Лекция 9

Комбинаторика III. Формула включений-исключений

План:

1. Доказательство формула включений-исключений (через характеристические функции)
2. Примеры
   - Количество чисел от 1 до 1000 не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7
   - Связь со знакопеременной суммой биномиальных коэффициентов
   - Задача о счастливых билетах (см. материалы К. Чувилина)
3. Подсчёт числа отображений (всюду определённых функций), функций, инъекций, биекций
4. Подсчёт сюръекций
5. Комбинаторные объекты. Смысл обозначений 2^A для множества всех подмножеств и Y^X для множества отображений из X в Y.
6. Принцип Дирихле

9.1 Правило суммы и формула включений-исключений

Напомним, что правило суммы гласит, что если множества A и B не пересекаются (т. е. $A \cap B = \varnothing$), то $|A \cup B| = |A| + |B|$. Или ещё его формулируют так: «Если есть n способов выбрать первый объект и m способов выбрать второй объект, и эти способы независимы, то всего есть $n+m$ способов выбрать первый или второй объект.»

Что же делать, если множества A и B пересекаются? Ясно, что тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Пример 17. Сколько чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3?

Давайте посчитаем сколько чисел делятся на 2 или на 3:

$$|D_2 \cup D_3| = |D_2| + |D_3| - |D_2 \cap D_3| = |D_2| + |D_3| - |D_6|.$$

То есть $50 + 33 - 16 = 67$. Отсюда, ни на 2 ни на 3 не делятся 33 числа.

Нарисовав диаграммы Эйлера-Венна для трёх множеств нетрудно получить, что

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Эти формулы помогают посчитать число элементов во всех множествах, когда известно количество элементов во всевозможных пересечениях этих множеств. В общем случае формула-включения исключений устроена так (в формулах $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$):

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{m+1} \sum_{\substack{S \subseteq [n], \\ |S| = m}} \left| \bigcap_{A \in S} A \right| + \ldots$$

или более компактно

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\substack{S \subseteq [n], \\ S \neq \varnothing}} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{A \in S} A \right|. \tag{1}$$

Сумма в последней формуле берётся по всем непустым подмножествам $[n]$; если $S = \{1, 2, 4\}$, то соответствующее слагаемое имеет вид $(-1)^4 \times |A_1 \cap A_2 \cap A_4|$.

Формулу включений-исключений можно прямолинейно доказать по индукции. Однако дело это неблагодарное, поэтому мы приведём другое доказательство — через характеристические функции.

Характеристические функции

Зафиксируем юнивёрсум U. Функция $\chi_A(x)$ называется характеристической функцией множества $A \subseteq U$, если

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Характеристические функции на первый взгляд ничем не отличаются от предикатов. Разница лишь в том, что предикаты принято относить к логическим формулам, а арифметические действия с ними проводить не принято (если сложить две истинны, то это не считается более убедительной истиной). С помощью характеристической функции легко выразить мощность множества:

$$|A| = \sum_{x \in U} \chi_A(x).$$

Для доказательства формулы включений-исключений нам потребуется выразить характеристическую функцию пересечения, объединения и дополнения множеств через элементарные множества:

$$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \times \chi_B(x);$$

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \times \chi_B(x);$$

$$\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Упражнение 5. Проверьте корректность этих формул.

Доказательство формулы включений-исключений

Основным ингредиентом доказательства является обобщённый закон де Моргана:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i},$$

который мы переведём на язык характеристических функций (для удобства опустим аргументы):

$$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}} = 1 - (1 - \chi_{A_1}) \times (1 - \chi_{A_2}) \times \ldots \times (1 - \chi_{A_n}).$$

Раскроем скобки в выражении $(1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2}) \ldots (1 - \chi_{A_n})$ и проанализируем получившееся выражение аналогично анализу для бинома Ньютона. Ясно, что среди слагаемых есть 1; чтобы её получить нужно взять в качестве сомножителей 1 из каждой скобки; также для каждого i в выражение войдёт слагаемое $-\chi_{A_i}$: чтобы получить его нужно взять $-\chi_{A_i}$ из i-ой скобки, а из каждой оставшейся скобки взять единицу. Продолжая рассуждения получаем, что чтобы получить слагаемое $\prod\limits_{i \in S} \chi_{A_i} = \chi_{A_{i_1}} \times \chi_{A_{i_2}} \times \ldots \times \chi_{A_{i_{|S|}}}$ нужно взять из каждой скобки с номером из множества S слагаемое $-\chi_{A_i}$, а из остальных скобок взять 1; при этом коэффициент перед получившимся произведением будет $(-1)^{|S|}$. Итак, мы получили формулу

$$\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \left(1 + \sum_{\substack{S \subseteq [n], \\ |S| = m}} (-1)^{|S|} \prod_{i \in S} \chi_{A_i} \right) = \sum_{\substack{S \subseteq [n], \\ |S| = m}} (-1)^{|S|+1} \chi_{\bigcap\limits_{i \in S} A_i},$$

в последнем переходе мы перешли от произведения характеристических функций к характеристической функции пересечения множеств.

Просуммировав обе части по всем $x \in U$ получим требуемую формулу (1). Обратим внимание, что в результате суммирования левая часть формулы будет иметь вид

$$\sum_{x \in U} \chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i(x)} = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|,$$

а в правой части в результате суммирования отдельного слагаемого получится следующее

$$\sum_{x \in U} (-1)^{|S|+1} \chi_{\bigcap\limits_{i \in S} A_i}(x) = (-1)^{|S|+1} \times \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|.$$

9.2 Задача о счастливых билетах

В качестве примера применения формулы включений-исключений приведём задачу о счастливых билетах. В XX веке в СССР и России билеты на автобусы имели номера, состоящие из шести цифр. Билеты нужно было компостировать (дырявить специальным устройством в автобусе), а если сумма первых трёх цифр совпадала с суммой последних трёх, то билет считался счастливым, и его полагалось на удачу съесть, что приводило к казусам, если в автобус заходил контролёр. Отсюда возникла естественная для комбинаторики задача — подсчитать количество счастливых билетов.

Обозначим первые три цифры как a_1, a_2, a_3, а последние через b_1, b_2, b_3. Сделаем замену $a_4 = 9 - b_1, a_5 = 9 - b_2, a_6 = 9 - b_3$. Получаем, что билет счастливый тогда и только тогда, когда

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 27, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant 9. \tag{2}$$

Сходу возможно неясно, как подсчитать все решения, удовлетворяющие (2). Давайте для начала найдём все решения, в которых $a_i \geqslant 0$. Это классическая задача Муавра, всего таких решений $\binom{32}{5}$. Среди этих решений есть и те, которые не годятся, давайте их вычтем.

Ясно, что не годятся те решения, в которых хотя бы одна переменная принимает значение 10 или больше. Давайте одну переменную, присвоим ей значение 10, после чего распределим оставшиеся 17 единиц по остальным переменным; число способов сделать последнее совпадает с числом решений уравнения $\sum\limits_{i=1}^{6} a_i = 17$, т. е. $\binom{22}{5}$ и всего есть 6 способов выбрать плохую переменную; по правилу произведения получаем, что плохих вариантов $6 \times \binom{22}{5}$.

Но ответ $\binom{32}{5} - 6 \times \binom{22}{5}$ неверный: при вычитании мы два раза учли случай когда первая переменная была выбрана плохой, а вторая получила 10 или больше единиц при последующем распределении и наоборот. Поэтому к этой разности нужно добавить произведение $\binom{6}{2} \times \binom{12}{5}$ — число способов выбрать две переменные, которым сразу выдадут 10 единиц, после чего распределить оставшиеся 7 единиц по 6 переменным. Поскольку трёх плохих переменных быть уже не может, получаем итоговый ответ:

$$\binom{32}{5} - 6 \times \binom{22}{5} + \binom{6}{2} \times \binom{12}{5}.$$

Давайте посмотрим на эти рассуждения внимательно. Вроде бы мы использовали формулу включений-исключений, но это произошло неявно. Какие же множества нужно было выбрать, чтобы её воспользоваться?

С помощью формулы включений-исключений мы посчитали плохие случаи. Обозначим через A_i множество решений уравнения 2, в котором для i-ой переменной условие не выполняется; формально

$$A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_6) \mid a_i \geqslant 10,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = 27,\ a_j \geqslant 0,\ \text{при } 1 \leqslant j \leqslant 6\}.$$

Чтобы подсчитать все плохие решения достаточно вычислить мощность объединения множеств $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6|$, для которого справедливо

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_6| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_5 \cap A_6| =$$

$$= 6 \times |A_1| - \binom{6}{2} \times |A_1 \cap A_2|.$$

Тройные и последующие пересечения множеств в формулу не входят, так как пересечение любых трёх множеств (среди A_i) пусто. В силу симметрии в каждом множестве A_i одинаковое число элементов, равно как и в попарных пересечениях. Убедитесь, что в решении задачи о счастливых билетах выше мы действительно использовали эту формулу.

9.3 Подсчёт функций

Как и раньше, обозначим через $[m]$ — m-элементное множество; для определённости $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Найдём число отображений $f : [m] \to [n]$ (из m-элементного множества в n-элементное множество). Напомним, что отображения — это всюду определённые функции, этот факт обозначается с помощью стрелочки между множествами. Для значения $f(1)$ годится любое из n чисел, равно как для $f(2)$ и так вплоть до $f(m)$; по правилу произведения получаем, что число отображений есть n^m. Каждое отображение можно закодировать как слово длины m над алфавитом из n символов. Эта кодировка пригодится нам дальше.

Найдём теперь число функций из $[m]$ в $[n]$. В отличие от отображений функции не обязательно всюду определены, поэтому возможно, что у каких-то элементов множества $[m]$ нет образов. Эту задачу легко свести к предыдущей, добавив к множеству $[n]$ элемент $n + 1$ и построить для каждой функции f из $[m]$ в $[n]$ эквивалентное отображение $g : [m] \to [n + 1]$, которое принимает значение $n + 1$ во всех точках, в которых функция f не определена, а в остальных точках принимает то же значение, что и f. Итак, мы установили биекцию между множеством функций из $[m]$ в $[n]$ и множеством отображений из $[m]$ в $[n+1]$, таким образом число функций есть $(n + 1)^m$.

Перейдём теперь к подсчёту инъекций из $[m]$ в $[n]$. Вспомним, что инъекция — отображение, которое ставит в соответствие разным элементам разные значения.

Мы уже обсуждали тот факт, что если существует инъекция из конечного множества A в конечное множество B, то $|A| \leqslant |B|$, поэтому при $m > n$ инъекций нет вовсе. В случае $m \leqslant n$ инъекцию, как и любое отображение, можно закодировать в виде слова над n-ичным алфавитом длины m, а условие инъективности означает, что в слове все буквы разные. Таким образом, число инъекций совпадает с числом размещений и равно $\frac{n!}{(n-m)!}$.

В случае конечных множеств, биекция является частным случаем инъекции, когда $[m] = [n]$. Таким образом число биекций равно $n!$ (при $m = n$) и совпадает с числом перестановок. Совпадение чисел размещений и перестановок с числом инъекций и сюръекций неслучайно. Инъекции кодируют размещения, а биекции перестановки.

Подсчёт сюръекций

Перейдём теперь к подсчёту сюръекций. В отличие от подсчитанных выше функций, подсчитать число сюръекций уже непросто. Аналогично случаю с инъекциями необходимо, чтобы $m \geqslant n$. Чтобы подсчитать сюръекции подсчитаем сначала отображения, не являющиеся сюръекциями и вычтем их число из количества всех отображений.

Напомним, что функция является сюръекцией, если прообраз каждого из элементов $[n]$ не пуст. Таким образом, функция не является сюръекцией, если в $[n]$ есть хотя бы один элемент y для которого нет подходящего $x : f(x) = y$. Обозначим через A_i — множество отображений, для которых прообраз элемента i не определён, формально

$$A_i = \{f \mid f : [m] \to [n],\ f^{-1}(i) = \varnothing\}.$$

Ясно, что все несюръекции лежат в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Подсчитаем мощность $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right|$ с помощью формулы включений-исключений. Для каждого A_i число $|A_i|$ совпадает с числом отображений из m-элементного множества в $(n-1)$-элементное множество (i-ый) элемент задействовать нельзя, а все остальные можно. Их число есть $(n-1)^m$. В пересечении множеств $A_i \cap A_j$ $(i \neq j)$ содержится столько же элементов, сколько отображений $[m] \to [n-2]$ (теперь нельзя задействовать ровно два элементов), а число элементов в пересечении любых k множеств из семейства $A_1, A_2, \ldots, A_n$ совпадает с числом отображений $[m] \to [n-k]$. Число способов выбрать k множеств из семейства с n-множествами есть число сочетаний $\binom{n}{k}$, отсюда получаем по формуле включений исключений

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \ldots |A_{n-1} \cap A_n| + \ldots = \\ &= n \times (n-1)^m - \binom{n}{2} \times (n-2)^m + \binom{n}{3} \times (n-3)^m - \ldots = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \times \binom{n}{k} \times (n-k)^m.\end{aligned}$$