Лекция 5

Графы II. Деревья и раскраски

План:

1. Связность. Теорема «#компонент связности $\geqslant |V| - |E|$».
2. Деревья. Теорема об эквивалентности четырёх свойств.
3. Расстояние между вершинами, диаметр графа. Диаметр любого связного графа не превосходит $|V| - 1$.
4. Двураскрашиваемый граф. Граф двураскрашиваемый тогда и только тогда, когда нет циклов нечётной длины.
5. Сюжет о трёх попарно знакомых или попарно незнакомых.
6. Маршруты и замкнутые маршруты. Между двумя вершинами графа есть путь, если между ними есть маршрут.

* Эйлеровы маршруты

Продолжим изучение связности.

Теорема 2. *Обозначим через C число компонент связности графа $G(V, E)$. Для него справедливо неравенство*

$$C \geqslant |V| - |E|.$$

Доказательство. Зафиксируем количество вершин в графе $|V|$ и докажем утверждение индукцией для графов с числом рёбер $|E|$ от 0 до $|V|$.

База: При $|E| = 0$ число компонент связности совпадает с числом вершин: $C = |V|$.

Шаг: Пусть для $|E| = n$ утверждение доказано. Граф с $(n+1)$-м ребром получается из некоторого графа с n рёбрами добавлением ребра. Для графа на n

рёбрах неравенство выполняется, а добавленное ребро либо соединит две вершины из одной компоненты связности, что не уменьшит C, но уменьшит $|V| - |E|$, либо соединит вершины из разных компонент, что уменьшит и левую и правую часть неравенства на 1. В каждом из случаев, верное неравенство перейдёт в верное. □

Замечание 1. В доказательстве мы оставили читателю в качестве упражнения следующее утверждение: при добавлении в граф ребра, соединяющего вершины разных компонент связности, эти компоненты связности объединяются в одну компоненту.

Неравенство из теоремы довольно слабое: в случае, если в графе много рёбер, то число в правой части неравенства становится отрицательным, а в левой — всегда положительно. Основным применением этой теоремы служит следующее следствие.

Следствие 2. *Если граф связный, то* $|E| \geqslant |V| - 1$.

Следствие устанавливает нижнюю границу на число рёбер в связном графе, что приводит нас к определению графов специального вида — деревьев.

5.1 Деревья

Важным частным случаем неориентированных графов являются деревья. Для деревьев достаточно много эквивалентных определений, поэтому, мы будем называть граф деревом, если он удовлетворяет любому из следующих свойств:

(1) Минимально связный граф (т. е. при удалении любого ребра граф становится несвязным).

(2) Связный граф, в котором $|E| = |V| - 1$.

(3) Ациклический связный граф (связный граф без циклов).

(4) Граф, любая пара вершин которого связана единственным путём.

Докажем эквивалентность этих свойств.

Теорема 3. *Свойства (1)-(4) эквивалентны.*

Доказательство. Докажем эквивалентность, установив импликации по цепочке:

$$(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2).$$

Импликаци (2) $\Rightarrow$ (1) установлена в следствие 2: из связного графа с $|V| - 1$ ребром нельзя удалить ребро без нарушения связности.

Установим импликацию (1) $\Rightarrow$ (3), воспользовавшись контрапозицией, т. е. докажем $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$. Отрицание условия (3) означает, что граф несвязен или имеет цикл, а условия (1), что граф или несвязен или связен, но не минимиально. Если граф несвязен, то импликация $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$ выполняется, поэтому сосредоточимся на случае связного графа, который содержит цикл. В лемме 1 мы установили, что при удалении ребра из цикла в связном графе, граф остаётся связным, т. е. граф до удаления ребра был не минимально связным.

Также докажем (3) $\Rightarrow$ (4), доказав контрапозицию $\neg(4) \Rightarrow \neg(3)$. Если выполнено условие $\neg(4)$ и между какой-то парой вершин нет ни одного пути, то граф несвязынй и справедливо условие $\neg(3)$. Осталось доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Если между вершинами w и z графа есть два различных пути P и Q, то граф содержит цикл.*

Доказательство леммы. Заметим, что $w \neq z$ (из вершины в себя ведёт единственный путь — длины 0). Если w и z единственные общие вершины путей P и Q, то склеив два пути получится цикл. Если же нет, допустим, что у путей P и Q существуют общие вершины x и y, такие что либо в пути xPy нет других вершин пути Q, либо в пути xQy нет других вершин пути P. В этом случае, при объединении путей xPy и xQy, получится цикл; заметим, что здесь важно, что один из путей xPy и xQy будет не короче двух, поскольку в графе нет кратных рёбер. Докажем, что такие вершины существует.

Чтобы найти x будем двигаться вдоль пути P от w к z, пока не встретится первая вершина, не лежащая на пути Q, или пока не достигнем z. Если все вершины P лежат на пути Q, то в Q должна быть хотя бы одна вершина не лежащая на P, иначе пути P и Q совпадают. Поэтому будем для определённости считать, что в P встретилась первая вершина, не лежащая на Q, и выберем вершину перед ней в качестве x. В качестве y выберем первую общую вершину путей P и Q, идущую в P после x. На пути xQy нет вершин пути xPy, кроме концов, поскольку все вершины пути xPy между x и y не лежат на пути Q. □

Осталось доказать импликацию (4) $\Rightarrow$ (2). Проведём доказательство индукцией по числу вершин в графе. <u>База:</u> при $|V| = 1$ в графе нет рёбер и в вершину в себя есть единственный путь длины 0. <u>Шаг.</u> Пусть утверждение верно для всех графов на n вершинах и пусть G — произвольный граф, удовлетворяющий условию (4), в котором $V(G) = n + 1$. Выберем в G самый длинный путь P, конец которого обозначим через z.

Докажем от противного, что вершина z имеет степень 1. Допустим, что у вершины z есть ещё сосед x, кроме предшествующей ей вершины y на пути P. Если вершина x не лежит на пути P, то к пути P можно добавить ребро zx и сделать его длиннее — противоречие с выбором P. Если же x лежит на пути P и $x \neq y$, то в графе есть два простых пути, соединяющие вершины x и z: xPz и ребро xz, что противоречит условию (4).

Удалив вершину z из графа G получим связный граф G' на n вершинах, для которого справедливо предложение индукции: $|E(G')| = n - 1$, поскольку между любой парой вершин G' существует единственный путь. Вернув z на место, получаем, что мы увеличили на единицу и число вершин и число рёбер графа G', а потому доказали, что $|E(G)| = |V(G)| - 1$; шаг индукции доказан. □

При доказательстве импликации (4) $\Rightarrow$ (2) мы доказали следующее свойство деревьев.

Утверждение 3. *В любом дереве, более чем с одной вершиной, есть хотя бы две вершины степени* 1.

5.2 Расстояние между вершинами. Диаметр графа

Расстоянием $\rho(u, v)$ между двумя вершинами u и v в связном графе называют длину кратчайшего пути между ними. ***Диаметром*** связного графа G называют число $\operatorname{diam}(G) = \max\limits_{u,v \in V} \rho(u, v)$, а также путь такой длины.

Утверждение 4. *Диаметр связного графа не превосходит* $|V| - 1$.

Доказательство. Действительно, если в путь входят все вершины графа, то его длина равна $|V|-1$, а каждая вершина графа входит в любой путь не более одного раза. □

5.3 Правильные раскраски

Зафиксируем в роли цветов числа от 1 до k. ***Раскраска*** графа — это функция f, которая ставит в соответствие каждой вершине графа некоторый цвет, т. е. $f(u) \in \{1, \ldots, k\}$. Раскраска f называется ***правильной***, если концы всех рёбер покрашены в разные цвета, т. е. для каждого ребра $\{u, v\}$ справедливо $f(u) \neq f(v)$. Минимальное число цветов, в который можно правильно раскрасить граф G называется ***хроматическим числом*** и обозначается через $\chi(G)$. Ясно, что для каждого связного графа более чем с одной вершиной $\chi(G) \geqslant 2$. Сосредоточимся на случае двураскрашиваемых графов; под k***-раскрашиваемым*** графом мы понимаем граф, для которого существует правильная раскраска в k цветов.

Теорема 4. *Граф G является двураскрашиваемым тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.*

Доказательство. Докажем сначала, что в двураскрашиваемом графе нет циклов нечётной длины. По контрапозиции, это условие равносильно тому, что если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя раскрасить в два цвета. Это утверждение легко проверить. Если правильная раскраска есть, то в силу симметрии можно считать, что первая вершина цикла покрашена в цвет 1, тогда вторая вершина покрашена в цвет 2 и так далее, то есть каждая нечётная вершина будет покрашена в цвет 1, а каждая чётная — в цвет 2. Тогда последняя вершина цикла будет покрашена в тот же цвет, что и первая, что невозможно.

Докажем теперь, что если в графе нет циклов нечётной длины, то он двураскрашиваемый. Для этого построим раскраску. Выберем в каждой компоненте связности по вершине, которую назовём центром, и покрасим её в цвет 2; все вершины на расстоянии 1 от неё покрасим в цвет 1, все вершины на расстоянии 2 — в цвет 2 и так далее: вершины на чётном расстоянии от центра покрасим в цвет 2, а на нечётном в цвет 1. Предположим, что в результате этой процедуры получилась неправильная раскраска. Это означает, что у некоторого ребра $\{u, v\}$ концы были покрашены в один цвет, а это произошло, если расстояния от центра до u и до v имеют одинаковую чётность. Пусть P — кратчайший путь от центра до u, а Q — кратчайший путь от центра до v и w самая дальняя от центра их общая вершина.

Заметим, что w не совпадает ни с u, ни с v: иначе мы получили бы, что расстояния до u и v отличаются на единицу; по этой же причине ребро $\{u, v\}$ не лежит ни на одном из этих путей. Поэтому пути wPu и wQv пересекаются только по вершине w и их длины имеют одинаковые чётности. Объединив эти пути и добавив к ним ребро $\{u, v\}$ получим цикл нечётной длины, что приводит нас к противоречию. $\square$

5.4 Сюжет про трёх попарно знакомых или попарно незнакомых

Рассмотрим ещё один занимательный пример, подобный примеру о рукопожатиях. Если выбрать любые 6 человек в аудитории, то среди них окажется или три попарно знакомых человека или три попарно незнакомых. Переведём это утверждение на язык теории графов.

Утверждение 5. *В графе на шести вершинах есть или клика размера* 3 *или независимое множество размера* 3.

Доказательство. Возьмём любую вершину. Тогда она либо смежна с какими-то тремя из оставшихся, либо не смежна с какими-то тремя из оставшихся. Эти случаи симметричны, давайте считать, что выполняется первый случай и вершина a смежна с вершинами b, c и d. Если среди b, c и d есть хотя бы одно ребро, то концы этого ребра вместе с a являются вершинами клики размера 3; если же рёбер между ними нет, то $\{b, c, d\}$ — независимое множество размера 3. $\square$

5.5 Эйлеровы маршруты

Маршрутом в графе G называется последовательность вершин $v_0, v_2, \dots, v_n$, такая что $n \geqslant 0$ и $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ для $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Обратим внимание, что второе условие применимо только в случае, когда в маршруте больше одной вершины, а потому любая последовательность из единственной вершины считается маршрутом. ***Длина маршрута*** — это число рёбер, соединяющих вершины маршрута; оно совпадает с n. Маршрут называется ***замкнутым***, если $v_0 = v_n$. Будем говорить. что ребро $\{x, y\} \in E(G)$ ***лежит*** на маршруте, если для некоторого i $\{v_i, v_{i+1}\} = \{x, y\}$.

Очевидно, что если в графе есть путь из вершины x в вершину y, то в нём есть и маршрут между этими вершинами. Обратное тоже справедливо.

Утверждение 6. *Если в графе есть маршрут между вершинами x и y, то есть и соединяющий их путь.*

Доказательство. Пусть $v_0, \dots v_n$, $v_0 = x$, $v_n = y$ — самый короткий маршрут из x в y. Докажем, что в нём нет повторяющихся вершин. Действительно, если $v_i = v_j, i < j$, то удалив из маршрута все вершины с v_{i+1} до v_j получим маршрут короче. Значит в выбранном маршруте нет повторяющихся вершин, соседние вершины маршрута по определению соединены ребром, отсюда получаем, что граф на вершинах маршрута со всеми рёбрами маршрута является графом-путём. $\square$

Теория графов зародилась в городе Кёнигсберг (ныне Калининград) со следующей задачи. Математик Леонард Эйлер любил гулять и поставил цель: обойти все острова Кёнигсберга, пройдя по каждому мосту ровно один раз, вернувшись в конце прогулки в начало пути. План местности из работы Эйлера приведён на рис. 5.1.

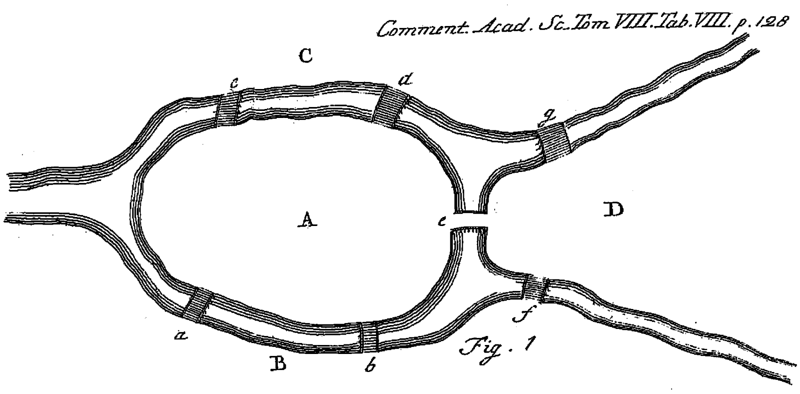

Рис. 5.1. Мосты Кёнигсберга

Переведём задачу на язык графов. Эйлера интересовало, существует ли на графе ниже замкнутый маршрут, который содержит все рёбра графа ровно один раз. Маршрут, который содержит все рёбра графа ровно один раз назовём ***эйлеровым маршрутом***. Обратим внимание, что граф из оригинальной задачи содержит кратные рёбра, которые мы не рассматриваем.

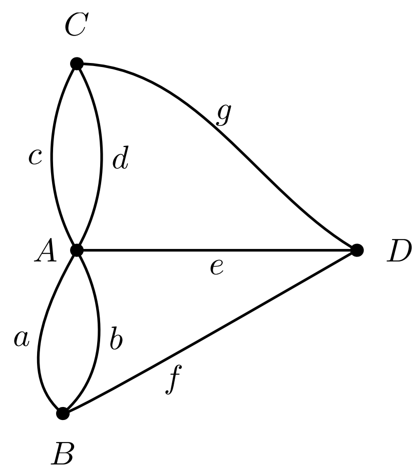

Рис. 5.2. Граф для задачи о мостах Кёнигсберга.

Эйлер обнаружил, что нужного маршрута не существует и доказал простой критерий существования такого маршрута.

Теорема 5. *Связный граф G содержит замкнутый эйлеров маршрут тогда и только тогда, когда степень каждой вершины чётна.*

Доказательство. Докажем сначала, что если в графе есть вершина нечётной степени, то в нём нет замкнутого Эйлерова маршрута. Пусть x — вершина нечётной степени. Если в графе есть замкнутый эйлеров маршрут, то циклически сдвинув его вершины легко добиться, чтобы маршрут начинался и заканчивался в x. Заметим, что каждый раз, когда вершина x встречается в середине маршрута, в маршруте встречаются сразу два ребра x: в x нужно сначала зайти по одному ребру, а потом выйти по другому. Поскольку x является первой и последней вершиной маршрута, то на его концах также задействуется два ребра: первое на первом выходе из x, а второе — при последнем возврате. Значит, что в во всём маршруте участвовало только какое-то чётное число рёбер, смежных x, а всего их нечётное число — получается, что хотя бы одно ребро, смежное с x, в маршрут не попало.

Перейдём теперь к доказательству основной импликации: из чётности всех степеней связного графа следует существование замкнутого эйлерова маршрута. Пусть $R = r_0, r_1, \ldots, r_m$ — маршрут максимальной длины, в который каждое ребро графа G входит не более одного раза. В случае, если таких маршрутов несколько, то выберем любой из них. Установим два свойства такого маршрута, которые и приведут к доказательству существования искомого маршрута.

Свойство 1. $r_0 = r_m$. Предположим противное. Повторяя те же аргументы, что и в первом абзаце, получим, что между r_1 и r_m встречается чётное число рёбер, смежных с r_m, и ещё одно ребро, $r_{m-1}r_m$ встречается в конце маршрута. Итого на маршруте R лежит нечётное число рёбер, смежных с r_m, а поскольку степень вершины r_m чётна, то есть ещё хотя бы одно ребро $r_m x$, которое не лежит на маршруте R. Добавив вершину x в конец маршрута получим маршрут большей длины, что противоречит выбору R.

Свойство 2. Маршрут R содержит все рёбра графа G. Допустим противное. Пусть некоторое ребро xy графа G не лежит на R. Рассмотрим путь из r_0 в x, который существует в силу связности G и найдём на нём первое ребро, которое не лежит на R, если оно есть. Обозначим его через $r_i z$. Если такого ребра нет, то вершина x лежит на R, а потому обозначим $r_i = x$ и $z = y$. По свойству 1, маршрут R замкнутый, а потому сдвинем его циклически так, чтобы он начинался и заканчивался в вершине r_i. Добавив в конец получившегося маршрута вершину z получим маршрут, длиннее R, который также содержит каждое ребро не более одного раза, что приводит нас к противоречию выбора R. $\square$