

Задачи десятого семинара.

Ех. 1. Решить рекуррентные соотношения

$$\text{a)} a_{k+3} = 7a_{k+2} - 16a_{k+1} + 12a_k, \quad \text{b)} a_{k+3} = 7a_{k+2} - 16a_{k+1} + 12a_k + 5 - 2k.$$

Ех. 2. Найти такую производящую функцию $F(x)$, что $F(x) = F'(x)$.

Ех. 3. Докажите, что

$$\text{a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = m^n;$$

$$\text{b)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1};$$

$$\text{c)} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot x^k = \frac{(n-1) \cdot x^{n+1} - n \cdot x^n + x}{(x-1)^2}.$$

Ех. 4. Какова вероятность при бросании четырех игральных костей выбросить 14 очков?

Ех. 5. Решить через производящие функции рекурренту

$$\begin{cases} a_{k+1} = 5a_k + k \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Ех. 6. Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи.

Ех. 7. Найдите коэффициенты производящей функции **a)** $(1+x)^{-n}$;

b) $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ (коэффициенты при мономах $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$)

Ех. 8. В урне находится 3 красных, 4 синих и 2 зеленых шара. Сколькими способами можно извлечь 6 шаров так, чтобы среди них было нечетное число красных, четное число синих и хотя бы один зеленый шар?

Ех. 9. Вычислите $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k \left(\frac{3}{2}\right)^k$.

Ех. 10. Найдите производящую функцию чисел Каталана.

Задачи десятого семинара.

Ех. 1. Решить рекуррентные соотношения

$$\text{a)} a_{k+3} = 7a_{k+2} - 16a_{k+1} + 12a_k, \quad \text{b)} a_{k+3} = 7a_{k+2} - 16a_{k+1} + 12a_k + 5 - 2k.$$

Ех. 2. Найти такую производящую функцию $F(x)$, что $F(x) = F'(x)$.

Ех. 3. Докажите, что

$$\text{a)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = m^n;$$

$$\text{b)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1};$$

$$\text{c)} \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot x^k = \frac{(n-1) \cdot x^{n+1} - n \cdot x^n + x}{(x-1)^2}.$$

Ех. 4. Какова вероятность при бросании четырех игральных костей выбросить 14 очков?

Ех. 5. Решить через производящие функции рекурренту

$$\begin{cases} a_{k+1} = 5a_k + k \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Ех. 6. Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи.

Ех. 7. Найдите коэффициенты производящей функции **a)** $(1+x)^{-n}$;

b) $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ (коэффициенты при мономах $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$)

Ех. 8. В урне находится 3 красных, 4 синих и 2 зеленых шара. Сколькими способами можно извлечь 6 шаров так, чтобы среди них было нечетное число красных, четное число синих и хотя бы один зеленый шар?

Ех. 9. Вычислите $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k \left(\frac{3}{2}\right)^k$.

Ех. 10. Найдите производящую функцию чисел Каталана.