

Задание на четвертую неделю.

Графы — 1

Ех. 1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

Ех. 2. В шахматном турнире по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч, а все остальные разное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

Ех. 3. Докажите, что вершины связного графа G можно упорядочить так, что для каждого i , $1 \leq i \leq |V(G)|$, индуцированный подграф $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ будет связным.

Ех. 4. Докажите, что $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$, и приведите примеры, когда достигается каждая из этих оценок.

Ех. 5. В дереве на 2019 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

Ех. 6. Есть два дерева на n вершинах, каждое имеет диаметр длины d . Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d ?

Ех. 7. Докажите, что для любого $k \leq |V(G)|$. В графе G найдется k вершин $\{v_k\}_{i=1}^k$, в результате удаления которых вместе со всеми смежными ребрами, получается связный граф $G' = G[V \setminus \{v_i\}_{i=1}^k]$.

Ех. 8. Граф получен из графа-цикла C_{2n} добавлением ребер, соединяющих противоположные вершины (v_1 соединена с v_{n+1} , v_2 с v_{n+2} и т.д.). При каких n получившийся граф правильно раскрашиваемый а) в два цвета; б) в три цвета?

Бонусная задача. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.

Задание на четвертую неделю.

Графы — 1

Ех. 1. Существует ли граф на 8 вершинах, в котором 23 ребра и есть вершина степени 1?

Ех. 2. В шахматном турнире по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша провели одинаковое число встреч, а все остальные разное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

Ех. 3. Докажите, что вершины связного графа G можно упорядочить так, что для каждого i , $1 \leq i \leq |V(G)|$, индуцированный подграф $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ будет связным.

Ех. 4. Докажите, что $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \cdot \text{rad}(G)$, и приведите примеры, когда достигается каждая из этих оценок.

Ех. 5. В дереве на 2019 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

Ех. 6. Есть два дерева на n вершинах, каждое имеет диаметр длины d . Можно ли так добавить ребро между вершинами этих деревьев, чтобы длина диаметра полученного дерева равнялась d ?

Ех. 7. Докажите, что для любого $k \leq |V(G)|$. В графе G найдется k вершин $\{v_k\}_{i=1}^k$, в результате удаления которых вместе со всеми смежными ребрами, получается связный граф $G' = G[V \setminus \{v_i\}_{i=1}^k]$.

Ех. 8. Граф получен из графа-цикла C_{2n} добавлением ребер, соединяющих противоположные вершины (v_1 соединена с v_{n+1} , v_2 с v_{n+2} и т.д.). При каких n получившийся граф правильно раскрашиваемый а) в два цвета; б) в три цвета?

Бонусная задача. В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.