Задачи $\omega + 1$ семинара.

Ex. 1. Докажите, используя контрапозицию, что если $x^2 - 6x + 5$ четно, то x нечетно; здесь $x \in \mathbb{Z}$.

Ex. 2. Булева функция задана вектором значений $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

1. Опишите f через таблицу истинности.

2. Какие переменные f являются **a)** существенными; **b)** фиктивными?

3. Опишите f через булеву формулу.

Ex. 3. Обозначим через $x^1 = x$ и $x^0 = \neg x$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — набор из нулей и единиц. Докажите, что функция $x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\alpha_n}$ истинна ровно на одном входном наборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Ex. 4. В графе на 100 вершинах, каждая из которых имеет степень 3, есть ровно 600 путей длины 3. Сколько в этом графе циклов длины 3?

Ex. 5. Верно ли, что если каждая вершина графа имеет степень 1 или 2 и в графе нет циклов нечетной длины, то в графе есть совершенное паросочетание?

Ex. 6. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$?

Ex. 7. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Ex. 8. Найдите все графы, в которых каждая пара ребер имеет общий конец.

Ex. 9. Постройте такую логическую связку (булеву функцию от двух переменных), что любая булева функция выразима в виде формулы с этой связкой.

Ex. 10. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ», так чтобы две буквы «О» не стояли рядом?

Ex. 11. Постройте биекцию между конечными подмножествами множества положительных целых чисел и конечными строго возрастающими последовательностями положительных целых чисел.

Ex. 12. Чего больше, разбиений 20-элементного множества на 6 (непустых) подмножеств или его подмножеств размера 5?

Ex. 13. Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ возвращает 1 тогда и только тогда, когда хотя бы две переменных из трех равны 1. Выразите $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ через булеву формулу.

Ex. 14. Какое из чисел больше $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$? Здесь F_n — n-е число Фибоначчи.

Ex. 15. Найдите $R \circ R$, где $R(x, y)$ — бинарное отношение на множестве $\mathbb{R}$, означающее, что **a**)$y = x + 1$; **b**)$x + y = 1$.

Ex. 16. Найдите значение булевой функции при всех значениях переменных:

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_2 \wedge x_3) \oplus (x_3 \wedge x_1).$$

Ex. 17 (А. Федоров)**.** Докажите, что любое тождество вида $A = B$, где A и B — булевы формулы со связками $\wedge$, $\vee$, $\neg$, останется верным, если в нем все конъюнкции заменить на дизъюнкции, а дизъюнкции заменить на конъюнкции.

Ex. 18 (А. Оверчук)**.** Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком — «стеной» — таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды — Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним «стена», то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения.

Ex. 19 (Д. Шаймарданова)**.** Об отображениях (всюду определенных функциях) f, g из множества A в себя известно, что $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_A$. Верно ли, что f — биекция? Множество A не обязательно конечное.

Ex. 20 (Р. Ахметжанов)**.** Известна производящая функция $g(x)$ для последовательности $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ частичных сумм последовательности $\{a_k\}$. Выразите через нее производящую функцию для последовательности $\{a_k\}$.