 540 bultos de abono y 600 horas hombre. ¿Qué cantidad de hectáreas se deben sembrar de cada producto, si se sabe que una hectárea sembrada de yuca genera una utilidad de $ 50.000 y una hectárea de sembrada con papa genera una utilidad de $80.000?

6.54. En cierta compañía constructora se ha establecido que diariamente hay una disponibilidad de 240 minutos por día por cada ayudante de construcción. Por estudio se sabe que el primer ayudante coloca un bloque en 6 minutos y un ladrillo en 4 minutos, mientras que el segundo ayudante coloca un bloque en 3 minutos y un ladrillo en 8 minutos. Además se ha establecido que el costo por la colocación de un bloque es de $50, mientras que colocar un ladrillo cuesta $60. ¿Qué cantidad de bloques y ladrillos se deben colocar diariamente si además se sabe que mínimo se deben colocar 50 ladrillos?

6.55. Una fábrica de muebles tiene una disponibilidad semanal de 150 metros de tubo, 270 metros de madera y 120 tornillos. Con estos recursos la compañía desea fabricar camas dobles, camas sencillas y camarotes, los cuales pretende vender a $50, $25 y $20 pesos por unidad respectivamente. ¿Qué cantidad de cada articulo debe fabricar la compañía a fin de maximizar sus ingresos? si se sabe que una cama doble consume 10 metros de tubo, 5 metros de madera y 8 tornillos; una cama sencilla consume 6 metros de tubo, 3 metros de madera y 4 tornillos; mientras que un camarote consume 15 metros de tubo, 9 metros de madera y 15 tornillos.

6.56. Petróleos Colombia produce biogasolina, gasolina normal y acpm los cuales venden a un precio de 4000, 5000 y 4500 pesos por galón respectivamente. Dichos combustibles son fabricados a partir de dos tipos de crudo llamados petróleo grado 1 y petróleo grado 2 de los cuales hay una disponibilidad de 100000 y 150000 galones por día respectivamente. Se ha establecido que el costo de explotación de cada galón de petróleo grado1 es 2500 pesos, mientras que la explotación de petróleo grado 2 cuesta 3000 por galón. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que la biogasolina debe contener 40 % de petróleo grado 1 y 60% de petróleo grado 2, la gasolina normal debe contener el 70% de petróleo grado 1 y 30% de petróleo grado 2; mientras que el acpm debe contener 50% de petróleo grado 1 y 50% de petróleo grado 2.

6.57. Combustibles "Dorada" produce cocinol, gasolina roja y gasolina extra los cuales vende a $3500, $5200 y $6300 por galón respectivamente.
Para la producción de dichos combustibles la compañía cuenta con una disponibilidad diaria de 1000 galones de petróleo crudo y 1500 galones de petróleo refinado. Además por requisitos de calidad el cocinol debe contener 80% de petróleo crudo y 20% de petróleo refinado; la gasolina roja debe contener 50% de cada uno de los petróleos y la gasolina extra debe contener 25% petróleo crudo y 75% petróleo refinado. Establezca que cantidad de cada combustible se debe fabricar si se sabe que el costo de explotación de un galón de petróleo crudo es $2500 y un galón de petróleo refinado es $3000.

Capítulo 7

Programación lineal: análisis de sensibilidad

PRESENTACIÓN

En el presente capítulo se presenta el proceso deconsecuciónde soluciones óptimas de un problemas de programación lineal a partir de una solución óptima; cuando se realizan cambios en los parámetros iniciales del problema.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de obtener la solución óptima de un problema de programación lineal haciendo uso del análisis de sensibilidad, cuando ya se tiene la solución óptima de un problema y éste sufre cambios en los parámetros iniciales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Obtener la solución óptima de un problema de programación lineal cuando hay modificación en la disponibilidad de recursos; dado que ya se tiene la solución óptima del problema inicial.
- Obtener la solución óptima de un problema de programación lineal cuando hay modificación en los costos , precios o utilidades; dado que ya se tiene la solución óptima del problema inicial.
- Obtener la solución óptima de un problema de programación lineal cuando hay modificación en la asignación unitaria de recursos; dado que ya se tine la solución óptima del problema inicial.
- Obtener la solución óptima de un problema de programación lineal cuando se adicionan nuevas restricciones al modelo; dado que ya se tiene la solución óptima del problema inicial.
- Obtener la solución óptima de un problema de programación lineal cuando hay la posibilidad de agregar nuevos productos o actividades; dado que ya se tiene la solución óptima del problema inicial.
- Interpretar las nuevas soluciones obtenidas.

COMPETENCIAS

El estudiante tendrá la capacidad de obtener nuevas soluciones a problemas de programación lineal, cuando el problema original tiene cambios en la información de sus parámetros.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá demostrar el manejo e interpretación de las nuevas soluciones obtenidas a través del análisis de sensibilidad cuando un problema original presenta cambios en sus parámetros.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Gauss Jordan.
- Vectores y matrices.
- Operaciones entre matrices.

Todo cambia con el paso del tiempo; los salarios suben (el poder adquisitivo del dinero baja), los costos de las materia primas suben (es posible que bajen), la disponibilidad de los recursos puede cambiar, las personas envejecen y les salen canas. Esto por nombrar sólo algunos caso de modificación de las condiciones a través del tiempo.

El caso de la programación lineal no es la excepción, pues, la solución óptima a un problema en el día de hoy; puede que no sea la óptima para cualquier tiempo futuro, porque con el paso del tiempo se generó algún cambio en los parámetros de los modelos.

Afortunadamente, no hay que resolver el problema desde el principio para obtener una nueva solución óptima, dado un cambio en la información; pues para ello existe el análisis de sensibilidad.

El presente capitulo trata justamente los problemas referentes a cambios en los parámetros de información generados con el paso del tiempo, pero las nuevas soluciones óptimas se obtienen a partir de la solución óptima del problema original sin necesidad de resolver todo el nuevo problema.

Los posibles cambios que evalúa el análisis de sensibilidad son los siguientes:
Cambio en la disponibilidad de recursos.

- Cambio en precios, utilidades o costos unitarios.
- Cambio en la asignación unitaria de recursos.
- Adición de nuevas restricciones.
- Adición de nuevos productos o actividades.

Como se dijo anteriormente todos los cambios se evalúan a partir de la solución óptima de la información inicial. Para obtener la solución óptima del problema inicial supóngase el siguiente ejercicio:

Una compañía especializada en ornamentación llamada “Puro Hierro” se dedica a la fabricación de puertas, rejas y ventanas; productos para los cuales ha establecido una utilidad de $6, $2 y $5 por unidad respectivamente.

Para la manufacturación de dichos artículos la empresa cuenta con una disponibilidad semanal de 300 metros de lámina, 400 metros de ángulo y 240 metros de tubo. Además, se sabe que para producir una puerta se requieren 3 metros de lámina, 2 metros de ángulo y 2 metros de tubo; para producir una reja se necesitan 5 metros de lámina, 4 metros de ángulo y 3 metros de tubo; mientras que, para producir una ventana se requieren 2 metros de lámina, 5 metros de ángulo y un metro de tubo.

¿Qué cantidad de cada uno de los artículos se debe fabricar para que la compañía "PURO HIERRO" obtenga la máxima utilidad posible?
SOLUCIÓN.

El problema de esta compañía consiste en determinar que cantidad de puertas, rejas y ventanas debe fabricar semanalmente para incrementar al máximo su utilidad; por lo tanto en función de estas cantidades se definen las siguientes variables:

X_1 = Cantidad de puertas a producir por semana.

X_2 = Cantidad de rejas a producir por semana.

X_3 = Cantidad de ventanas a producir por semana.

Con base en la definición de las variables el modelo matemático de programación lineal para la producción de la compañía, queda de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

$$\text{S.A.}$$

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \quad \text{metros de lamina.}$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \quad \text{metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \quad \text{metros de tubo.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

En la tabla 7.1 se presenta la solución de este problema por medio del método simplex.

Con base en esta solución la compañía "Puro Hierro" debe producir 700/11 de puertas por semana, 600/11 de ventanas por semana, para obtener una utilidad de $7200/11. Además, no debe producir rejas (la variable está fuera de la base) y de los 240 metros de tubo no se utilizan 640/11.

A partir de este momento, todos los posibles cambios que se presenten en la información de los parámetros se trabajarán con base en la solución óptima de este ejercicio. Además, se requiere de la formulación del tablero simplex, la cual se presenta nuevamente en la tabla 7.2.

TABLA 7.1

FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3			
F_1		0	3	5	2	1	0	0	H_1	300	300/3=100
F_2		0	2	4	5	0	1	0	H_2	400	400/2=200
F_3		0	2	3	1	0	0	1	H_3	240	240/2=120
F_{Z1}		Z_J-C_J	-6	-2	-5	0	0	0	Z = 0		
F_4	$F_1(1/3)$	6	1	5/3	2/3	1/3	0	0	X_1	100	100/(2/3)=150
F_5	$F_4(-2) + F_2$	0	0	2/3	11/3	-2/3	1	0	H_2	200	200/(11/3) =600/11
F_6	$F_4(-2) + F_3$	0	0	-1/3	-1/3	-2/3	0	1	H_3	40	*
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	8	-1	2	0	0	Z = 600		
F_7	$F_8(-2/3) + F_4$	6	1	17/11	0	5/11	-2/11	0	X_1	700/11	
F_8	$F_5(3/11)$	5	0	2/11	1	-2/11	3/11	0	X_3	600/11	
F_9	$F_8(1/3) + F_6$	0	0	-3/11	0	-8/11	1/11	1	H_3	640/11	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	90/11	0	20/11	3/11	0	Z = 7200/11		

TABLA 7.2

C_J							BASE	X_B
C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3		
	$B^{-1}a_J$			B^{-1}				$B^{-1}b$
Z_J-C_J	$C_BB^{-1}a_J-C_J$			C_BB^{-1}			$Z = C_BX_B$	

Con base en la solución óptima del problema y la formulación del método simplex, se extracta la siguiente información del problema específico; que se requiere para realizar la aplicación del análisis de sensibilidad:

Vector a_1: vector de asignación unitaria de recursos para la primer variable (asignación de recursos para las puertas).

$$a_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Vector a_2: vector de asignación unitaria de recursos para la segunda variable (asignación de recursos para las rejas).

$$a_2 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Vector a_3: vector de asignación unitaria de recursos para la tercer variable (asignación de recursos para las ventanas).

$$a_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Vector b: vector de disponibilidad de recursos.

$$b = \begin{Bmatrix} 300 \\ 400 \\ 240 \end{Bmatrix}$$

Vector de precios o costos unitarios: en este caso específico es el vector de utilidades unitarias.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Vector de coeficientes básicos en la solución optima.

$$C_B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{Bmatrix} 5/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 3/11 & 0 \\ -8/11 & 1/11 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} = (20/11 \ 3/11 \ 0)$$

7.1. CAMBIO EN LA DISPONIBILIDAD DE RECURSOS (Vector b).

Un cambio en el vector de disponibilidad de recursos, indica que hay un nuevo vector b (denotado como b*); y como se puede observar en las fórmulas del tablero simplex de la tabla 7.2, también cambia X_B (denotado como X_B*). Además, si cambia X_B, genera un cambio en el valor de la función objetivo Z (al nuevo llámelo Z*). En conclusión el vector crítico a evaluar es X_B*, el cual puede arrojar dos posibles valores así:

- Si $X_B^* = B^{-1}b^* \geq 0$, indica que este nuevo vector es la solución óptima del nuevo problema; y por lo tanto se debe calcular el nuevo valor de la función objetivo $Z^* = C_B X_B^*$.

- Si $X_B^* = B^{-1}b^* < 0$, indica que hay mínimo una variable que está tomando valor negativo (no cumple con las restricciones de no negatividad a que obliga el algoritmo); por lo tanto la solución ha dejado de ser optima. En este caso se toma el nuevo vector X_B^* y se reemplaza en el tablero óptimo por el vector X_B. De ahí en adelante se aplica el método dual simplex, hasta obtener la nueva solución óptima.

Ejercicio 7.1.1. Suponga que en la compañía "Puro Hierro" se disminuye en 50 metros la disponibilidad de tubo.
Como se puede observar, la disponibilidad de metros de tubo pasa de 240 a 190 metros. Este único cambio genera un nuevo problema que es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

S.A.

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \qquad \text{metros de lamina.}$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \qquad \text{metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 190 \qquad \text{metros de tubo.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Lo que indica que el nuevo vector b es el siguiente:

$$b^* = \begin{Bmatrix} 300 \\ 400 \\ 190 \end{Bmatrix}$$ y el nuevo vector solución se calcula de la siguiente manera:

$$X_B^* = B^{-1}b^* = \begin{Bmatrix} 5/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 3/11 & 0 \\ -8/11 & 1/11 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 300 \\ 400 \\ 190 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 700/11 \\ 600/11 \\ 90/11 \end{Bmatrix} \geq 0.$$

Como se puede observar en este nuevo vector solución, todas sus componentes son mayores o iguales que cero. Entonces, ésta es la nueva solución del problema en el mismo orden para las variables básicas del tablero original (tabla 7.1). El nuevo valor de la función objetivo se calcula de la siguiente manera:

$$Z^* = C_B X_B^* = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 700/11 \\ 600/11 \\ 90/11 \end{Bmatrix} = 7200/11.$$

Entonces la nueva solución es X_1=700/11, X_3=600/11, H_3=90/11 y las demás variables toman valor de cero (son variables no básicas).
Obsérvese, que en la nueva solución se siguen produciendo 700/11 de puer-

tas, cero rejas y 600/11 de ventanas; para obtener una utilidad máxima de \$7200/11.

Tal como se puede observar lo único que cambio fue que antes sobraban 640/11 de metros de tubo y en la nueva solución solo sobran 90/11.

Ejercicio 7.1.2. Suponga que en la compañía "Puro Hierro" se incrementa en 90 metros la disponibilidad de lámina.

La disponibilidad de metros de lámina pasa de 300 a 390 metros. Este cambio genera un nuevo problema que es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

$$\text{S.A.}$$

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 390 \quad \text{metros de lamina.}$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \quad \text{metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \quad \text{metros de tubo.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Lo que indica que el nuevo vector b es el siguiente:

$$b^* = \begin{Bmatrix} 390 \\ 400 \\ 240 \end{Bmatrix}$$ y el nuevo vector solución se calcula de la siguiente manera:

$$X_B^* = B^{-1}b^* = \begin{Bmatrix} 5/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 3/11 & 0 \\ -8/11 & 1/11 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 390 \\ 400 \\ 240 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1150/11 \\ 420/11 \\ -80/11 \end{Bmatrix} <0. \quad =<0.$$

El nuevo vector solución ya incluye componentes negativas; por lo tanto la solución ha dejado de ser óptima. Entonces, este nuevo vector se lleva al tablero óptimo reemplazando al vector X_B original y se aplica el método dual simplex hasta obtener la nueva solución óptima. En la tabla 7.3 se muestra todo este proceso. Nótese que el la iteración inicial la utilidad cambia originado por el cambio en X_B.

TABLA 7.3											
FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3			
F_7	F_8 (-2/3) + F_4	6	1	17/11	0	5/11	-2/11	0	X_1	1150/11	
F_8	F_5 (3/11)	5	0	2/11	1	-2/11	3/11	0	X_3	420/11	
F_9	F_8 (1/3) + F_6	0	0	-3/11	0	-8/11	1/11	1	H_3	-80/11	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	90/11	0	20/11	3/11	0	Z = 9000/11		
F_{10}	F_{12}(-5/11) +F_7	6	1	11/8	0	0	-1/8	5/8	X_1	100	
F_{11}	F_{12}(2/11) +F_8	5	0	1/4	1	0	1/4	-1/4	X_3	40	
F_{12}	F_9(-11/8)	0	0	3/8	0	1	-1/8	-11/8	H_1	10	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	15/2	0	0	1/2	5/2	Z= 800		

En la primera iteración de la tabla 7.3, sale de la base la variable H_3 por tener el X_B más negativo y entra la variable que tenga el $Max\left\{\frac{Z_j - C_j}{K_B}\right\}$, teniendo en cuenta que sólo se evalúan K_B negativos. En este caso corresponde a:

Max {(90/11)/(-3/11);(20/11)/(-8/11)}, osea,

max{-30; -2.5}= -2.5.

El máximo entre estos dos números es -2.5, que corresponde a H_1, por lo tanto esta variable entra a la base.

De acuerdo con la nueva solución óptima del problema, se deben producir 100 puertas y 40 ventanas, no se producen rejas y no se utilizan 10 metros de lámina. Esta solución genera una utilidad de $800 por semana.

7.2. CAMBIO EN PRECIOS O COSTOS UNITARIOS. (Vector c)

A modo de teoría, cuando se evalúa posibles cambios en precios, costos o utilidades unitarias, en la estructura general del modelo se está cambiando por lo menos un valor C_J. Dentro de la estructura del tablero simplex, el C_J se utiliza para calcular todo el renglón Z_J-C_J, que es el renglón que permite determinar si la solución es o no óptima. Entonces, se pueden presentar los siguientes dos casos dependiendo del valor que tomen los Z_J-C_J:

- Si Z_J-$C_J \geq 0$, la solución del problema original sigue siendo la optima.
- Si Z_J-$C_J < 0$, la solución ha dejado de ser óptima y se debe utilizar el método simplex para llegar a la nueva solución óptima.

En un criterio muy personal del autor cuando se presentan cambios en precios, costos o utilidades unitarias, se recomienda seguir el siguiente procedimiento. En el tablero óptimo del problema original, cambie los valores C_J que hayan sido modificados.

- Si los valores modificados pertenecen a variables básicas, se debe modificar el vector C_B.
- Recalcule nuevamente todos los valores Z_J-C_J.
- Si los valores calculados en el ítem anterior son mayores o iguales a cero, se concluye que la solución del problema original sigue siendo la óptima; de lo contrario se utiliza el método simplex para encontrar la nueva solución optima.

Ejercicio 7.2.1. Se ha decidido en la compañía "Puro Hierro" incrementar en \$2 la utilidad de cada Reja.
Este cambio hace que la utilidad de cada reja pase de \$2 a \$4 por unidad; lo que genera con ésta modificación el siguiente problema:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 4X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

S.A.

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \quad \text{metros de lámina.}$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \quad \text{metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \quad \text{metros de tubo.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Tal como se dijo anteriormente, se lleva este cambio al tablero óptimo del problema original y se recalculan los valores del renglón ZJ-CJ. En la tabla 7.4 se puede visualizar este procedimiento.

TABLA 7.4												
FILA	OPERACIÓN	C_J	6	4	5	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3			
F_7	F_8 (-2/3) + F_4	6	1	17/11	0	5/11	-2/11	0	X_1	700/11	
F_8	F_5 (3/11)	5	0	2/11	1	-2/11	3/11	0	X_3	600/11	
F_9	F_8 (1/3) + F_6	0	0	-3/11	0	-8/11	1/11	1	H_3	640/11	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	68/11	0	20/11	3/11	0	Z = 7200/11		

En esta tabla se modificó sólo el coeficiente C_J para la variable X_2 correspondiente a las rejas. Como esta variable no se encontraba en la base sólo se recalculo en valor Z_J-C_J para dicha variable. Como se puede observar todos los valores Z_J-C_J siguen siendo mayores o iguales a cero; por lo tanto la solución del problema original sigue siendo la optima para el problema modificado en la utilidad unitaria de las rejas. Esta solución es producir 700/11 de puertas por semana, 600/11 de ventanas por semana, para obtener una utilidad de \$7200/11. Además, no debe producir rejas (la variable está fuera de la base) y de los 240 metros de tubo no se utilizan 640/11.

Ejercicio 7.2.2. Suponga que se decrementa en \$3 la utilidad de cada puerta y se incrementa en \$3 la utilidad de cada ventana.

El nuevo problema generado con base en estas modificaciones es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 8X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

S.A.

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \qquad \text{metros de lamina.}$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \qquad \text{metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \qquad \text{metros de tubo.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Llevando estos cambios al tablero óptimo se obtiene la información presentada en la tabla 7.5.

TABLA 7.5											
FILA	**OPERACIÓN**	**C_J**	**3**	**2**	**8**	**0**	**0**	**0**	**BASE**	**X_B**	**COCIENTE**
		C_B	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**H_1**	**H_2**	**H_3**			
F_7	F_8 (-2/3) + F_4	3	1	17/11	0	5/11	-2/11	0	X_1	700/11	(700/11)/(5/11)=140
F_8	F_5 (3/11)	8	0	2/11	1	-2/11	3/11	0	X_3	600/11	*
F_9	F_8 (1/3) + F_6	0	0	-3/11	0	-8/11	1/11	1	H_3	640/11	*
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	45/11	0	-1/11	18/11	0	Z = 6900/11		
F_{10}	F_7(11/5)	0	11/5	17/5	0	1	-2/5	0	H_1	140	
F_{11}	F_{10}(2/11) +F_8	8	2/5	4/5	1	0	1/5	0	X_3	80	
F_{12}	F_{10}(8/11) +F_9	0	8/5	11/5	0	0	-1/5	1	H_3	160	
F_{Z5}		Z_J-C_J	1/5	22/5	0	0	8/5	0	Z = 640		

La solución óptima a este nuevo problema dice que no se deben producir puertas ni rejas y se producirán 80 ventanas para obtener una utilidad de $640. Además, no se utilizan en la producción 160 metros de tubo.

7.3. CAMBIO EN LA ASIGNACIÓN UNITARIA DE RECURSOS (Matriz A o vectores a_J)

Para realizar análisis de sensibilidad cuando se producen cambios en la asignación unitaria de recursos (coeficientes tecnológicos) hay que hacer claridad en se puede aplicar sólo a variables no básicas. Pues, en el evento que estos cambios se surtan en variables básicas, el cambio generado en toda la información es muy brusco; por lo tanto se recomienda resolver el problema desde el principio. Haciendo esta claridad, entonces en esta sección se ejemplificará solo con la variable X_2 que es la única variable de decisión que es no básica en el tablero óptimo del problema original. Cuando se modifica un vector a_J, dentro de la estructura del tablero simplex, el a_J se utiliza para calcular cada uno de los valores Z_J-C_J, que es el renglón que permite determinar si la solución es o no óptima. Entonces, se pueden presentar los siguientes dos casos dependiendo del valor que tomen los Z_J-C_J:

- Si $Z_J-C_J \geq 0$, la solución del problema original sigue siendo la óptima.
- Si $Z_J-C_J < 0$, la solución ha dejado de ser óptima y se debe utilizar el método simplex para llegar a la nueva solución optima; no sin antes actualizar el vector K_B de la variable a la cual se le está realizando el análisis de sensibilidad. Todos los vectores K_B se calculan mediante la fórmula $B^{-1}a_J$.

Las aplicaciones de estos cambios se ilustran en los dos siguientes ejercicios:

Ejercicio 7.3.1. Suponga que la asignación de recursos para cada reja se modifica a 7 metros de lámina, 8 metros ángulo y 9 metros de tubo.

Con base en esta modificación, el nuevo problema que se genera es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

$$\text{S.A.}$$

$$3X_1 + 7X_2 + 2X_3 \leq 300 \text{ metros de lámina.}$$

$$2X_1 + 8X_2 + 5X_3 \leq 400 \text{ metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 9X_2 + X_3 \leq 240 \text{ metros de tubo.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Recalculando el nuevo valor Z_J-C_J para la variable X_2 (no olvide que esta variable es la que representa la cantidad de rejas), se obtiene lo siguiente:

Z_J-C_J = $C_B B^{-1} a_J$-C_J. Reemplazando cada uno de los valores y vectores de la fórmula se tiene:

$$Z_J - C_J = \begin{pmatrix} 20/11 & 3/11 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix} - 2 = 358/11 \geq 0.$$

Dado que este valor es mayor o igual que cero, se concluye que la solución óptima del problema original sigue siendo la solución optima para el nuevo problema; por lo tanto se siguen produciendo las mismas cantidades de productos, se subutilizan los mismos recursos y la utilidad generada es la misma.

Ejercicio 7.3.2. Suponga que por un cambio en el proceso de producción, las rejas ya no requieren lámina y necesitan 5 metros de ángulo y 3 metros de tubo.

El nuevo problema, considerando esta modificación es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

S.A.

$$\begin{aligned} 3X_1 \qquad\quad + 2X_3 &\leq 300 \text{ metros de lámina.} \\ 2X_1 + 5X_2 + 5X_3 &\leq 400 \quad \text{metros de ángulo.} \\ 2X_1 + 3X_2 + X_3 &\leq 240 \quad \text{metros de tubo.} \\ X_1, \quad X_2, \quad X_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Recalculando el nuevo valor Z_J-C_J = $C_B B^{-1} a_J$-C_J; se obtiene lo siguiente:

$$Z_J - C_J = \begin{pmatrix} 20/11 & 3/11 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix} - 2 = -7/11 < 0.$$

Como el valor hallado ya no es mayor o igual que cero, la solución ha dejado de ser optima. Se actualiza el vector de la variable X_2 de la siguiente manera:

$$K_B = B^{-1} a_J = \begin{Bmatrix} 5/11 & -2/11 & 0 \\ -2/11 & 3/11 & 0 \\ -8/11 & 1/11 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10/11 \\ 15/11 \\ 38/11 \end{Bmatrix}$$

Este vector y el valor nuevo de Z_J-C_J se reemplazan en el tablero óptimo del problema original; y se aplica el método simplex para obtener la nueva solución óptima. Dicha solución se presenta en la tabla 7.6.

TABLA 7.6											
FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3			
F_7	F_8 (-2/3) + F_4	6	1	-10/11	0	5/11	-2/11	0	X_1	700/11	*
F_8	F_5 (3/11)	5	0	15/11	1	-2/11	3/11	0	X_3	600/11	(600/11)/(15/11) =40
F_9	F_8 (1/3) + F_6	0	0	38/11	0	-8/11	1/11	1	H_3	640/11	(640/11)/(38/11) =320/19
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	-7/11	0	20/11	3/11	0	Z = 7200/11		
F_{10}	F_{12}(10/11) +F_7	6	1	0	0	5/19	-3/19	5/19	X_1	1500/19	
F_{11}	F_{12}(-15/11) + F_8	5	0	0	1	2/19	9/38	-15/38	X_3	600/19	
F_{12}	F_9(11/38)	2	0	1	0	-4/19	1/38	11/38	X_2	320/19	
F_{Z2}		Z_J-C_J	0	0	0	32/19	89/38	7/38	Z= 12640/19		

Con base en esta nueva solución (X_1=1500/19, X_2=320/19 y X_3=600/19) se interpreta que se deben producir 1500/19 de puertas, 320/19 de rejas y 600/19 de ventanas; para obtener una utilidad de $12640/19. Además, produciendo dichas cantidades se utiliza la totalidad de los recursos (todas las variables de holgura toman valor de cero por estar fuera de la base).

7.4. NUEVAS RESTRICCIONES

En el evento que se agreguen nuevas restricciones a un problema de programación lineal se debe aplicar el siguiente procedimiento:
Verificar si la solución óptima del problema original, satisface todas las nuevas restricciones. Si esto es cierto, la solución actual sigue siendo la óptima para el nuevo problema.

Cuando no se satisfacen las restricciones por la solución actual, se llevan estas nuevas restricciones al tablero óptimo del problema original; obviamente, agregándole las variables de holgura, exceso y artificiales que sean necesarias.
Restituir o recomponer todos los vectores unitarios que se hayan dañado con la adición de las nuevas restricciones.

Aplicar el método simplex o método dual simplex, según sea el caso para obtener la nueva solución óptima.

Ejercicio 7.4.1. Suponga que por presentación de los productos, se entregarán pintados; para lo cual se ha establecido que hay disponibilidad de 5.000 mililitros de pintura semanalmente. Además, se sabe que una puerta consume 15 mililitros de pintura, una reja consume 50 mililitros de pintura y una ventana consume 20 mililitros de pintura**.**
El nuevo problema que se genera considerando la nueva restricción del recurso pintura es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

S.A.

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \quad \text{metros de lámina.}$$
$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \quad \text{metros de ángulo.}$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \quad \text{metros de tubo.}$$
$$15X_1 + 50X_2 + 20X_3 \leq 5000 \quad \text{mililitros de pintura.}$$
$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Tomando la restricción de la pintura, y reemplazando la solución óptima del problema original (X_1=700/11, X_2=0 y X_3=600/11) se tiene:

$$15(700/11) + 50(0) + 20(600) \leq 5000.$$
$$10500/11 + 0 + 12000/11 \leq 5000.$$
$$22500/11 \leq 5000.$$
$$2045.4545 \leq 5000.$$

Como se puede observar, ésta ultima relación es verdadera, por lo tanto la solución optima del problema original si satisface la nueva restricción. Se concluye que la solución sigue siendo la misma y sigue siendo igualmente óptima.

Ejercicio 7.4.2. Suponga que mediante un estudio de mercados se ha establecido que máximo se venderán 60 puertas por semana.
Si se sabe que máximo se venderán 60 puertas por semana, hay que restringir el modelo a producir como máximo 60 puertas. Esto genera una nueva restricción y por lo tanto el nuevo modelo generado es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

S.A.

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \quad \text{metros de lamina.}$$
$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \quad \text{metros de ángulo.}$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \quad \text{metros de tubo.}$$

$$X_1 \leq 60 \quad \text{venta máxima de puertas.}$$
$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

X_1 en la solución óptima es igual a 700/11 (63.63), valor que no es menor o igual a 60. Por lo tanto la solución del problema original no satisface la nueva restricción. En este caso se lleva la nueva restricción al tablero óptimo del problema original. La nueva restricción a llevar al tablero es $X_1 + H_4 = 60$. En la tabla 7.7 se observa este procedimiento.

TABLA 7.7

FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	0	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H_4			
F_7	F_8 (-2/3) + F_4	6	1	17/11	0	5/11	-2/11	0	0	X_1	700/11	
F_8	F_5 (3/11)	5	0	2/11	1	-2/11	3/11	0	0	X_3	600/11	
F_9	F_8 (1/3) + F_6	0	0	-3/11	0	-8/11	1/11	1	0	H_3	640/11	
F_{10}		0	1	0	0	0	0	0	1	H_4	60	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	90/11	0	20/11	3/11	0	0	Z= 7200/11		

En la tabla 7.7 se puede apreciar que el vector unitario de la variable X_1 se ha dañado; tiene un uno en la fila 10. Lo primero que hay que realizar en este momento es restituir ese vector unitario. Este procedimiento se presenta en la tabla 7.8.

TABLA 7.8

FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	0	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	H_3	H_4			
F_{11}	F_7	6	1	17/11	0	5/11	-2/11	0	0	X_1	700/11	
F_{12}	F_8	5	0	2/11	1	-2/11	3/11	0	0	X_3	600/11	
F_{13}	F_9	0	0	-3/11	0	-8/11	1/11	1	0	H_3	640/11	
F_{14}	F_{11}(-1) + F_{10}	0	0	-17/11	0	-5/11	2/11	0	1	H_4	-40/11	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	90/11	0	20/11	3/11	0	0	Z= 7200/11		

Al restituir el vector unitario de la variable X_1 se ha generado un negativo en el vector solución X_B, luego aquí se aplica el método dual simplex hasta obtener la solución óptima del nuevo problema. Para aplicar el método dual simplex a la tabla 7.8, se saca de la base la variable H_4 y entra la variable H_1. Aplicando el criterio se obtiene lo siguiente:

Max {(90/11)/(-17/11); (20/11)/(-5/11)}

Max {-90/17; -20/5}.

Max (-5.29; -4) = -4. Este valor corresponde justamente a H_1.

En la tabla 7.9 se presenta esta iteración.

TABLA 7.9													
FILA	**OPERA-CIÓN**	**C_J**	**6**	**2**	**5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**BASE**	**X_B**	**COCIEN-TE**
		C_B	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**H_1**	**H_2**	**H_3**	**H_4**			
F_{15}	F_{18}(-5-/11)+F_{11}	6	1	0	0	0	0	0	1	X_1	60	
F_{16}	F_{18}(2/11) +F_{12}	5	0	4/5	1	0	1/5	0	-2/5	X_3	56	
F_{17}	F_{18}(8/11) +F_{13}	0	0	11/5	0	0	-1/5	1	-8/5	H_3	64	
F_{18}	F_{14}(-11/5)	0	0	17/5	0	1	-2/5	0	-11/5	H_1	8	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	2	0	0	1	0	4	Z= 640		

Con base en la nueva restricción, la solución del nuevo problema es producir 60 puertas y 56 ventanas para obtener una utilidad de $640. Además, no se producen rejas y de los recursos quedan sobrando 8 metros de lámina y 64 metros de ángulo. Los otros dos recursos se consumen en su totalidad.

Ejercicio 7.4.3. A través de un estudio de mercados, se ha establecido en la compañía “Puro Hierro” que mínimo se venderán 60 ventanas.

Agregando la nueva restricción que genera el estudio de mercados al problema original se obtiene lo siguiente:

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 \quad \text{(utilidad máxima)}$$

$$\text{S.A.}$$

$$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 300 \text{ metros de lámina.}$$

$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 400 \text{ metros de ángulo.}$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \leq 240 \text{ metros de tubo.}$$

$$X_3 \geq 60 \text{ venta máxima de puertas.}$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 \geq 0.$$

Con base en la solución óptima del problema original, ésta última restricción queda de la siguiente manera:

$X_3 \geq 60.$

$600/11 \geq 60.$

$54.5454 \geq 60.$

Tal como se puede apreciar, ésta última relación es falsa, lo que indica que la solución optima del problema original no satisface la nueva restricción, y por lo tanto la solución ha dejado de ser optima. Hay que llevar la nueva restricción al tablero óptimo del problema original de la siguiente manera:

$X_3 - S_1 + A_1 = 60.$

En este caso se ha agregado una variable artificial, por lo tanto hay que penalizar la función objetivo. En la tabla 7.10 se presenta todo el desarrollo del método simplex con esta nueva restricción.

Si la producción mínima de ventanas debe ser 60 unidades, la solución óptima del problema será producir 50 puertas y 60 ventanas para obtener una utilidad de \$600. Produciendo estos artículos en dichas cantidades; no se utilizan 30 metros de lámina ni 80 metros de tubo. El lector podrá concluir que es posible que mediante la adición de nuevas restricciones sea posible que se llegue a una solución no factible; pues posible que por restricciones del mercado no alcancen los materiales disponibles para la producción.

7.5. NUEVOS PRODUCTOS O ACTIVIDADES

Cuando se evalúa la posibilidad de fabricar nuevos productos o actividades, por obvias razones se generan nuevas variables; las que necesariamente crearán nuevas columnas dentro del tablero simplex. Por lo tanto surgen nuevos valores Z_J-C_J, los cuales pueden tener uno de los dos siguientes comportamientos:

- $Z_J - C_J = C_B B^{-1} a_J - C_J \geq 0$. En este caso el nuevo producto no se debe fabricar ya que no es rentable para la compañía; y la solución óptima del problema original seguirá siendo la óptima.
- $Z_J - C_J = C_B B^{-1} a_J - C_J < 0$. En este caso las condiciones de optimalidad ya no se cumplen y se deberá aplicar el algoritmo simplex hasta obtener la nueva solución óptima.

Ejercicio 7.5.1. La compañía esta evaluando la posibilidad de fabricar sillas metálicas a las cuales se les ha asignado una utilidad unitaria de \$ 3 y se ha establecido que cada silla metálica requiere 5 metros de lámina, 10 metros de ángulo y 2 metros de tubo.

TABLA 7.10

FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	0	0	0	0	-M	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	S_1	H_1	H_2	H_3	A_1			
F_7		6	1	17/11	0	0	5/11	-2/11	0	0	X_1	700/11	
F_8		5	0	2/11	1	0	-2/11	3/11	0	0	X_3	600/11	
F_9		0	0	-3/11	0	0	-8/11	1/11	1	0	H_3	640/11	
F_{10}		-M	0	0	1	-1	0	0	0	1	A_1	60	
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	90/11	-M	M	20/11	3/11	0	0	Z = -60M+7200/11		
F_{11}	F_7	6	1	17/11	0	0	5/11	-2/11	0	0	X_1	700/11	(700/11)/(5/11) =140
F_{12}	F_8	5	0	2/11	1	0	-2/11	3/11	0	0	X_3	600/11	*
F_{13}	F_9	0	0	-3/11	0	0	-8/11	1/11	1	0	H_3	640/11	*
F_{14}	F_{12}(-1)+F_{10}	-M	0	-2/11	0	-1	2/11	-3/11	0	1	A_1	60/11	(60/11)/(2/11) =30
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	2/11M +90/11	0	M	-2/11M+20/11	3/11M +3/11	0	0	Z = -60/11M+7200/11		
F_{15}	F_{18}(-5/11) +F_{11}	6	1	2	0	5/2	0	½	0	-5/2	X_1	50	
F_{16}	F_{18}(2/11) +F_{12}	5	0	0	1	-1	0	0	0	1	X_3	60	
F_{17}	F_{18}(8/11) +F_{13}	0	0	-1	0	-4	0	-1	1	4	H_3	80	
F_{18}	F_{14}(11/2)	0	0	-1	0	-11/2	1	-3/2	0	11/2	H_1	30	
F_{Z5}		Z_J-C_J	0	10	0	10	0	3	0	M-10	Z = 600		

Con base en la información de este nuevo producto, el problema a resolver seria:
Max $Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 3X_4$ (utilidad máxima)
S.A.

$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 5X_4 \leq 300$ metros de lámina.

$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 10X_4 \leq 400$ metros de ángulo.

$2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 240$ metros de tubo.

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0.$

Donde X_4 representa la cantidad de sillas metálicas a producir semanalmente.
Evaluando el valor de Z_J-C_J para este nuevo producto se obtiene lo siguiente:

$Z_J-C_J=C_BB^{-1}a_J-C_J= -3 = 97/11 \geq 0.$

El hecho de que este valor sea mayor o igual a cero indica que la solución del problema original sigue siendo la óptima y que el nuevo producto (sillas metálicas no se debe fabricar), puesto que no es rentable para la compañía.

Ejercicio 7.5.2. Se considera en la compañía "Puro Hierro" la posibilidad de producir archivadores, para cada uno de los cuales se ha estimado una utilidad de $10. Además, se estableció que cada archivador consume 3 metros de lámina, 2 metros de ángulo y 5 metros de tubo.

Incorporando la información de este nuevo artículo al problema original se tiene lo siguiente:

Max $Z = 6X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 10X_4$ (utilidad máxima)

S.A.

$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 3X_4 \leq 300$ metros de lámina.

$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 400$ metros de ángulo.

$2X_1 + 3X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 240$ metros de tubo.

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0.$

Donde X_4 representa la cantidad de archivadores a producir semanalmente.
Evaluando el valor de Z_J-C_J para los archivadores se obtiene lo siguiente:

$Z_J-C_J=C_BB^{-1}a_J-C_J= -10 = -4 < 0.$

El hecho de que este valor de menor que cero, indica que la solución ha dejado de ser óptima y por lo tanto hay que aplicar el métodos simplex hasta obtener

la nueva solución óptima. Para llevar la información de los archivadores al tablero, primero hay que actualizar el vector K_B para este producto de la siguiente manera:
$K_B = B^{-1}a_J = \ =.$
Este vector es el que se lleva al tablero óptimo del problema original para la variable X_4.
En la tabla 7.11 se muestra todo el procedimiento para encontrar la nueva solución óptima del problema.

Con base en los resultados de la tabla 7.11, la solución al problema es producir 1460/33 de puertas, no producir rejas, producir 600/11 de ventanas y producir 640/33 de archivadores para obtener una utilidad máxima de $$24.160/33. Además, de acuerdo con las cantidades a producir se consume la totalidad de los recursos.

TABLE 7.11

FILA	OPERACIÓN	C_J	6	2	5	10	0	0	0	BASE	X_B	COCIENTE
		C_B	X_1	X_2	X_3	X_4	H_1	H_2	H_3			
F_7	F_8 (-2/3) + F_4	6	1	17/11	0	1	5/11	-2/11	0	X_1	700/11	(700/11)/1= 700/11
F_8	F_5 (3/11)	5	0	2/11	1	0	-2/11	3/11	0	X_3	600/11	*
F_9	F_8 (1/3) + F_6	0	0	-3/11	0	3	-8/11	1/11	1	H_3	640/11	(640/11)/3=640/33
F_{Z3}		Z_J-C_J	0	90/11	0	-4	20/11	3/11	0	Z= 7200/11		
F_{10}	F_{12}(-1)+F_7	6	1	18/11	0	0	23/33	-7/33	-1/3	X_1	1460/33	
F_{11}	F_8	5	0	2/11	1	0	-2/11	3/11	0	X_3	600/11	
F_{12}	F_9(1/3)	10	0	-1/11	0	1	-8/33	1/33	1/3	X_4	640/33	
F_{Z4}		Z_J-C_J	0	86/11	0	0	28/33	13/33	4/3	Z= 24160/33		

PROBLEMAS PROPUESTOS

Para solucionar los problemas 7.1 a 7.14 obtenga a través del método simplex la solución óptima del problema propuesto 2.35.

7.1. Se reduce en 10 metros la disponibilidad de formica.

7.2. Se incrementa en 20 metros la disponibilidad de madera y 40 metros la disponibilidad de tubo.

7.3. Se reduce en 40m la disponibilidad de formica

7.4. Se incrementa en \$3 la utilidad de cada pupitre unipersonal y \$1 cada pupitre bipersonal.

7.5. Se incrementa en \$5 la utilidad de cada pupitre unipersonal.

7.6. La asignación de recursos para cada pupitre unipersonal es 2 metros de madera, un metro de tubo y 2 metros formica.

7.7. La asignación de recursos para cada pupitre unipersonal es un metro de madera, un metro de tubo y 3 metros formica.

7.8. La asignación de recursos para cada pupitre unipersonal es dos metros de madera y 4 metros formica.

7.9. Se considera la posibilidad de producir escritorios con una utilidad de \$2 cada uno de ellos; asignándosele 5 metros de madera, 3 metros de tubo y 4 metros de formica.
7.10. Se evalúa la posibilidad de producir sillas con una utilidad de \$3 la unidad, y una asignación de recursos de un metro de madera, ½ metro de tubo y 2 metros de formica.

7.11. Por presentación de los productos se le adicionará a cada pupitre unipersonal 4 tapones, a cada pupitre bipersonal 6 tapones y a cada mesa 4 tapones.¿Cuál es la nueva solución óptima de ese problema si se sabe, que se cuenta con una disponibilidad de 2.000 tapones?

7.12. Suponga que mediante un estudio de mercadeo se estableció que máximo se venderán 200 mesas.

7.13. Suponga que el gerente de la compañía se ha comprometido con un colegio a entregarle mínimo 120 pupitres bipersonales.

7.14. Suponga que el gerente de la compañía se ha comprometido a entregar 50 pupitres unipersonales.

Para solucionar los problemas 7.15 a 7.22 obtenga a través del método simplex la solución óptima del problema propuesto 2.55.

7.15. Suponga que se reduce en 100 metros la disponibilidad de madera.

7.16. Suponga que se incrementa en 50 metros la disponibilidad de tubo.

7.17. Se incrementa en $10 la utilidad de cada camarote.

7.18. Suponga que debido a los precios colocados por la competencia, la compañía se ve obligada a fijar en $20 la utilidad de cada cama doble.

7.19. Suponga que la asignación unitaria de recursos para cada camarote es 10 metros de tubo, 5 metros de madera y 10 tornillos.

7.20. Suponga que la asignación de recursos para la cama sencilla es respectivamente 4 metros de tubo, 5 metros de madera y 6 tornillos.

7.21. Se decide entregar los artículos pintados, para lo cual se cuenta con una disponibilidad de 300 mililitros de pintura, y se sabe que una cama doble consume 4 mililitros de pintura, una cama sencilla consume 2 mililitros de pintura y un camarote consume 12 mililitros de pintura.

7.22. El departamento de mercadeo ha establecido que máximo se venderán 12 camas dobles.

Capítulo 8

Transporte, transbordo y asignación

PRESENTACIÓN

En el presente capítulo se presenta el proceso de consecución desoluciones de problemas de programación lineal que tienen que ver con el problema del transporte, el problema del transbordo y el problema de asignación.

OBJETIVO GENERAL

Al finalizar el capítulo el estudiante debe estar en capacidad de obtener la solución óptima de un problema transporte, un problema de transbordo y un problema de asignación.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Entender la estructura general de un problema de transporte, un problema de transbordo y un problema de asignación.
- Obtener las condiciones de equilibrio de un problema de transporte, un problema de transbordo y un problema de asignación.
- Generar la primera solución básica factible para un problema de transporte, un problema de transbordo y un problema de asignación.
- Aplicar correctamente el procedimiento para obtener la solución óptima de un problema de transporte, un problema de transbordo y un problema de asignación.
- Interpretar las soluciones óptimas obtenidas de un problema de transporte, un problema de transbordo y un problema de asignación.

COMPETENCIAS

El estudiante tendrá la capacidad de obtener soluciones óptimas a problemas de transporte, problemas de transbordo y problemas de asignación.

INDICADORES DE LOGRO

El estudiante deberá demostrar el manejo de los procedimientos para obtener soluciones óptimas a problemas de transporte, problemas de transbordo y problemas de asignación.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Planteamiento de problemas de programación lineal.
- Estructura general de las matrices.

Existen cierto tipo de problemas de programación lineal que debido a su estructura hacen que el método simplex sea un algoritmo poco eficiente para su solución (esto no quiere decir que un problema de este tipo no se pueda solucionar mediante el algoritmo simplex). Dentro de este tipo de problemas se encuentran los tratados en este capítulo como lo son: el modelo del transporte, el modelo de transbordo y el modelo de asignación. Para este tipo de problemas se han creado algoritmos especiales para su solución los cuales son presentados en el presente capitulo.

8.1 EL MODELO DEL TRANSPORTE

El algoritmo del modelo del transporte es conocido en ingles con el nombre de *stepping stone algorithm,* que significa *algoritmo de las piedras de paso.*[1]

8.1.1. Estructura general

El desarrollo de este tipo de problemas consiste en determinar qué cantidad de un determinado artículo se debe enviar desde m orígenes, hasta n destinos. Además, se sabe que cada origen tiene una disponibilidad u oferta y que cada destino tiene una demanda. El objetivo final es minimizar los costos totales de transporte generados por la cantidad enviada de cada origen a cada destino (por lógica se conoce el costo de transportar una unidad de cada origen a cada destino). En la tabla 8.1 se presenta la estructura general de la información para aplicar el modelo del transporte, de donde se puede definir lo siguiente:

m = Número de orígenes.

n = Número de destinos.

b_i = Oferta del origen i (i = 1, 2, 3……m).

a_j = Demanda del destino j (j = 1, 2, 3……n).

C_{ij} = Costo unitario de transporte de una unidad del origen i (i = 1, 2, 3……m) al destino j (j = 1, 2, 3……n).

X_{ij} = Variable de decisión que denota la cantidad enviada del origen i (i = 1, 2, 3……m) al destino j (j = 1, 2, 3……n).

1 Prawda W Juan. *Métodos y modelos de investigación de operaciones*. Volumen 1. página 261. Editorial Limusa. Año 1994.

TABLA 8.1						
ORIGEN	DESTINO					OFERTA
	1	2	3	......	n	
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	......	C_{1n} X_{1n}	b_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	......	C_{2n} X_{2n}	b_2
3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	......	C_{3n} X_{3n}	b_3
⋮						⋮
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	......	C_{mn} X_{mn}	b_m
DEMANDA	a_1	a_2	a_3	......	a_n	

Con base en las anteriores definiciones, se expresa el modelo del transporte en forma generalizada de la siguiente manera:

$$MinZ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \quad X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = b_i \quad \forall i = 1,2,3,\cdots,m$$ Garantiza la capacidad de cada origen.

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = aj \quad \forall j = 1,2,3,\cdots,n$$ Garantiza la demanda de los destinos.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{m} b_1$$ Restricci�n de equilibrio entre oferta y demanda

$$\boldsymbol{X_{ij}} \text{ ¡Ý0} \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{i} = 1,2,3,\cdots,\boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{j} = 1,2,3,\ldots,\boldsymbol{n} \end{matrix}$$ Restricciones de no negatividad.

8.1.2 Primera solución básica factible

Así como un problema solucionado por el método simplex necesita una primera solución para luego avanzar hacia la optimalidad; este método también requiere de una primera solución, la cual se puede obtener mediante varios métodos, de los cuales aquí se tratará el método de la esquina noroeste y el método de aproximación de Vogel. Además, vale la pena anotar que la cantidad de asignaciones (variables básicas) en cualquier tabla del transporte es igual a $m + n - 1$. Donde m es la cantidad de filas (orígenes) y n es la cantidad de columnas (destinos).

8.1.2.1. Método de la esquina noroeste

Para obtener la primera solución básica factible para un problema del transporte se recomienda tener en cuenta el siguiente procedimiento:

Paso 1. Se debe equilibrar el sistema haciendo que la suma total de ofertas sea igual a la suma total de demandas (tercer tipo de restricción del modelo). Cuando el problema se encuentra desbalanceado se agrega una fila (origen) o columna (destino) ficticio según sea el caso así (en cualquier caso los costos asignados a la fila o columna son ceros):

- Si la suma de demandas es mayor que la suma de ofertas se crea un origen ficticio, al cual se le asigna una oferta de $\sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i$.
- Si la suma de ofertas es mayor que la suma de demandas se crea un destino ficticio, al cual se le asigna una demanda de $\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Paso 2. Haciendo honor al nombre del método, se busca en la tabla la esquina noroeste (noroccidental) para realizar una primera asignación. Esta esquina noroeste es el origen 1 con destino 1, es decir se le va a dar valor a X_{11}. la cantidad a asignar a esta posición debe ser el $\min\{a1, b1\}$.

Paso 3. El valor dado a X_{11}, se debe restar de la demanda a_1 y de la oferta b_1. por lógicas razones una de las dos quedará convertida en cero. Por lo tanto la fila uno o la columna 1 quedará saturada. Es posible que tanto la fila como la columna queden en cero; en este caso se satura solo una (la fila o la columna), y la otra queda con una disponibilidad de cero que deberá ser tenida en cuenta para una próxima asignación.

Paso 4. Si a_1 se convierte en cero, se pasa a la fila 1 y columna 2, a darle valor a la variable X_{12}. A esta posición se le asigna el $\min\{a2, b1 - X11\}$. Si b_1 se convierte en cero, se pasa a la fila 2 y columna 1, a darle valor a la variable X_{21}. A esta posición se le asigna el $\min\{a1 - X11, b2\}$.

Paso 5. El valor asignado a la variable se resta de la respectiva oferta y de la respectiva demanda. Siempre mínimo una oferta ó una demanda se convertirá en cero; por lo tanto por cada asignación que se realice se debe saturar una fila o una columna. (nunca ambas).

Paso 6. Dado que las filas o las columnas saturadas no se tienen en cuenta para asignar, se continúa con el procedimiento hasta llegar a la fila m y columna n, para darle valor a la variable X_{mn}. Hay que tener en cuenta que cuando quede solamente una fila o una columna; las ofertas o demanda restantes solo tendrán un lugar para ser asignadas. Luego estas últimas asignaciones se realizan teniendo en cuenta la única casilla disponible para hacerlo.

En el ejercicio 8.1 se puede apreciar la aplicación de todo este procedimiento.

Ejercicio 8.1. La empresa Oruga manufactura su producto en 3 plantas ubicadas en Bogotá, Tunja y Cúcuta, en las cuales hay una capacidad de producción semanal de 150, 60 y 180 unidades respectivamente. El producto es distribuido a través de 3 distribuidores ubicados en Chia, Cali y Pasto para los cuales se ha establecido una demanda semanal de 150, 120 y 90 unidades respectivamente.

Si se sabe que el costo de transportar una unidad de la planta de Bogotá a Chia es \$15, a Cali es \$12 y a Pasto es \$9; de la planta ubicada en Tunja a Chia es \$9, a Cali es \$12 y a Pasto es \$6; mientras que el mismo costo calculados para la planta ubicada en Cúcuta son \$12, \$18 y \$15 respectivamente par los distribuidores de Chia, Cali y Pasto; ¿Qué cantidad se debe enviar de cada planta a cada distribuidor para generar un costo total de transporte mínimo?.

Solución
En la tabla 8.2 se presenta en forma resumida la información de la empresa Oruga, donde se involucran los costos, oferta o capacidad de producción de cada planta, demanda de cada distribuidor y la variable correspondiente.

TABLA 8.2				
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**			**CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN**
	CHIA	**CALI**	**PASTO**	
BOGOTÁ	\$15 X_{11}	\$12 X_{12}	\$9 X_{13}	150
TUNJA	\$9 X_{21}	\$12 X_{22}	\$6 X_{23}	60
CÚCUTA	\$12 X_{31}	\$18 X_{32}	\$15 X_{33}	180
DEMANDA	150	120	90	

Antes de aplicar los pasos para obtener la primera solución básica factible es bueno recordar como queda el planteamiento del modelo matemático de programación lineal. La variable tiene que ver con la cantidad a enviar de cada planta a cada distribuidor; por lo tanto su definición es así:

X_{IJ} = Cantidad enviada de la planta i (i=1, 2, 3) al distribuidor j (j=1, 2 y 3).
Con base en esta definición de la variable el modelo a resolver es:

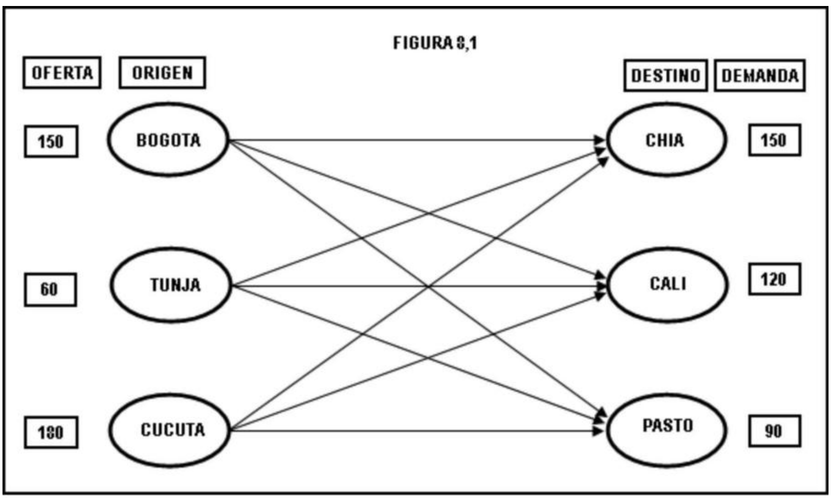
$$\text{Min } Z = 15X_{11} + 12X_{12} + 9X_{13} + 9X_{21} + 12X_{22} + 6X_{23} + 12X_{31} + 18X_{32} + 15X_{33}$$

S.A.

$$\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} + X_{13} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad &= 150.\\
X_{21} + X_{22} + X_{23} \quad\quad\quad\quad &= 60.\\
X_{31} + X_{32} + X_{33} &= 180.\\
X_{11} \quad\quad + X_{21} \quad\quad + X_{31} \quad\quad &= 150.\\
X_{12} \quad\quad + X_{22} \quad\quad + X_{32} \quad &= 120.\\
X_{13} \quad\quad + X_{23} \quad\quad + X_{33} &= 90.
\end{aligned}$$

$X_{IJ} \geq 0.$

Además, en la figura 8.1 se presenta este problema en forma de red[2].



Aplicando los pasos mencionados para la asignación se tiene lo siguiente:

Paso 1. Equilibrar el sistema. La sumatoria de las demandas da un valor de 360 y la sumatoria de ofertas o capacidades de producción da un valor de 390.

2 No se pretende dar modelos de redes en este capitulo. Quien desee profundizar en el tema de redes puede recurrir a cualquier texto de investigación de operaciones.

Como la oferta es mayor que la demanda hay que crear un distribuidor ficticio (columna ficticia) que canalice la diferencia entre oferta y demanda; en este caso la demanda de este distribuidor ficticio es 390-360=30 unidades. Los costos asignados a este nuevo distribuidor son ceros para no alterar el problema. En la tabla 8.3 se presenta el problema balanceado.

TABLA 8.3

PLANTA	DISTRIBUIDOR				CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA	CALI	PASTO	FICTICIO	
BOGOTÁ	15	12	9	0	150
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	
TUNJA	9	12	6	0	60
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	
CÚCUTA	12	18	15	0	180
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
DEMANDA	150	120	90	30	

Paso 2. Primera asignación. Buscando la esquina noroeste, corresponde asignar valor a la variable X_{11} mediante el mínimo entre la oferta 1 (Bogotá) y la demanda 1 (Chia). Esto es $\min\{150,150\}=150$. Lo que indica que X_{11}=150. por lo tanto la oferta de Bogotá, es $150-150=0$ y la demanda de Chia queda $150-150=0$. Tanto la oferta como la demanda han quedado en cero; por lo tanto se satura una de las dos y la otra queda en consideración para una asignación futura. Para este ejercicio se satura la fila y se deja en consideración la columna. En la tabla 8.4 se presenta esta primera asignación.

TABLA 8.4

PLANTA	DISTRIBUIDOR				CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA	CALI	PASTO	FICTICIO	
BOGOTÁ	15	12	9	0	0
	150	*	*	*	
TUNJA	9	12	6	0	60
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	
CÚCUTA	12	18	15	0	180
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
DEMANDA	0	120	90	30	

El asterisco en la tabla 8.4 indica que esa posición no puede recibir ninguna asignación y en este caso esa fila esta saturada (tiene disponibilidad de cero). La columna de Chia, cuya demanda también es cero, no esta saturada; por lo tanto esa demanda de cero esta en consideración para ser asignada.

Paso 3. Segunda asignación. Tal como lo indica el procedimiento, estando saturada la fila uno se pasa a asignar en la fila dos y columna uno. Se dará valor a la variable X_{21}. Este valor es el $\min\{0,60\}=0$. Por lo tanto $X_{21}=0$. En este caso al restar cero tanto la oferta como la demanda quedan lo mismo, pero ahora si se satura la columna. En la tabla 8.5 se presenta esta asignación con la columna 1 saturada.

TABLA 8.5					
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**				**CAPACIDAD DE PRODUCCION**
	CHIA	**CALI**	**PASTO**	**FICTICIO**	
BOGOTÁ	15	12	9	0	0
	150	*	*	*	
TUNJA	9	12	6	0	60
	0	X_{22}	X_{23}	X_{24}	
CÚCUTA	12	18	15	0	180
	*	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
DEMANDA	0	120	90	30	

Paso 4. Tercera asignación. La siguiente esquina noroeste (no se tiene en cuenta la columna uno y la fila uno, están saturadas) en consideración es la fila dos y columna dos. El valor de X_{22} es el $\min\{120,60\}=60$. Con base en este valor, la oferta de Tunja queda $60-60=0$ y la demanda de Cali queda $120-60=60$. En la tabla 8.6 se presenta esta asignación con las nuevas ofertas y demandas.

TABLA 8.6					
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**				**CAPACIDAD DE PRODUCCION**
	CHIA	**CALI**	**PASTO**	**FICTI-CIO**	
BOGOTA	15	12	9	0	0
	150	*	*	*	
TUNJA	9	12	6	0	0
	0	60	*	*	
CUCUTA	12	18	15	0	180
	*	X_{32}	X_{33}	X_{34}	
DEMANDA	0	60	90	30	

Obsérvese, en la tabla 8.6 que se ha saturado la fila dos (planta de Tunja), la cual quedo con una oferta de cero.

Paso 5. Ultimas asignaciones. En la tabla 8.6 se observa que solo queda disponible la fila tres (planta de Cúcuta); por lo tanto las demandas disponibles en Cali, Pasto y el ficticio se asignan en la única casilla que tienen disponible. Esto es, $X_{32}=60$, $X_{33}=90$ y $X_{34}=30$. En la tabla 8.7 se presenta estas asignaciones, teniendo en cuenta que la oferta de Cúcuta queda así: $180-60-90-30=0$, la demanda de Cali queda $60-60=0$, la demanda de Pasto queda $90-90=0$ y la demanda para el ficticio queda igual a $30-30=0$.

TABLA 8.7									
PLANTA	DISTRIBUIDOR								CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO		
BOGOTÁ		15		12		9		0	0
	150		*		*		*		
TUNJA		9		12		6		0	0
	0		60		*		*		
CÚCUTA		12		18		15		0	0
	*		60		90		30		
DEMANDA	0		0		0		0		

Con base en todas las asignaciones realizadas, en la tabla 8.8 se presenta toda la primera solución básica factible para la compañía Oruga; adicionándole el costo generado por dicha solución.

TABLA 8.8									
PLANTA	DISTRIBUIDOR								CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO		
BOGOTÁ		15		12		9		0	150
	150								
TUNJA		9		12		6		0	60
	0		60						
CÚCUTA		12		18		15		0	180
			60		90		30		
DEMANDA	150		120		90		30		Z = 5400

La solución generada por el método de la esquina noroeste se interpreta de la siguiente forma:

X_{11}= 150. La planta de Bogotá envía 150 unidades a Chia.

X_{21}= 0. La planta de Tunja no envía unidades a Chia.

X_{22}= 60. La planta de Tunja envía 60 unidades a Cali.

X_{32}= 60. La planta de Cúcuta envía 60 unidades a Cali.

X_{33}= 90. La planta de Cúcuta envía 90 unidades a Pasto.

X_{34}= 30. La planta de Cúcuta tiene una sobre producción de 30 unidades. (recuerde que ésta corresponde al distribuidor ficticio).

Todas las demás variables en esta solución toman valor de cero, pues corresponden a las variables no básicas. Al igual que en el método simplex, esta es una solución degenerada ya que hay una variable básica que toma valor de cero (X_{21}).

La anterior solución genera un costo total de transporte de $5400, que se calcula mediante la cantidad enviada por el costo unitario de transporte así:

$$Z = 150(15) + 0(9) + 60(12) + 60(18) + 90(15) + 30(0) = \$5400.$$

El lector puede observar que la cantidad de asignaciones es exactamente $m+n-1=3+4-1=6$; que equivale exactamente a la cantidad de variables básicas definidas en la solución del problema. Observe que se esta contando la asignación cero, que se generó cuando al realizar una asignación, tanto la oferta como la demanda quedaron en cero (muy importante tener en cuenta este criterio).

8.1.2.2. Método de aproximación de vogel

El método de aproximación de Vogel, aunque no tan sencillo como el método de la esquina noroeste para obtener la primera solución básica factible; generalmente deja la solución más cerca del costo mínimo (Óptimo). Para obtener la primera solución a partir de este método se deben seguir los siguientes pasos:

Paso 1. Se debe equilibrar el sistema haciendo que la suma total de ofertas sea igual a la suma total de demandas (tercer tipo de restricción del modelo). Cuando el problema se encuentra desbalanceado se agrega una fila (origen) o columna (destino) ficticio según sea el caso así (en cualquier caso los costos asignados a la fila o columna son ceros):

•Si la suma de demandas es mayor que la suma de ofertas se crea un origen ficticio, al cual se le asigna una oferta de $\sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{i=1}^{m} b_i$.

•Si la suma de ofertas es mayor que la suma de demandas se crea un destino ficticio, al cual se le asigna una demanda de $\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$.

Paso 2. Después de tener el problema balanceado; para cada origen (fila) y cada destino (columna) se calcula la diferencia entre los dos costos mínimos.

Paso 3. De todas las diferencias calculadas se establece la mayor.

Paso 4. En el origen (fila) o destino (columna) al que corresponda la mayor diferencia, se determina el menor costo unitario de transporte.

Paso 5. En la casilla correspondiente al costo mínimo establecido en el paso 4 se realiza asignación. Con base en esta asignación se le dará valor a la variable X_{ij}. La cantidad a asignar a esta posición debe ser el $\min\{aj, bi\}$.

Paso 6. El valor dado a X_{ij}, se debe restar de la demanda a_j y de la oferta b_i. Por lógicas razones una de las dos quedará convertida en cero. Por lo tanto la fila i o la columna j quedará saturada. Es posible que tanto la fila como la columna queden en cero; en este caso se satura solo una (la fila o la columna), y la otra queda con una disponibilidad de cero que deberá ser tenida en cuenta para una próxima asignación.

Paso 6. Dado que las filas o las columnas saturadas no se tienen en cuenta para asignar, se continúa nuevamente con el paso 2 hasta tener disponible solamente una fila o una columna; las ofertas o demanda restantes solo tendrán un lugar para ser asignadas. Luego, estas últimas asignaciones se realizan teniendo en cuenta la única casilla disponible para hacerlo.

Con base en el ejercicio 8.1, se puede apreciar la aplicación del método de aproximación de Vogel para obtener la primera solución básica factible de la siguiente manera:

Paso 1. El problema ya se trae equilibrado, ya que fue el mismo procedimiento de la asignación de la esquina noroeste.

Paso 2. Establecer diferencias. En la tabla 8.8 se presenta el calculo de las diferencias entre los dos costos mínimos para cada planta (origen) y cada distribuidor (destino); por ejemplo los dos costos mínimos para Chia son 9 y 12, su diferencia es 3.

Paso 3. Establecer la máxima diferencia. Tal como se puede verificar, la máxima diferencia de todas las halladas es 12.

Paso 4. La diferencia 12 establecida en el paso anterior corresponde a la planta de Cúcuta (tercera filia); y el menor costo en ésta fila corresponde a un valor de 0 (distribuidor ficticio en esta fila).

Paso 5. Asignación. En la casilla correspondiente al costo mínimo se procederá a realizar asignación. La asignación es $\min\{30, 180\} = 30$. Lo que indica que la variable X_{34}=30.

Paso 6. Restar la asignación de la demanda y de la oferta correspondientes. La demanda del distribuidor ficticio queda $30 - 30 = 0$; mientras que la oferta o capacidad de la planta de Cúcuta queda $180 - 30 = 150$. En la tabla 8.9 se puede apreciar la oferta y demanda después de realizada la asignación; además de calcular nuevamente las diferencias entre los dos costos mínimos. Obsérvese que el ficticio es el que queda con demanda cero, queda saturado y por lo tanto este distribuidor no se tiene en cuenta para el cálculo de las nuevas diferencias. El asterisco en la tabla 8.9 indica la saturación.

TABLA 8.8

PLANTA	DISTRIBUIDOR				OFERTA	DIFERENCIA
	CHIA	CALI	PASTO	FICTICIO		
BOGOTÁ	15	12	9	0	150	9
TUNJA	9	12	6	0	60	6
CÚCUTA	12	18	15	0	180	12
DEMANDA	150	120	90	30		
DIFERENCIA	3	0	3	0		

TABLA 8.9

PLANTA	DISTRIBUIDOR				OFERTA	DIFERENCIA
	CHIA	CALI	PASTO	FICTI-CIO		
BOGOTÁ	15	12	9	0	150	3
				*		
TUNJA	9	12	6	0	60	3
				*		
CÚCUTA	12	18	15	0	150	3
				30		
DEMANDA	150	120	90	0		
DIFERENCIA	3	0	3	*		

Paso 7. A partir de la tabla 8.9 en donde se calcularon nuevamente las diferencias, ya se empieza a repetir el proceso desde el paso 2. la máxima diferencia calculada en la tabla 8.9 es 3. Este dato corresponde a más de un origen y destino. El empate se rompe de manera arbitraria; en este caso se elige el 3 correspondiente a la planta de Bogotá.

Paso 8. En la planta de Bogotá, el costo mínimo (sin tener en cuenta los saturados) es 9. En esta casilla se asigna el $\min\{90,150\}=90$; por lo tanto X_{13}=90.

Paso 9. Con base en la anterior asignación; la demanda de Pasto queda en $90-90=0$ y la oferta de Bogota queda en $150-90=60$. En este caso queda saturado el distribuidor pasto. En la tabla 8.10 se presenta estos cálculos; así como las nuevas diferencias entre los dos costos mínimos tanto para cada fila como para cada columna.

TABLA 8.10						
PLANTA	DISTRIBUIDOR				OFERTA	DIFERENCIA
	CHIA	CALI	PASTO	FICTICIO		
BOGOTÁ	15	12	9	0	60	3
			90	*		
TUNJA	9	12	6	0	60	3
			*	*		
CÚCUTA	12	18	15	0	150	6
			*	30		
DEMANDA	150	120	0	0		
DIFERENCIA	3	0	*	*		

Paso 10. La máxima diferencia obtenida en la tabla 8.10 es 6 que corresponde a la planta de Cúcuta; y mínimo costo disponible en ésta planta es 12.

Paso 11. La asignación correspondiente a ésta casilla es $\min\{150,150\}=150$. Entonces, la variable X_{31}=150.

Paso 12. Con base en la asignación realizada, la oferta de Cúcuta queda en $150-150=0$ y la demanda de Chia queda en $150-150=0$. Como los dos han quedado en cero solo se satura uno de ellos de forma arbitraria (en este ejemplo se satura la fila, Cúcuta) y el otro que da disponible para una asignación de cero. En la tabla 8.11 se presentan dichas modificaciones y los nuevos cálculos de diferencias.

Paso 13. Con base en las diferencias establecidas en la tabla 8.11, la mayor es 6 que corresponde a Chia. Entonces, en Chia el costo mínimo disponible es 9. En esta casilla se asigna el $\min\{0,60\}=0$. Esto indica que X_{21}=0. Como la asignación es cero, las demandas y ofertas quedan iguales y se satura la columna 1 (distribuidor Chia). La tabla 8.12 muestra la información con el distribuidor de Chia saturado.

Paso 14. Con base en la tabla 8.12, se tiene disponible solo una columna (distribuidor Cali) por lo tanto no queda más que realizar las asignaciones en las casillas correspondientes de las ofertas que faltan. Esto es que X_{12}=60 y X_{22}=60.

TABLA 8.11										
PLANTA	DISTRIBUIDOR								OFERTA	DIFERENCIA
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO			
BOGOTÁ		15		12		9		0	60	3
					90		*			
TUNJA		9		12		6		0	60	3
					*		*			
CÚCUTA		12		18		15		0	0	*
	150		*		*		30			
DEMANDA	0		120		0		0			
DIFERENCIA	6		0		*		*			

Paso 15. Con base en la asignación realizada en el paso 14, la oferta de Bogotá queda en $60-60=0$, la oferta de Tunja queda en $60-60=0$ y demanda de Cali queda en $120-60-60=0$. En la tabla 8.13 se presentan las asignaciones realizadas y todas las ofertas y demandas en cero. Lo anterior indica que ya se realizaron todas las asignaciones.

TABLA 8.12										
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**								**OFERTA**	**DIFERENCIA**
	CHIA		**CALI**		**PASTO**		**FICTICIO**			
BOGOTÁ		15		12		9		0	60	
	*				90		*			
TUNJA		9		12		6		0	60	
	0				*		*			
CÚCUTA		12		18		15		0	0	*
	150		*		*		30			
DEMANDA	0		120		0		0			
DIFERENCIA	*		0		*		*			

Paso 16. como se puede verificar en la tabla 8.13; la cantidad de asignaciones es 6, numero que corresponde exactamente a $m+n-1=3+4-1=6$. Este dato incluye la asignación de cero que se obtuvo en el momento que la oferta y la demanda dieron como resultado de cero.

TABLA 8.13										
PLANTA	DISTRIBUIDOR								OFERTA	DIFERENCIA
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO			
BOGOTÁ		15		12		9		0	0	*
	*		60		90		*			
TUNJA		9		12		6		0	0	*
	0		60		*		*			
CÚCUTA		12		18		15		0	0	*
	150		*		*		30			
DEMANDA	0		0		0		0			
DIFERENCIA	*		*		*		*			

Finalmente, en la tabla 8.14 se presenta la asignación total para la primera solución básica factible obtenida a partir del método de aproximación de vogel, agregándole el costo de dicha solución.

TABLA 8.14									
PLANTA	DISTRIBUIDOR								CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO		
BOGOTÁ		15		12		9		0	150
			60		90				
TUNJA		9		12		6		0	60
	0		60						
CÚCUTA		12		18		15		0	180
	150						30		
DEMANDA	150		120		90		30		Z = 4050

La solución generada por el método de aproximación de Vogel se interpreta de la siguiente forma:

X_{12}= 60. La planta de Bogotá envía 60 unidades a Cali.

X_{13}= 90. La planta de Bogotá envía 90 unidades a Pasto.

X_{21}= 0. La planta de Tunja no envía unidades a Chia.

X_{22}= 60. La planta de Tunja envía 60 unidades a Cali.

X_{31}= 150. La planta de Cúcuta envía 150 unidades a Chia.

X_{34}= 30. La planta de Cúcuta tiene una sobre producción de 30 unidades. (recuerde que ésta corresponde al distribuidor ficticio).

Todas las demás variables en esta solución toman valor de cero, pues corresponden a las variables no básicas. Al igual que en el método simplex, esta es una solución degenerada ya que hay una variable básica que toma valor de cero (X_{21}).

La anterior solución genera un costo total de transporte de $5.400, que se calcula mediante la cantidad enviada por el costo unitario de transporte así:

$$Z = 60(12) + 90(9) + 0(9) + 60(12) + 150(12) + 30(0) = \$4.050$$

8.1.3. Solución óptima

Luego de obtener una primera solución se debe verificar si es óptima; y si no lo es se debe avanzar hacia ella, hasta conseguirla. Para avanzar hacia la solución óptima existen varios métodos; en este texto se utilizará el método de ciclos, cruce del arroyo o saltado de piedras (algunos textos denominan este método de esta forma). En el proceso de avance hacia la solución óptima se toma el siguiente procedimiento:

Paso 1. Realizar la prueba de optimalidad a la primera solución básica factible. Si la solución no es óptima, continuar con el paso 2.

Paso 2. Seleccionar la variable que entra a la base.

Paso 3. Determinar el valor de la nueva variable básica.

Paso 4. Seleccionar la variable que sale de la base.

Paso 5. Establecer la nueva solución.

Paso 6. Realizar la prueba de optimalidad a la nueva solución. Si ésta solución no es optima hay que regresar al paso 2.

PRUEBA DE OPTIMALIDAD

Como lo recordará el lector, en el método simplex la solución óptima la determinan los valores Z_J-C_J. En el modelo del transporte es exactamente lo mismo, solo que la variable es bidimensional, por lo tanto se deben calcular los valores Z_{IJ}-C_{IJ} para todas las variables no básicas o casillas que no tengan asignación (las variables básicas siempre generan Z_{IJ}-C_{IJ} igual a cero). Cuando todos los valores Z_{IJ}-C_{IJ} son mayores o iguales a cero, el problema se encuentra en la solución optima.

Para calcular estos valores se utiliza el método del cruce del arroye, generando un ciclo de la siguiente manera:
En la casilla a evaluar (siempre es una casilla que no tiene asignación) se coloca un signo mas (+).

A partir del signo mas (+) se genera un circuito con casillas que tengan asignación (variables básicas) utilizando alternativamente signos menos (-) y mas (+) hasta regresar a la casilla evaluada.

Con base en los signos colocados se realiza la sumatoria de costos.

A continuación se aplica este procedimiento a la primera solución básica factible obtenida a partir del método de aproximación de vogel (se aplica el mismo procedimiento sin importar que método se utilizó para establecer la primera solución).

Variable X_{11}: Z_{11}-C_{11} = 15 -12 +12 -9 = 6.

El procedimiento de colocación de los signos para la evaluación de la variable X_{11} se muestra en la tabla 8.15.

TABLA 8.15									
PLANTA	DISTRIBUIDOR								CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO		
BOGOTÁ	+	15	-	12		9		0	150
			60		90				
TUNJA	-	9	+	12		6		0	60
	0		60						
CÚCUTA		12		18		15		0	180
	150						30		
DEMANDA	150		120		90		30		Z = 4050

Tal como se puede observar, en la casilla evaluada se asignó un más (única casilla del circuito que no tiene asignación), el resto de casillas utilizadas si tiene asignación. El negativo colocado en la casilla de la variable X_{21} cierra el circuito con el más colocado en la casilla evaluada.

Variable X_{14}: Z_{14}-C_{14} = 0-0+12-9+12-12 = 3.

El procedimiento de colocación de los signos para la evaluación de la variable X_{14} se muestra en la tabla 8.16.

Variable X_{23}: Z_{23}-C_{23} = 6-12+12-9 = -3.

El procedimiento de colocación de los signos para la evaluación de la variable X_{23} se muestra en la tabla 8.17.

Variable X_{24}: Z_{24}-C_{24} = 0-0+12-9 = 3.

TABLA 8.16					
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**				**CAPACIDAD DE PRODUCCION**
	CHIA	**CALI**	**PASTO**	**FICTICIO**	
BOGOTÁ	15	- 12	9	+ 0	150
		60	90		
TUNJA	- 9	+ 12	6	0	60
	0	60			
CÚCUTA	+ 12	18	15	- 0	180
	150			30	
DEMANDA	150	120	90	30	Z = 4050

TABLA 8.17					
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**				**CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN**
	CHIA	**CALI**	**PASTO**	**FICTICIO**	
BOGOTÁ	15	+ 12	- 9	0	150
		60	90		
TUNJA	9	- 12	+ 6	0	60
	0	60			
CÚCUTA	12	18	15	0	180
	150			30	
DEMANDA	150	120	90	30	Z = 4050

El procedimiento de colocación de los signos para la evaluación de la variable X_{24} se muestra en la tabla 8.18.

TABLA 8.18					
PLANTA	**DISTRIBUIDOR**				**CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN**
	CHIA	**CALI**	**PASTO**	**FICTICIO**	
BOGOTÁ	15	12	9	0	150
		60	90		
TUNJA	- 9	12	6	+ 0	60
	0	60			
CÚCUTA	+ 12	18	15	- 0	180
	150			30	
DEMANDA	150	120	90	30	Z = 4050

Variable X_{32}: Z_{32}-C_{32} = 18-12+9-12 = 3.

El procedimiento de colocación de los signos para la evaluación de la variable X_{32} se muestra en la tabla 8.19.

TABLA 8.19									
PLANTA	DISTRIBUIDOR								CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO		
BOGOTÁ		15		12		9		0	150
			60		90				
TUNJA	+	9	-	12		6		0	60
	0		60						
CÚCUTA	-	12	+	18		15		0	180
	150						30		
DEMANDA	150		120		90		30		Z = 4050

Variable X_{33}: Z_{33}-C_{33} = 15-12+9-12+12-9 = 3.

El procedimiento de colocación de los signos para la evaluación de la variable X_{33} se muestra en la tabla 8.20.

TABLA 8.20									
PLANTA	DISTRIBUIDOR								CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA		CALI		PASTO		FICTICIO		
BOGOTÁ		15	+	12	-	9		0	150
			60		90				
TUNJA	+	9	-	12		6		0	60
	0		60						
CÚCUTA	-	12		18	+	15		0	180
	150						30		
DEMANDA	150		120		90		30		Z = 4050

En las tablas 8.16 y 8.20 se puede observar que no necesariamente el circuito se cierra en forma de rectángulo con las celdas utilizadas. Además, en las evaluaciones se puede detallar la importancia de la asignación de cero en la celda de la variable X_{21}, pues si ésta no se hubiera colocado, no se podrían cerrar los circuitos.

Resumiendo, los resultados de las evaluaciones para los valores Z_{IJ}-C_{IJ} de las variables no básicas se presentan enseguida:

Variable X_{11}: Z_{11}-C_{11} = 15 -12 +12 -9 = 6.

Variable X_{14}: Z_{14}-C_{14} = 0-0+12-9+12-12 = 3.

Variable X_{23}: Z_{23}-C_{23} = 6-12+12-9 = **-3**. ← Valor más negativo.

Variable X_{24}: Z_{24}-C_{24} = 0-0+12-9 = 3.

Variable X_{32}: Z_{32}-C_{32} = 18-12+9-12 = 3.

Variable X_{33}: Z_{33}-C_{33} = 15-12+9-12+12-9 = 3.

Como ya se dijo con anterioridad, para que la solución sea óptima, los valores evaluados deben ser mayores o iguales a cero; por lo tanto se concluye que la solución presentada en la tabla 8.14 no es óptima por cuanto hay un valor negativo. Esto indica que se debe continuar con el proceso para obtener una nueva solución a partir de la presentada en la tabla 8.14.

Determinación de la variable que entra a la base

Para determinar que variable entra a la base se establece mediante la aplicación de las condiciones de optimalidad del método simplex, tomando como variable de entrada aquella que tenga el Z_{IJ}-C_{IJ} más negativo. Como se puede observar, en este caso solo hay un negativo (-3) por lo cual entra a la base aquella variable a la cual corresponda dicho valor; en el ejemplo entra a la base la variable X_{23}. En el caso en que haya varios valores negativos, y el más negativo corresponda a más de una evaluación, el empate se rompe arbitrariamente y entra a la base cualquier variable de las empatadas.

Determinación del valor de la nueva variable básica

Para establecer el valor que toma la nueva variable básica, inicialmente se asigna a dicha variable (celda) un valor de H. Seguidamente, utilizando el mismo procedimiento de colocación de signos. Se resta y se suma el valor H en celdas asignadas hasta cerrar el circuito con la H inicial de la variable que entra a la base. En la tabla 8.21 se presenta el proceso de colación de suma y resta del valor H. El valor que toma H es el mínimo valor entre las asignaciones que haya donde H quede restando.

Con base en este criterio inicialmente la variable que entra en el ejemplo, X_{23}=H.

TABLA 8.21

PLANTA	DISTRIBUIDOR: CHIA	CALI	PASTO	FICTICIO	CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
BOGOTA	15	12	9	0	150
		60+H	90-H		
TUNJA	9	12	6	0	60
	0	60-H	H		
CÚCUTA	12	18	15	0	180
	150			30	
DEMANDA	150	120	90	30	Z = 4050

Obsérvese que H se colocó en las mismas casillas utilizadas en la tabla 8.17, cuando se evalúo el valor Z_J-C_J para la variable X_{23}, y además con el mismo signo. (Esto siempre es del mismo modo).

Como el valor de H es el valor mínimo de las asignaciones que haya donde H este restando, entonces se determina lo siguiente para el ejemplo: $H = Min\{90,60\} = 60$, por lo tanto el valor de $X23 = 60$.

Determinación de la variable que sale de la base

La variable que sale de la base es justamente la variable de la celda de donde se determinó el valor de H. Para el ejercicio que se esta aplicando es la variable donde esta la asignación de 60. En este caso corresponde a la variable $\mathbf{X_{22}}$. En el caso en que el valor de H salga de más de una celda (hay empate en el valor mínimo donde la H se encuentra restando), sale arbitrariamente de la base solo una de las variables en cuestión y las demás variables en la siguiente solución tomarán valor de cero (son variables básicas con valor de cero.

Establecimiento de la nueva solución

El proceso a realizar para obtener la nueva solución es muy sencillo; es simplemente realizar la operación indicada por la H (sumar o restar) en el tablero donde se hayan colocado. En la tabla 8.22 se presenta la nueva solución, obtenida al realizar las operaciones indicadas en la tabla 8.21.

TABLA 8.22

PLANTA	DISTRIBUIDOR				CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN
	CHIA	CALI	PASTO	FICTICIO	
BOGOTÁ	15	12	9	0	150
		120	30		
TUNJA	9	12	6	0	60
	0		60		
CÚCUTA	12	18	15	0	180
	150			30	
DEMANDA	150	120	90	30	Z = 3870

Prueba de optimalidad para la nueva solución

Nuevamente se deben calcular los valores Z_{IJ}-C_{IJ} para todas las variables no básicas con base en la solución presentada en la tabla 8.22. Dando por hecho que el procedimiento de colocar más y menos hasta cerrar el circuito ha sido entendido claramente, aquí no se determinará una tabla por cada evaluación. Los resultados son los siguientes:

Variable X_{11}: $Z_{11}-C_{11} = 15 -9 +6 -9 = 3$.

Variable X_{14}: $Z_{14}-C_{14} = 0-0+12-9+6-9 = 0$.

Variable X_{22}: $Z_{22}-C_{22} = 12-12+9-6 = 3$.

Variable X_{24}: $Z_{24}-C_{24} = 0-0+12-9 = 3$.

Variable X_{32}: Z_{32}-C_{32} = 18-12+9-6+9-12 = 6.

Variable X_{33}: Z_{33}-C_{33} = 15-12+9-6 = 6.

Todos los valores hallados son mayores o iguales a cero; lo que indica que la solución presentada en la tabla 8.22 es optima. Esta solución se interpreta de la siguiente manera:

X_{12}= 120. La planta de Bogotá envía 120 unidades a Cali.

X_{13}= 30. La planta de Bogotá envía 30 unidades a Pasto.

X_{21}= 0. La planta de Tunja no envía unidades a Chia.

X_{23}= 60. La planta de Tunja envía 60 unidades a Pasto.

X_{31}= 150. La planta de Cúcuta envía 150 unidades a Chia.

X_{34}= 30. La planta de Cúcuta tiene una sobre producción de 30 unidades. (recuerde que ésta corresponde al distribuidor ficticio).

Todas las demás variables en esta solución toman valor de cero, pues corresponden a las variables no básicas. Al igual que en el método simplex, esta es una solución degenerada ya que hay una variable básica que toma valor de cero (X_{21}).

La anterior solución óptima genera un costo total mínimo de transporte de \$3.870, que se calcula mediante la cantidad enviada por el costo unitario de transporte así:

Además, se puede observar que hay un Z_{IJ}-C_{IJ} igual a cero (variable X_{14}) lo que indica que el problema tiene soluciones óptimas múltiples (interpretación igual a la señalada en el método simplex). Se invita al lector a que repita el procedimiento entrando a la base la variable X_{14} para obtener otra solución óptima alternativa.

Para finalizar el tratado de este modelo hay que anotar que el modelo del transporte puede aceptar varios productos enviados desde cada origen a cada destino. El procedimiento de solución básicamente es el mismo solo que se considera cada producto fabricado en cada planta como un solo origen y cada producto demandado en cada destino como un único destino.

8.2 EL MODELO DEL TRANSBORDO

El modelo del transporte visto en la sección anterior considera que una ruta directa entre un origen y un destino genera el costo mínimo, mientras que el modelo del transbordo no considera envíos directos de los orígenes hacia los destinos; sino que evalúa la posibilidad de hacer envíos entre orígenes y entre destinos. Es decir, "la nueva formulación tiene la característica adicional de permitir que un envío (parcial o completo) pase en forma transitoria por otras fuentes y destinos antes de que llegue por último a su destino designado."[3]

Esto supone que cada evento o nodo de la red del transporte se puede considerar como un origen, un destino, un origen provisional o un destino provisional. Por lo tanto todos los orígenes se deben establecer como destinos y todos los destinos se deben considerar como orígenes; lo que significa que la cantidad de orígenes y la cantidad de destinos en este modelo es igual a la suma de orígenes y destinos del modelo del transporte original. Para este modelo obviamente se requiere de la información de costos de transporte entre orígenes y entre destinos; además, de necesitar calcular los costos desde cada destino a cada origen. Generalmente no es lo mismo transportar de Bogotá a Cali, que de Cali a Bogotá, es posible que las rutas y vías por donde se transite no sean las mismas. En el ejercicio 8.2.1 se puede verificar el procedimiento de transformación de un problema que satisfaga estas condiciones. Este modelo considera que para que sea posible el paso transitorio o provisional de la mercancía, se debe aprovisionar a cada origen y cada destino de una cantidad de almacenaje de reserva. El procedimiento a seguir lleva los siguientes pasos:

Paso 1. Establecer la cantidad de reserva que se deja en todo origen y todo destino original. Esta cantidad de reserva R se determina de la siguiente manera: $R = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} \; ; \; \sum_{i=1}^{m} b_i \right\}$, esto quiere decir que el valor de la cantidad de reserva es el máximo valor entre la suma de todas las demandas y la suma de todas las ofertas.

Paso 2. A la oferta de cada origen y la demanda de cada destino se le suma la cantidad de reserva R.

Paso 3. Colocar todos los destinos como orígenes asignándole una oferta igual a la cantidad de reserva R.

Paso 4. Colocar todos los orígenes como destinos asignándole una demanda igual a la cantidad de reserva R.

3 Taha Handy A. *Investigación de operaciones*. Editorial Alfaomega. Año 1991. Segunda edición. Página 216.

Paso 5. Establecer las condiciones de equilibrio entre oferta y demanda tal como se hace en el modelo del transporte.

Paso 6. Aplicar el mismo procedimiento del modelo del transporte para obtener una primera solución básica factible y luego llegar a la solución optima.

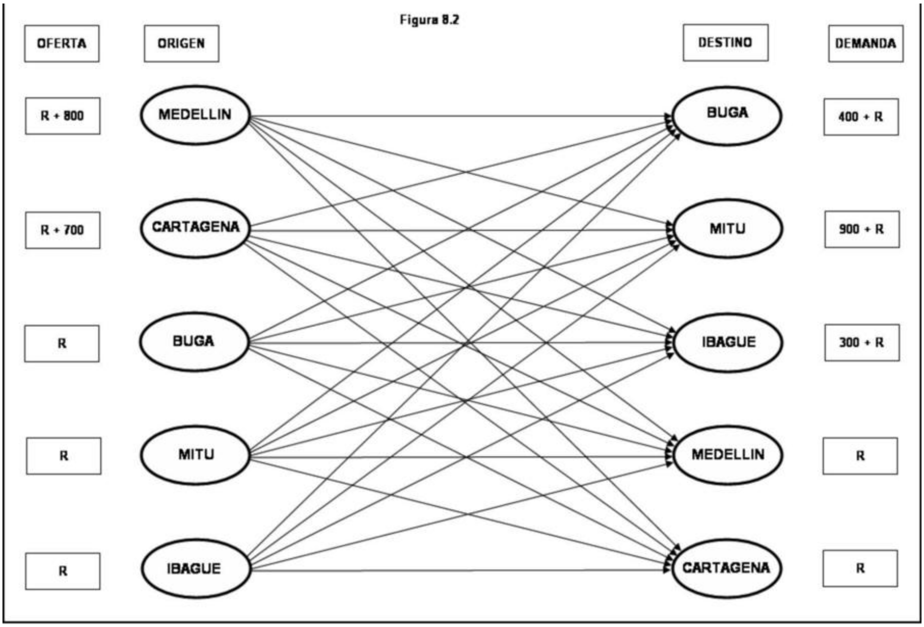
Ejercicio 8.2.1. Una empresa de electrodomésticos, fabrica de neveras en sus dos plantas (Medellín y Cartagena) en los cuales hay una capacidad de producción de 800 y 700 unidades mensuales respectivamente. El producto se comercializa a través de tres distribuidores ubicados en Buga, Mitú e Ibagué, para los cuales se ha establecido una demanda mensual de 400, 900 y 300 neveras respectivamente. Además, se ha establecido que el costo de transportar una nevera Medellín a Buga es $10, a Mitú es $15 y a Ibagué es $11; mientras que el costo unitario de transportar cada nevera de Cartagena a Buga es $12, a Mitú es $9 y a Ibagué es $8. Esta información en forma de modelo del transporte se presenta en la tabla 8.23.

TABLA 8.23

PLANTA	DISTRIBUIDOR			OFERTA
	BUGA	MITÚ	IBAGUE	
MEDELLÍN	$10	$15	$11	800
CARTAGENA	$12	$9	$8	700
DEMANDA	400	900	300	

En la tabla anterior aparece la información para poder ser trabajada normalmente con el algoritmo del transporte; pero se va a aceptar transportes entre plantas y entre distribuidores, razón por la cual se requiere de la información de costos de transporte de cada nevera entre las plantas y entre los distribuidores. Suponga que el costo de transportar una nevera entre Medellín y Cartagena es $2, entre Buga y Mitú es $4, entre Buga e Ibagué es $1 y entre Mitú e Ibagué es $3.

Se han definido los costos de transportar en un solo sentido y se necesita también en sentido contrario; para simplificar esta información se supondrá que el costo de transportar una nevera en sentido contrario a los sitios establecidos es el mismo (mismo costo de Medellín a Cartagena que de Cartagena a Medellín, como se dijo anteriormente, no siempre es así). Lo que quiere decir que el problema a resolver en forma de red se puede apreciar en la figura 8.2.



Solución

Aplicando los pasos descritos en el procedimiento se tiene lo siguiente:

Paso 1. Establecer la cantidad de reserva. La suma de demandas es 400+900+300=1.600, mientras que la suma de ofertas es 800+700=1500. por lo tanto la cantidad de reserva es: $R = \max\{1600;1500\} = 1600$

Paso 2. A la oferta de cada origen y la demanda de cada destino se le suma la cantidad de reserva R=1600. Las ofertas quedan asi: Medellín con 2400 y Cartagena queda con 2300; mientras que las demandas se convierten en: Buga con 2000, Mitú con 2500 e Ibagué con 1900.

Paso 3. Colocar todos los destinos como orígenes asignándole una oferta igual a la cantidad de reserva R. Al colocar los destinos (distribuidores) Buga, Mitú e Ibagué como orígenes (plantas) quedan con una oferta de 1600 unidades.

Paso 4. Colocar todos los orígenes como destinos asignándole una demanda igual a la cantidad de reserva R. Cuando se colocan los orígenes (Plantas) Medellín y Cartagena como destinos (distribuidores) se les asigna una demanda de 1600 unidades.

Paso 5. Establecer las condiciones de equilibrio entre oferta y demanda tal como se hace en el modelo del transporte. En la tabla 8.24 aparece el problema total en condiciones de equilibrio; además de aparecer los costos unitarios de transporte.

TABLA 8.24						
PLANTA	DISTRIBUIDOR					OFERTA
	MEDELLÍN	CARTAGENA	BUGA	MITÚ	IBAGUE	
MEDELLÍN	0	2	10	15	11	2400
CARTAGENA	2	0	12	9	8	2300
BUGA	10	12	0	4	1	1600
MITÚ	15	9	4	0	3	1600
IBAGUE	11	8	1	3	0	1600
FICTICIO	0	0	0	0	0	100
DEMANDA	1600	1600	2000	2500	1900	

El lector observará, que en este problema para equilibrarlo se tuvo que agregar una planta ficticia (fila), al contrario de lo que sucedió en el problema 8.1 donde se agrego una columna ficticia. Aquí, antes de las condiciones de equilibrio la demanda total era mayor en cien unidades a la cantidad total ofertada.

Paso 6. Aplicar el mismo procedimiento del modelo del transporte para obtener una primera solución básica factible y luego llegar a la solución optima. Para este ejercicio no se va a repetir todo el proceso del modelo del transporte (si usted está leyendo estas páginas entendió el modelo del transporte); en la tabla 8.25 se da la solución óptima del problema.

La solución presentada en la tabla 8.25 se interpreta de la siguiente manera:
Primero que todo obsérvese que la diagonal (se tiene mismo origen y mismo destino) todas sus casillas absorbieron la reserva de 1600 unidades, excepto la celda correspondiente a Cartagena. Este hecho es justamente lo que genera la operación de transbordo, en este caso entre las plantas.

$X_{12}=$ 400. La planta de Medellín envía 400 unidades a la planta de Cartagena. Esta asignación es la que genera el transbordo.

$X_{13}=$ 400. La planta de Medellín envía 400 unidades a Buga.

$X_{24}=$ 800. La planta de Cartagena envía 800 unidades directamente al distribuidor Mitú.

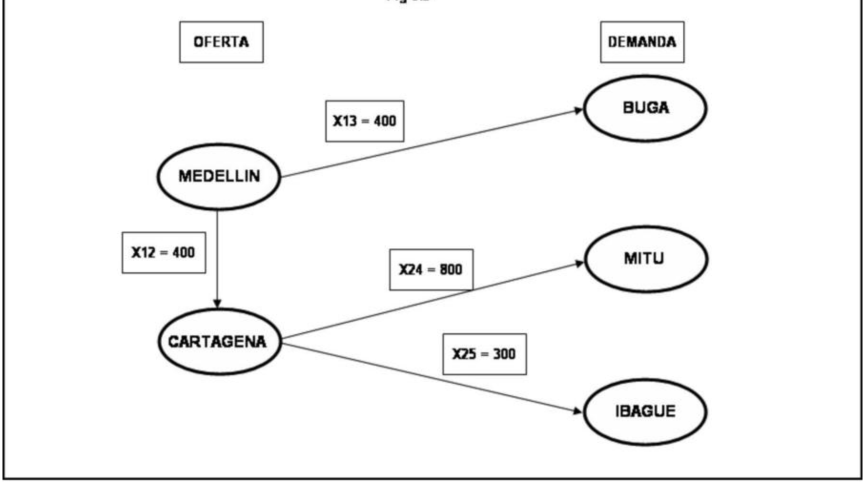
X_{25}= 300. La planta de Cartagena envía 300 unidades directamente al distribuidor Ibagué.

X_{64}=100. La demanda de Mitú no se satisface en 100 unidades.

TABLA 8.25											
PLANTA	DISTRIBUIDOR										OFERTA
	MEDELLÍN		CARTAGENA		BUGA		MITÚ		IBAGUÉ		
MEDELLÍN		0		2		10		15		11	2400
	1600		400		400						
CARTAGENA		2		0		12		9		8	2300
			1200				800		300		
BUGA		10		12		0		4		1	1600
					1600						
MITÚ		15		9		4		0		3	1600
							1600				
IBAGUE		11		8		1		3		0	1600
									1600		
FICTICIO		0		0		0		0		0	100
							100				
DEMANDA	1600		1600		2000		2500		1900		Z=14400

Obsérvese, que el envió total de la planta de Cartagena es 1.100 unidades, mientras que su capacidad es de 700 unidades. Parece ilógico, pero no, esto es justamente por las 400 unidades que transfirió Medellín a Cartagena. En la figura 8.3 se presenta en forma de red la solución óptima de este problema.

Fig 8.3



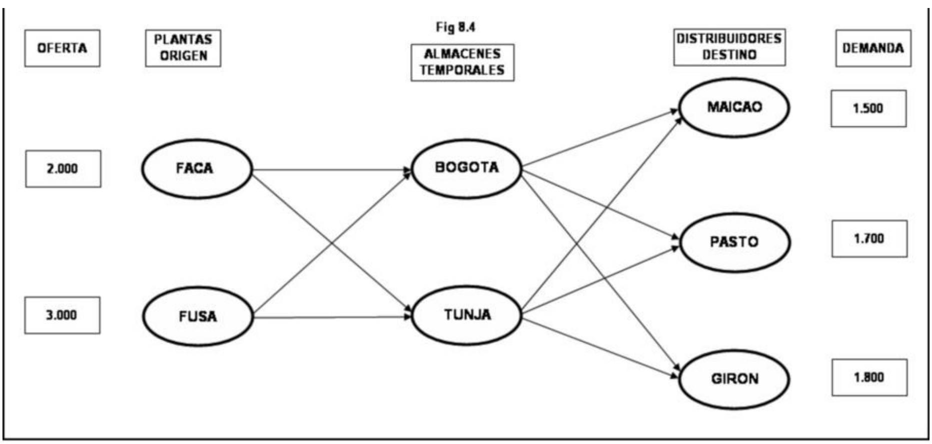
Este orden de envíos genera un costo total mínimo de transporte de todas las neveras de $14.400.

Otra alternativa que se puede evaluar en el modelo del transbordo es la presentada en el ejercicio 8.2.2; donde se establece que el producto debe pasar por almacenes temporales antes de llegar al distribuidor final, sin permitirse envíos directos de las plantas a los distribuidores.

Ejercicio 8.2.2. Electromaquinas Ltda produce máquinas de coser en dos plantas ubicadas en Facatativa y Fusagasuga; en las cuales hay una capacidad de producción semanal de 2.000 y 3.000 máquinas respectivamente. El producto es comercializado por tres distribuidores ubicados en Maicao, Pasto y Girón; en los cuales se ha establecido una demanda de 1.500, 1.700 y 1.800 máquinas de coser por semana. Además, se sabe que para llevar el producto a los distribuidores, se debe enviar a través de dos almacenes temporales ubicados en Bogotá y Tunja, y que no se puede enviar producto directamente desde las plantas a los distribuidores. El costo de transporte de cada maquina se ha evaluado de la siguiente forma: de Faca a Bogotá $5, de Faca a Tunja $8, de Fusa a Bogotá $3, de Fusa a Tunja $11, de Bogotá a Tunja y viceversa $4, de Bogotá a Maicao $14, de Bogotá a Pasto $11, de Bogotá a Girón $12, de Tunja a Maicao $13, de Tunja a Pasto $13 y de Tunja a Girón $10.

Solución

Con base en la información suministrada en la figura 8.4 se puede apreciar este problema en forma de red. Además, en la tabla 8.26 se presenta la solución óptima de este problema. En dicha tabla se puede apreciar que las ofertas y las demandas quedaron tal cual estaban establecidas; pues el criterio aplicado no permitía transbordo entre plantas y entre distribuidores.



También, se puede apreciar que la reserva se colocó únicamente a los almacenes temporales (Bogotá y Tunja), ya que en éste modelo son los únicos sitios que operan como origen y destino al mismo tiempo. Recuerde que por definición solo se adiciona la reserva R a los nodos o eventos que sean origen y destino al mismo tiempo.

TABLA 8.26

PLANTA	DISTRIBUIDOR					OFERTA
	BOGOTÁ	TUNJA	MAICAO	PASTO	GIRON	
FACATATIVA	5	8	M	M	M	2000
	2000	0				
FUSAGASUGA	3	11	M	M	M	3000
	3000			800	300	
BOGOTÁ	0	4	14	11	12	5000
	0		1500	1700	1800	
TUNJA	4	0	13	13	10	5000
		5000				
DEMANDA	5000	5000	1500	1700	1800	Z=80300

Además, observará el lector que en la tabla 8.26 aparecen asignados unos costos con M. esto supone un costo muy elevado que tiende al infinito, lo que hace que no se consideren envíos directos de la plantas a los distribuidores. Recuerde el coeficiente asignado a las variables artificiales en el método simplex. La solución presentada en la 8.26 indica que Facatativa le envía 2000 maquinas a Bogotá y Fusagasuga le envía 3.000 unidades a Bogotá. Lo que quiere decir que el almacén temporal de Bogotá, tiene 5000 maquinas para enviar a los distribuidores así: envía 1.500 máquinas a Maicao, 1700 maquinas a Pasto y envía 1.800 máquinas a Girón. Esta solución utiliza únicamente el almacén temporal de Bogotá y genera un costo total mínimo de $80.300 por semana.

Para terminar se puede generalizar el modelo aceptando transbordos entre las planta y entre los distribuidores, para lo cual hay que sumarle tanto a la oferta de cada planta, como a la demanda de cada distribuidor la cantidad de reserva R.

8.3. EL MODELO DE ASIGNACIÓN

El modelo de asignación es otra variante del modelo del transporte en el que se considera en forma generalizada la asignación de m trabajos a n máquinas. Este tipo de problemas también se puede resolver mediante la técnica del modelo del transporte tomando uno como oferta en todos los orígenes y en todos los destinos. La estructura general de este modelo es como se presenta a continuación:

$$MinZ = \sum_{i=j}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad \forall i = 1,2,3,\cdots,m$$ Garantiza la asignaci□n de cada trabajo.

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad \forall j = 1,2,3,\cdots,n$$ Garantiza un trabajo a cada m□quina.

Obsérvese, que este modelo es una aplicación del modelo del transporte en donde las ofertas y demandas son iguales a uno.

Además, la condición necesaria en este modelo es que la variable es binaria, ya que sólo puede tomar valores de cero ó uno. Xij = 0, si no se asigna el trabajo i a la maquina j; y Xij = 1 si se asigna el trabajo i a la máquina j.

El procedimiento para obtener la solución óptima en el modelo de asignación es como se presenta en los siguientes pasos:

Paso 1. Establecer las condiciones de equilibrio adicionando filas o columnas según sea el caso.

Paso 2. Selecciona el C_{IJ} más pequeño en cada fila.

Paso 3. El elemento C_{IJ} más pequeño se resta de todos los C_{IJ} en cada fila.

Paso 4. De la matriz que se genera en el paso anterior selecciona el elemento C_{IJ} más pequeño en cada columna.

Paso 5. El elemento C_{IJ} más pequeño se resta de todos los C_{IJ} en cada columna.

Paso 6. Comprobar la optimalidad de la solución trazando el mínimo numero de líneas por filas y por columnas (no se aceptan diagonales) de tal forma que se cubran todos los ceros generados en el paso anterior. Si el numero de líneas es igual a la cantidad de filas (cantidad de columnas) se realiza la asignación optima teniendo en cuenta los ceros; de lo contrario continúe con el paso 7.

Paso 7. Seleccionar el elemento más pequeño que no esté cruzado por una línea.

Paso 8. Restar el elemento más pequeño de todos los elementos no cruzados por una línea y sumarlo a todos los elemento situados en la intersección entre dos líneas. Todos los demás elementos permanecen iguales.

Paso 9. Regresar nuevamente al paso 7 a verificar la optimalidad de la nueva solución.

Para la aplicación de éste procedimiento refiérase al ejercicio 8.3 que se da a continuación.

Ejercicio 8.3. La alcaldía de la ciudad está interesada en asignar 4 proyectos a 4 contratistas de forma tal que se genere el menor costo posible para la ciudad. En la tabla 8.27 se presenta el costo de elaboración de cada proyecto por cada uno de los contratistas.

TABLA 8.27				
PROYECTO	**CONTRATISTA**			
	ALFA	**BETA**	**GAMA**	**LANDA**
PUENTE	$96	$96	$100	$88
ESCUELA	$112	$120	$120	$136
PARQUE	$192	$188	$180	$170
HOSPITAL	$84	$88	$108	$92

¿Cómo se deben asignar los proyectos para garantizar un costo mínimo para la alcaldía de la ciudad? Se debe garantizar la asignación de un proyecto a cada uno de los contratistas.

Solución

Paso 1. Establecer las condiciones de equilibrio adicionando filas o columnas según sea el caso. En este ejercicio están dadas las condiciones de equilibrio, ya que hay 4 proyectos para 4 contratistas.

Paso 2. Selecciona el C_{IJ} más pequeño en cada fila. Los elementos más pequeños en cada fila son respectivamente los siguientes:

Fila 1. El elemento mas pequeño es 88.

Fila 2. El elemento mas pequeño es 112.

Fila 3. El elemento mas pequeño es 170.

Fila 4. El elemento mas pequeño es 84.

Paso 3. El elemento C_{IJ} más pequeño se resta de todos los C_{IJ} en cada fila. Realizando las restas en cada una de las filas se genera la información que se presenta en la tabla 8.28.

TABLA 8.28				
PROYECTO	CONTRATISTA			
	ALFA	BETA	GAMA	LANDA
PUENTE	8	8	12	0
ESCUELA	0	8	8	24
PARQUE	22	18	10	0
HOSPITAL	0	4	24	8

Paso 4. De la matriz que se genera en el paso anterior selecciona el elemento C_{IJ} más pequeño en cada columna. Los elementos más pequeños en cada columna de la tabla 8.28.son:

Columna 1. El elemento más pequeño es 0.

Columna 2. El elemento más pequeño es 4.

Columna 3. El elemento más pequeño es 8.

Columna 4. El elemento más pequeño es 0.

Paso 5. El elemento C_{IJ} más pequeño se resta de todos los C_{IJ} en cada columna. Los resultados de las restas se presentan en la tabla 8.29.

TABLA 8.29				
PROYECTO	CONTRATISTA			
	ALFA	BETA	GAMA	LANDA
PUENTE	8	4	4	0
ESCUELA	0	4	0	24
PARQUE	22	14	2	0
HOSPITAL	0	0	16	8

Paso 6. Prueba de optimalidad. En la tabla 8.30 se traza mínimo número de líneas por filas y por columnas de tal forma que se cubran todos los ceros generados en el paso anterior.

TABLA 8.30				
PROYECTO	CONTRATISTA			
	ALFA	BETA	GAMA	LANDA
PUENTE	8	4	4	0
ESCUELA	0	4	0	24
PARQUE	22	14	2	0
HOSPITAL	0	0	16	8

Como se puede observar en la tabla 8.30 en número mínimo de líneas trazadas (filas y columnas sombreadas) para cubrir todos los ceros es tres (las filas de la escuela y el hospital y la columna de landa). Este tres es menor a la cantidad de filas (columnas) que es cuatro; por lo tanto todavía no se ha llegado a la optimalidad.

Paso 7. seleccionar el elemento más pequeño que no esté cruzado por una línea. Con base en la tabla 8.30, el elemento más pequeño que no esta cruzado por una línea es 2.

Paso 8. Restar el elemento más pequeño de todos los elementos no cruzados por una línea y sumarlo a todos los elemento situados en la intersección entre dos líneas. En la tabla 8.31 se muestra el resultado de los cálculos realizados en este punto.

TABLA 8.31				
PROYECTO	CONTRATISTA			
	ALFA	BETA	GAMA	LANDA
PUENTE	6	2	2	0
ESCUELA	0	4	0	26
PARQUE	20	12	0	0
HOSPITAL	0	0	16	10

Paso 9. Verificar la optimalidad de la nueva solución. Trazando nuevamente líneas (filas y columnas sombreadas) que cubran todos los ceros se obtiene la información que se presenta en la tabla 8.32.

TABLA 8.32				
PROYECTO	CONTRATISTA			
	ALFA	BETA	GAMA	LANDA
PUENTE	6	2	2	0
ESCUELA	0	4	0	26
PARQUE	20	12	0	0
HOSPITAL	0	0	16	10

Como se puede observar el número de líneas (sombreados) utilizado para cubrir todos los ceros es cuatro, que es el mismo número de filas (columnas); por lo tanto a partir de la tabla 8.32 se obtiene la solución óptima del problema de la siguiente manera:

En la primera fila (puente) solo hay un cero que corresponde al contratista landa; por lo tanto el puente se asigna al contratista landa.
Quitando la primera fila (puente) y la cuarta columna (landa); la fila tres (parque) queda con un único cero en la tercer columna (gama), por lo tanto el parque se asigna a Gama.

Al quitar la tercera fila (parque) y la tercer columna (gama), la fila dos (escuela) queda con un único cero en la primera columna (alfa); lo que indica que la escuela se debe asignar a Alfa.

Por lógicas razones el hospital se debe asignar a beta.
La anterior solución le genera un costo total mínimo a la alcaldía de la ciudad de 88+112+180+88=$468.
Tal como se ha podido observar, "por definición el problema de asignación requiere de una matriz de n x n."[4] Sin embargo esto es posible que no este dado, para lo cual se adicionan filas o columnas ficticias con el fin de obtener la matriz cuadrada. Al igual que en el modelo del transporte en las filas o columnas ficticias se asignan costos de cero y se trabaja con el mismo procedimiento.

4 Shamblin James y Stevens G. T. *Investigación de operaciones*, Editorial Mc Graw Hill. año 1975. página 344.

PROBLEMAS PROPUESTOS

8.1. La compañía Sigma distribuye su artículo a través de tres distribuidores ubicados Tunja, Pasto y Mitú en las cuales se ha establecido una demanda mensual de 50, 40 y 30 Unidades respectivamente. El producto es manufacturado en 3 plantas ubicadas en Bogotá, Cali y Sopo las cuales tienen una capacidad de producción de 50, 20 y 60 unidades respectivamente. ¿Qué cantidad de producto debe enviar cada planta a cada distribuidor si se sabe que por transportar una unidad de la planta de Bogotá a Tunja se causa un costo de $5, a pasto es $4 y a Mitu $3. El costo unitario de transporte para la planta de Cali es de $3 a Tunja, $4 a Pasto y $2 a Mitu; mientras que al mismo costo calculado para la planta de sopo es $4, $6 y $5 pesos respectivamente para Tunja, Pasto y Mitú?

8.2. La compañía Sigma produce computadores en Bogotá, Cali y Medellín, en cuyas plantas se dispone de una capacidad de producción de 5.000, 3.000 y 4.000 equipos por semana respectivamente. El producto es comercializado a través de tres distribuidoras ubicadas en Pasto, Tunja y Riohacha para los cuales se ha determinado una demanda semanal de 2.500, 3.700 y 2.100 equipos respectivamente. Plantee un modelo de programación lineal para establecer que cantidad de equipos se debe enviar de cada planta a cada distribuidor sise sabe que transportar un equipo de la planta de Bogotá a Pasto cuesta 80 pesos, a Tunja cuesta 10 pesos y a Riohacha 75 pesos; transportar un equipo de la planta de Cali a pasto cuesta 12 pesos, a Tunja cuesta 92 pesos y a Riohacha 170 pesos; Mientras que el mismo costo calculado para la planta ubicada en Medellín es de 160, 65 y 22 pesos respectivamente.

8.3. Una compañía cementera produce su artículo en sus plantas de Cali y Duitama en donde tiene una capacidad de producción de 15.000 y 20.000 bultos de cemento por mes respectivamente. El artículo es comercializado a través de 3 distribuidores ubicados en Bogotá, Medellín y Cúcuta, para los cuales se ha establecido una demanda mensual de 1.0000 ,14.000 y 12.000 bultos de cemento respectivamente. Determine que cantidad de cemento se debe enviar de cada planta a cada distribuidor si se sabe que el costo de transporte por un bulto de cemento de la planta de Cali a Bogota es de $200, a Medellín es $250 y a Cúcuta es $280; mientras que el costo de transportar un bulto de cemento desde Duitama a Bogota es $75, a Medellín es $160 y a Cúcuta es $205.

8.4. La compañía "Zoco", produce sus artículos en dos plantas ubicadas en Bogotá y Cali, para las cuales se ha establecido que tienen una capacidad de producción mensual de 3.000 y 4.000 unidades respectivamente. Dicho artículo es distribuido de través tres comercializadoras ubicadas en Cúcuta, Tunja y Pasto para los cuales se ha establecido una demanda mensual de 1.500, 2.300 y 3.100 unidades respectivamente. Establezca la cantidad optima a enviar de cada planta a cada distribuidor si se sabe que el costo de transportar una unidad de la planta de Bogotá a Cúcuta es de \$200, a Tunja de \$60 y a Pasto \$210, mientras que el costo de transportar una unidad de la planta de Cali a Cúcuta es de \$250, a Tunja es de \$190 y a Pasto es de \$35.

8.5. El Consorcio "Zebra", se ha comprometido con la alcaldía de la ciudad de Bogotá a construir un puente, un parque y un túnel. El consorcio tiene como alternativas asignarle la construcción de esos 3 proyectos a Conavi, Colmena y Las Villas. Con base en los presupuestos presentados por cada compañía constructora. Se ha establecido que Conavi cobra \$500 por la construcción del puente, \$700 por la construcción del parque y \$450 por el túnel. Colmena cobra \$550 por la construcción del puente, \$600 por la construcción del parque y \$300 por el túnel, mientras que las Villas cobra \$500 por la construcción del puente, \$510 por la construcción del parque y \$480 por el túnel. Determine que proyecto se debe asignar a cada constructor si se sabe que la alcaldía de la ciudad le ha solicitado al consorcio "Zebra" que cada proyecto debe ser asignado a un contratista diferente.

8.6. La empresa Oruga manufactura su producto en 3 plantas ubicadas en Bogotá, Tunja y Cúcuta, en las cuales hay una capacidad de producción semanal de 150, 60 y 180 unidades respectivamente. El producto es distribuido a través de 3 distribuidores ubicados en Chia, Cali y Pasto para los cuales se ha establecido una demanda semanal de 150, 120 y 90 unidades respectivamente. Si se sabe que el costo de transportar una unidad de la planta de Bogotá a Chia es \$15, a Cali es \$12 y a Pasto es \$9; de la planta ubicada en Tunja a Chia es \$9, a Cali es \$12 y a Pasto es \$6; mientras que el mismo costo calculados para la planta ubicada en Cúcuta son \$12, \$18 y \$15 respectivamente par los distribuidores de Chia, Cali y Pasto. Solucione este problema suponiendo que se permiten transbordos entre plantas y entre distribuidores. Suponga que el costo de Bogotá a Tunja es \$8, de Bogotá a Cúcuta es \$10, de Tunja a Cúcuta es \$12, de Chia a Cali es \$14, de Chia a Pasto \$13, de Cali a Pasto es \$11 y las rutas en sentido contrario tiene el mismo costo.

8.7. Solucionar el ejercicio 8.2.1 como modelo general del transporte suponiendo que no se permiten transbordos entre plantas ni entre distribuidores.

8.8. Cuatro estaciones de servicio, ubicadas en la Gaitana, Suba, Usme y Sosiego (barrios de Bogotá) requieren 50.000, 40.000, 60.000 y 40.000 galones de gasolina por mes respectivamente. Es posible satisfacer estos requerimientos a partir de los depósitos ubicados en Laches, Fontibón y Usaquen que tienen una disponibilidad de 80.000, 100.000 y 50.000 galones por mes respectivamente. Los costos de despachar 1.000 galones de gasolina de cada depósito a cada estación de servicio son como aparece en la tabla 8.33.

TABLA 8.33				
DEPÓSITOS	**ESTACIONES DE SERVICIO**			
	GAITANA	**SUBA**	**USME**	**SOSIEGO**
LACHES	70	60	60	60
FONTIBÓN	50	80	60	70
USAQUEN	80	50	80	60

Determine las cantidades de gasolina que deben enviarse desde cada depósito hasta cada estación de servicio, de manera que los requerimientos de los distribuidores sean satisfechos y los costos totales de transporte sean mínimos.

8.9. Suponga para el problema 8.8 que por un cierre en la vía no se puede hacer la ruta Laches-Suba.

8.10. Suponga para el problema 8.8 que se disponen de dos almacenes transitorios en el Restrepo y en el Centro; y que no es posible realizar envíos directos desde los depósitos hasta las estaciones de servicio. Los costos de transporte de 1000 galones de gasolina desde los depósitos a los almacenes temporales son como se muestra en la tabla 8.34 y los costos de transporte desde los almacenes temporales a las estaciones de servicio aparecen en la tabla 8.35

TABLA 8.34			
ALMACEN TEMPORAL	**DEPOSITOS**		
	LACHES	**FONTOBON**	**USAQUEN**
RESTREPO	40	35	20
CENTRO	25	50	38

TABLA 8.35				
ALMACEN TEMPORAL	**ESTACIONES DE SERVICIO**			
	GAITANA	**SUBA**	**USME**	**SOSIEGO**
RESTREPO	30	45	50	20
CENTRO	23	37	28	45

8.11. Cierta compañía está buscando la mejor forma de asignar cuatro trabajos a cuatro operarios de tal forma que se consiga el menor tiempo posible. En la tabla 8.36 se presenta el tiempo de realización de cada trabajo por parte de cada operario. Se debe tener en cuenta que se debe asignar un trabajo a cada operario. ¿De qué forma se deben asignar los trabajos?

TABLA 8.36				
TRABAJO	**OPERARIO**			
	JUAN	**PEDRO**	**JORGE**	**NICOLAS**
PULIR	8	7	2	5
CORTAR	6	3	8	10
LIJAR	4	7	9	9
BRILLAR	8	10	8	1

8.12. Suponga para el problema 8.11 que Juan no sabe pulir.

Capítulo 9

Apéndice
de respuestas a problemas propuestos

CAPíTULO 2

No se entregan en este texto los planteamientos de los problemas propuestos; ya que esto evitaría realizar el análisis lógico de modelamiento por parte del lector.

CAPíTULO 3

3.1. Se deben fabricar 70/3 de metros de ángulo y 20 metros de platina, para obtener una utilidad máxima de $2500000/3.

3.2. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales tenemos las siguientes: producir 350/17 de libros y 600/17 de revistas; o producir 400/13 de libros y 300/13 de revistas. Las dos soluciones generan una utilidad de $1500000.

3.3. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

3.4. El problema no tiene solución.

3.5. Se debe utilizar 100/11 de libras de alimento A y 360/11 de libras de alimento tipo B para obtener un costo mínimo de $148000/11.

3.6. El problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se mencionan las dos siguientes: producir cero billeteras y 60 cinturones; o producir 50/3 de billeteras y 80/3 de cinturones. Juntas soluciones generan un costo mínimo de $360000.

3.7. El problema no tiene solución.

3.8. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

3.9. Se deben fabricar 1000/7 pupitres unipersonales y 300/7 pupitres bipersonales para obtener una utilidad máxima de $10´600.000/7.

3.10. Se deben fabricar 18 puertas, 42 ventanas y 32 rejas por semana para obtener un ingreso máximo de $2286000.

3.13. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

3.15. Se deben fabricar 4/3 de pupitres y 10/3 de sillas para obtener una utilidad de $80.000/3.

3.16. El problema tiene solución no acotada.

3.17. Se deben sembrar 480/7 de hectáreas con papa y 100/7 de hectáreas con yuca para obtener una utilidad 4740/7 de millones de pesos.

3.20. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 1120/23 de bicicletas y 630/23 de triciclos; para obtener un ingreso máximo de $630000.

3.23. El problema no tiene solución.

3.24. A cada cachorro mensualmente se le debe suministrar 100/3 de kilos de purina y 70/3 de kilos de ladrina para obtener un costo mínimo de $500000.

3.25. El problema no tiene solución.

3.26. Se deben producir 20 tinas Nápoles y 40 tinas Milán para generar una ganancia máxima de $480000.

3.27. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 40 pasteles y 20 empanadas para obtener una utilidad de $24000.

3.28. El problema no tiene solución.

3.29. El problema tiene solución no acotada.

3.30. A cada cerdo se le debe suministrar diariamente 80/19 de kilos de mineral y 18/19 de kilos de concentrado para obtener un costo mínimo de $348000/19.

3.31. El problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se tienen: comprar 10 relojes para hombre y 25 relojes para dama ó comprar 300/7 de relojes para hombre y 60/7 de relojes para dama. Cualquiera de las dos soluciones genera un costo total mínimo de $180000.

3.32. El problema no tiene solución.

3.33. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

3.34. El fabricante debe producir 20/9 de modelo 1 y 14/9 de modelo 2, para obtener un ingreso máximo de $3520/9.

3.35. No se deben fabricar pupitres unipersonales, se deben producir 100 pupitres bipersonales y 230 mesas para obtener una utilidad máxima de $1350.

3.40. El problema tiene solución no acotada.

3.41. Se deben fabricar 630/19 de Piñones y 600/19 de rodamientos por semana para obtener una utilidad de $7950000/19 por semana

3.42. Para la noche deben estar listas 2240/37 de habitaciones confortables y 450/37 de habitaciones normales. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples y la enunciada anteriormente es una de ellas. Cualquier solución óptima genera un ingreso de $315000.

3.43. El problema no tiene solución.

3.44. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

3.45. A cada niño se le debe suministrar diariamente 20 vasos de leche y 20 porciones de fruta, para un costo total mínimo de $18000.

3.46. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 30 pares de zapatos para hombre y 20 pares de zapatos para dama. Esta solución genera un costo total mínimo de $1000000.

3.47. El problema no tiene solución.

3.48. Para cumplir con los requerimientos vitamínicos en la familia, cada miembro de debe consumir 40 huevos y 20 litros de leche al mes. Esto genera un costo de $30000.

3.50. Se deben reparar 30 buses y 20 busetas para obtener un costo mínimo de $280000.

3.51. Se deben fabricar 490/9 vestidos de hombre y 20 vestidos de mujer para tener una utilidad de $1260000.

3.52. El problema tiene solución no acotada.

3.53. El agricultor debe sembrar 700/19 de hectáreas con yuca y 720/19 de hectáreas con papa para obtener una utilidad máxima de $92600000/19.

3.54. El problema no tiene solución.

CAPÍTULO 4

4.1. Se deben fabricar 70/3 de metros de ángulo y 20 metros de platina, para obtener una utilidad máxima de $2500000/3.

4.2. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales tenemos las siguientes: producir 350/17 de libros y 600/17 de revistas; o producir 400/13 de libros y 300/13 de revistas. Las dos soluciones generan una utilidad de $1500000.

4.3. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

4.4. El problema no tiene solución.

4.5. Se debe utilizar 100/11 de libras de alimento A y 360/11 de libras de alimento tipo B para obtener un costo mínimo de $148000/11.

4.6. El problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se mencionan las dos siguientes: producir cero billeteras y 60 cinturones; o producir 50/3 de billeteras y 80/3 de cinturones. Juntas soluciones generan un costo mínimo de $360000.

4.7. El problema no tiene solución.

4.8. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

4.9. Se deben fabricar 1000/7 pupitres unipersonales y 300/7 pupitres bipersonales para obtener una utilidad máxima de $10´600.000/7.

4.10. Se deben fabricar 18 puertas, 42 ventanas y 32 rejas por semana para obtener un ingreso máximo de $2286000.

4.13. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

4.15. Se deben fabricar 4/3 de pupitres y 10/3 de sillas para obtener una utilidad de $80.000/3.

4.16. El problema tiene solución no acotada.

4.17. Se deben sembrar 480/7 de hectáreas con papa y 100/7 de hectáreas con yuca para obtener una utilidad 4740/7 de millones de pesos.

4.20. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 1120/23 de bicicletas y 630/23 de triciclos; para obtener un ingreso máximo de $630000.

4.23. El problema no tiene solución.

4.24. A cada cachorro mensualmente se le debe suministrar 100/3 de kilos de purina y 70/3 de kilos de ladrina para obtener un costo mínimo de $500000.

4.25. El problema no tiene solución.

4.26. Se deben producir 20 tinas Nápoles y 40 tinas Milán para generar una ganancia máxima de $480000.

4.27. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 40 pasteles y 20 empanadas para obtener una utilidad de $24000.

4.28. El problema no tiene solución.

4.29. El problema tiene solución no acotada.

4.30. A cada cerdo se le debe suministrar diariamente 80/19 de kilos de mineral y 18/19 de kilos de concentrado para obtener un costo mínimo de $348000/19.

4.31. El problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se tienen: comprar 10 relojes para hombre y 25 relojes para dama ó comprar 300/7 de relojes para hombre y 60/7 de relojes para dama. Cualquiera de las dos soluciones genera un costo total mínimo de $180000.

4.32. El problema no tiene solución.

4.33. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

4.34. El fabricante debe producir 20/9 de modelo 1 y 14/9 de modelo 2, para obtener un ingreso máximo de $3520/9.

4.35. No se deben fabricar pupitres unipersonales, se deben producir 100 pupitres bipersonales y 230 mesas para obtener una utilidad máxima de $1350.

4.40. El problema tiene solución no acotada.

4.41. Se deben fabricar 630/19 de Piñones y 600/19 de rodamientos por semana para obtener una utilidad de $7950000/19 por semana

4.42. Para la noche deben estar listas 2240/37 de habitaciones confortables y 450/37 de habitaciones normales. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples y la enunciada anteriormente es una de ellas. Cualquier solución óptima genera un ingreso de $315000.

4.43. El problema no tiene solución.

4.44. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

4.45. A cada niño se le debe suministrar diariamente 20 vasos de leche y 20 porciones de fruta, para un costo total mínimo de $18000.

4.46. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 30 pares de zapatos para hombre y 20 pares de zapatos para dama. Esta solución genera un costo total mínimo de $1000000.

4.47. El problema no tiene solución.

4.48. Para cumplir con los requerimientos vitamínicos en la familia, cada miembro de debe consumir 40 huevos y 20 litros de leche al mes. Esto genera un costo de $30000.

4.50. Se deben reparar 30 buses y 20 busetas para obtener un costo mínimo de $280000.

4.51. Se deben fabricar 490/9 vestidos de hombre y 20 vestidos de mujer para tener una utilidad de $1260000.

4.52. El problema tiene solución no acotada.

4.53. El agricultor debe sembrar 700/19 de hectáreas con yuca y 720/19 de hectáreas con papa para obtener una utilidad máxima de $92600000/19.

4.54. El problema no tiene solución.

CAPÍTULO 5

5.1. Se deben fabricar 70/3 de metros de ángulo y 20 metros de platina, para obtener una utilidad máxima de $2500000/3.

5.2. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales tenemos las siguientes: producir 350/17 de libros y 600/17 de revistas; o producir 400/13 de libros y 300/13 de revistas. Las dos soluciones generan una utilidad de $1500000.

5.3. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

5.4. El problema no tiene solución.

5.5. Se debe utilizar 100/11 de libras de alimento A y 360/11 de libras de alimento tipo B para obtener un costo mínimo de $148000/11.

5.6. El problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se mencionan las dos siguientes: producir cero billeteras y 60 cinturones; o producir 50/3 de billeteras y 80/3 de cinturones. Juntas soluciones generan un costo mínimo de $360000.

5.7. El problema no tiene solución.

5.8. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

5.9. Se deben fabricar 1000/7 pupitres unipersonales y 300/7 pupitres bipersonales para obtener una utilidad máxima de $10´600.000/7.

5.10. Se deben fabricar 18 puertas, 42 ventanas y 32 rejas por semana para obtener un ingreso máximo de $2286000.

5.13. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

5.15. Se deben fabricar 4/3 de pupitres y 10/3 de sillas para obtener una utilidad de $80.000/3.

5.16. El problema tiene solución no acotada.

5.17. Se deben sembrar 480/7 de hectáreas con papa y 100/7 de hectáreas con yuca para obtener una utilidad 4740/7 de millones de pesos.

5.20. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 1120/23 de bicicletas y 630/23 de triciclos; para obtener un ingreso máximo de $630000.

5.23. El problema no tiene solución.

5.24. A cada cachorro mensualmente se le debe suministrar 100/3 de kilos de purina y 70/3 de kilos de ladrina para obtener un costo mínimo de $500000.

5.25. El problema no tiene solución.

5.26. Se deben producir 20 tinas Nápoles y 40 tinas Milán para generar una ganancia máxima de $480000.

5.27. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 40 pasteles y 20 empanadas para obtener una utilidad de $24000.

5.28. El problema no tiene solución.

5.29. El problema tiene solución no acotada.

5.30. A cada cerdo se le debe suministrar diariamente 80/19 de kilos de mineral y 18/19 de kilos de concentrado para obtener un costo mínimo de $348000/19.

5.31. El problema tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se tienen: comprar 10 relojes para hombre y 25 relojes para dama ó comprar 300/7 de relojes para hombre y 60/7 de relojes para dama. Cualquiera de las dos soluciones genera un costo total mínimo de $180000.

5.32. El problema no tiene solución.

5.33. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

5.34. El fabricante debe producir 20/9 de modelo 1 y 14/9 de modelo 2, para obtener un ingreso máximo de $3520/9.

5.35. No se deben fabricar pupitres unipersonales, se deben producir 100 pupitres bipersonales y 230 mesas para obtener una utilidad máxima de $1350.

5.40. El problema tiene solución no acotada.

5.41. Se deben fabricar 630/19 de Piñones y 600/19 de rodamientos por semana para obtener una utilidad de $7950000/19 por semana

5.42. Para la noche deben estar listas 2240/37 de habitaciones confortables y 450/37 de habitaciones normales. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples y la enunciada anteriormente es una de ellas. Cualquier solución óptima genera un ingreso de $315000.

5.43. El problema no tiene solución.

5.44. El problema tiene solución no acotada o ilimitada.

5.45. A cada niño se le debe suministrar diariamente 20 vasos de leche y 20 porciones de fruta, para un costo total mínimo de $18000.

5.46. El problema tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 30 pares de zapatos para hombre y 20 pares de zapatos para dama. Esta solución genera un costo total mínimo de $1000000.

5.47. El problema no tiene solución.

5.48. Para cumplir con los requerimientos vitamínicos en la familia, cada miembro de debe consumir 40 huevos y 20 litros de leche al mes. Esto genera un costo de $30000.

5.50. Se deben reparar 30 buses y 20 busetas para obtener un costo mínimo de $280000.

5.51. Se deben fabricar 490/9 vestidos de hombre y 20 vestidos de mujer para tener una utilidad de $1260000.

5.52. El problema tiene solución no acotada.

5.53. El agricultor debe sembrar 700/19 de hectáreas con yuca y 720/19 de hectáreas con papa para obtener una utilidad máxima de $92600000/19.

5.54. El problema no tiene solución.

CAPÍTULO 6

6.1. En el problema primo se deben fabricar 70/3 de metros de ángulo y 20 metros de platina, para obtener una utilidad máxima de $2500000/3.

6.2. El problema primo tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales tenemos las siguientes: producir 350/17 de libros y 600/17 de revistas; o producir 400/13 de libros y 300/13 de revistas. Las dos soluciones generan una utilidad de $1500000.

6.3. El problema primo tiene solución no acotada o ilimitada y el problema dual no tiene solución.

6.4. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.5. En la solución del problema primo se debe utilizar 100/11 de libras de alimento A y 360/11 de libras de alimento tipo B para obtener un costo mínimo de $148000/11. La solución del problema dual es Y_1 = 0, Y_2 = 400/11 y Y_3 = 500/11.

6.6. El problema primo tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se mencionan las dos siguientes: producir cero billeteras y 60 cinturones; o producir 50/3 de billeteras y 80/3 de cinturones. Juntas soluciones generan un costo mínimo de $360000.

6.7. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.8. El problema primo tiene solución no acotada o ilimitada y el problema dual no tiene solución.

6.9. Se deben fabricar 1000/7 pupitres unipersonales y 300/7 pupitres bipersonales para obtener una utilidad máxima de $10´600.000/7. La solución del problema dual es Y_1 = 27/14, Y_2 = 11/14 y Y_3 = 0.

6.10. En el problema primo se deben fabricar 18 puertas, 42 ventanas y 32 rejas por semana para obtener un ingreso máximo de $2286000.

6.13. El problema primo tiene solución no acotada o ilimitada y el problema dual no tiene solución.

6.14. Se deben fabricar 32 puertas y 30 ventanas para obtener una utilidad máxima de $39800. La solución del problema dual es Y_1 =80, Y_2 =0 y Y_3 = 260.

6.15. Se deben fabricar 4/3 de pupitres y 10/3 de sillas para obtener una utilidad de $80.000/3. La solución del problema dual es Y_1 = 2000/3, Y_2 = 1250/3 y Y_3 = 0.

6.16. El problema primo tiene solución no acotada y el problema dual no tiene solución.

6.17. En el problema primo se deben sembrar 480/7 de hectáreas con papa y 100/7 de hectáreas con yuca para obtener una utilidad 4740/7 de millones de pesos. La solución del problema dual es Y_1 = 13/21, Y_2 = 0 y Y_3 = 3/7.

6.20. El problema primo tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 1120/23 de bicicletas y 630/23 de triciclos; para obtener un ingreso máximo de $630000.

6.23. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.24. En el problema primo a cada cachorro mensualmente se le debe suministrar 100/3 de kilos de purina y 70/3 de kilos de ladrina para obtener un costo mínimo de $500000.

6.25. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.26. En el problema primo se deben producir 20 tinas Nápoles y 40 tinas Milán para generar una ganancia máxima de $480000. La solución del problema dual es $Y_1 = 0$, $Y_2 = 500$ y $Y_3 = 600$.

6.27. El problema primo tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 40 pasteles y 20 empanadas para obtener una utilidad de $24000. La solución del problema dual es $Y_1 = 0$, $Y_2 = 200/3$ y $Y_3 = 0$.

6.28. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.29. El problema primo tiene solución no acotada y el problema dual no tiene solución.

6.30. En el problema primo la solución es que a cada cerdo se le debe suministrar diariamente 80/19 de kilos de mineral y 18/19 de kilos de concentrado para obtener un costo mínimo de $348000/19. La solución del problema dual es $Y_1 = 6000/19$, $Y_2 = 0$ y $Y_3 = 10500/19$.

6.31. El problema primo tiene soluciones óptimas múltiples entre las cuales se tienen: comprar 10 relojes para hombre y 25 relojes para dama ó comprar 300/7 de relojes para hombre y 60/7 de relojes para dama. Cualquiera de las dos soluciones genera un costo total mínimo de $180000.

6.32. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.33. El problema primo tiene solución no acotada o ilimitada y el problema dual no tiene solución.

6.34. En el problema primo el fabricante debe producir 20/9 de modelo 1 y 14/9 de modelo 2, para obtener un ingreso máximo de $3520/9.

6.35. En el problema primo no se deben fabricar pupitres unipersonales, se deben producir 100 pupitres bipersonales y 230 mesas para obtener una utilidad máxima de $1350. La solución del problema dual es $Y_1 = 1$, $Y_2 = 2$ y $Y_3 = 0$.

6.40. El problema primo tiene solución no acotada y el problema dual no tiene solución.

6.41. En el problema primo se deben fabricar 630/19 de Piñones y 600/19 de rodamientos por semana para obtener una utilidad de $7950000/19 por semana. La solución del problema dual es Y_1 = 13/19, Y_2 = 0 y Y_3 = 5/19.

6.42. En el problema primo para la noche deben estar listas 2240/37 de habitaciones confortables y 450/37 de habitaciones normales. Este problema tiene soluciones óptimas múltiples y la enunciada anteriormente es una de ellas. Cualquier solución óptima genera un ingreso de $315000.

6.43. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.44. El problema primo tiene solución no acotada o ilimitada y el problema dual no tiene solución.

6.45. En el problema primo a cada niño se le debe suministrar diariamente 20 vasos de leche y 20 porciones de fruta, para un costo total mínimo de $18000.

6.46. El problema primo tiene soluciones óptimas múltiples y una de ellas es producir 30 pares de zapatos para hombre y 20 pares de zapatos para dama. Esta solución genera un costo total mínimo de $1000000.

6.47. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.48. En el problema primo para cumplir con los requerimientos vitamínicos en la familia, cada miembro de debe consumir 40 huevos y 20 litros de leche al mes. Esto genera un costo de $30000.

6.50. En el problema primo se deben reparar 30 buses y 20 busetas para obtener un costo mínimo de $280000.

6.51. En el problema primo se deben fabricar 490/9 vestidos de hombre y 20 vestidos de mujer para tener una utilidad de $1260000.

6.52. El problema primo tiene solución no acotada y el problema dual no tiene solución.

6.53. En el problema primo el agricultor debe sembrar 700/19 de hectáreas con yuca y 720/19 de hectáreas con papa para obtener una utilidad máxima de $92600000/19.

6.54. El problema primo no tiene solución y el problema dual tiene solución no acotada.

6.55. La solucion del problema primo es producir 15 camas dobles, 0 camas sencillas y 0 camarotes para obtener una utilidad de $750. La solución del problema dual es Y_1 = 5, Y_2 = 0 y Y_3 = 0.

CAPÍTULO 7

7.1. Las cantidades a producir y la utilidad siguen siendo las mismas. Se reduce la subutilización de formica de 20 a 10 metros.

7.2. No se deben fabricar pupitres unipersonales, se deben producir 100 pupitres bipersonales y 250 mesas para obtener una utilidad máxima de $1450.

7.3. Se deben producir 95 pupitres bipersonales y 230 mesas para obtener una utilidad de $1340. Además, quedan sobrando 10 metros de madera.

7.4. Las cantidades a producir siguen siendo las mismas, pero la utilidad sube a $1450.

7.5. Se deben fabricar 10 pupitres unipersonales, 205/2 de pupitres bipersonales y 215 mesas para obtener una utilidad máxima de $1360.

7.6. La solución óptima sigue siendo la misma del problema original.

7.7. El cambio genera en el problema soluciones óptimas múltiples; y una de ellas es la del problema original.

7.8. Se deben producir 100 pupitres unipersonales, cero pupitres bipersonales y 230 mesas para obtener una utilidad de $1450. Sobran 20 metros de formica.

7.9. El nuevo producto (escritorios) no se debe fabricar y por lo tanto la solución sigue siendo la misma del problema original.

7.10. La nueva solución es producir 355/2 de mesas y 210 sillas para obtener una utilidad de $3035/2. Con base en esta solución quedan sobrando 85/2 de metros de madera.

7.11. La solución óptima del problema sigue siendo la misma del problema original.

7.12. Se deben producir 20 pupitres unipersonales, 100 pupitres bipersonales y 200 mesas para obtener una utilidad máxima de $1260. Con base en esta solución quedan sobrando 10 metros de madera.

7.13. Con base en esta nueva restricción el problema no tiene solución, por lo tanto no se puede comprometer a entregar esa cantidad de pupitres bipersonales.

7.14. Se deben producir 50 pupitres unipersonales, 185/2 de pupitres bipersonales y 155 mesas para obtener una utilidad máxima de $1110. Con base en esta nueva solución sobran 40 metros de madera.

CAPÍTULO 8

8.1. Bogotá envía 80 unidades a Pasto y 20 unidades a Mitu; Cali envía 40 unidades a Mitu y Sopo envía 100 unidades a Tunja. Esto genera un costo total mínimo de transporte de $430.

8.2. La distribución óptima con un costo de $113.200 es la siguiente:

Bogotá envía 3700 unidades a Tunja.

Bogotá se queda con 1300 unidades.

Cali envia 2500 unidades a Pasto.

Cali se queda con 500 unidades.

Medellín envía 2100 unidades a Riohacha.

Medellín se queda con 1900 unidades

8.3. La distribución optima con un costo de $6´430.000 es la siguiente.

Cali envía 4000 unidades a Medellín.

Cali envia 11000 unidades a Cucuta.

Duitama envia 10000 unidades a Bogotá.

Duitama envía 10000 unidades a Medellín.

Cucuta tiene 1000 unidades de demanda insatisfecha.

8.5. Con un costo total mínimo de 1310 los proyectos deben ser asignados de la siguiente manera:

El puente a Conavi.

El parque a las Villas.

El túnel a Colmena.

8.6. Bogotá envía 80 unidades a Pasto y 20 unidades a Mitu; Cali envía 40 unidades a Mitu y Sopo envía 100 unidades a Tunja. Esto genera un costo total mínimo de transporte de $430.

8.7. La planta de Medellín debe enviar 400 unidades a Buga, 100 unidades a Mitu y 300 unidades a Ibagué; la planta de Cartagena le envía 700 unidades a Mitu; y el distribuidor Mitu queda con una demanda insatisfecha de 100 unidades. La solución óptima genera un costo de $15100.

8.8. La solución óptima para este problema genera un costo total mínimo de $10500; realizando los siguientes envíos:

Enviar 10000 galones de Laches a Usme.

Enviar 30000 galones de Laches a Sosiego.

Enviar 50000 galones de Fontibon a Gaitana.

Enviar 50000 galones de Fontibon a Usme.

Enviar 40000 galones de Usaquen a Suba.

Enviar 10000 galones de Usaquen a Sosiego.

40000 de galones de Laches no se envían.

8.11. Con un tiempo mínimo de 10, los trabajos deben ser asignados de la siguiente manera: Jorge debe pulir, Pedro debe cortar, Juan debe lijar y Nicolás debe brillar.

BIBLIOGRAFÍA

- Prawda Witenberg Juan. *Métodos y modelos de investigación de operaciones*, volumen 1 modelos deterministicos. Año 1994. Editorial Limusa.
- Hillier Frederick S y Gerald J *Lieberman. Introducción a la Investigación de operaciones.* Octava edición, año 2006. Editorial Mc Graw Hill.
- Taha Hamdy A. Investigación de operaciones. Segunda edición, año 1991. Editorial Alfaomega.
- Winston, Wayne L. *Investigación de operaciones.* Aplicaciones y algoritmos. Cuarta edición, año 2004. Editorial Thomson.
- Bazaraa Mokhtar S y Jarvis John J, *Programación Lineal y Flujo en Redes,* octava reimpresión, año 1993, México. Editorial Limusa.
- Mathur Kamlesh y Solow Daniel. *Investigación de operaciones, el arte de la toma de decisiones.* Año 1996, México. Editorial Prentice Hall.
- Eppen G. D, Gould F.J, Schmidt C. P, Moore Jeffrey H y Weatherford Larry R. *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. Quinta edición, año 2000, México. Editorial Prentice Hall.
- Anderson David R, Sweeney Dennis J y Williams Thomas A. *Métodos cuantitativos para los negocios.* Séptima edición, año 1999, México. Editorial Thomson.
- Davis K Roscoe y McKeown Patrick G. modelos cuantitativos para administración. Año 1986, México. Grupo Editorial Iberoamericana.
- Shamblim James E y Stevens G. T. Jr. *Investigación de operaciones, un enfoque fundamental.* México, 1985. Editorial Mc Graw Hill.