Лекция 10

Бинарные отношения и их графы. Отношения эквивалентности

План:

1. Задание бинарного отношения таблицей, двудольным графом, перечислением пар. Формальное определение бинарных отношений ($R \subseteq A \times B$).
2. Некоторые свойства
   - функциональность
   - тотальность
   - инъективность
   - рефлексивность
   - транзитивность
   - симметричность
3. Отношения эквивалентности. Примеры:
   - Рациональные числа
   - Равные и подобные треугольники
   - Равенство булевых функций
   - Неопределённые интегралы
4. **Т.:** Классы эквивалентности не пересекаются или совпадают.
5. Следствие: отношения эквивалентности взаимно однозначно соответствуют разбиениям множества на подмножества.
6. Пример использования в комбинаторике: подсчёт числа k-элементных подмножеств сводится к подсчёту числа классов эквивалентности на наборах: $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_k) \iff \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

7. Теоретико-множественные операции с отношениями. Операция обращения. Описание с помощью булевых матриц.

8. Композиция отношений. Связь с базами данных

10.1 Описания и определение бинарных отношений

Начнём с примера, который иллюстрирует что такое бинарное отношение. Представьте, что состоялась контрольная, которую писало три человека, и её результаты приведены в таблице ниже:

Ученик	1	2	3	4	5
Маша	+	−	+	−	−
Алина	+	−	−	−	+
Джон	−	−	+	−	+

Рис. 10.1. задание бинарного отношения таблицей

Считается, что каждый ученик, либо решил задачу, либо нет. Если школьник A решил задачу x, то они находятся в отношении «решил задачу». Формально, построенная нами таблица — это 0-1-матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результаты контрольной можно было бы также описать с помощью двудольного графа (рис. 10.2).

Пожалуй, проще всего было задать отношение «решил задачу» просто перечислив все пары из школьников и задач:

$$(\text{Маша}, 1), \quad (\text{Маша}, 3), \quad (\text{Алина}, 1), \quad (\text{Алина}, 5), \quad (\text{Джжон}, 3), \quad (\text{Джон}, 5).$$

Этот способ и лежит в основе формального определения бинарного отношения. Формально ***бинарное отношение*** R между множествами A и B — это некоторое подмножество их декартова произведения:

$$R \subseteq A \times B.$$

Если $(a, b) \in R$, говорят, что элемент a ***находится в отношении*** R с элементом b.

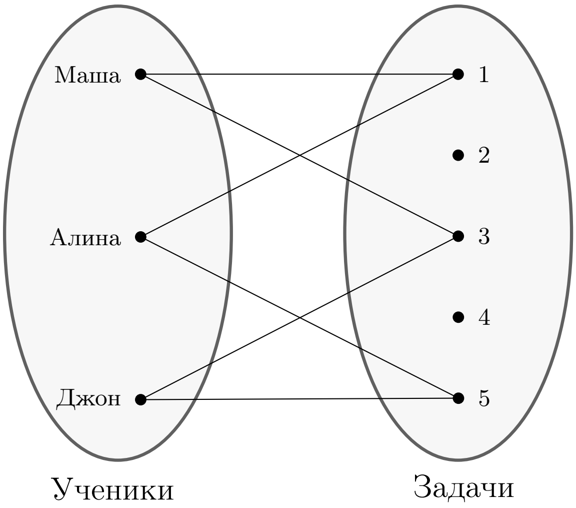

Рис. 10.2. Задание бинарного отношения двудольным графом

Выше мы привели различные способы описания бинарного отношения: перечислением пар, таблицей (матрицей), двудольным графом. Переход от одного способа описания к другому бывает полезен на практике; вернёмся к примеру из лекции о паросочетаниях. Представьте, что A — множество процессоров, а B — множество задач. Множество пар (a, b) задаёт отношение R — выполнимости задачи b на процессоре a. Задача состоит в выборе подмножества $f \subseteq R$, такого что в единицу времени решается максимальное число задач, при этом каждый процессор решает не более одной задачи. На языке двудольных графов это означает, что требуется найти максимальное паросочетание. В случае, если получилось задействовать все процессоры, на языке функций означает, что найденное отношение f — инъекция, а если при этом задействованы и все задачи, то f — биекция.

10.2 Примеры и свойства

В последнем примере предыдущего раздела мы упомянули, что функция — частный случай бинарного отношения. Если быть точнее, то формальное определение функции и даётся через бинарное отношение.

Определение 4. Бинарное отношение $f \subseteq X \times Y$ называется ***функциональным*** или ***функцией***, если из $(x, y) \in f$ и $(x, y') \in f$ следует, что $y = y'$.

В случае функций факт $(x, y) \in f$ обозначают через $f(x) = y$.

Пусть $R \subseteq X \times Y$ В случае, если $\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in R$, отношение R называется ***(левым-)тотальным***. Тотальное и функциональное отношение $f \subseteq X \times Y$ является всюду определённой (тотальной) функцией или отображением.

Отношение $R \subseteq X \times Y$ является ***инъективным***, если из $(x, y) \in R$ и $(x', y) \in R$ следует, что $x = x'$.

Отношение $R \subseteq X \times Y$ является ***сюръективным***, если $\forall y \in Y \exists x \in X : (x, y) \in R$.

Тотальные инъективные отношения задают инъекции, тотальные сюръективные — сюръекции, тотальные инъективные и сюръективные — биекции.

Бинарные отношения знакомы вам со школьной скамьи. Символы $<, >, \leqslant, \geqslant, =, \neq$ задают бинарные отношения. Чтобы не было путаницы, когда мы говорим об отношениях, заданных математическими символами, мы будем окружать их скобками: например, формально $(\leqslant) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ можно задать через множество как

$$(\leqslant) = \{(x, y) \mid x \leqslant y\}.$$

Читатель может быть недовольным, что мы задали отношение $(\leqslant)$, используя его же внутри; мы сделали это лишь для наглядности. Формально это множество можно было бы описать и с помощью декартовой плоскости: в него входят все точки лежащие на прямой $y = x$ и все точки выше этой прямой.

Мы будем использовать устоявшееся ***обозначение*** xRy, равносильное $(x, y) \in R$; вы к нему уже хорошо привыкли: запись $x \leqslant y$ означает ни что иное, как $x, y \in (\leqslant)$.

В случае, когда $R \subseteq A \times A$, говорят, что отношение R ***задано на множестве*** A. Сосредоточимся на свойствах таких отношений.

Определение 5. Отношение $R \subseteq A \times A$

- ***рефлексивно***, если $\forall a \in A : aRa$;
- ***симметрично***, если $\forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$;
- ***транзитивно***, если $\forall a, b, c \in A : (aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow aRc$.

Пример 18. Проверим эти свойства для отношения $(\leqslant)$ на множестве $\mathbb{R}$. Отношение $(\leqslant)$ рефлексивно: действительно, для любого числа a справедливо $a \leqslant a$. Отношение $(\leqslant)$ не симметрично: действительно, $1 \leqslant 2$, но $2 \nleqslant 1$. Отношение $(\leqslant)$ транзитивно: какие бы три числа a, b и c мы не взяли, получим, что если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Упражнение 6. Проверьте каждое свойства для отношений $(>), (=), (\neq)$ на множестве $\mathbb{R}$.

10.3 Отношения эквивалентности

Определение 6. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называют ***отношением эквивалентности***.

Сделав упражнение 18 вы установили, что среди отношений $(\leqslant), (>), (=), (\neq)$ отношением эквивалентности является только равенство. Отсюда и следует смысл этого понятия: отношения эквивалентности определяют какие объекты считаются одинаковыми, а какие нет.

Пример 19. Определим отношение $\sim$ на множестве $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_1$ следующим образом: $(z,n)\sim(z',n')$, если и только если $\dfrac{z}{n}=\dfrac{z'}{n'}$. Если читатель не сообразил, что за отношение мы построили, то сообщим, что мы построили отношение равенства на множестве обыкновенных дробей. Оставляем читателю проверить, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно; самостоятельную проверку мы оставляем и для последующих примеров.

Пример 20. Следующий пример отношения эквивалентности — отношение равенства треугольников на плоскости. До середины XX века вместо слова «равенство» в учебниках по геометрии использовали термин «конгруэнтность».

Пример 21. Приведём ещё один пример отношения эквивалентности из геометрии: отношение подобия треугольников.

Пример 22. Перейдём теперь к математическому анализу. Напомним, что первообразной функции f, называется такая функция F, что $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in\mathrm{Dom}(f)$. Отношение быть первообразной одной и той же функции f является отношением эквивалентности. Кстати, из курса анализа известно, что любые две первообразные одной и той же функции, отличаются друг от друга на константу.

Пример 23. Отношение равенств на булевых функциях, введённое нами на первой лекции, является отношением эквивалентности.

Интуитивно ясно, что если отношение $\sim\subseteq A\times A$ — отношение эквивалентности, то все элементы множества A можно разбить на подмножества попарно эквивалентных между собой объектов. В одинаковые подмножества попадают дроби, задающие одно и то же рациональное число, равные или подобные треугольники (в зависимости от отношения), а также первообразные одинаковых функций.

Эта интуиция отражает основную теорему об отношениях эквивалентности. Чтобы её сформулировать, формализуем сначала понятие класса эквивалентности. Пусть $\sim\subseteq A\times A$ — отношение эквивалентности. Определим ***класс эквивалентности*** $[a]$ как множество всех таких элементов множества A, которые эквивалентны элементу a:

$$[a]=\{x\mid x\in A,\ x\sim a\}.$$

Теорема 7. *Классы эквивалентности $[a]$ и $[b]$ (по отношению эквивалентности $\sim$) либо не пересекаются*[1]*, либо совпадают. Множество A разбивается в объединение классов эквивалентности.*

Доказательство. Ясно, что

$$A=\bigcup_{a\in A}[a],$$

поскольку каждый класс $[a]$ содержит элемент a в силу рефлексивности. Докажем теперь первую часть теоремы от противного.

Допустим $x\in[a]\cap[b]$ и $[a]\neq[b]$. Раз $x\in[a]$ и $x\in[b]$, то $x\sim a$ и $x\sim b$. В силу симметричности получаем, что $a\sim x$, а по транзитивности получаем, что

[1]Напомним, что множества A и B не пересекаются, если $A\cap B=\varnothing$.

$a \sim b$, раз $a \sim x \sim b$ (эта запись значит «$a \sim x$ и $x \sim b$»). Значит $a \in [b]$ и из симметричности и транзитивности получаем, что каждый элемент y из класса $[a]$ также принадлежит классу $[b]$:

$$y \in [a] \Rightarrow y \sim a \Rightarrow a \sim y \Rightarrow b \sim a \sim y \Rightarrow b \sim y \Rightarrow y \sim b.$$

То есть мы показали, что $[a] \subseteq [b]$. Симметричные рассуждения показывают, что $[b] \subseteq [a]$, а значит классы $[a]$ и $[b]$ совпадают, если пересекаются. □

Эта теорема объясняет, что отношение эквивалентности разбивает множество A на подмножества. Формализуем это утверждение. ***Семейством*** (множеств) называется множества, элементами которого являются множество.

Определение 7. ***Разбиением*** множества A на подмножества называется семейство $\mathcal{F} \subseteq 2^A$, для которого справедливы следующие условия

- $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
- $A = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{F}} B$;
- $\forall B, B' \in \mathcal{F} : B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = \varnothing$.

То есть, разбиение множества A — это семейство непустых попарно непересекающихся его подмножеств, дающих в объединении A. Множества $B \in \mathcal{F}$ называют ***блоками*** разбиения $\mathcal{F}$.

Итак, классы эквивалентности образуют разбиение множества A. С другой стороны, каждому разбиению множества A соответствует отношение эквивалентности «элементы принадлежат одному блоку разбиения». Формально разбиению $\mathcal{F}$ ставится в соответствие отношение

$$\sim_{\mathcal{F}} = \{(x, y) \mid \exists B \in \mathcal{F} : x, y \in B\}.$$

Следствие 3. *Между разбиениями множества A и бинарными отношениями на A есть биекция, которая ставит в соответствие разбиению $\mathcal{F}$ отношение эквивалентности $\sim_{\mathcal{F}}$, классы которого являются блоками разбиения $\mathcal{F}$.*

Доказательство следствия оставим читателю в качестве упражнения.

Отношения эквивалентности полезны и в математике и в программировании. Если вы реализуете на C++ класс рациональных чисел через обыкновенные дроби, элементы множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1$, то пары $(1, 2)$ и $(2, 4)$ задают одно и то же число: $1/2 = 2/4$; значит, на самом деле вам нужно либо реализовать рациональные числа, перейдя к классам эквивалентности по описанному отношению, и, например, каждый раз хранить в классе несократимую дробь, либо реализовать операцию равенства через проверку на эквивалентность.

В случае математики, отношения эквивалентности позволяют определить многие понятия и использовать основную теорему для доказательства соответствующих свойств. Так, неопределённый интеграл $\int f(x)dx$ формально является классом эквивалентности, потому и пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

В качестве применения основной теоремы введём отношение достижимости на множестве вершин неориентированного графа G. Вершина u достижима из v, если в G есть путь из v в u. Проверьте, что это отношение является отношением эквивалентности. Какие же у него классы? Подмножество $U \subseteq V(G)$ является классом эквивалентности по отношению достижимости, если для любой пары вершин $u, v \in U$ вершина u достижима из v и кроме того, нет других вершин в $V \setminus U$, достижимых из некоторой вершины $u \in U$. Таким образом, индуцированный подграф $G[U]$ является компонентой связности в графе G! Итак, мы доказали давно обещанный факт, который вытекает из основной теоремы об отношениях эквивалентности (теоремы 7).

Теорема 8. *Компоненты связности (простого неориентированного) графа либо не содержат общих вершин, либо совпадают. Любой граф является объединением своих компонент связности.*

Приведём ещё один пример отношения эквивалентности, с которым мы уже сталкивались в комбинаторике.

Пример 24. Зафиксируем множество $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ и число k и обозначим через A множество слов длины k над алфавитом $[n]$. Введём следующее бинарное отношение: слова $x_1x_2\ldots x_k$ и $y_1y_2\ldots y_k$ находятся в отношение $\sim$ тогда и только тогда, когда множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ совпадают:

$$x_1x_2\ldots x_k \sim y_1y_2\ldots y_k \iff \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}.$$

Это отношение является отношением эквивалентности и его классами являются подмножества k-элементные подмножества множества $[n]$. Мы фактически использовали это отношение в примере 16 для вывода формулы для чисел сочетания. Основной факт, который мы использовали: все классы эквивалентности имеют одинаковый размер $k!$. Отсюда следует, что количество классов равно $\dfrac{|A|}{k!}$.

10.4 Операции с бинарными отношениями

Поскольку бинарные отношения формально являются множествами, к ним применимы все теоретико-множественные операции. Обратим внимание, что операции удобно вычислять, в случае, если бинарные отношения заданы матрицами: если $R = P \cap Q$, то $xRy \iff (xPy) \wedge (xQy)$, то есть для вычисления матрицы отношения R нужно взять поэлементную конъюнкцию матриц отношений P и Q. Здесь мы использовали уже хорошо изученную нами связь между алгеброй множеств и алгеброй логики.

Бдительный читатель уже сообразил, что бинарные отношения ничем не отличаются от бинарных предикатов: предикат $R(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется отношение xRy. Как всегда, в разных ветвях математики возникают разные определения и обозначения для эквивалентных объектов, и эти расхождения со временем изжить очень тяжело.

Помимо теоретико-множественных операций, изучим ряд естественных операций для бинарных отношений.

Операция обращения (транспонирования)

Обратным отношением к отношению $R \subseteq A \times B$ называют отношение

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid xRy\} \subseteq B \times A.$$

Операция обращения отношений известна также как операция транспонирования, поскольку в случае отношений между конечными множествами, обратное отношение задаётся транспонированной матрицей исходного.

Упражнение 7. Докажите, что отношение $R \subseteq A \times A$ симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$. Выразите свойство симметричности на языке матриц.

В случае, если отношение f функционально (является функцией) и обратное к нему отношение является функцией, то отношение f^{-1} реализует обратную функцию. В этом случае функция f называется ***обратимой***.

Упражнение 8. Докажите, что отношение R^{-1} функционально тогда и только тогда, когда отношение R функционально и инъективно.

Напомним, что в случае функций запись f^{-1} означает полный прообраз. И эта запись осмыслена с точки зрения бинарных отношений. Любому бинарному отношению $R \subseteq A \times B$ соответствует функция $f_R : 2^A \to 2^B$, такая что для любого подмножества $X \subseteq A$ справедливо

$$f_R(X) = \{y \mid \exists x \in X : xRy\}.$$

В случае когда R является функцией, отображение f_R возвращает образ множества X, поэтому для сокращения и пишут $f(X)$ и даже $R(X)$. Отображение $f_{R^{-1}}$ (для обратного к R отношения) вычисляет полный прообраз множества $Y \subseteq B$.

Операция композиции и связь с базами данных

Первым способом описания бинарных отношений, который мы изучили, были таблицы. Таблица из примера напоминает упрощённую версию таблицы базы данных: в реальной базе данных таблицы имеют много столбцов и значение в каждом из них не обязательно 0 или 1. Тем не менее, реляционные базы данных берут своё название от отношений (relations) правда произвольной арности. В общем случае, k-арное отношение определяется как подмножество декартова произведения k множеств:

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k.$$

Для простоты мы считаем операцию декартова произведения ассоциативной, и считаем, что элементы множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ — это (упорядоченные) наборы или как их ещё называют ***кортежи***:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_i \in A_i\}.$$

Заметим, что мы начинали изучение курса с отношений арности 1 — это просто множества. В работе с базами данных важную роль играет операция композиции, которую мы определим только для бинарных отношений, но сути это не меняет:

на k-арные отношения можно смотреть как на бинарные, считая, что $R \subseteq A_1 \times B$, где $B = A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_k$.

Перед формальным определением композиции отношений, начнём с примера и проведём его на языке графов.

В университете есть множество студентов X, распределённых по множеству факультетов Y. Это распределение задаёт отношение $P \subseteq X \times Y$. У университета также есть множество зданий Z, при этом разные факультеты проводят свои занятия в разных зданиях: факультет y находится в отношении Q со зданием z, если и только если у какой-то из групп есть занятия в здании z. Для повышения мер безопасности администрация факультета решила предоставить студентам допуск только в те здания, в которых у есть занятия у их факультета. Для этих целей, администрация изобразила отношения P и Q с помощью трёхдольного графа (рис. 10.3).

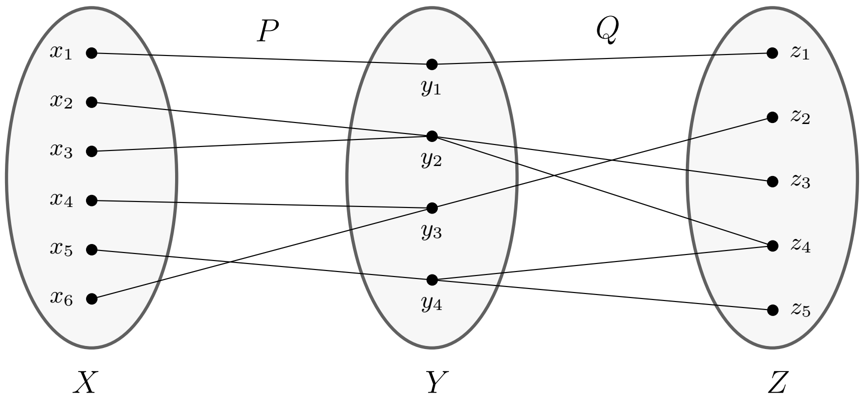

Рис. 10.3. Композиция бинарных отношений

Ясно, что студенту x_i нужно дать доступ к зданию z_j, если и только если из x_i можно добраться до z_j через какую-то вершину множества Y. Обозначим через R отношение доступа студента к зданию. Ясно, что $x_2 R z_4$, потому что $x_2 P y_2$ и $y_2 Q z_4$. Отношение R и будет результатом композиции отношений P и Q, которую мы готовы теперь определить формально.

$$Q \circ P = \{(x, z) \mid \exists y \in Y : xPy \wedge yQz\}.$$

Обратите внимание на порядок операндов композиции. Он не совпадает с порядком отношений на картинке, но совпадает с порядком операндов при композиции функций: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Мы следуем данному соглашению о порядке операндов, чтобы не было недоразумений при стандартной композиции функций.