Финальное задание

Ex. 1. Найдите производящую функцию и явный (аналитический вид) для последовательности

$$\mathbf{a)}F_n = \begin{cases} 0, \text{ при } n = 0, \\ 1, \text{ при } n = 1, \\ 2F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ при } n \geqslant 2; \end{cases} \qquad \mathbf{b)}G_n = \begin{cases} 0, \text{ при } n = 0, \\ 1, \text{ при } n = 1, \\ G_{n-1} + 2G_{n-2}, \text{ при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ex. 2. Пусть F_n — это n-ое число Фибоначчи, притом $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Докажите, что

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Ex. 3. Решите линейное рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} A_{k+1} = 4A_k - 3A_{k-1}, \\ A_0 = 1, A_1 = 2. \end{cases}$$

Ex. 4. Пусть $s(n, m), S(n, m)$ — числа Стирлинга первого (знакопеременные) и второго рода соответственно. Докажите, что

$$\sum_{t=0}^{k} s(n, t) \cdot S(t, k) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, \ k = n, \\ 0, \ k \neq n. \end{cases}$$

Ex. 5. Докажите, что для чисел Белла B_n верны тождества

$$\mathbf{a)}B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k; \quad \mathbf{b)} \sum_{k=0}^{n} s(n, k) B_k = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Бонусная задача. Докажите, что для простого числа p справедливо соотношение

$$B_{p+n} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p.$$

Финальное задание

Ex. 1. Найдите производящую функцию и явный (аналитический вид) для последовательности

$$\mathbf{a})F_n = \begin{cases} 0, \text{ при } n = 0, \\ 1, \text{ при } n = 1, \\ 2F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ при } n \geqslant 2; \end{cases} \qquad \mathbf{b})G_n = \begin{cases} 0, \text{ при } n = 0, \\ 1, \text{ при } n = 1, \\ G_{n-1} + 2G_{n-2}, \text{ при } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ex. 2. Пусть F_n — это n-ое число Фибоначчи, притом $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Докажите, что

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Ex. 3. Решите линейное рекуррентное соотношение второго порядка

$$\begin{cases} A_{k+1} = 4A_k - 3A_{k-1}, \\ A_0 = 1, A_1 = 2. \end{cases}$$

Ex. 4. Пусть $s(n, m), S(n, m)$ — числа Стирлинга первого (знакопеременные) и второго рода соответственно. Докажите, что

$$\sum_{t=0}^{k} s(n, t) \cdot S(t, k) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, \ k = n, \\ 0, \ k \neq n. \end{cases}$$

Ex. 5. Докажите, что для чисел Белла B_n верны тождества

$$\mathbf{a})B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k; \quad \mathbf{b}) \sum_{k=0}^{n} s(n, k) B_k = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Бонусная задача. Докажите, что для простого числа p справедливо соотношение

$$B_{p+n} \equiv B_n + B_{n+1} \mod p.$$