Лекция 4

Графы I. Простые неориентированные графы

План:

1. Определение неориентированных графов
2. Степень вершины. Сумма степеней вершин — удвоенное количество рёбер.
    - Число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
3. Теоретико множественные операции с графами. Определение подграфа
4. Определение путей и циклов (через подграфы)
5. Связные графы и компоненты связности (через подграфы)

Литература: [7], [8], [1]

Мы переходим сейчас к изучению графов по двум причинам. Во-первых, графы иллюстрируют как можно легко ввести новые определения пользуясь аппаратом теории множеств, а во вторых графы — прекрасный полигон для упражнений в доказательствах.

Неформально определение графа легко объяснить с помощью картинок: нарисуем точки, соединим их линиями и получим тем самым граф. Сразу нужно оговориться, что пересечения линий смысла не несут и то, что мы соединяем линиями только разные точки, и каждую пару точек соединяем линией не более одного раза.

Понятие графа легко формализовать с помощью теории множеств. Точки образуют множество ***вершин*** V (произвольное множество любой природы), а линии формализуются как его двухэлементные подмножества $\{u, v\}$, которые образуют множество рёбер E. Поскольку в каждое ребро состоит ровно из двух элементов, то нет рёбер из вершины в себя, они бы имели вид $\{v\}$, такие рёбра называются ***петлями***; поскольку множество содержит каждый элемент не более одного раза, то двух рёбер между одной и той же парой вершин быть не может, такие рёбра называют ***кратными*** или ***параллельными***.

Введём вспомогательное обозначение. Обозначим через $\binom{A}{2}$ все двухэлементные подмножества множества A, т. е.

$$\binom{A}{2} = \{\{a, b\} \mid a, b \in A,\ a \neq b\}\,.$$

Формализуем определение графа. (Простой, неориентированный) ***граф*** G — состоит из множества ***вершин*** V и ***рёбер*** $E \subseteq \binom{V}{2}$; формально, граф — это упорядоченная пара $G = (V, E)$. Будем ссылаться на множество вершин и множество рёбер графа G через $V(G)$ и $E(G)$, даже если при определении графа G множества вершин и множество рёбер были обозначены другими буквами. Если множества вершин V и рёбер E заданы, то граф на них обозначают $G(V, E)$, это обозначение используют также чтобы быстро ввести множество вершин и множество рёбер графа: запись $H(W, I)$ означает, что $W = V(H), I = E(H)$.

Если не оговорено противного, то под графом мы понимаем простой неориентированный граф. ***Простой*** означает, что в графе нет петель и кратных рёбер, а ***неориентированный***, что рёбра графа не имеют направлений. В случае если заменить в графе линии на стрелки, т. е. ребро — упорядоченная пара вершин, то получится ***ориентированный граф***. Заметим, что множество вершин графа может вообще говоря быть бесконечным или пустым, но если не оговорено противного, то мы считаем, что множество вершин конечно и непусто.

4.1 Вершины, рёбра степени вершин

Зафиксируем граф $G(V, E)$. Вершины u и v называются ***смежными*** или ***соседями***, если они образуют ребро: $\{u, v\} \in E$. Рёбра e и f называются ***смежными***, если они имеют общую вершину: $e \cap f \neq \varnothing$. Вершина v ***инцидента*** ребру e, если $u \in e$. Вершины u и v, инцидентные ребру e, называются его ***концами***; говорят, что e ***соединяет*** u и v. Рёбра часто записывают сокращённо: uv вместо $\{u, v\}$.

Степенью вершины v называется число смежных с v рёбер и обозначается $d(v)$.

Теорема 1. $\sum\limits_{u \in V} d(u) = 2|E|$.

Доказательство. В левой сумме ребро $\{u, v\}$ было подсчитано два раза: один раз в слагаемом $d(u)$, а в другой раз в слагаемом $d(v)$. $\square$

Из теоремы сразу вытекает следующее следствие:

Следствие 1. *В любом графе число вершин нечётной степени чётно.*

Доказательство. В правой части равенства (из условия теоремы) стоит чётное число. Вычтем из обеих частей равенства все чётные степени вершин и получим, что в левой части осталась сумма нечётных степеней вершин, а в правой — чётное число. $\square$

Это тривиальное следствие позволяет доказывать следующие странные утверждения, такие как «число людей в этой аудитории, пожавших с утра руки нечётному числу людей (в этой аудитории), чётно».

4.2 Базовые графы

Приведём примеры графов, которые встречаются в теории графов так часто, что получили собственные имена.

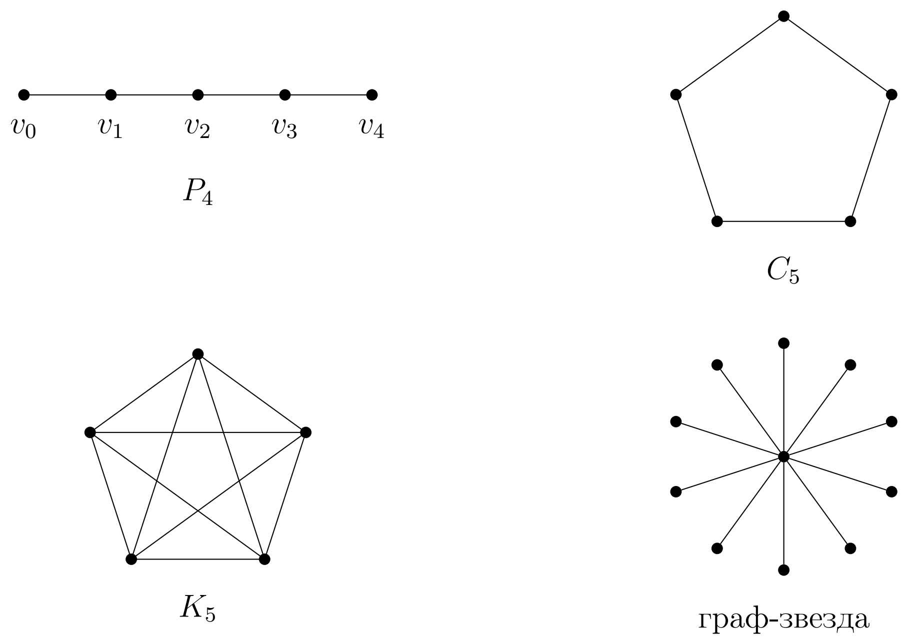

Рис. 4.1. Базовые графы

Граф-путь P_n, $n \geqslant 0$ состоит из вершин $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ и рёбер $\{v_i, v_{i+1}\}$. ***Длина пути*** — это число рёбер в пути, которых в графе P_n ровно n (поэтому нумерация вершин графа начинается с нуля); вершина v_0 называется ***началом пути***, а вершина v_n — ***концом пути***. Заметим, что граф P_0 состоит из одной вершины и не имеет рёбер и полноправно считается путём длины 0. Мы называем графом-путём любой граф, представимый в описанном виде (природа множества вершин нас не интересует), это относится и к остальным графам с картинки.

Граф-цикл C_n, $n \geqslant 3$ состоит из вершин $v_1, \ldots, v_n$ и рёбер $\{v_i, v_{i+1}\}$, а также $\{v_n, v_1\}$. Как и в случае пути, длина цикла — это количество рёбер в цикле.

Полный граф $K_n(V, E)$, $n \geqslant 1$ состоит из n вершин и имеет всевозможные рёбра: $E = \binom{V}{2}$.

Граф-зведа состоит из выделенной вершины, соединённой рёбрами со всеми остальными вершинами (больше рёбер в этом графе нет).

Пустой граф не содержит ни вершин, ни рёбер: $V = E = \varnothing$ и обозначается как $\varnothing$. Во всех утверждениях о графах мы полагаем, что граф G не пуст; пустой граф удобно использовать в формулах, например, чтобы кратко сказать, что графы G и H не имеют общих вершин и рёбер.

Обратим внимание, что если граф подпадает под одно из определений выше, то это вовсе не означает, что он не попадает под другое. Так граф-путь P_1 является одновременно графом-звездой, а граф-цикл C_3, ***треугольник***, является также полным графом K_3.

4.3 Теоретико-множественные операции с графами. Подграфы

Операции из теории множеств переносятся на графы естественным образом. Определим операции объединение, пересечение и дополнение графов, с помощью графов $G(V, E)$ и $H(W, I)$:

$$G \cup H = (V \cup W,\, E \cup I), \quad G \cap H = (V \cap W,\, E \cap I), \quad \overline{G} = \left(V, \binom{V}{2} \setminus E\right).$$

Операции объединения и пересечения определены естественным образом, а дополнение графа G — это минимальный граф $\overline{G}$ на том же множестве вершин, который при объединении с G даёт полный граф. Под минимальностью понимается, что из $\overline{G}$ нельзя удалить ребро и получить граф, который в объединении с G даст полный граф, это условие равносильно $E(G) \cap E(\overline{G}) = \varnothing$.

На рисунке 4.2 пример теоретико-множественных операций со знакомыми графами.

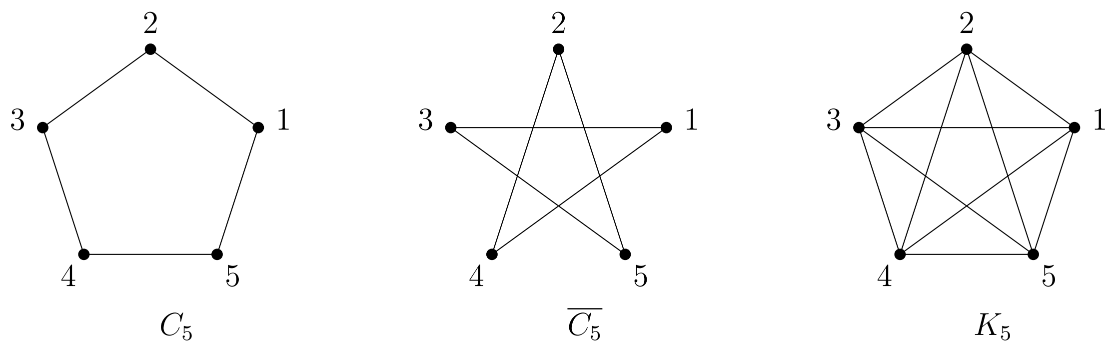

Рис. 4.2. Объединение графа и его дополнения даёт полный граф

Объединив граф C_5 с его дополнением получается граф K_5. При работе с теоретико-множественными операциями важно явно описать множество вершин каждого графа. Так, если бы у второго графа на картинке вместо вершин $\{1, 2, \ldots, 5\}$ были вершины $\{a, b, \ldots, e\}$, то в результате объединения получился бы другой граф. Также напомним, что обозначения вида C_n обозначают, что какой-то граф является графом-циклом. Так, граф $\overline{C_5}$ на картинке является графом C_5 — проверьте это перенумеровав его вершины.

Мы не определили на графах теоретико-множественную операцию разности (и соответственно симметрическую разность), потому что в зависимости от нужд требуется либо удалять из одного графа рёбра другого вместе с вершинами, либо вершины нужно оставить; чтобы не было путаницы мы будем явно указывать какую разность используем оперируя множествами вершин и рёбер, избегая сокращений.

Подграфы

Граф $H(W, I)$ называется ***подграфом*** графа $G(V, E)$, если $W \subseteq V$ и $I \subseteq E$. Другими словами, граф H получается из графа G удалением рёбер и вершин (вместе со смежными рёбрами). Это обозначают $H \subseteq G$. Мы используем определение подграфа, также известное как ***рёберный подграф***.

Формально, граф G является своим подграфом; чтобы подчеркнуть, что подграф H не совпадает с G используют обозначение $H \subsetneq G$; в этом случае подграф H называют ***собственным*** подграфом графа G.

Среди подграфов есть важный частный случай. Пусть $U \subseteq V$; подграф H графа G, состоящий из вершин U и содержащий все рёбра, которые есть в G называется ***индуцированным*** (множеством U); формально $H = \left(U, E \cap \binom{U}{2}\right)$. Для подграфа графа G индуцированного множеством U используют обозначение $G[U]$. По-умолчанию под подграфами мы подразумеваем рёберные подграфы.

С помощью понятия подграфа и базовых графов вводится ряд важных определений. Подграф H графа G называется

- ***путём*** из вершины u в вершину v, если H — это граф-путь P_n с началом в u и концом в v;
- ***циклом***, если H — это граф-цикл C_n;
- ***кликой***, если H — это полный граф K_n.

Множество $U \subseteq V(G)$ называется ***независимым***, если в индуцированном U подграфе нет рёбер, то есть $G[U] = \overline{K_n}$. Другими словами, никакие две вершины множества U не соединены ребром в графе G.

Перед следующим определением напомним, что формально объект обладает свойством $\mathcal{H}$, если он принадлежит множеству, определяемому этим свойством, которое мы обозначаем также, то есть $\mathcal{H} = \{x \mid \mathcal{H}(x)\}$; свойство формализовано через предикат $\mathcal{H}(x)$.

Пусть $\mathcal{H}$ — это некоторое свойство графов; обозначим через $\mathcal{H}_G$ все подграфы графа G, обладающие свойством $\mathcal{H}$. Подграф $H \subseteq G, H \in \mathcal{H}_G$ называется ***максимальным*** среди подграфов со свойством $\mathcal{H}$, если не существует подграфа $H' \in \mathcal{H}_G$, такого что $H \subsetneq H'$ и $H' \subsetneq G$.

Пример 8. Рассмотрим граф K_5 на рис. 4.2. Рассмотрим свойство «быть циклом». Любой подграф графа K_5, являющийся циклом будет максимальным циклом, потому что добавлением вершин и рёбер в цикл, нельзя получить другой цикл; таким образом графы C_5 и $\overline{C_5}$ на рис. 4.2 являются максимальными циклами графа K_5.

Рассмотрим свойство «быть кликой». Максимальной кликой будет только сам граф K_5, потому что какую бы другую клику мы не взяли, например $K_5[\{1, 2, 3, 4\}]$, её можно превратить в клику большего размера, добавив остальные вершины и рёбра: $K_5[\{1, 2, 3, 4\}] \subsetneq K_5[\{1, 2, 3, 4, 5\}] = K_5$.

Рассмотрим свойством «быть кликой чётного размера». Любая клика графа K_5 на четырёх вершинах, например $K_5[\{1, 2, 3, 4\}]$, будет максимальной кликой чётного размера, а любая клика размера два (ребро) хоть и будет обладать этим свойством, максимальной кликой чётного размера не будет.

4.4 Связность

Вершина u называется ***достижимой*** из v, если есть путь из v в u. Граф G называется ***связным***, если любая его вершина достижима из любой другой. Простая аналогия для понятия связности — города и дороги. Если V — множество городов, а E — множество дорог, то связность графа означает, что из любого города можно добраться до любого другого. Даже в реальной жизни граф автодорог может быть несвязным, в частности несвязен граф автодорог России — Калининградская область отрезана от России странами Европы.

Поэтому, при анализе дорожных сетей интересны ***компоненты связности*** — максимально связные подграфы графа G. То есть, H — компонента связности графа G, если $H \subseteq G$, H — связный граф и не существует связного подграфа $H' \subseteq G$, такого что $H \subsetneq H'$.

Очевидно, что компонента связности всегда индуцированный подграф, поэтому компоненту связности часто определяют как максимальное по включению подмножество вершин $U \subseteq V$, в котором каждая вершина достижима друг из друга.

Любой граф является объединением его компонент связности. Изучив позже отношения эквивалентности, мы докажем, что компоненты связности либо не пересекаются, либо совпадают, то есть, если $H_1, \ldots, H_m$ — компоненты связности графа G, то

$$G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m, \quad H_i \cap H_j = \varnothing.$$

Пока этим фактом можно пользоваться без доказательства; попробуйте доказать это утверждение самостоятельно. Компонента связности может состоять из одной вершины; в этом случае вершина имеет степень ноль и называется ***изолированной***.

Лемма 1. *Пусть $G(V, E)$ — связный граф и ребро e лежит на цикле; тогда граф $G' = (V, E \setminus \{e\})$ связный. То есть, удаление ребра цикла не нарушает связность.*

Перед доказательством введём вспомогательные обозначения. Пусть P и Q — пути в графе G, x, y — вершины, лежащие на пути P, а y и z — вершины, лежащие на пути Q. Обозначим через xPy — подпуть пути P, начинающийся с вершины x и заканчивающийся в вершине y; считаем, что вершины $p_0, p_1, \ldots, p_n$ пути P упорядочены так, что $x = p_i$, $y = p_j$, $i < j$ и соответственно $xPy = p_iPp_j$ — путь на вершинах $p_i, \ldots, p_j$. Если в результате объединения путей xPy и yQz получится путь, то мы обозначаем этот путь через $xPyQz$. Это обозначение переносится и на объединение нескольких путей, а если пути P и Q имеют единственную общую вершину — общий конец, то путь, получившийся их объединением обозначим через PQ.

Доказательство леммы 1. Пусть ребро e лежит в подграфе-цикле C. Обозначим через $Q \subseteq C$ подграф-путь, получающийся из C удалением ребра e (с сохранением его концов). Зафиксируем все пути между всеми парами вершин перед удалением e и рассмотрим путь P с началом в вершине w и концом в вершине z.

Если ребро e не лежит на пути P, то после удаления в графе ребра e этот путь не пострадает. Если же e лежит на пути, то превратим этот путь в другой путь с помощью пути Q. Упорядочим вершины P; пусть вершина x — первая общая вершина путей P и Q (ближайшая к w, возможно сама w), а y — последняя общая вершина путей P и Q (ближайшая к z, быть может сама z). Вершины x и y определены, потому что пути P и Q имеют хотя бы две общие вершины — концы ребра e.

Докажем, что $wPxQyPz$ — путь, соединяющий вершины w и z, и не проходящий через ребро e. Действительно, пути wPx и xQy не имеют общих вершин, кроме x, поскольку иначе в пути P нашлась бы вершина ближе к w, чем x, которая была бы общая с путём Q, что противоречит выбору x; симметрично пути xQy и yPz не имеют общих вершин, кроме y (иначе нашлась бы общая вершина ближе к z, чем y); пути wPx и yPz не имеют общих вершин, поскольку это непересекающиеся подпути пути P.

Итак, мы доказали, что после удаления ребра e в графе по-прежнему останутся пути между всеми парами вершин, т. е. граф останется связным. $\square$