Задачи $\omega + 2$ семинара.

Ex. 1. Выразите аналитически:

$$\mathbf{a})\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{n}x^k;\mathbf{b})\sum_{k\geqslant 0}\binom{k}{n}x^k;\mathbf{c})\sum_{k=1}^{n}(2k+1)x^k.$$

Ex. 2. Выразите отношение «племянник» через отношение «отец» и «мать» и операции над отношениями.

Ex. 3. Множество A состоит из семи элементов. Найдите количество отображений $f\colon A \to A$, таких что $f \circ f = \mathrm{id}_A$.

Ex. 4. Чего больше, разбиений n-элементного множества на не более чем k подмножеств или разбиений $(n+k)$-элементного множества на ровно k подмножеств?

Ex. 5. *Разложением числа* n называется такая последовательность положительных целых чисел $x_1, \ldots, x_k$, что $x_1 + \ldots + x_k = n$. Найдите количество разложений n на нечетные слагаемые.

Ex. 6. Назовем *функцией большинства* $MAJ(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ булеву функцию, значение которой совпадает с тем значением, которое принимает большинство переменных (если мнения разделились поровну, то $MAJ = 0$). Схемы в базисе $\{\wedge, \vee, 1, 0\}$ называются *монотонными*. Вычисляется ли MAJ монотонной схемой?

Ex. 7. Вычисляется ли $MAJ(x, y, z)$ схемой в многочлене Жегалкина, который равен $\{1, \wedge, x_1 \oplus x_2\}$? (определение MAJ см. в задаче выше)

Ex. 8. Является ли полным базис $\{\neg, MAJ(x_1, x_2, x_3)\}$? (определение MAJ см. в задаче выше)

Ex. 9. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y, если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

Ex. 10. Сколько существует различных нестрогих частичных порядков на множестве $V = \{0, 1, 2\}$? Мы считаем порядки P и Q различными, если они не изоморфны друг другу. Постройте графы $(V, \leqslant_P)$ для каждого порядка.

Ex. 11. Верно ли, что если P — отношение частичного порядка, то следующие отношения также будут задавать частичные порядки: **a)** P^{-1}; **b)** $\overline{P}$?

Ex. 12. Граф $S_N = \langle V, E\rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ (вершина $v \in V$ — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$); вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $|v \triangle u| = 1$.

a) Докажите, что граф S_n изоморфен булеву кубу B_n.

b) Сколько существует различных наборов подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, для которых выполняется $|A_1 \triangle A_2| = |A_2 \triangle A_3| = 1$?

Ex. 13. Пусть A и B — конечные непустые множества, и $|A| = n$. Известно, что число инъекций из A в B совпадает с числом сюръекций из A в B. Чему равно это число?

Ex. 14 (Федосеев М.). Докажите, что если последовательность a_n определяется соотношением

$$a_{n+2} + pa_{n+1} qa_n = 0,$$

где p, q — некоторые числа, то для ее производящей функции $F(t)$ верно, что

$$F(t) = \frac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2}.$$