

## Задачи восьмого семинара.

**Ех. 1.** Докажите, что

$$\text{а) } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n,$$

$$\text{б) } C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0,$$

$$\text{в) } C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 2 + C_n^3 \cdot 3 + \dots + C_n^n \cdot n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot i = n \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{г) } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n.$$

**Ех. 2.** Найдите коэффициент при **а)**  $x^3 y^7$  в разложении  $(2x - y)^{10}$ ;  
**б)**  $x_1^3 x_2 x_4^5 x_5$  в разложении  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ .

**Ех. 3.** Докажите комбинаторно тождества:

$$\text{а) } \sum_{j=0}^k \binom{r}{j} \binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}; \quad \text{б) } \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Ех. 4.** Найдите число решений уравнения в неотрицательных числах

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 11.$$

**Ех. 5.** Сколькими способами можно разделить 15 монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по одной монете?

**Ех. 6.** Найдите число строго возрастающих последовательностей чисел длины  $k$  от 1 до  $n$ . А сколько неубывающих последовательностей?

**Ех. 7.** Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

**Ех. 8.** Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+k}{k}.$$

**Ех. 9.** Покажите, что числа Каталана имеют явную формулу:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

**Ех. 10.** Сколькими способами можно разрезать правильный  $n$ -угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали?

## Задачи восьмого семинара.

**Ех. 1.** Докажите, что

$$\text{а) } C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n,$$

$$\text{б) } C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0,$$

$$\text{в) } C_n^1 \cdot 1 + C_n^2 \cdot 2 + C_n^3 \cdot 3 + \dots + C_n^n \cdot n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot i = n \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{г) } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n.$$

**Ех. 2.** Найдите коэффициент при **а)**  $x^3 y^7$  в разложении  $(2x - y)^{10}$ ;  
**б)**  $x_1^3 x_2 x_4^5 x_5$  в разложении  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ .

**Ех. 3.** Докажите комбинаторно тождества:

$$\text{а) } \sum_{j=0}^k \binom{r}{j} \binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}; \quad \text{б) } \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Ех. 4.** Найдите число решений уравнения в неотрицательных числах

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 11.$$

**Ех. 5.** Сколькими способами можно разделить 15 монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по одной монете?

**Ех. 6.** Найдите число строго возрастающих последовательностей чисел длины  $k$  от 1 до  $n$ . А сколько неубывающих последовательностей?

**Ех. 7.** Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

**Ех. 8.** Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+k}{k}.$$

**Ех. 9.** Покажите, что числа Каталана имеют явную формулу:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

**Ех. 10.** Сколькими способами можно разрезать правильный  $n$ -угольник на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали?