Задание на вторую неделю.
Математическая логики: множества, фундаментальные понятия и методы рассуждений

Ex. 1. Опишите формально множества ($U = \mathbb{Z}$): а) Множества, состоящее из чисел $1, 10$ и 100; б) Множества, состоящие из чисел, больших 5; в) Множества, состоящее из натуральных чисел, меньших 5; г) Множество, которое не содержит элементов.

Ex. 2. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$; б) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

Ex. 3. Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1 \backslash A_4 = A_6 \backslash A_9$. Докажите, что $A_2 \backslash A_7 = A_3 \backslash A_8$.

Ex. 4. Докажите, что число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ иррационально.

Ex. 5. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Ex. 6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

Бонусная задача. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, \ldots, x_k (k > 3)$ выполняется неравенство:

$$\frac{x_1}{x_k + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \frac{x_k}{x_{k-1} + x_1} \geqslant 2.$$

Задание на вторую неделю.

Математическая логики: множества, фундаментальные понятия и методы рассуждений

Ex. 1. Опишите формально множества ($U = \mathbb{Z}$): а) Множества, состоящее из чисел $1, 10$ и 100; б) Множества, состоящие из чисел, больших 5; в) Множества, состоящее из натуральных чисел, меньших 5; г) Множество, которое не содержит элементов.

Ex. 2. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$; б) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.

Ex. 3. Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ — невозрастающая последовательность множеств. Известно, что $A_1\backslash A_4 = A_6\backslash A_9$. Докажите, что $A_2\backslash A_7 = A_3\backslash A_8$.

Ex. 4. Докажите, что число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ иррационально.

Ex. 5. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Ex. 6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трех цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

Бонусная задача. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, \ldots, x_k (k > 3)$ выполняется неравенство:

$$\frac{x_1}{x_k + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \frac{x_k}{x_{k-1} + x_1} \geqslant 2.$$