Задание на девятую неделю.
Комбинаторика-3

Ex. 1. В корзине лежат 60 шаров различных цветов. Если взять любые 10, то обязательно среди них найдется три одноцветных. Обязательно ли среди всех 60 шаров найдется: **а)** 15 одноцветных; **б)** 16 одноцветных?

Ex. 2. В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

Ex. 3. Найдите количество функций алгебры логики от n переменных, существенно зависящих от всех своих переменных.

Ex. 4. Сколько существует шестизначных чисел, к записи которых есть единица и двойка?

Ex. 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим *функцию Мебиуса.* Если

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots p_r^{e_r},$$

где p_i — различные простые числа. Определим $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ при } n = 1, \\ 0, \text{ если какое-либо } e_i > 1, \\ (-1)^r, \text{ если } e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = e_r = 1. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1, \\ 0, \text{ если } n > 1. \end{cases}$$

Бонусная задача. (формула обращения Мебиуса) Пусть $f(n)$, $g(n)$ — функции, определенные для всякого положительного целого n. Докажите импликацию

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Задание на девятую неделю.
Комбинаторика-3

Ex. 1. В корзине лежат 60 шаров различных цветов. Если взять любые 10, то обязательно среди них найдется три одноцветных. Обязательно ли среди всех 60 шаров найдется: **а)** 15 одноцветных; **б)** 16 одноцветных?

Ex. 2. В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

Ex. 3. Найдите количество функций алгебры логики от n переменных, существенно зависящих от всех своих переменных.

Ex. 4. Сколько существует шестизначных чисел, к записи которых есть единица и двойка?

Ex. 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим *функцию Мебиуса.* Если

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots p_r^{e_r},$$

где p_i — различные простые числа. Определим $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ при } n = 1, \\ 0, \text{ если какое-либо } e_i > 1, \\ (-1)^r, \text{ если } e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = e_r = 1. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 1, \\ 0, \text{ если } n > 1. \end{cases}$$

Бонусная задача. (формула обращения Мебиуса) Пусть $f(n)$, $g(n)$ — функции, определенные для всякого положительного целого n. Докажите импликацию

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Rightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$