Лекция 6

Двудольные графы, паросочетания и функции

План:

1. Двудольные графы и паросочетание
2. Теорема Холла

3*. Доказательство теоремы Холла [7]

4. Функции (область определения, множество значений, образ, полный прообраз)
5. Отображения (всюду определённые функции): инъекции, сюръекции, биекции
6. Отображения и задача о назначениях

Граф $G(V, E)$ называется ***двудольным***, если существует разбиение множества V на подмножества L и R ($V = L \cup R$, $L \cap R = \varnothing$), такие что у каждого ребра один конец лежит в L, а другой в R, т. е. между вершинами из L нет рёбер, как и между вершинами из R. Множества L и R называют ***долями графа***. Вообще говоря, в двудольном графе может быть несколько разбиений множества вершин на доли. Когда мы говорим о двудольном графе $G(L \cup R, E)$ мы подразумеваем, что разбиение на доли зафиксировано.

Двудольный граф $G(L \cup R, E)$ называется ***полным***, если $E = \{\{l, r\} \mid l \in L, r \in R\}$, то есть полный двудольный граф содержит всевозможные (для двудольного графа) рёбра. Полный двудольный граф с долями из m и n вершин обозначают через $K_{m,n}$. Граф звезда — это граф $K_{1,n}$.

Лемма 3. *Граф двудольный тогда и только тогда, когда он двураскрашиваемый.*

Двудольные графы часто встречаются в задачах о назначениях. Пусть L — множество процессоров, а R — множество задач; между вершинами l и r есть ребро, если процессор l может решить задачу r (в многопроцессорных системах это зависит от многих параметров). Возникает естественная задача: распределить задачи по процессорам наиболее эффективно, то есть добиться того, чтобы как можно больше задач было решено в единицу времени.

Эта задача известна как задача об оптимальном паросочетании. ***Паросочетание*** — это множество рёбер M, в котором ни одна пара рёбер не имеет общего конца. Ясно, что паросочетание с наибольшим числом рёбер определяет оптимальное распределение задач по процессорам. В идеальном случае, получиться распределить все задачи по всем процессорам, такое паросочетание называется ***совершенным***; формально $M \subseteq E$ — совершенное паросочетание, если каждая вершина графа смежна с некоторым ребром из M; вершины, смежные с рёбрами из M называют ***покрытыми*** M.

Пример 9. На рисунке 6.1 приведено совершенное паросочетание в двудольном графе с долями $\{a, b, c, d\}$ и $\{w, x, y, z\}$. Рёбра, входящие в паросочетание выделены жирным.

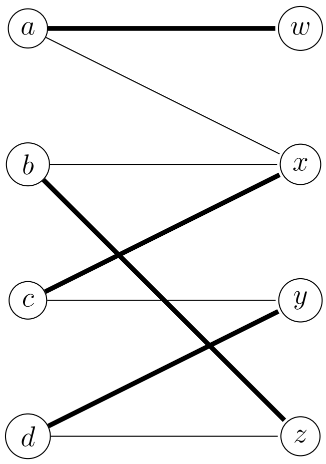


Рис. 6.1. Совершенное паросочетание

Замечание 2. Данные определения о паросочетаниях справедливы для произвольных графов, хотя мы и сосредоточимся на двудольных.

Есть простое условие, которое позволяет проверить, есть ли в двудольном графе совершенное паросочетание. Чтобы его сформулировать, нам потребуется понятие окрестности. Обозначим ***множество соседей*** (***окрестность***) вершины v через

$$N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}.$$

Обобщим понятие соседей на подмножество вершин: соседи множества S — это вершины, смежные хотя бы с одной вершиной из S и не лежащие в A:

$$N(S) = \left(\bigcup_{v \in A} N(v) \right) \setminus S.$$

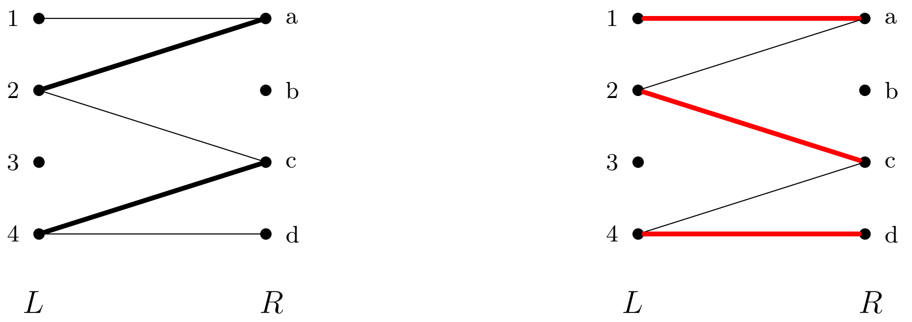
Заметим, что в случае двудольного графа справедливо $N(S) = \bigcup\limits_{v \in S} N(v)$.

Теорема 6 (теорема Холла о свадьбах)**.** *В двудольном графе с долями L и R существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|L| = |R|$ и для любого подмножества $S \subseteq L$ справедливо*

$$|N(S)| \geqslant |S|.$$

Доказательство теоремы Холла

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные определения. Пусть в двудольном графе с долями L и R зафиксировано паросочетание M. Путь положительной длины называется ***чередующимся***, если он начинается в непокрытой M вершине из доли L и рёбра пути чередуются между не принадлежащими M и принадлежащими M. На рис. 6.2.а любой путь, начинающийся из вершины 1 является чередующимся.



а) б)

Рис. 6.2. Чередующие и увеличивающие пути

Из определения чередующегося пути вытекает, что каждое ребро пути из доли L в долю R не принадлежит M, а каждое ребро из доли R в долю L принадлежит (мы считаем, что рёбра пути направлены от первой вершины к последней). Заметим также, что чередующийся путь чётной длины заканчивается в доле L, а нечётной длины — в доле R. Также ясно, что в путях нечётной длины непокрытых рёбер (не входящих в M) на единицу больше, чем покрытых. Эти наблюдения приводят нас к понятию увеличивающего пути.

Чередующийся путь называется ***увеличивающим***, если он заканчивается в непокрытой вершине. Из сказанного выше ясно, что это возможно только в случае, если последняя вершина лежит в правой доле, и таким образом путь будет нечётной длины. Смысл названия состоит в том, что при замене в паросочетании M покрытых рёбер увеличивающего пути на непокрытые, получается паросочетание M' большего размера. Перед доказательством этого утверждения обратимся сначала к интуиции. Как видно из рис. 6.2.б при замене рёбер размер паросочетания M увеличивается на единицу и при этом в нём остаются покрыты все ранее покрытые вершины увеличивающего пути, и помимо них добавляются ещё первая и последняя вершины пути. Докажем, что это будет выполняться для произвольного увеличивающего пути.

Утверждение 7. *Замена в паросочетании M всех покрытых рёбер увеличивающего пути P на непокрытые приводит к паросочетанию M' большего размера.*

Доказательство. Все вершины пути P, покрытые M останутся покрытми, потому что они являются концами как чётных, так и нечётных рёбер P. К покрытым вершинам добавятся ещё первая и последняя вершины P, ранее не покрытые в M (по определению увеличивающего пути). Никакие рёбра M, не входящие в P, при этом не меняются, а количество покрытых M вершин увеличивается, значит увеличивается и количество рёбер в новом паросочетании M'. □

Замечание 3. Определения чередующегося и увеличивающегося путей справедливы и для путей длины 1. В этом случае путём является непокрытое паросочетанием ребро (во втором случае оба конца обязательно не покрыты). Проверьте, что рассуждения выше и ниже проходят и для этого вырожденного случая.

Перейдём к доказательству теоремы Холла. Необходимость условия очевидна: если совершенное паросочетание существует, то у каждой вершины в левой доли есть уникальный сосед справа (поставленный в соответствие паросочетанием); таким образом, соотношение $|N(S)| \geqslant |S|$ справедливо для любого подмножества $S \subseteq L$.

Сосредоточимся на доказательстве достаточности условия теоремы. Мы сведём его к доказательству леммы.

Лемма 4. *Если M — не совершенное паросочетание в двудольном графе, для которого выполняется условие теоремы Холла, то существует паросочетание M', такое что $|M'| > |M|$.*

Объясним, почему лемма эквивалентна достаточности условия. Предположим, что в графе не существует совершенного паросочетания и возьмём паросочетание M максимального размера. Тогда из леммы получим, что существует паросочетание M' большего размера, что противоречит выбору M.

Доказательство леммы 4. Поскольку M не совершенное паросочетание, в левой доле существует непокрытая им вершина a. Обозначим через A множество всех вершин L, достижимых из a чередующимися путями, а через $B \subseteq R$ — множество всех предпоследних вершин этих путей.

Покажем, что размеры множеств A и B совпадают. Каждая вершина из A лежит на каком-то чередующемся пути из вершины a и в силу чётности, последнее ребро этого пути принадлежит паросочетанию M. Поскольку для каждой вершины $a' \in A$ существует уникальная вершина $b' \in R$, такая что $\{a', b'\} \in M$, то b' и есть предпоследняя вершина чередующегося пути, а вершин b' ровно столько же, сколько и a'.

Зафиксируем множество $S = \{a\} \cup A$ и рассмотрим множество $N(S)$. Ясно, что $B \subseteq N(S)$ и $|N(S)| \geqslant |A| + 1 > |B|$, таким образом существует вершина $b \in N(S) \setminus B$.

Поскольку $b \in N(S)$, то b лежит на чередующемся пути из a: либо b смежна с a, либо b смежна с некоторой вершиной $v \in A$; поскольку v — конец некоторого чередующегося пути из a, добавив к этому пути ребро $\{v, b\}$ получим чередующийся путь; ребро $\{v, b\}$ не покрыто M, поскольку покрыто ребро ведущее из B в v.

Вершина b не покрыта паросочетанием M: иначе из b вело бы ребро в множество A и вершина b принадлежала бы множеству B по его определению.

Таким образом, b лежит на чередующемся пути из a и не покрыта M, а значит путь из a в b — увеличивающий. Отсюда по утверждению 7 получаем, что в графе есть паросочетание M' большего размера.

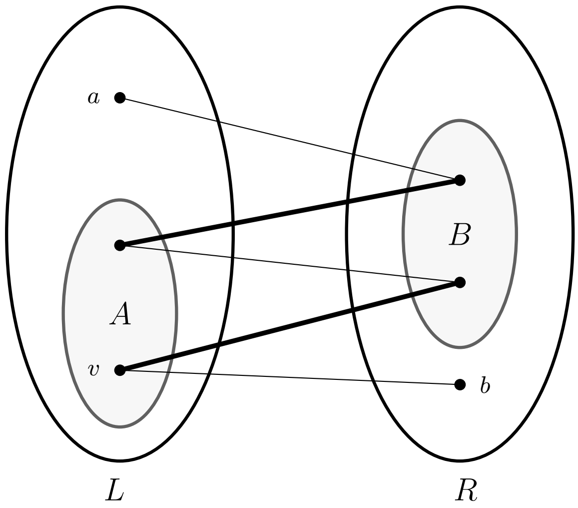


Рис. 6.3. Иллюстрация к доказательству леммы 4

□

6.1 Функции

С помощью двудольных графов легко ввести основные понятия, связанные с функциями. Начнём с картинок. На рис. 6.4 проиллюстрирована функция, а на рис. 6.5 — не функция.

Чтобы разобраться, что отличает функцию от нефункции приведём определение функции. Неформально, ***функция*** — это закон, который ставит в соответствие элементам множества X элементы множества Y; каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие не более, чем один элемент из множества y.

Говорить о функции более правильно с помощью ориентированных графов. В ориентированном графе рёбра — это упорядоченные пары вершин, т. е. на рёбрах есть стрелки. По аналогии с неориентированным графом введём понятия степени вершин и (множества) соседей для ориентированного графа. Поскольку рёбра имеют направление, то мы разделяем исходящую степень $d_+(v)$ (число вершин достижимых из v по одному ребру) и входящую степень $d_-(v)$ (числу вершин, из

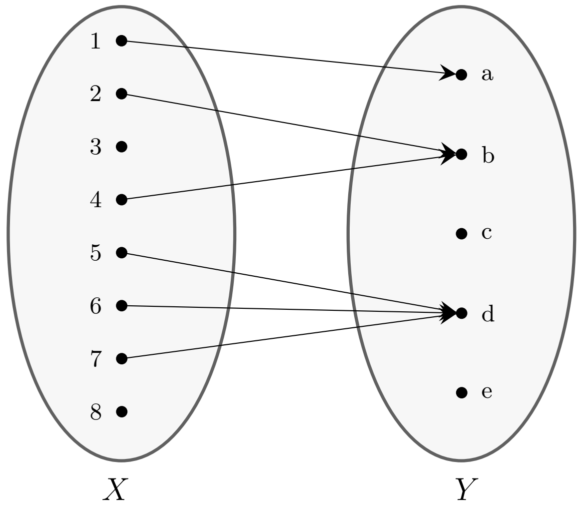


Рис. 6.4. Функция f

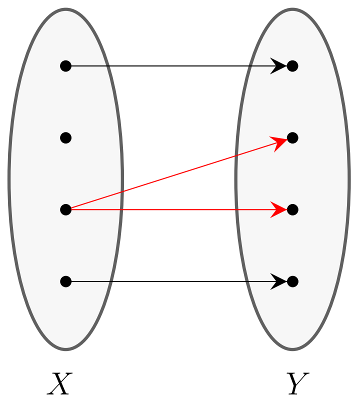


Рис. 6.5. Не функция

которых за один шаг по ребру можно добраться до v), а также множества правых и левых соседей $N_+(v)$ и $N_-(v)$; определения соседей переносятся на подмножества вершин также, как и в случае неориентированного графа.

Из определении функция ясно, что она представима с помощью ориентированного двудольного графа (в левой доли все левые концы рёбер), в котором исходящая степень каждой вершины левой доли не больше единицы; граф при этом может быть и бесконечным.

Обозначим через f множество рёбер графа, задающего функцию f из X в Y; тогда $(x, y) \in f$ означает, что $f(x) = y$. Пусть $G(X \cup Y, f)$ — граф, для функции f.

Введём с помощью двудольного графа базовые определения, связанные с функциями и разберёмся с ними на примере функции на рис. 6.4. Рекомендуем читателю самостоятельно сделать упражнение ниже, прежде чем переходить к ответу.

- ***Областью определения*** $\mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ называется подмножество вершин с исходящей степенью 1 (подмножество X, на котором определена функция f).

- ***Множеством значений*** $\mathrm{Range}(f) \subseteq Y$ называется подмножество вершин с входящей степенью больше 0 (подмножество Y всевозможных значений f).

- ***Образом*** $f(A)$ множества $A \subseteq X$ называют множество значений, которые принимает f на подмножестве A; на языке графов — это множество правых соседей $N_+(A)$:

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} = N_+(A).$$

- ***Полным прообразом*** $f^{-1}(B)$ множества $B \subseteq Y$ называют множество элементов X, значение функции на которых лежит в B; на языке графов — это множество левых соседей $N_-(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \exists y \in B : f(x) = y\} = N_-(B).$$

Если $f(x) = y$, то элемент y называют ***образом*** элемента x, а элемент y называют ***прообразом*** элемента y. Из определений следует, что $\mathrm{Dom}(f) = f^{-1}(Y)$, а $\mathrm{Range}(f) = f(X)$.

Функцию на рис. 6.4 также можно задать с помощью обозначения $x \mapsto y$:

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto b, \quad 4 \mapsto b, \quad 5 \mapsto d, \quad 6 \mapsto d, \quad 7 \mapsto d.$$

Упражнение 4. Найдите для функции f на рис. 6.4 область определения, множество значений, образ множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и полный прообраз множества $B = \{b, c, d\}$.

Ответ: $\mathrm{Dom}(f) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathrm{Range}(f) = \{a, b, d\}$, $f(A) = \{a, b\}$, $f^{-1}(B) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

Замечание 4. Не следует путать обозначение f^{-1} с обозначением для обратной функции. Полный прообраз определён для произвольной функции. Одинаковые обозначения неслучайны: если полный прообраз каждого элемента y содержит не более одного элемента x, то функция f обратима, и обратная к ней функция g определяется как $g(y) = x$, где $x \in f^{-1}(y)$.

6.2 Отображения

В случае $\mathrm{Dom}(f) = X$, функция f называется ***всюду определённой*** или ***отображением***[1]. Запись $f : X \to Y$ означает, что f всюду определена.

Среди отображений выделяют следующие три важных вида.

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называется ***инъекцией***, если $f(x) \neq f(x')$ при $x \neq x'$. В терминах графа, это означает, что входящая степень каждого $y \in Y$ не превосходит единицу.

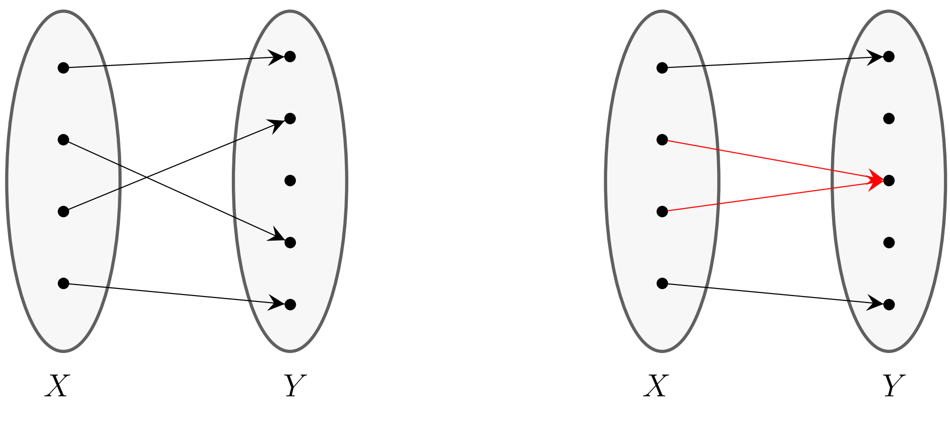


Рис. 6.6. Инъекция и не инъекция

[1]В разных областях математики под термины функции и отображения резервируют разные понятия; будьте внимательны при чтении математической литературы.

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется ***сюръекцией***, если у каждого элемента y существует образ, т. е. $\mathrm{Range}(f) = Y$ или что то же самое $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$. В терминах графа, это означает, что входящая степень каждого $y \in Y$ больше нуля.

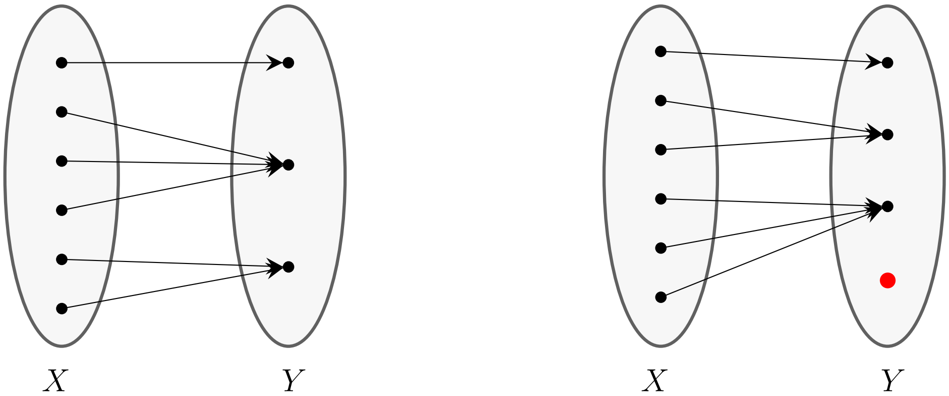


Рис. 6.7. Сюръекция и не сюръекция

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется ***биекцией***, если оно является инъекцией и сюръекцией.

Из определения биекции ясно, что каждая вершина X и Y имеет единичную исходящую и входящую степень соответственно. То есть биекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y.

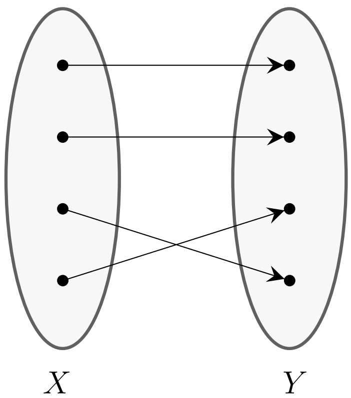


Рис. 6.8. Биекция

6.3 Функции и задача о назначениях

Вернёмся к задаче о распределении задач по процессорам. В ней задан двудольны граф, который задаёт ограничения на назначения задач процессорам. Любой подграф этого графа, задающий функцию, ставит в соответствии каждому процессору ровно одну задачу, но разным процессорам могут быть назначены одинаковые задачи.

Если каждому процессору назначено по задаче, то эта функция — отображение. Если вместе с этим разным процессорам назначены разные задачи, то эта функция — инъекция. Если каждому процессору назначено по задаче и каждая задача назначена какому-то процессору, то эта функция — сюръекция. В идеальном случае, каждому процессору назначена своя задача и распределены все задачи: в этом случае функция — биекция.

В случае, если не каждому процессу получается назначить задачу, то вместо того, чтобы считать, что задана не всюду определённая функция f из L в R можно считать, что задано отображение $f : A \to R$, где $A = \mathrm{Dom}(f) \subseteq L$. Это удобно, чтобы пользоваться понятиями инъекции, сюръекции и биекции.

Итак, задача о назначении (она же о поиске максимального паросочетания) сводится к поиску инъекции с самой большой областью определения (её размер равен как числу процессоров, так и числу распределённых задач). В идеале все задачи распределены, в этом случае найдена сюръекция; если же $|L| = |R|$ и все задачи распределены по всем процессорам, то найдено лучшее решение — биекция, которая соответствует совершенному паросочетанию.