

Задачи ε_0 семинара.

Ех. 1. Сколько существует функций, лежащих в $\overline{T_0} \cap \overline{T_1}$? Постройте для одной из таких функций, зависящей существенно от двух переменных СДНФ, СКНФ и многочлен Жегалкина.

Ех. 2. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Ех. 3. Сколько существует графов на 100 вершинах, **а)** в которых есть клика размера 99? **б)** в которых диаметр равен 98? (с точностью до изоморфизма)

Ех. 4. **а)** Чему равна максимальная и минимальная степень в булевом кубе B_n ? **б)** Докажите, что булев куб B_{2n} имеет подграф, изоморфный полному бинарному дереву ранга n .

Ех. 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$, где $Y \subseteq X$. Докажите, что если есть такая степень n , что $f^n(X) = X$, то f — биекция.

Ех. 6. Найдите вероятность того, что слово длины 6, составленное из букв А, В, С, будет содержать две подряд идущие буквы А.

Ех. 7. Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k}.$$

Ех. 8. Пусть $P \subseteq A \times A$ и $Q \subseteq B \times B$ — отношения эквивалентности. Будет ли отношением эквивалентности отношение $R \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$:

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow aPa', bQb'?$$

Ех. 9. **а)** Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах. **б)** Допустим, что в графе для некоторых двух вершин это число путей достигается. Что тогда можно сказать про порядок, которому соответствует этот граф?

Ех. 10. Булева функция $\text{PAR}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ равна 1, если количество единиц среди значений x_1, x_2, \dots, x_n нечетно и нулю, если четно.

а) Выразите функцию $\text{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через известные булевы функции (можно использовать связки $\wedge, \vee, \neg, \oplus, \rightarrow$).

б) При каких $n \geq 1$ можно представить функцию $\text{PAR}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде ДНФ без отрицаний?