Лекция 7

Комбинаторика I. Правила суммы и произведения

План:

1. Отображения и подсчёты
2. Правило суммы
3. Правило произведения. Биекция с декартовым произведением множеств
4. Число слов длины n над алфавитом из k символов
5. Перестановки
6. Подсчёт количества слов длины k с разными буквами. Размещения
7. Число сочетаний. Количество k-элементных подмножеств n-элементного множества
8. Подсчёты с кратностью: сколько различных слов можно составить из слова «Математика»?

9*. Дискретная вероятность

Комбинаторика — раздел математики, изучающий дискретные объекты, такие как (конечные) множества, функции, графы, и другие объекты, с которыми нам ещё предстоит познакомиться. Перечислительная комбинаторика сосредоточена на задачах о перечислении и подсчёте. Предмет перичислительной комбинаторики может на первый взгляд показаться нелепым: если у нас есть конечное множество объектов и нам нужно подсчитать их количество, то давайте просто выпишем все объекты и занумеруем их!

Объясним в чём возникает проблема. Допустим вы хотите найти число двоичных слов длины 10. Их 1024 и выписывать в ряд все двоичные слова будет довольно утомительно, а если перейти от десяти к тысяче, то уже слабо реалистично. С перичислением тоже не всё бывает просто. Допустим, нужно перечислить все 5-элементные подмножества 100-элементного множества. Это реально сделать: их всего 75287520, но как их перебрать? Перечислять все подмножества стоэлементного множества плохая идея — их число огромно:

$$1267650600228229401496703205376.$$

Для подсчёта и перебора комбинаторика использует связь между различными дискретными объектами. Например, как подсчитать число всех подмножеств n-элементного множества? Вместо того, чтобы считать явно, докажем, что их столько же, сколько и двоичных слов длины n; из двоичной системы счисления мы знаем, что последних 2^n.

Утверждение 8. *Число подмножеств n-элементного множества совпадает с числом двоичных слов длины n.*

Доказательство. Занумеруем элементы множества от 1 до n и поставим каждому подмножеству S в соответствие двоичное слово w_S по следующему правилу: если $i \in S$, то i-й бит w_S равен 1, иначе 0.

Мы построили отображение из подмножеств n-элементного множества в слова. Это отображение инъекция: если $S_1 \neq S_2$, то существует элемент $i \in S_1 \triangle S_2$ и в одном из слов w_{S_1}, w_{S_2} на i-м месте будет стоять 1, а в другом 0. Ясно, что это отображение сюръекция — по каждому двоичному слову легко восстановить подмножество. Мы доказали, что установили биекцию между подмножествами n-элементного множества и двоичными словами длины n, а значит их количество совпадает. $\square$

7.1 Отображения и подсчёты

При доказательстве утверждения 8 мы немного забежали вперёд, апеллировав к очевидности того, что если между конечными множествами A и B есть биекция, то число их элементов совпадает. В этом разделе мы заполним лакуны.

Допустим у нас есть два конечных множества A и B и нам интересно узнать, в каком из них больше элементов (или установить, элементов поровну). Вовсе не обязательно перечислять все элементы. Например, если множество A — множество студентов, а B — множества стульев, то, чтобы узнать мощность какого множества больше, достаточно предложить студентам занять стулья. Если остались свободные стулья, то больше стульев, если остались стоящие студенты, то больше студентов. В первом случае была построена инъекция из множества студентов в множество стульев, а во втором — инъекция из множества стульев в множество студентов. Если студентов и стульев оказалось поровну, то была установлена биекция. Формализуем этот пример.

Лемма 5. *Пусть A и B — конечные множества.*

- $|A| \leqslant |B| \iff$ *существует инъекция из A в B;*
- $|A| \geqslant |B| \iff$ *существует сюръекция из A в B;*
- $|A| = |B| \iff$ *существует биекция из A в B.*

Пример 10. Чего больше: разбиений числа 11 на 4 слагаемых или его разбиений на слагаемые не превосходящие 4? Разбиения, отличающиеся перестановкой слагаемых будем считать одинаковыми, такие как $5+3+2+2$ и $2+3+2+5$.

Формализуем задачу. ***Разбиением*** положительного целого числа n на слагаемые называется последовательность чисел $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_m$, такая что $x_i \in \mathbb{N}_1$ и $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$; поскольку порядок слагаемых неважен, для каждого разбиения фиксируется один из представителей. Для ответа на вопрос поставим каждому разбиению в соответствие картинку, которая называется диаграммой Юнга. На рис. 7.1 приведены диаграммы Юнга для разбиений $5+3+2+2$ и $4+4+2+1+1$:

Рис. 7.1. Диаграммы Юнга

Число клеток в i-ой строке диаграммы Юнга совпадает с i-ым слагаемым. Таким образом мы установили биекцию между разбиениями и диаграммами Юнга. Число клеток в диаграмме совпадает с разбиваемым числом n; количество строг совпадает с числом слагаемых, а количество столбцов равно максимальному слагаемому.

Определим на диаграммах Юнга операцию транспонирования, по аналогии с транспонированием матриц: геометрически транспонирование состоит из последовательных применений поворота налево на 90° и отражения относительно оси Ox.

Диаграммы на рис. 7.1 получаются из друг друга транспонированием. Очевидно, что транспонирование задаёт биекцию между множеством диаграмм Юнга с n клетками с не более, чем k стоками, и множеством диаграмм Юнга с n клетками и не более чем k столбцами. Установив биекцию между этими множествами мы получили, что в них одинаковое число элементов, что означает, что количество разбиений числа n на не более чем k слагаемых совпадает с количеством разбиений числа n на слагаемые, не превосходящие k.

7.2 Правило суммы

Правило суммы становится очевидным после изучения теории множеств. Оно гласит, что если конечные множества A и B не пересекаются, то мощность их объединения совпадает с суммой мощностей:

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ если } A \cap B = \varnothing.$$

В общем случае, из диаграмм Эйлера-Венна легко получить, что

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пример 11. Найдём с помощью правила суммы количество трёхзначных чисел. Обозначим через A множество трёхзначных чисел, а через B множество чисел от 1 до 999. Тогда объединение $A \cup B$ состоит из чисел от 1 до 9999. Ясно, что $|B| = 999$ и $|A \cup B| = 9999$, отсюда $|A| = |A \cup B| - |B| = 9000$.

7.3 Правило произведения

Правило произведения формулируется на естественном языке следующим образом. Если есть n объектов первого типа и после выбора любого объекта первого типа можно выдрать m объектов второго типа, то всего есть $n \times m$ способов последовательно выбрать первый и второй объект.

Пример 12. Найдём количество двузначных чисел с помощью правила произведения. Старший разряд числа может быть любой цифрой от 1 до 9 а младший — цифрой от 0 до 9. Таким образом есть 9 способов выбрать старший разряд и после каждого выбора есть 10 способов выбрать младший разряд. Итого двухзначных чисел 90 по правилу произведения.

Правило произведения легко обобщается по индукции на k последовательных выборов. Если объект первого типа можно выбрать n_1 способами, после чего второй объект можно выбрать n_2 способами и т. д. (k-ый объект можно выбрать n_k способами), то выбрать последовательно k объектов можно $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

Так аналогично подсчёту двухзначных чисел можно подсчитать количество трёхзначных чисел и k-значных чисел. Оставляем общий случай читателю в качестве упражнения.

При первом знакомстве с правилом произведения создаётся впечатление, что последовательные выборы объектов должны быть независимы, но это не так. Рассмотрим следующий пример.

Пример 13. Для дежурства на перемене учителю нужно выбрать из класса, в котором 20 человек, двух дежурных — старшего дежурного и его помощника. Требуется найти число способов это сделать.

Из применения правила произведения получаем ответ: $20 \times 19 = 380$. Отметим, что после выбора старшего дежурного всегда будет 19 вариантов выбора его помощника, но множества этих вариантов отличаются друг от друга — в них всегда отсутствует только выбранный старший дежурный.

Процесс последовательно выбора можно проиллюстрировать с помощью дерева

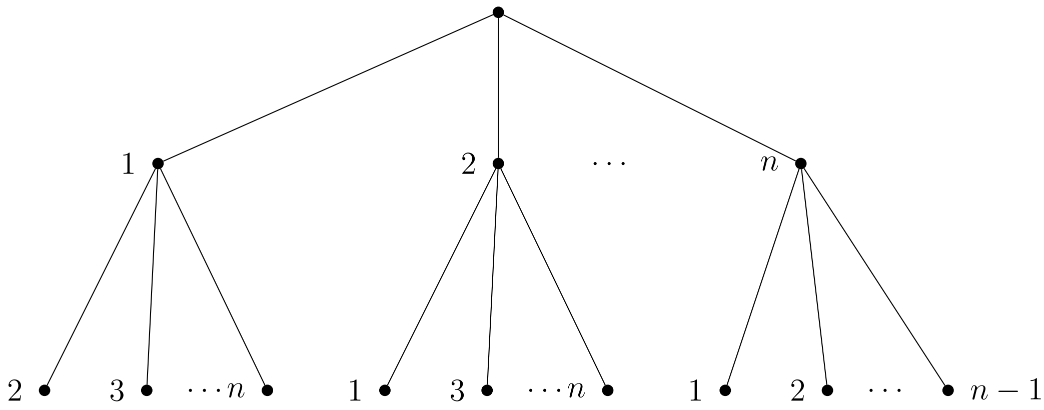


Рис. 7.2. Дерево последовательных выборов

Какая операция на множествах соответствует правилу произведения? Эта операция называется декартовым произведением. ***Декартовым произведением*** множеств X и Y называется множество упорядоченных пар элементов из множеств X и Y соответственно:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Имя Декарта знакомо читателю со школьной скамьи по декартовой системе координат. Декартова система координат иллюстрирует геометрически декартово произведение множеств $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (рис. 7.3).

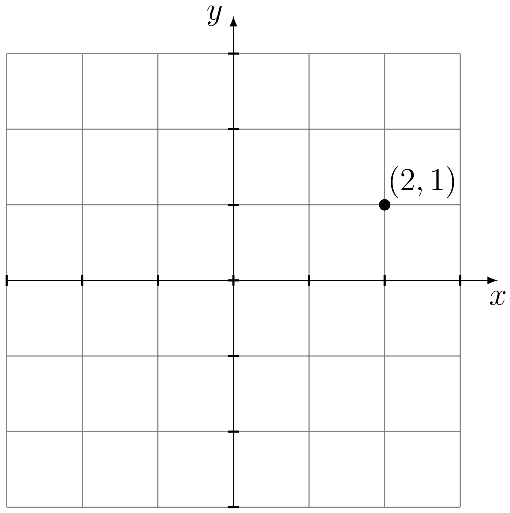


Рис. 7.3. Декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

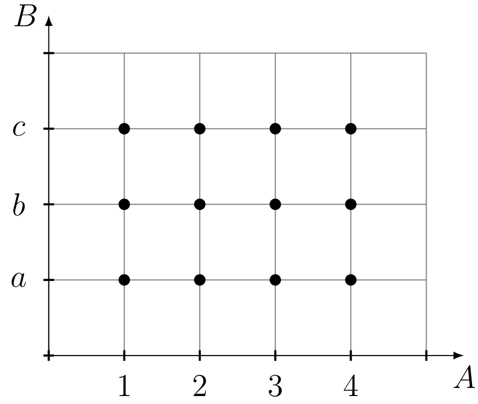


Рис. 7.4. Декартово произведение конечных множеств

Проиллюстрируем графически декартово произведение множеств $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Из рис. 7.4 видно, что мощность множества $A \times B$ есть произведение мощностей множеств A и B: $|A \times B| = |A| \times |B|$. На рис. 7.5 декартово произведение проиллюстрировано в виде дерева, которое можно рассматривать как дерево последовательных выборов.

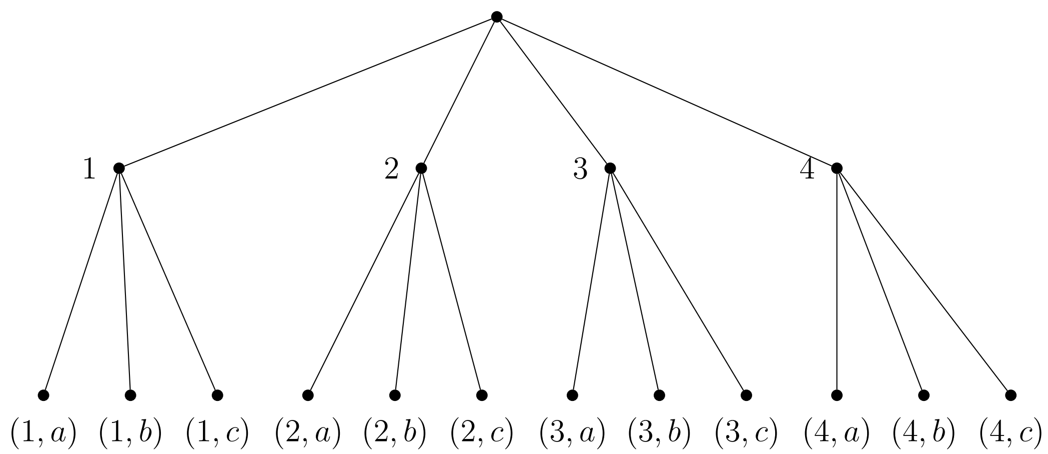


Рис. 7.5. Иллюстрация декартова произведения через дерево

Формально правило произведения можно определить через биекцию с декартовым произведением: пусть $A = \{1, \ldots, n\}$, $B = \{1, \ldots, m\}$; если существует биекция между множествами C и $A \times B$, то $|C| = n \times m$.

Подсчёт слов, перестановок, размещений и подмножеств

Слово — это конечная последовательность символов, которые в свою очередь определяются как элементы конечного множества — ***алфавита***. В зависимости от задачи, под алфавитом из k символов часто удобно понимать множество $[k]_0 = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ или $[k]_1 = \{1, \ldots, k\}$. Первое полезно при работе с системами счисления. Выше мы установили, что слов длины n над двоичным алфавитом 2^n. В общем случае, число слов длины n над k-ичным алфавитом равно k^n по правилу произведения: на первую позицию можно поставить любую из k букв, после чего любую из k букв можно поставить на второе место и так вплоть до n-ой.

Чтобы лучше понять природу последующих объектов, будем решать естественные задачи, в которых они потребуются.

Пример 14. В мешке есть n разных шаров и нужно расставить их все на полку в ряд. Сколько есть способов это сделать?

Воспользуемся правилом произведения: на первое место на полке можно поставить любой из n шаров, после него можно поставить любой $n-1$ из оставшихся, затем $n-2$, и так вплоть до последнего, для которого остаётся единственный вариант.

Итак, получилось произведение чисел от n до 1, которое называют ***факториалом*** числа n и обозначают

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1,$$

при этом считается, что $0! = 1$.

Решение задачи можно свести к подсчёту слов специального вида. Слова над алфавитом $[n]_1$ длины n, в которых все символы разные. Такие слова называются ***перестановками***. Разобравшись с примером, мы установили, что число перестановок есть $n!$.

Пример 15. В мешке есть n разных шаров и нужно расставить k из них на полку в ряд. Сколько есть способов это сделать?

Решение этой задачи почти не отличается от предыдущей, только нужно в произведении остановиться после k-ого шага.

В терминах слов, требуется найти количество слов длины k над алфавитом $[n]_1$, в которых все символы разные. Такие слова называются ***размещениями*** и для их количества используют обозначения

$$A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

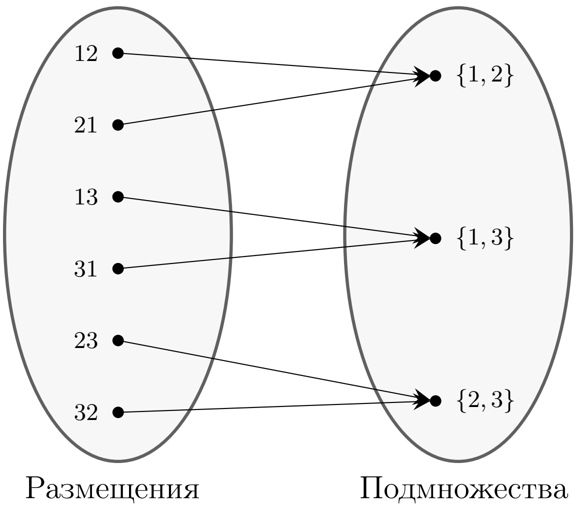
Обозначение A_n^k называется числом размещений («A» от arrangement).

Пример 16. В мешке есть n разных шаров и нужно положить k из них в другой мешок. Сколько есть способов это сделать?

Начнём с формализации задачи. Требуется найти количество k-элементных подмножеств n-элементного множества. Ясно, что любой мешок можно получить так: расставить k шаров на полке, а потом сложить их в мешок. Этим рассуждением мы определили отображение из множества размещений (слов над $[n]_1$ длины k с различными буквами) в множество подмножеств (k-элементтнных подмножеств n-элементного множества):

$$f : w_1 w_2 \ldots w_k \mapsto \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$$

Построим двудольный граф для этого отображения для случая $n = 3$, $k = 2$:



Из примера видно, что в каждое подмножество идёт по две стрелочки. Это верно и в общем случае: при любых $n, k > 0$ и размер полного прообраза любого подмножества одинаковый и равен $k!$. Для доказательства этого факта воспользуемся первым примером: всего есть $k!$ вариантов расставить k шаров из мешка на полке.

Теперь у нас есть всё необходимое, чтобы решить задачу. Нам известно число размещений $\frac{n!}{(n-k)!}$, помимо этого нам известно, что построенное отображение f — сюръекция (в любое подмножество ведёт хотя бы одна стрелка) и мы установили, что размер полного прообраза любого элемента равен $k!$. Таким образом мы получили, что если $\binom{n}{k}$ — число k-элементных подмножеств n-элементного множества, то $\binom{n}{k} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ отсюда получаем, что

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Число $\binom{n}{k}$ называют ***числом сочетаний***.

МАТЕМАТИКА

Перейдём к следующей задаче. Сколько разных не обязательно осмысленных слов можно получить переставляя буквы слова МАТЕМАТИКА?

Предположим, на минуту, что все буквы разные:

$$\text{М}_1\text{А}_1\text{Т}_1\text{ЕМ}_2\text{А}_2\text{Т}_2\text{ИКА}_3,$$

тогда всего слов будет 10!. Давайте теперь отождествим буквы М, определив отображения из множество слов, в которых все буквы разные, в множество слов, в которых М одинаковые стиранием индексов. У каждого слова с одинаковыми М будет ровно два прообраза, поэтому таких слов будет $\frac{10!}{2}$. Отождествим теперь буквы А стиранием индексов: определим отображения из слов, в которых одинаковые только М, в слова, в слова, в которых одинаковые и М и А (стиранием индексов). У каждого слова с одинаковыми М и А одинаковое число прообразов: 3! — столько различных способов расставить индексы у трёх А:

$$\text{МА}_1\text{Т}_1\text{ЕМА}_2\text{Т}_2\text{ИКА}_3, \quad \text{МА}_1\text{Т}_1\text{ЕМА}_3\text{Т}_2\text{ИКА}_2, \quad \text{МА}_2\text{Т}_1\text{ЕМА}_1\text{Т}_2\text{ИКА}_3 \ldots$$

Продолжая те же рассуждения, отождествим буквы Т и получим что искомое количество есть

$$\frac{10!}{2!3!2!}.$$

Решим теперь задачу другим способом. Будем строить слово, последовательно расставляя буквы. Всего есть 10 позиций. Выберем сначала 2 позиции под букву М:

$$\underset{1}{\text{М}}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{5}{\text{М}}\ \underset{6}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}.$$

Сколько способов это сделать? Занумеруем все позиции; чтобы расставить буквы М нужно выбрать ровно две из них, причём порядок позиций не важен, то есть число расстановок совпадает с числом двухэлементных подмножеств десятиэлементного множества — $\binom{10}{2}$. Расставим теперь буквы А: для них осталось 8 свободных позиций и нужно расставить 3 буквы А, аналогично рассуждениям с М это можно сделать $\binom{8}{3}$ способами. Таким образом, число способов расставить М и А по правилу произведения равняется $\binom{10}{2} \times \binom{8}{3}$. Продолжая рассуждения получаем, что число способов сделать это есть

$$\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}.$$

Обратим внимание читателя, что последние три множителя есть просто 3!, потому что $\binom{n}{1} = n$, то есть после расстановки повторяющихся букв, число способов выбрать позицию под одну букву совпадает с числом оставшихся позиций и правило произведения даёт, что число способов расставить 3 неповторяющиеся буквы есть ни что иное как 3!.

Решив комбинаторную задачу двумя способами мы установили справедливость следующей формулы:

$$\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!};$$

мы добавили в знаменатель правой части для симметрии три 1! — по 1! на каждую неповторяющуюся букву.

Решив задачу про слово МАТЕМАТИКА мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 9. *Пусть $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Число слов длины n над алфавитом из m символов, в которых первая буква алфавита встречается k_1 раз, вторая — k_2 раз, i-я — k_i раз есть*

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} = \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \times \ldots \times \binom{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}{k_m}.$$

Это утверждение пригодится нам дальше.