

Задачи одиннадцатого семинара.

Ех. 1. Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 3, n = 1, \\ 4F_{n-1} - 4F_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Ех. 2. Докажите, что для чисел Фибоначчи ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$) верны тождества

$$1. F_{n+2} - F_2 = \sum_{k=1}^n F_k, \quad 2. F_{2n+1} - 1 = \sum_{k=1}^n F_{2k}.$$

Ех. 3. Найдите производящую функцию для следующей последовательности (F_k — k -ое число Фибоначчи)

$$G(x) = F_0 + F_2x + F_4x^2 + F_6x^3 + \dots,$$

Ех. 4. Найдите явный вид для элементов следующих последовательностей

$$\text{а) } F_k = \begin{cases} 0, k = 0, \\ 1, k = 1, \\ 3 \cdot F_{k-1} - 2 \cdot F_{k-2}, k \geq 2. \end{cases}, \quad \text{б) } G_k = \begin{cases} 0, k = 0, \\ 1, k = 1, \\ 7 \cdot G_{k-1} - 10 \cdot G_{k-2}, k \geq 2. \end{cases}$$

Ех. 5. Докажите, что

$$s(k, m) = s(k-1, m-1) - (k-1) \cdot s(k-1, m).$$

Ех. 6. Докажите, что

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \cdot S(n, k).$$

Ех. 7. Докажите, что

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)[x]_k.$$

Ех. 8. Докажите, что

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} S(n, k)[x]^k.$$

Ех. 9. Докажите, что

$$\sum_{t=0}^k S(n, t) \cdot s(t, k) = \delta_{nk}.$$

Ех. 10. Найдите число отношений эквивалентности на n -элементном множестве.

Задачи одиннадцатого семинара.

Ех. 1. Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 3, n = 1, \\ 4F_{n-1} - 4F_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$$

Ех. 2. Докажите, что для чисел Фибоначчи ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$) верны тождества

$$1. F_{n+2} - F_2 = \sum_{k=1}^n F_k, \quad 2. F_{2n+1} - 1 = \sum_{k=1}^n F_{2k}.$$

Ех. 3. Найдите производящую функцию для следующей последовательности (F_k — k -ое число Фибоначчи)

$$G(x) = F_0 + F_2x + F_4x^2 + F_6x^3 + \dots,$$

Ех. 4. Найдите явный вид для элементов следующих последовательностей

$$\text{а) } F_k = \begin{cases} 0, k = 0, \\ 1, k = 1, \\ 3 \cdot F_{k-1} - 2 \cdot F_{k-2}, k \geq 2. \end{cases}, \quad \text{б) } G_k = \begin{cases} 0, k = 0, \\ 1, k = 1, \\ 7 \cdot G_{k-1} - 10 \cdot G_{k-2}, k \geq 2. \end{cases}$$

Ех. 5. Докажите, что

$$s(k, m) = s(k-1, m-1) - (k-1) \cdot s(k-1, m).$$

Ех. 6. Докажите, что

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + k \cdot S(n, k).$$

Ех. 7. Докажите, что

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)[x]_k.$$

Ех. 8. Докажите, что

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} S(n, k)[x]^k.$$

Ех. 9. Докажите, что

$$\sum_{t=0}^k S(n, t) \cdot s(t, k) = \delta_{nk}.$$

Ех. 10. Найдите число отношений эквивалентности на n -элементном множестве.