Лекция 11

Ориентированные графы и отношения порядка

План:

1. Определение ориентированного графа. Исходящие и входящие степени — аналог формулы суммы степененй для неориентированного графа.

2. Компоненты сильной связности

3. **Т.:** Следующие условия для ориентированного графа равносильны:

   - Каждая компонента сильной связности тривиальна (состоит из одной вершины)
   - Граф ациклический
   - Вершины графа можно занумеровать так, что рёбра идут только от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером.

4. Отношения частичного порядка

   - Примеры отношений порядка (покоординатный порядок)
   - Линейный порядок
   - Отношение непосредственного следования и его граф (диаграмма Хассе)
   - Покоординатный порядок
   - Булев куб — двоичные слова, упорядоченные покоординатно

Неформально, ориентированные графы соответствуют перекрёсткам и дорогам с односторонним движениям; если между улицами u и v двустороннее движение, то есть как ребро из u в v, так и ребро из v в u. Формально, ориентированный граф задан парой (V, E), где множество вершин V как и раньше произвольное, а множество $E \subseteq V \times V$ — состоит из упорядоченных пар вершин. По-умолчанию, мы считаем, что в каждой паре вершины различны:

$$E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V,\ u \neq v\}.$$

Рёбра вида (u, u) называются ***петлями*** и они возникают естественным образом при описании бинарных отношений с помощью ориентированных графов. Также часто рассматривают параллельные (кратные) рёбра, но нам они не пригодятся.

Пример ориентированного графа приведён на рис. 11.1.

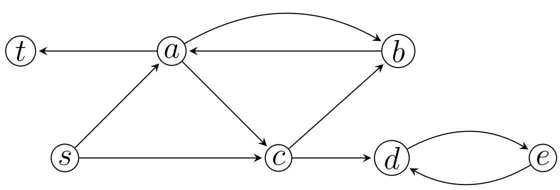

Рис. 11.1. Ориентированный граф G.

11.1 Базовые понятия для ориентированных графов

Определения, введённые нами для неориентированных графов, с поправками переносятся на ориентированные. ***Исходящей степенью*** вершины $d_+(u)$ начинается число рёбер, исходящих из вершины u, ***входящей степенью*** $d_-(u)$ — число рёбер, входящих в u. Запомнить знак можно по по правилу «ток идёт от плюса к минусу». Вершины входящей степени 0 называют ***источниками***, к таким относится вершина s ($d_-(s) = 0$), а вершины с нулевой исходящей степенью называют ***стоками***: $d_+(t) = 0$. Источники и стоки часто обозначают соответственно через s и t, от слов source и target, хотя стоки на английском и называются sink.

Теорема о сумме степеней вершин при переносе на ориентированные графы тривиализуется.

Утверждение 9. $\displaystyle\sum_{u \in V} d_+(u) = \sum_{u \in V} d_-(u) = |E|.$

Подграфы, пути и циклы определяются аналогично неориентированным графам, только вместо неориентированных путей и циклов используют ориентированные.

В случае ориентированных графов цикл может быть и на двух вершинах: примером такого цикла служит подграф графа G, индуцированный вершинами d и e (на рис. 11.1).

В случае ориентированных графов проще иметь дело с маршрутами, определение которых не меняется при переходе от ориентированных графов. ***Маршрутом*** в ориентированном графе называется последовательность вершин $v_0, v_2, \ldots, v_n$, такая что $n \geqslant 0$ и $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ для $0 \leqslant i \leqslant n - 1$. Обратим внимание, что второе

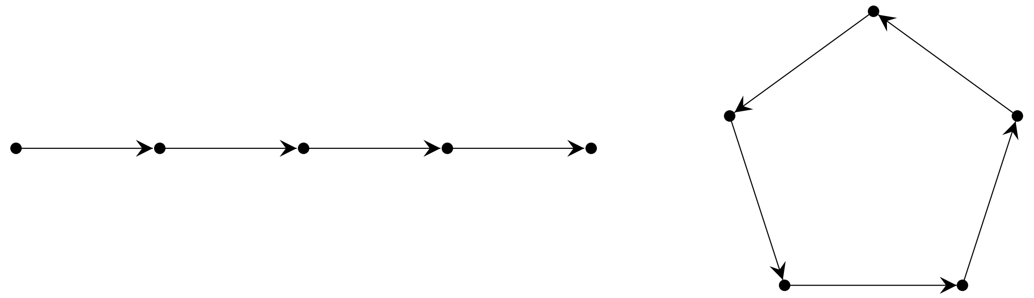

Рис. 11.2. Ориентированные путь и цикл

условие применимо только в случае, когда в маршруте больше одной вершины, а потому любая последовательность из единственной вершины считается маршрутом. ***Длина маршрута*** — это число рёбер, соединяющих вершины маршрута; оно совпадает с n. Маршрут называется ***замкнутым***, если $v_0 = v_n$.

Следующая лемма связывает маршруты, пути и циклы. Её доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнение (оно почти повторяет рассуждения для аналогичной леммы для неориентированных графов).

Лемма 6. *Между двумя вершинами ориентированного графа существует путь тогда и только тогда, когда между ними существует маршрут. В графе есть цикл тогда и только тогда, когда в нём есть замкнутый маршрут положительной длины.*

Компоненты сильной связности

Следующий термин на очереди — компоненты связности, но его так просто не перенесёшь. Из рис. 11.1 ясно, что из вершины s есть путь в вершину t, а пути обратно нет. Поэтому вместо компонент связности, в ориентированных графах рассматривают компоненты сильной связности.

Для определения компонент сильной связности нам потребуется отношение двусторонней достижимости. Вершина v ***достижима*** из u, если существует маршрут из u в v; отношение достижимости между вершинами обозначим $u \rightsquigarrow v$. Определим отношение двусторонней достижимости $u \leftrightsquigarrow v = (u \rightsquigarrow v) \wedge (v \rightsquigarrow u)$.

Утверждение 10. *Отношение двусторонней достижимости* ($\leftrightsquigarrow$) *— отношение эквивалентности.*

Определение 8. ***Компонента сильной связности*** ориентированного графа — класс эквивалентности по отношению достижимости. То есть множество $U \subseteq V$ — компонента сильной связности, если любые две вершины множества U достижимы друг из друга и в U нельзя добавить ещё вершины с сохранением этого свойства (множество U — максимальное по включению).

Из основной теоремы об отношениях эквивалентности получаем, что компоненты сильной связности не пересекаются или совпадают.

Пример 25. Найдём компоненты сильной связности графа G на рис. 11.1. Вершины d и e попарно достижимы друг из друга (т. к. лежат на цикле) и из них не достижимы другие вершины — они образуют компоненту сильной связности. Вершины a и b тоже лежат на цикле, но они не образуют компоненту сильной связности, поскольку к ним ещё можно добавить вершину c; вторая компонента: множество $\{a, b, c\}$. Вершины s и t образуют отдельные компоненты сильной связности: каждая из них достижима из себя по определению маршрута, а других вершин из которых достижима s (или которые достижимы из t) нет.

Каждому ориентированному графу G можно поставить в соответствие граф, вершинами которого являются компоненты сильной связности G, а ребро ведёт из вершины-компоненты U в U', если в графе G есть ребро $u \to u'$, $u \in U$, $u' \in U'$. Такой граф называют ***конденсатом*** графа G; обратим внимание, что кратных рёбер в конденсате нет.

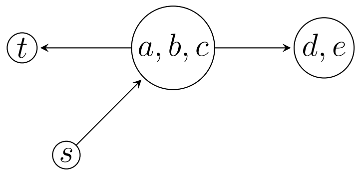

Рис. 11.3. Граф конденсат графа G.

Легко видеть, что в конденсате графа G (рис. 11.3) нет циклов. Так получилось случайно или это справедливо для любого конденсата? Давайте исследуем свойства компонент сильной связности, чтобы ответить на этот вопрос.

Утверждение 11. *Вершины u и v лежат в одной компоненте сильной связности тогда и только тогда, когда они лежат на замкнутом маршруте.*

Доказательство. Действительно, условие двусторонней достижимости влечёт существование маршрутов из u в v и из v в u, склеив их получим замкнутый маршрут. С другой стороны, замкнутый маршрут, содержащий вершины u и v очевидно влечёт двустороннюю достижимость. □

Из этого свойства ясно, что в конденсате не может быть циклов: если бы они были, то компоненты U и U' содержали бы вершины из одной компоненты сильной связности, что противоречит свойствам классов эквивалентности (они либо не пересекаются, либо совпадают).

11.2 Ациклические графы

Ориентированный граф называется ***ациклическим***, если в нём нет циклов, или, что равносильно по лемме 6, в нём нет замкнутых маршрутов положительной длины. Следующая теорема устанавливает равносильные условия ацикличности графа.

Теорема 9. *Для ориентированного графа $G(V, E)$ равносильны следующие условия:*

(1) граф G ациклический;

*(2) каждая компонента сильной связности графа G **тривиальна**, т. е. состоит из единственной вершины;*

(3) вершины графа G можно занумеровать числами от 1 до $|V|$ так, что рёбра G идут только от вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

Доказательство. Равносильность условий (1) и (2) вытекает из утверждения 11: в графе есть нетривиальная компонента сильной связности тогда и только тогда когда в нём есть замкнутый маршрут длины 2 или больше, а это равносильно существованию цикла.

Из условия 3 очевидно следует условие 1. Действительно, если такая нумерация существует, то если был бы цикл, то в нём вершина с большим номером соединялась бы ребром с меньшим номером.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать импликацию (1) ⇒ (3). Докажем для этого вспомогательную лемму.

Лемма 7. *В ориентированном ациклическом графе G есть сток.*

Доказательство. Возьмём самый длинный ориентированный путь $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$ в графе G. Такой существует, потому что множество путей конечно (вершины в пути повторяться не могут). Докажем от противного, что вершина v_n является стоком ($d_+(v_n) = 0$). Если в G есть ребро $v_n \to u$ и $u \neq v_i$, то путь можно сделать длиннее, добавив к нему u; если же $u = v_i$, то в графе G есть цикл (петель в G по определению быть не может). Оба случая приводят нас к противоречию. □

Докажем с помощью леммы импликацию (1) ⇒ (3) индукцией по числу вершин. <u>База:</u> для $|V| = 1$ очевидна: в графе из одной вершины нет рёбер, поэтому занумеровав единственную вершину единицей получим корректную нумерацию. <u>Шаг:</u> пусть утверждение верно для любого графа на n вершинах; согласно лемме в графе G на $(n+1)$-ой вершине существует сток — занумеруем его числом $n+1$ и рассмотрим граф G', получающийся из G удалением этого стока. По предложению индукции вершины G' можно занумеровать корректно; перенеся эту нумерацию на G получим также корректную нумерацию: поскольку из $(n+1)$-ой вершины не идёт ни одного ребра, испортить нумерацию она не может, а для всех остальных рёбер нумерация корректна. □

Нумерация вершин, удовлетворяющая условию (3) называется ***топологической сортировкой***. Этот приём очень полезен на практике. Представьте, что граф G — граф зависимости пакетов (программ) в операционной системе: ребро $u \to v$ означает, что пакет u зависит от пакета v и чтобы установить новую версию пакета u нужно сначала установить новую версию пакета v. В случае, если в графе G есть циклы, обновить операционную систему не получится: многим пользователям GNU/Linux до боли знакома эта проблема (часто она приводит к переустановки всей операционной системы). Если же граф ациклический, то для корректного обновления нужно выполнить топологическую сортировку и обновлять пакеты в порядке убывания номеров (чем выше приоритет, тем раньше нужно обновить пакет).

11.3 Ориентированные графы и бинарные отношения

Бинарное отношение R на конечном множестве V может быть задано 0-1-матрицей, которая в свою очередь является матрицей смежности для ориентированного графа (возможно с петлями). Другими словами, пары входящие в отношение R являются рёбрами графа $G(V, R)$.

Как изученные нами на прошлой лекции свойства выражаются в терминах графов? Опишем связь для свойств из раздела 10.2 прошлой лекции, а также введём здесь нужные нам свойства для этой лекции и сразу исследуем их связь с графами. Бинарным отношениям на бесконечных множествах соответствуют бесконечные графы; используемые нами определения для них не отличаются от определений для конечных графов.

Отношение рефлексивно, если в каждой вершине графа есть петля (диагональ матрицы состоит из единиц). В случае рефлексивных бинарных отношений часто удобно считать, что петель нет, помня, что отношение рефлексивно; петли полезны, чтобы выделить отношения, которые не рефлексивны и не антирефлексивны: отношение $R \subseteq V \times V$ называется ***антирефлексивным***, если не содержит ни одной пары (v, v) (диагональ матрицы состоит из нулей). В графе антирефлексивного отношения петель нет.

Отношение R симметрично, если в соответствующем графе ребро из u в v есть тогда и только тогда, когда есть ребро из v в u (матрица симметрична). Симметричным бинарным отношениям соответствуют неориентированные графы: вместо двух ориентированных рёбер между u и v проводят одно неориентированное.

Отношение R является ***антисимметричным***, если из uRv и vRu следует, что $u = v$; формально

$$\forall u, v \in V : (uRv) \wedge (vRu) \Rightarrow (u = v).$$

То есть из пар (u, v) и (v, u) в отношении может быть не более одной, за исключением петель. На языке ориентированных графов это означает, что если в графе существует ребро из u в v, то в графе нет ребра из v в u.

Отношение R транзитивно, если в соответствующем графе существование маршрута из вершины u в вершину v влечёт существование ребра из u в v. Формальное определение транзитивности утверждает только, что из наличия в графе рёбер $u \to w$ и $w \to v$ следует наличие ребра $u \to v$, но это утверждение легко обобщается по индукции до заявленного в начале абзаца.

11.4 Отношения порядка

В рамках этой лекции мы сосредоточимся на отношениях, которые транзитивны и антисимметричны и либо рефлексивны, либо антирефлексивны. Такие отношения называют ***отношениями (частичного) порядка*** или ***(частичными) порядками***. Отношения порядка знакомы читателю со школьной скамьи: таковыми являются отношения $(\leqslant)$ и $(<)$ на множествах $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Эти символы традиционно используют для отношений порядка Симметричное отношение порядка традиционно обозначают символом $\leqslant$, быть может с индексом, такие порядки называют ***нестрогими***, антисимметричные отношения порядка обозначают символом $<$, их называют ***строгими***. Ясно, что каждому отношению нестрогого порядка $\leqslant_P$ на некотором множестве A однозначно соответствует строгое отношение порядка $<_P$, которое получается из P удалением всех пар (a, a), и это соответствие взаимно однозначно (между строгими и нестрогими порядками определена биекция). Поэтому мы будем переходить в рассуждениях от нестрогого порядка $\leqslant_P$ к соответствующему строгому $<_P$ без дополнительных пояснений.

Разберёмся, как отношения порядка на конечных множествах связаны с ориентированными графами. Построим граф для отношения порядка $<$ на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4\}$:

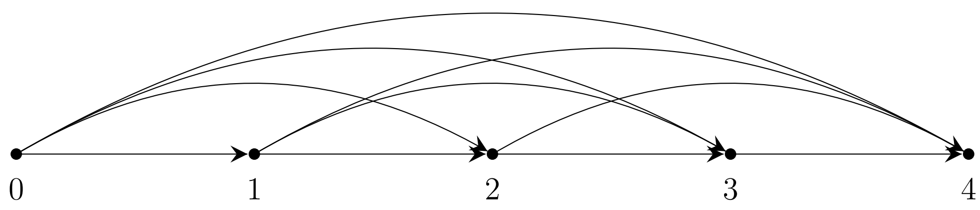

Рис. 11.4. Граф $G(\{0, 1, 2, 3, 4\}, (<))$

Как видно из рисунка граф получился ациклическим. Докажем справедливость этого наблюдения для общего случая.

Утверждение 12. *Отношению строго порядка $(<_P)$ соответствует ориентированный ациклический граф.*

Доказательство. Предположим противное: в графе отношения $<_P$ нашёлся замкнутый маршрут: $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_1$. Поскольку из v_1 ведёт ребро в v_2, а из v_2 в v_3 получаем по транзитивности отношения $<_P$, что из v_1 ведёт ребро в v_3. Продолжая по индукции получаем, что из v_1 ведёт ребро в $v_n = v_1$, то есть в графе G есть петля. Но отношение $<_P$ антирефлексивно, что означает, что в его графе нет петель. $\square$

Заметим, что не каждому ориентированному ациклическому графу соответствует отношение порядка: отношение, соответствующее графу может не быть транзитивным.

Граф 11.4 выглядит громоздким и избыточным: слишком много рёбер добавляется по транзитивности. Поэтому при описании отношения порядка графом использует не граф для самого отношения порядка $<_P \subseteq V \times V$ (или $\leqslant_P$), а граф для ***отношения непосредственного следования*** $\prec_P$, которое определяется согласно формуле:

$$(\prec_P) = \{(x, y) \mid (x <_P y) \land (\neg \exists z \in V : (x <_P z) \land (z <_P y))\}.$$

Другими словами, отношение $x \prec_P y$ означает, что $x <_P y$ и между ними нет элементов. Отношение непосредственного следования определено для любого порядка на конечном множестве, но может быть не определено (формально оно пусто) для отношения порядка на бесконечном множестве, таком как множество действительных чисел.

Граф отношения непосредственного следования для отношения $<$ на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ совпадает с ориентированным путём. Граф $G(V, \prec_P)$ отношения непосредственного следования называют ***диаграммой Хассе***.

Примеры, базовые определения и свойства

Отношение порядка, в котором любые два элемента сравнимы называется ***линейным***. Диаграмма Хассе для линейного порядка на конечным множеством является графом путём. Слово «частичный» перед порядком добавляют, чтобы подчеркнуть, что порядок не обязательно линейный.

Следующий естественный пример — покоординатный порядок проиллюстрирован диаграммой Хассе на рис. 11.5. Рисунок годится как для порядка на множестве $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (если представить, что у картинки есть продолжение), так и для порядка на множестве $\{0, 1, \ldots, 5\} \times \{0, 1, \ldots, 4\}$.

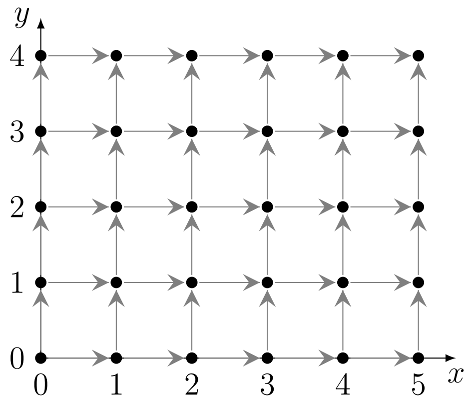

Рис. 11.5. Покоординатный порядок

Для формального определения покоординатного порядка удобно сначала ввести определения (декартова) произведения на порядках.

Определение 9. Пусть $\leqslant_P$ и $\leqslant_Q$ отношения порядка на множествах A и B соответственно. Определим их ***произведение*** как отношение $(\leqslant_{P\times Q})$ на множестве $A \times B$:

$$(a, b) \leqslant_{P\times Q} (a', b') \iff \begin{cases} a \leqslant_P a'; \\ b \leqslant_Q b'. \end{cases}$$

Таким образом, рис. 11.5 иллюстрирует произведение двух линейных порядков $\leqslant$ на множестве $\mathbb{N}_0$ или произведение линейных порядков на множествах $\{0, 1, \ldots, 5\}$ и $\{0, 1, \ldots, 4\}$.

Определение 10. Зафиксируем отношение порядка $\leqslant_P$ на множестве A. Элемент $x \in A$ называется

- ***максимальным***, если не существует элемента $a \in A$, такого что $x < a$;

- ***наибольшим***, если для любого элемента $a \in A$ справедливо $a \leqslant x$.
- ***минимальным***, если не существует элемента $a \in A$, такого что $a < x$;
- ***наименьшим***, если для любого элемента $a \in A$ справедливо $x \leqslant a$.

Из определения ясно, что наибольший элемент порядка является максимальным; обратное вообще говоря неверно. Приведём контрпример для минимального и наименьшего элемента. Удалим из порядка $\leqslant_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ точку $(0, 0)$. Получим порядок $\leqslant_P$, в котором элементы $(1, 0)$ и $(0, 1)$ являются минимальными, но между собой они несравнимы, поэтому наименьшего элемента в этом порядке нет.

Перейдём к следующему примеру. Напомним, что 2^U обозначает множество всех подмножеств множества U. Для любого множества U отношение $\subseteq$ на множестве U является нестрогим отношением порядка, а ему соответствует строгое отношение $\subsetneq$. Пусть $U = \{1, 2\}$; тогда получаем

$$\varnothing \subseteq \{1\}, \quad \varnothing \subseteq \{2\}, \quad \{1\} \subseteq \{1, 2\}, \quad \{2\} \subseteq \{1, 2\};$$

перечисленные пары задают диаграмму Хассе для включения.

Зафиксируем неориентированный граф G. Отношение $\subseteq$ «быть подграфом» является отношением порядка на множестве подграфов графа G.

Ясно, что если порядок $\leqslant_P$ определён на множестве A, то его можно сузить до любого подмножества X множества A. Формально сужение устроено так: $(\leqslant_P) \cap X \times X$.

Сужение порядка позволяет перенести понятие максимального и минимального элемента на подмножества. Так, сузив отношение $\subseteq$ на связные подграфы графа G получим, что компоненты связности являются максимальными подграфами, которые связны; а сузив отношение $\subseteq$ на множество клик получим, что максимальные элементы этого отношения являются максимальными кликами.

На рис. 11.6 изображён граф, известный как ориентированный булев куб. Простой булев куб получается из графа на рисунке стиранием ориентации. Проверьте, что булев куб является диаграммой Хассе для произведениея линейного порядка на множестве $\{0, 1\}$ на себя три раза. Дадим общее определение ориентированного булева куба. Множеством вершин ориентированного булева куба B_n являются двоичные слова; ребро идёт от слова u к слову v, если они отличаются ровно в одной позиции и в слове v на этой позиции стоит 1.

11.5 Связь между теоремой об ациклических графах и порядках

Отношения порядка на конечных множествах обладают следующим хорошим свойством. Если отношение порядка $\leqslant_P$ (на конечном множестве A) не является линейным, то его можно продолжить до линейного. Это означает, что можно добавить в отношение $\leqslant_P$ новые пары (x, y) не изменив при этом старые пары так, что все элементы множества A будут сравнимы между собой в получившемся порядке.

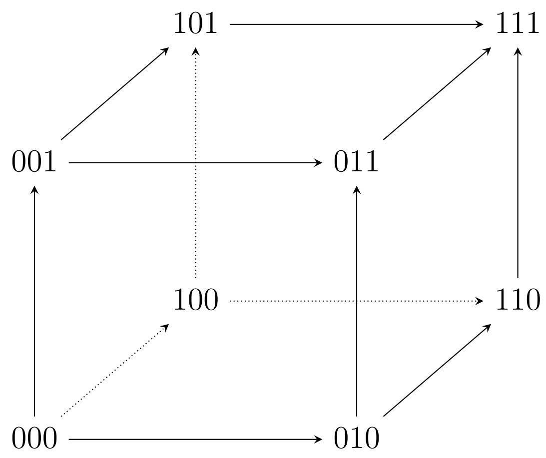

Рис. 11.6. Булев куб

Это свойство напрямую вытекает из теоремы 9: отношению $\leqslant_P$ соответствует ациклический граф. Сделаем его топологическую сортировку и добавим всевозможные рёбра от вершин с меньшим номером к вершинам с бóльшим номером. При этом ни одно соотношение в порядке $\leqslant_P$ не будет нарушено, а все несравнимые ранее элементы станут сравнимыми.