Лекция 2

Множества и логика

План:

1. Множества и операции над ними
2. Связь алгебры логики и алгебры множеств
   - предикаты
   - юнивёрсум и дополнение
   - законы де Моргана
   - кванторы
   - эквивалентность тождеств алгебры множеств и алгебры логики
   - импликация
   - контрапозиция

В математических курсах часто стараются, чтобы всё было достаточно строго определено. Однако, для совсем базовых понятий приходится делать исключение: точки и прямые в школьной геометрии не определяют, а лишь оглашают некоторые их свойства, а в остальном предлагают полагаться на интуицию. Также придётся сделать и нам при изучении множеств.

2.1 Множества и операции над ними

Когда говорят, что задано множество A, под этим понимают, что A представляет собой совокупность объектов, игнорируя при этом какие либо отношения между этими объектами, в частности порядок; кроме того, один объект не может входить в множество более одного раза. Конечное множество можно задать явно перечислив его элементы — для этого используют фигурные скобки:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Из сказанного выше вытекает, что

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{5, 4, 3, 2, 1\} = \{1, 3, 2, 4, 5\} = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5\}.$$

Два множества ***равны*** друг другу, если их элементы совпадают. В последнем описании множества элементы повторяются: элементы разрешено повторять при перечислении, хотя в множество каждый перечисленный элемент и входит ровно один раз. Количество элементов конечного множества A называют ***мощностью*** A и обозначают через $|A|$: $|\{1, 2, 3\}| = 3$.

В случае описания бесконечных множеств, используют неявное перечисление: так множество $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ состоит из (всех) ***натуральных чисел***. Мы считаем ноль натуральным числом (по этому вопросу среди математиков нет единого мнения), и чтобы не путать читателя обозначаем натуральные числа через $\mathbb{N}_0$; обозначим через $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ множество ***положительных целых чисел***. Множество ***целых чисел*** $\mathbb{Z}$ часто записывают одним из следующих способов:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$$

Запись «$a \in A$» означает, что объект a ***является элементом*** множества A, а запись «$a \notin A$» — отрицание этого условия:

$$3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad 2 \notin \{1, 3, 5, \ldots\}.$$

Познакомимся с ещё одной формой записи множеств. Запись

$$A = \{x \mid \text{«условие на } x\text{»}\}$$

означает, что множество A состоит из всех элементов x, для которых выполняется условие. Так, запись $\{x \mid x = 2k + 1 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$ задаёт множество нечётных чисел. Также вместо символа | используют двоеточие; эти записи равноправны, а выбор символа часто обусловлен красотой и читаемостью формулы. Определим с помощью такой записи множество ***рациональных чисел***:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

Также введём здесь обозначение для множества ***действительных чисел*** $\mathbb{R}$, аккуратное определение которых даётся в курсе математического анализа.

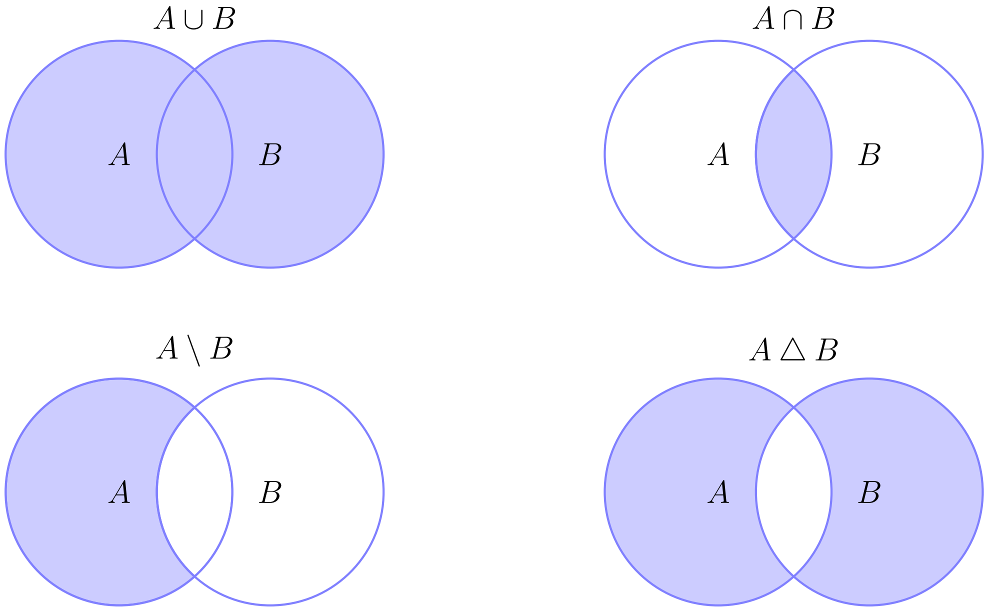

Рис. 2.1. Диаграммы Эйлера-Венна.

Определим теперь операции с множествами:

- объединение $A \cup B$ множеств A и B состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств;

- пересечение $A \cap B$ состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам;

- разность $A \setminus B$ состоит из элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B;

- симметрическая разность $A \triangle B$ состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств.

Эти операции иллюстрируют с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 2.1).

Говорят, что множество C является ***подмножеством*** множества D, если все элементы C принадлежат D. Это обозначают $C \subseteq D$. Из картинок видно, что $A \setminus B \subseteq A$. Множество, в котором нет элементов называют ***пустым*** и обозначают $\varnothing$.

Упражнение 1. Убедитесь, что $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

Упражнение 2. Убедитесь, что множества A и B равны, тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Упражнение 3. Докажите, что для любых множеств A и B справедлива формула $(A \cup B) \setminus (A \triangle B) = A \cap B$.

2.2 Связь с логикой

При изучении алгебры логики, мы имели дело с высказываниями, которые либо истинны, либо ложны. Утверждение $A(x) =$ «x делится на 6» зависит от параметра x, а потому таковым не является. Утверждения, зависящие от параметров, называют ***предикатами*** и работать с ними можно точно также как и с обычными высказываниям (можно применять к ним всё те же логические связки). Часто удобно использовать предикаты, зависящие от нескольких параметров: например, $G(x, y) =$ «$x > y$». Число параметров называется ***арностью*** предиката, предикаты арности 1 или ***унарные*** предикаты соответствуют множествам: множеству A соответствует предикат $A(x)$, который истинен тогда и только тогда, когда $x \in A$.

Обратим внимание, что

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\};$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\};$$
$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\};$$
$$A \triangle B = \{x \mid ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in B) \wedge \neg(x \in A))\}.$$

В описании множества $\{x \mid P(x)\}$ условие $P(x)$ — это и есть унарный предикат, задающий множество.

Эта связь объясняет законность рассуждений с картинками (диаграммами Эйлера-Венна). Допустим в диаграмму входят три множества A, B и C. Каждую область диаграммы можно задать вектором (a, b, c) с компонентами $\{0, 1\}$; значение 1 означает, что x принадлежит соответствующему множеству, а 0, что нет. Так, вектор $(1, 0, 1)$ означает, что $x \in A$, $x \notin B$ и $x \in C$. Сама диаграмма описывает множество D, и если область закрашена, то всякий x из этой области принадлежит D. Получаем, что диаграммы Эйлера-Венна просто иллюстрируют таблицы истинности.

Многие теоретико-множественные тождества следуют напрямую из тождеств алгебры-логики: тождество

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

равносильно следующему тождеству, в котором a означает «$x \in A$» и т.д.

$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Юнивёрсум и Дополнение

Вы скорее всего уже наслышаны о такой операции с множествами, как дополнение. Но вот каверзный вопрос[1]: принадлежит ли число $\sqrt{2}$ к дополнению множеству чётных чисел? А вот этот стул? Слово «дополнение» буквально означает «до полного», поэтому для этой операции нужно сначала определить «полное множество» — множество из всех объектов, которые мы рассматриваем в рамках наших теоретико-множественных рассуждений. Такое множество называют ***юнивёрсум*** и обозначают U.

[1] Если о дополнении вы не слышали, то пропустите этот вопрос.

Множество $\bar{A} = U \setminus A$ называют ***дополнением*** к множеству A. Ясно, что $\bar{A}$ — это наименьшее множество, которое нужно добавить к A, чтобы получилось множество U.

Мы изучаем наивную теорию множеств, которая вообще говоря противоречива. Проблемы возникают, если рассматривать множества всех множеств (см. парадокс Рассела). Для того, чтобы обезопасить себя, достаточно зафиксировать юнивёрсум: если U — множество натуральных (целых неотрицательных) чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или вещественных чисел $\mathbb{R}$, то проблем не будет.

Приведём теперь законы теории множеств, связанные с дополнением и соответствующие им логические законы.

Законы де Моргана

С помощью диаграмм легко проверить, что $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$, $A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$. Из связи с таблицами истинности получаем, что $a \wedge b = \neg(\bar{a} \vee \bar{b})$ и $a \vee b = \neg(\bar{a} \wedge \bar{b})$. Эти законы известны как законы де Моргана.

Однако, эти формулы можно обобщить:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \overline{\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n \cup \ldots} \tag{1}$$

Докажем обобщённую формулу, обозначим левую часть за X, а правую за Y. Если $x \in X$, то x принадлежит каждому множеству A_i, но тогда он не принадлежит ни одному дополнению $\bar{A}_i$, а значит и их объединению. Значит x принадлежит дополнению от объединения дополнений, т.е. Y. Мы доказали, что $X \subseteq Y$. Пусть теперь $y \in Y$, тогда $y \notin \overline{Y}$ и потому для каждого i выполняется $y \notin \bar{A}_i$. Но раз $y \notin \bar{A}_i$, то $y \in A_i$ (для каждого i), а потому $y \in X$. Отсюда $Y \subseteq X$; как и в первом случае включение справедливо в силу произвольности y. Итак, мы доказали, что $X = Y$, что и требовалось. Обратим внимание, что при доказательстве равенства двух множеств требуется доказывать включения в обе стороны! Бывают доказательства, в которых хитрым образом доказывается равенство множеств без доказательств включений по очереди, но это скорее редкость.

Двойственный закон Моргана

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots = \overline{\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \ldots \cap \bar{B}_n \cap \ldots}$$

можно доказать аналогично, но можно и вывести из первого закона. Поскольку тождество (1) справедливо для произвольных множеств, заменим в нём A_i на $\bar{B}_i$, снимем двойное дополнение и возьмём дополнения от обеих частей равенств.

Кванторы

Возможно вы уже познакомились с кванторами в математическом анализе. Вернёмся к утверждениям, зависящим от параметра — предикатам. Часто интересно, истинен ли предикат A при любом x. Это утверждение записывают как

$$\forall x A(x),$$

а истинность при хотя бы одном x

$$\exists x A(x).$$

Значки $\forall$ и $\exists$ называют ***кванторами*** (всеобщности и существования соответственно).

Кванторы можно интерпретировать как (возможно) бесконечные конъюкции и дизъюнкции элементарных высказываний $A(x)$. Поскольку операции конъюнкция и дизъюнкция коммутативны и ассоциативны, порядок их выполнения не важен. Это приводит к следующему сокращению в формулах:

$$A(1) \wedge A(2) \wedge \dots A(n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A(i) = \bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} A(i).$$

В случае когда порядок операндов важен (например, в произведении матриц), вторая запись интерпретируется как первая, а третья запись вообще говоря некорректна.

В случае произвольной формулы в кванторах, подразумевается что каждая переменная принимает значение из определённого множества, юнивёрсума U. В логике удобно считать, что все переменные принимают значения из единственного множества, это легко реализовать технически.

Итак, формально формула в кванторах интерпретируется так:

$$\forall x A(x) = \bigwedge_{x \in U} A(x).$$

К конъюнкции (не обязательно конечной) применим закон Моргана, отсюда получаем, что

$$\neg \forall x A(x) = \overline{\bigwedge_{x \in U} A(x)} = \bigvee_{x \in U} \neg A(x) = \exists x \neg A(x).$$

Эквивалентность тождеств алгебры логики и алгебры множеств

Тождества алгебры логики переходят в тождества алгебры множеств при замене булевых переменных множествами, а операций алгебры логики на соответсвующие операции алгебры множеств. Переход справедлив и в обратную сторону. Поэтому все преобразования, которые мы изучили, работая с алгеброй логики имеют прямой аналог в алгебре множеств.

Приведём набросок доказательства эквивалентности тождеств в этих алгебрах. Возьмём формулу алгебры множеств и заменим в ней множества A_i на предикаты $A_i(x)$ а операции, на соответствующие логические операции. Добавив перед обеими частями квантор всеобщности по x и заменив равенство на эквивалентность получим выражение вида

$$\forall x((\text{левая часть формулы}) \leftrightarrow (\text{правая часть формулы})).$$

Ясно, что это утверждение истинно для любых предикатов тогда и только тогда, когда изначальная формула алгебры множеств справедлива для любого набора множеств. Также ясно, что это условие выполняется, если заменив теперь предикаты на булевы переменные ($A_i(x)$ на a_i) и убрав квантор по x, мы получим тождество в алгебре логики. Если же в результате замены мы получили не тождество, найдётся такой набор переменных, при котором высказывание ложно. Если в этом наборе $a_i = 1$, положим $A_i = 1$, если же $a_i = 0$, положим $A_i = \varnothing$. Выполнив обратную замену от алгебры логики к утверждению в предикатах и к формуле алгебры множеств, получим, что утверждение в предикатах ложно, а формула алгебры множеств не выполняется.

Рассуждения в обратную сторону аналогичны.

Приведём пример построения эквивалентных тождеств алгебры множеств и алгеброй логики с промежуточным шагом формулы с предикатами на примере закона де Моргана.

Пример 3.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\forall x(\neg(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow (\neg A(x) \wedge \neg B(x)))$$

$$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$$

Импликация и множества

На первый взгляд, определение импликации выглядит странно. Почему математики решили, что $0 \to 1 = 1$?! Ответ кроется в связи с теорией множеств. Утверждение «(x делится на 6) $\to$ (x делится на 2)$\vee$(x делится на 3)» будет считаться теоремой, если оно истинно при всех x:

$$\forall x\ D_6(x) \to (D_2(x) \vee D_3(x)).$$

Но утверждение $D_6(x)$ ложно, например, при $x = 4$, а утверждение $D_2(x)$ истинно.

Переведём высскаывание $\forall x\ A(x) \to B(x)$ на язык множеств. Если посылка импликации истинна при некотором x, то при этом же x истинно и заключение (иначе, импликация ложно). Если же посылка ложна, то какого бы ни было заключение, импликация истинна. Значит каждый x из A принадлежит также множеству B, отсюда получаем, что A — подмножество B. Ясно, что $D_6 \subseteq D_2 \cup D_3$.

Контрапозиция

Логический закон контрапозиции $A \to B = \neg B \to \neg A$ при переводе на язык множеств гласит, что $A \subseteq B \iff \bar{B} \subseteq \bar{A}$. Его часто используют на практике при доказательстве теорем и решении задач: когда нужно доказать следствие $A \to B$, часто вместо него доказывают $\neg B \to \neg A$.