Задание на десятую неделю.
Производящие функции-1

Ex. 1. Вычислить следующие суммы

$$\mathbf{a})\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{2^{2k}};\quad \mathbf{b})\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-3)3^{-k};\quad \mathbf{c})\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+1}.$$

Ex. 2. Докажите, что

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Ex. 3. Сколько существует слов длины n, состоящих из букв a и b таких, что они не заканчиваются на a и две буквы b не стоят рядом?

Ex. 4. Найдите производящую функцию последовательности a_n, заданной рекуррентным соотношением $a_{n+2} = a_n + f(n)$, $a_0 = a_1 = 0$, где $f(2k) = 2k$, $f(2k+1) = 0$. Найдите зависимость a_n от n.

Ex. 5. Рассмотрите $(1+x)^n(1-x^2)^{-n} = (1-x)^{-n}$. Приравняв коэффициенты левой и правой части при x^m, получите тождество с биномиальными коэффициентами, все индексы которых положительны.

Бонусная задача. Упростите $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\right)^k C_m^k C_{2k}^k$.

Задание на десятую неделю.
Производящие функции-1

Ex. 1. Вычислить следующие суммы

$$\mathbf{a})\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{2^{2k}};\quad \mathbf{b})\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-3)3^{-k};\quad \mathbf{c})\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k+1}.$$

Ex. 2. Докажите, что

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

Ex. 3. Сколько существует слов длины n, состоящих из букв a и b таких, что они не заканчиваются на a и две буквы b не стоят рядом?

Ex. 4. Найдите производящую функцию последовательности a_n, заданной рекуррентным соотношением $a_{n+2} = a_n + f(n)$, $a_0 = a_1 = 0$, где $f(2k) = 2k$, $f(2k+1) = 0$. Найдите зависимость a_n от n.

Ex. 5. Рассмотрите $(1+x)^n(1-x^2)^{-n} = (1-x)^{-n}$. Приравняв коэффициенты левой и правой части при x^m, получите тождество с биномиальными коэффициентами, все индексы которых положительны.

Бонусная задача. Упростите $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\right)^k C_m^k C_{2k}^k$.