Задание на пятую неделю.
Графы — 2: Двудольные графы. Орграфы

Ex. 1. На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка знакома с двумя юношами. Докажите, что собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.

Ex. 2. Докажите, что любое дерево является двудольным графом.

Ex. 3. В квадратной таблице $N \times N$ записаны неотрицательные числа так, что сумма в любой строке и в любом столбце равна 1. Докажите, что в этой таблице можно выбрать N положительных чисел, никакие два из которых не будут находиться в одной строке или столбце.

Ex. 4. По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдется пара и несоседних чисел с таким же свойством.

Ex. 5. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник?

Ex. 6. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Бонусная задача. Назовем *турниром* орграф, в котором для любых двух вершин u, v либо $(u, v) \in E$, либо $(v, u) \in E$. Докажите, что в любом турнире

$$\sum_{v \in V} (\text{outdeg } v)^2 = \sum_{v \in V} (\text{indeg } v)^2.$$

Задание на пятую неделю.

Графы — 2: Двудольные графы. Орграфы

Ex. 1. На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка знакома с двумя юношами. Докажите, что собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.

Ex. 2. Докажите, что любое дерево является двудольным графом.

Ex. 3. В квадратной таблице $N \times N$ записаны неотрицательные числа так, что сумма в любой строке и в любом столбце равна 1. Докажите, что в этой таблице можно выбрать N положительных чисел, никакие два из которых не будут находиться в одной строке или столбце.

Ex. 4. По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдется пара и несоседних чисел с таким же свойством.

Ex. 5. В шахматном турнире, в котором каждый участник должен был встретиться с каждым, один шахматист заболел и не доиграл свои партии. Всего в турнире было проведено 24 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире, и сколько партий сыграл выбывший участник?

Ex. 6. В некоторой стране есть столица и еще 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.

Бонусная задача. Назовем *турниром* орграф, в котором для любых двух вершин u, v либо $(u, v) \in E$, либо $(v, u) \in E$. Докажите, что в любом турнире

$$\sum_{v \in V} (\text{outdeg } v)^2 = \sum_{v \in V} (\text{indeg } v)^2.$$