

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas



**ABORDAGEM DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

Uma aplicação no ensino fundamental

JOSIANE MARQUES MOTTA



UFSC-BU

FLORIANÓPOLIS - 2000

JOSIANE MARQUES MOTTA

**ABORDAGEM DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS**

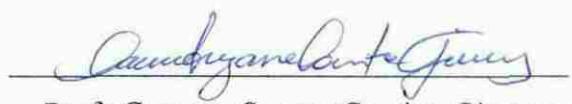
Uma aplicação no ensino fundamental

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito à obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Professor Msc. Nereu Estanislau Burin

FLORIANÓPLIS – SC
Dezembro de 2000

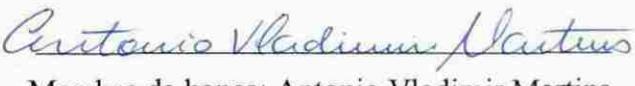
Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 23/SCG/00.


Prof. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:


Orientador: Nereu Estanislau Burin


Membro da banca: Jane de Oliveira Crippa


Membro da banca: Antonio Vladimir Martins

Aos meus pais **Júlia** e **Ascedir**
constantes no apoio, na coragem e no amor.

Ao **Henry**,
por seu carinho e paciência nestes últimos meses de curso.

*“Ninguém educa ninguém, como
tampouco ninguém educa a si mesmo:
os homens se educam em comunhão,
mediatizados pelo mundo”*

(Paulo Freire)

SUMÁRIO

Títulos	Páginas
Introdução	02
CAPÍTULO I	
Um pouco de história	03
Grécia.....	04
Índia.....	06
Demonstração da fórmula de Bhaskara.....	08
Confronto entre a Matemática Grega e a Hindu.....	12
Arábia	13
Egito.....	16
Mesopotâmia	16
China.....	17
Europa.....	18
CAPÍTULO II	
Avaliação dos livros didáticos	23
Introdução às Equações do 2º grau	24
Comentários.....	30
Resolução das equações incompletas	31
Comentários.....	37
Resolução da Equação completa	38
Comentários.....	41
CAPÍTULO III	
Resolução de problemas e aprendizagem matemática	42
Como resolver um problema	49
Problema 1	50
Problema 2	53
Problema 3	55
Problema 4	56
Problema 5	57
Problema 6	58
Classificação geral dos erros	61
Conclusão	62
Referências bibliográficas	64

INTRODUÇÃO

Para que serve? Essa foi a pergunta que um aluno da 8^a série do ensino fundamental fez quando viu pela primeira vez a equação do 2º grau. Da situação vivenciada, surgiu a necessidade de buscar estabelecer nas aulas, uma relação com o conteúdo e o mundo real.

Com essa preocupação e posteriormente, através de conversas com professores, nasceu a idéia de escrever sobre Equações do 2º grau. Como diria o Professor Elon Lages Lima: “Mesmo um tema paleontológico como a equação do 2º grau admite variações.”

O trabalho mostra-se de forma simples, contém a história das equações do 2º grau, inclusive com fatos “românticos”, como por exemplo a história sobre o nome que Bhaskara deu ao seu livro em homenagem à sua filha.

Num segundo momento, o trabalho apresenta o conteúdo de três livros didáticos escolhidos entre as redes pública e particular de Florianópolis, visando comparar as três obras.

E, finalmente, o objetivo maior do trabalho, que apresenta a experiência com alunos da 8^a série, enfatizando a ‘Resolução de Problemas’. Os problemas e suas resoluções constam do trabalho, bem como um apanhado dos resultados obtidos através deste estudo da equação do 2º grau.

CAPÍTULO I

UM POUCO DE HISTÓRIA

As equações quadráticas foram estudadas ao longo da história, em países e épocas diferentes. “O desenvolvimento da matemática algébrica, caracterizou-se pela invenção gradual do simbolismo e pela resolução de equações”¹. Vários métodos de resolução de equações surgiram, alguns se destacaram e outros são utilizados atualmente com maior freqüência. Neste primeiro capítulo, vamos ver um pouco da história, destacando alguns métodos de resolução, curiosidades e fatos interessantes que podem ser apresentados em sala de aula.

Antes de entrarmos no mérito de cada descoberta, separadas por região ou país, convém mencionar que a palavra “álgebra” é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr* e que foi utilizada no título de um livro, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá, por volta do ano 825, por Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi. Este tratado é geralmente citado, abreviadamente como *Al-jabr*. A tradução literal do título completo do livro é “ciência da restauração (ou reunião) e redução” que, segundo Carl Boyer, poderia também ser “a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação” e “o cancelamento de termos semelhantes em membros opostos da equação”. Assim, resumidamente, talvez a tradução mais simples fosse “a ciência das equações”.²

Se um estudante do tempo de Diofanto defrontasse com uma expressão da forma, hoje comum, ilustrada por $x^2 - 7x + 12 = 0$, ficaria inteiramente desconcertado. Este estilo simbólico moderno é de invenção relativamente recente.³

Não há um consenso sobre o “tempo de Diofanto”. Alguns especialistas acreditam que ele viveu no século III d.C., outros o situam no século I d.C. Sabe-se, todavia, que era um matemático grego que trabalhou na universidade de Alexandria, Egito, como “residente”, e que iniciou o uso de um simbolismo algébrico que acabou por suplantar a escrita da álgebra num estilo verbal chamado “álgebra retórica”.⁴ O original da obra de Diofanto, a *Arithmetica*, em treze volumes, perdeu-se, e a cópia mais antiga que se conhece de qualquer das partes do trabalho foi feita mais de um milênio depois de ser escrita.⁵

¹ BAUMGART, Tópicos da História da Matemática, p.1.

² BAUMGART, Tópicos da História da Matemática, p.1.

³ BAUMGART, Tópicos da História da Matemática, p. 30.

⁴ BAUMGART, Tópicos da História da Matemática, p. 30.

⁵ BAUMGART, Tópicos da História da Matemática, p. 31.

Eis um exemplo de um dos mais antigos manuscritos, seguido de uma interpretação na forma moderna e uma explanação do grego:

$K^r\beta$ $\varsigma\eta\Lambda\Delta^r\varepsilon$ $\overset{\circ}{M}\delta$ $\varepsilon\sigma\tau\iota\upsilon$ $\mu\delta;$

isto é

$$x^3 - x^2 \cdot 5 - 1 \cdot . + 4 = 44$$

ou

$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$$

K^r é uma abreviação de κΥΒΟΣ (*KUBOS*, “cubo”).

ς é uma abreviação de αριθμος (*arithmos*, “número”).

Λ é uma combinação de Λ e I em ΛΕΙΨΙΣ (*LEIPSIS*, “menos”).

Δ^r é uma abreviação de (*DUNAMIS*, “potência”).

$\overset{\circ}{M}$ é uma abreviação de ΜΟΝΑΔΕΣ (*MONADES*, “unidades”).

GRÉCIA

Em sua álgebra geométrica, os gregos se utilizaram de dois métodos principais para resolver certas equações simples - o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Há indícios de que ambos esses métodos se originaram com os pitagóricos.⁶

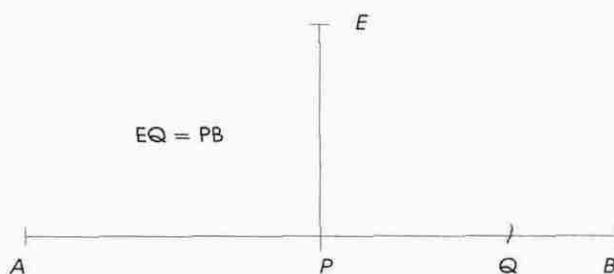
Acredita-se que a dificuldade com o tratamento dos números racionais e irracionais, com a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela Geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais a solução de equações do 2º grau.⁷ Lembrando da dificuldade que os matemáticos gregos tinham com números como $\sqrt{2}$, chegando a afirmar que a diagonal de um quadrado unitário é incomensurável com o lado.

⁶ EVES, Introdução à História da Matemática, p. 110

⁷ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº 43, p. 21.

Um dos processos de que se tem notícia, usado, por exemplo, na equação que hoje se escreve como $x^2 - 10x + 9 = 0$ era o seguinte:

Trace o segmento AB = 10. Por P, ponto médio de AB, levante o segmento perpendicular PE = 3 (igual à raiz quadrada de 9) e, com centro em E e raio PB, trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q. A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ.



Com efeito, por construção, a medida do segmento \overline{AQ} será $\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (\sqrt{9})^2}$ e corresponde à raiz 9 da equação.⁸

Para mostrar a identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, por exemplo, representavam $(a + b)^2$ como a área de um quadrado de lados $(a + b)$.

The diagram illustrates the algebraic identity $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ through geometric representation. On the left, a large square of side length $a+b$ is shown. It is divided into four regions: a central square of side a (shaded blue), a top-right rectangle of dimensions $a \times b$ (shaded green), a bottom-right rectangle of dimensions $a \times b$ (white), and a top-left rectangle of dimensions $b \times b$ (shaded grey). The total area of the large square is the sum of the areas of these four regions: $a^2 + ab + ab + b^2$, which simplifies to $a^2 + 2ab + b^2$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Apesar de pouco se conhecer a respeito da vida de Diofanto há um texto extraído da *Anthologia palatina*, uma espécie de quebra-cabeças algébrico, que se refere a quantos anos viveu Diofanto.⁹

Aqui jaz Diofanto. Maravilhosa habilidade-
Pela arte da álgebra a lápide nos diz sua idade:

⁸ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº 43, p. 21.

“Deus lhe deu um sexto da vida como infante,
 Um duodécimo mais como jovem, de barba abundante;
 E ainda uma sétima parte antes do casamento;
 Em cinco anos nasce-lhe vigoroso rebento
 Lástima! O filho do mestre e sábio do mundo se vai
 Morreu quando da metade da idade final do pai
 Quatro anos mais de estudos consolam-no do pesar;
 Para então, deixando a terra, também ele alívio encontrar”.

Quantos anos Diofanto viveu?

ÍNDIA

Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra.

Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos por falsa posição. Outro método de resolução preferido era o de inversão no qual se trabalha pra trás, a partir dos dados. Considere, por exemplo, o seguinte problema que faz parte do texto de Lilavati de Bhaskara:¹⁰

“ Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendéis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de 3/4 do produto, depois dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2 ?”

Pelo método da inversão começamos com o número 2 e operamos para trás. Assim, $[(2)(10) - 8]^2 + 52 = 196$, $\sqrt{196} = 14$, $(14)(3/2)(7)(4/7)/3 = 28$, que é a resposta. Observemos que onde a instrução do problema manda que se divida por 10, multiplicamos por 10; onde a instrução é para adicionar 8, subtraímos 8; onde manda que se extraia a raiz quadrada, elevamos ao quadrado, e assim por diante. É a substituição de cada operação pela sua inversa que responde pelo nome inversão. É exatamente o que faríamos se tivéssemos de resolver o problema por métodos modernos. Assim, representando-se por x o número procurado, temos¹¹

⁹ BAUMGART, Tópicos da História da Matemática, p. 9.

¹⁰ EVES, Introdução à História da Matemática, p.255.

$$\sqrt{\frac{\left[\frac{(2/3)(7/4)(3x)}{7}\right]^2 - 52 + 8}{10}} = 2$$

para resolver essa equação multiplicamos ambos os membros por 10, depois subtraímos 8 de cada membro, depois elevamos ao quadrado cada membro e assim por diante. Esse problema ilustra também a prática hindu de revestir problemas aritméticos de trajes poéticos. Isso ocorria porque os textos escolares eram escritos em versos e porque os problemas eram freqüentemente usados para entretenimento social.

Grande parte do conhecimento da aritmética hindu provém do texto *Lilavati* de Bhaskara. Conta-se sobre esse trabalho uma história romântica. Segundo o relato, os astros pressagiam infortúnios terríveis para Lilavati, a filha única de Bhaskara, se ela não se casasse numa certa hora de um certo dia propício. Chegado o dia, a ansiosa noiva debruçou-se sobre um relógio de água para aguardar esse momento. Mas eis que cai uma pérola de seu cabelo, sem que se notasse, obstruindo o fluxo de água. E quando o acidente foi percebido o momento propício já tinha passado... Para consolar a infeliz jovem, Bhaskara deu ao seu livro o nome da filha.¹²

Os hindus aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com respostas reais) tem duas raízes formais. Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar do completamento de quadrados. Bhaskara forneceu as duas seguintes identidades notáveis:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{(a + \sqrt{a^2 - b})}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a - \sqrt{a^2 - b})}{2}}.$$

às vezes empregadas em nossos textos de álgebra para encontrar a raiz quadrada de um número irracional. No Livro X dos Elementos de Euclides também se encontram essas identidades, mas numa linguagem intrincada, difícil de entender.

Portanto, da Matemática hindu temos no Brasil o conhecimento da regra que originou a fórmula de Bhaskara.

¹¹ EVES, Introdução à História da Matemática, p.256.

¹² EVES, Introdução à História da Matemática, p.256.

Bhaskara apresentou a solução de equações do 2º grau ao resolver problemas de ordem comercial e financeira. Um destes problemas está aqui apresentado com linguagem de hoje:¹³

Um capital de 100 foi emprestado a uma certa taxa de juro ao ano. Após 1 ano, o capital foi retirado e o juro obtido foi aplicado durante mais 1 ano. Se o juro total foi de 75, qual foi a taxa ao ano?

Sendo essa taxa de $x\%$, tem-se que o juro no 1º ano será de x e no 2º ano será de $x \cdot (x/100)$, ou seja, a equação em linguagem algébrica hoje seria:

$$x + x \cdot (x/100) = 75 \text{ ou } x^2 + 100x - 7500 = 0.$$

E a solução era enunciada também em palavras, o que seria, na linguagem atual, algo como:

Eleve a metade do capital (coeficiente de x) ao quadrado, acrescente o resultado ao produto dos juros totais (termo independente) pelo capital, extraia a raiz quadrada e diminua a metade do capital, o que leva à solução procurada

$$x = \sqrt{50^2 + 75 \times 100} - 50 = 50$$

A FÓRMULA DE BHASKARA

A fórmula que fornece as soluções de uma equação quadrática é atribuída ao matemático hindu Bhaskara (séc. XII).¹⁴

Embora seja bastante conhecida sua dedução, vamos obter a fórmula de Bhaskara a partir de algumas transformações algébricas, da equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Na verdade, vamos completar o quadrado obtendo um trinômio quadrado perfeito.

Se $ax^2 + bx + c$ for um quadrado perfeito, basta fatorá-lo e isolar a incógnita.

¹³ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº43, p. 21.

¹⁴ PASTOR, Revista do Professor de Matemática, nº 6, p. 37.

Supondo o caso mais geral, somemos $-c$ a ambos os membros da equação, pois com c no primeiro membro não podemos obter uma expressão do tipo $\alpha^2x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$ (quadrado perfeito), para fatorarmos como $(\alpha x + \beta)^2$.

Obtemos $ax^2 + bx = -c$ e multiplicamos tudo por $4a$, então: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$.

Assim, podemos extrair (posteriormente) a raiz quadrada do 1º termo do 1º membro, necessária para obtermos o binômio da fatoração.

Notemos que no 1º membro precisamos de mais um termo (procuramos um trinômio) para continuarmos as transformações.

Este termo deve ser tal que, extraindo-se sua raiz quadrada e multiplicando-se o resultado pela raiz quadrada de $4a^2x^2$, obtenha-se um número igual à metade do termo $4abx$.

Somemos, então b^2 a ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Chegamos, afinal, a um quadrado perfeito no 1º membro.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Como $(2ax + b)^2 \geq 0$ a resolução de $ax^2 + bx + c = 0$ em IR depende do sinal de $b^2 - 4ac$, chamado, por isso, de discriminante da equação do 2º grau.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, vem:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

dai

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

e

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{que é a fórmula de Bhaskara.}$$

Demonstração da fórmula de Bhaskara através da geometria:

Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, vamos utilizar o processo do trinômio quadrado perfeito para obter a fórmula de Bhaskara:

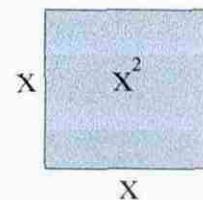
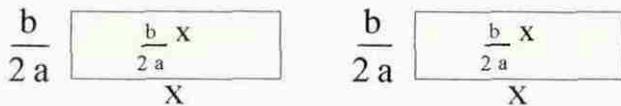
1º – dividir a equação por a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \xrightarrow{\text{---}} \quad \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

2º – isolar o termo independente;

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \xrightarrow{\text{---}} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Vamos compor um quadrado com estas figuras, acrescentando a figura que for necessária:

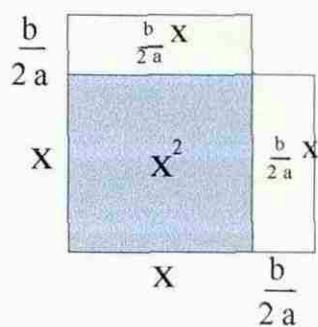


$$\frac{b}{2a} \quad \boxed{\frac{b}{2a}x} \quad \frac{b}{2a} \quad \boxed{\frac{b}{2a}x}$$

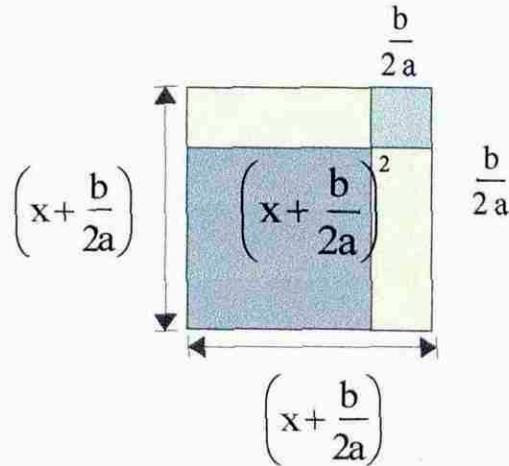
$$\text{área} = x^2 + \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b}{2a} \cdot x$$

$$\text{área} = x^2 + \frac{2b}{2a}x$$

$$\text{área} = x^2 + \frac{b}{a}x \quad \xrightarrow{\text{---}} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$



Acrescentando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$, obteremos um trinômio quadrado perfeito:



$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= +\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{ou} \\ x + \frac{b}{2a} &= -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \end{aligned}$$

Portanto, teremos para x:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{---} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{---} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em geral, indicamos os valores para x numa só fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Confronto entre a Matemática Grega e a Hindu

Há muitas diferenças entre a matemática grega e a hindu. Em primeiro lugar os hindus que se dedicavam à matemática acima de tudo consideravam-se a si mesmos astrônomos; assim, a matemática hindu era em grande escala uma serva da astronomia. Com os gregos a matemática alcançou uma existência independente, sendo estudada por si própria. Como resultado do sistema de castas¹⁵, a matemática na Índia era cultivada quase que exclusivamente por sacerdotes; na Grécia o estudo da matemática estava aberto a todos os que se interessavam pelo assunto. Os hindus eram hábeis calculadores mas geômetras mediocres; os gregos eram excelentes geômetras mas pouco se interessavam por trabalhos computacionais. Mesmo a trigonometria grega era geométrica. Os hindus escreviam em versos e muitas vezes revestiam seus trabalhos de uma linguagem obscura e mística; os gregos buscavam a clareza e a organização lógica em suas exposições. A matemática hindu era grandemente empírica, raramente oferecendo uma demonstração ou uma dedução; a característica mais importante da matemática grega era sua insistência com as demonstrações rigorosas. A qualidade da matemática hindu era muito irregular, encontrando-se com freqüência, lado a lado, a de bom nível e a de baixo nível; os gregos pareciam ter um sexto sentido que fazia com que distinguissem a boa da má qualidade e a agarrar-se tão-somente àquela. Como observou o escritor muçulmano al-Biruni em seu conhecido trabalho *Índia*, ao contrário da alta qualidade uniforme da matemática grega, a matemática hindu era “mistura de conchas com pérolas e tâmaras azedas...de cristais caros e seixos comuns”.¹⁶

¹⁵ Camada social hereditária, cujos membros são da mesma raça, etnia, profissão ou religião, e se casam entre si.

¹⁶ EVES, Introdução à História da Matemática, p.259.

Numerosos contrastes entre a matemática grega e a hindu se perpetuaram até hoje nas diferenças entre muitos de nossos textos de geometria elementar e outros tantos de álgebra: enquanto os primeiros tem um caráter dedutivo, estes últimos não raro são apenas coleções de regras.¹⁷

ARÁBIA

Pouco se sabe sobre a história árabe antes do tempo de Maomé (570-632). Maomé teve papel fundamental na formação de uma poderosa nação, que acabou se estendendo a partes da Índia, Pérsia, Mesopotâmia, Norte da África e Espanha. Bagdá era o centro intelectual do Oriente e Córdoba, na Espanha, do Ocidente.¹⁸

Com a conquista de alguns territórios, os árabes obtiveram os escritos científicos de gregos e hindus, que traduziram para o árabe preservando-os assim ao longo da Idade Média da Europa. Uma das suas aquisições mais importantes foi o sistema de numeração hindu (muitas vezes chamado arábico).¹⁹

A álgebra árabe tem suas origens na álgebra dos hindus e dos gregos. Os árabes tratavam a álgebra numericamente, como os hindus, e geometricamente, como os gregos.

O maior escritor árabe no campo da matemática foi, provavelmente Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi. No *Al-jabr*²⁰, al-Khowarizmi apresenta a equação polinomial do 2º grau, bem como sua resolução, de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada *método de completar quadrados*, método geométrico distinto daquele utilizado pelos gregos. Em muitos casos apresentava, tal como seus predecessores, somente uma raiz (positiva).²¹

O exemplo seguinte mostra, nas próprias palavras de al-Khowarizmi , como ele achava a raiz positiva da equação quadrática que escreveríamos como $x^2 + 10x = 39$. A Segunda coluna mostra o mesmo procedimento com valores numéricos e a terceira fornece uma generalização para $x^2 + px = q$.²²

¹⁷ EVES, Introdução à História da Matemática, p.259.

¹⁸ BAUMGART, Tópicos de História da Matemática, p. 75.

¹⁹ EVES, Introdução à História da Matemática, p.260.

²⁰ Palavra árabe que foi utilizada no título do livro, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá, por volta do ano 825, por al-Khowarizmi.

²¹ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº 43, p.22.

²² BAUMGART, Tópicos de História da Matemática, p.77.

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + px = q$$

Reparta ao meio o número de raízes, o que no presente exemplo é cinco.

$$\frac{1}{2}(10) = 5$$

$$\frac{p}{2}$$

Este você multiplica por ele mesmo; o produto é vinte e cinco.

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Some isto a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro.

$$25 + 39 = 64$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

Agora tome a raiz disto, que é oito,

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

e subtraia metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três.

$$8 - \frac{10}{2} = 3$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = x$$

Esta é a raiz do quadrado que você procura; o quadrado mesmo é nove.

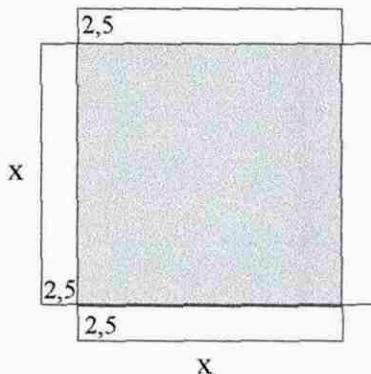
$$x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

O método usado é essencialmente o atual método de “completar quadrados”.

Vamos ver como se justifica geometricamente, por exemplo, a solução positiva de $x^2 + 10x = 39$, que é 3, encontrada algebricamente.²³

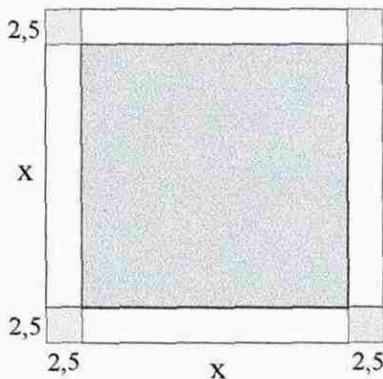
Tomemos um quadrado de lado x para representar o termo x^2 , e quatro retângulos de comprimento x e largura 2,5, para representarem o termo $10x$.

²³ PASTOR, Revista do Professor de Matemática, n° 6, p.37.



$$\text{área} = x^2 + 4(2,5x) = x^2 + 10x$$

Dessa forma, obtemos uma figura com área igual a 39, já que $x^2 + 10x = 39$. Para completarmos o quadrado, devemos adicionar mais quatro quadrados de lado 2,5.



$$\text{área} = 39 + 4(6,25) = 39 + 25 = 64$$

Obtemos, assim, um quadrado de área 64. Portanto, o lado do quadrado maior é 8 e $x = 8 - 2(2,5) = 3$.

Foi de importância fundamental para a conservação de grande parte da cultura mundial a maneira como os árabes se apoderaram do saber grego e hindu. Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos e muitos deles tornaram-se patronos da cultura e convidaram intelectuais eminentes para se instalarem junto às suas cortes.²⁴ Se, por um lado, os árabes foram responsáveis por fazer desaparecer grande parte do conhecimento ocidental, por outro lado contribuíram para sua preservação. O extermínio se deu quando,

²⁴ EVES, Introdução à História da Matemática, p. 260.

como conta a História, em 641 d.C. Omar mandou que fosse destruída a Biblioteca de Alexandria. E a preservação foi devida à atuação de três califas, considerados os grande patronos da cultura abássida: al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum, que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, *O Almagesto* de Ptolomeu e *Os Elementos de Euclides*.

EGITO

O sistema de numeração egípcio, relativamente primitivo em comparação com o dos babilônios, ajuda a explicar a falta de sofisticação da álgebra egípcia. Os matemáticos europeus do século XVI tiveram de estender a noção indo-árabica de número antes de poderem avançar significativamente além dos resultados babilônicos de resolução de equações.²⁵

Não são conhecidos registros do tratamento da equação polinomial do 2º grau pelos egípcios, mas os historiadores matemáticos suspeitam que eles dominavam alguma técnica de resolução dessas equações. Essa crença se baseia no fato de ter sido encontrada no papiro de Kahun²⁶ uma resolução da equação hoje escrita como $x^2 + y^2 = k$, k um número positivo, pelo método da falsa posição, desenvolvido pelos egípcios para resolver equações do 1º grau.²⁷

MESOPOTÂMIA

A solução de uma equação quadrática com três termos parece ter sido demasiado difícil para egípcios, mas Neugebauer em 1930 revelou que tais equações tinham sido tratadas eficientemente pelos babilônios em alguns dos mais antigos textos de problemas. Tal registro da resolução de problemas envolvendo o que hoje chamamos de equação do 2º grau data de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábula de argila através de palavras. A solução era apresentada como uma “receita matemática” e fornecia somente uma raiz

²⁵ BAUMGART, Tópicos de História da Matemática, p.6.

²⁶ Papiro da 12ª dinastia egípcia (1991-1786 a C.), atualmente em Londres.

²⁷ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº 43, p.20.

positiva. Os babilônios enunciavam a equação em sua resolução em palavras, mais ou menos do seguinte modo:

*Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?
(o que hoje se escreve: $x^2 - x = 870$). E a “receita” era:*

Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, $(0,5 \times 0,5 = 0,25)$. Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado $(870,25 = 29,5^2)$ cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30) o lado do quadrado procurado.

Embora os motivos que impulsionaram os babilônios no ramo da álgebra, sejam um pouco obscuros, considerando que a matemática da época era puramente utilitária e, no entanto, é difícil estabelecer uma relação entre a situação da vida real na Babilônia antiga com a sua matemática, ainda assim, foram admiráveis as suas realizações.²⁸

CHINA

Em 1303, o grande matemático chinês daquela época, Chu Shih-chieh, apresenta na obra *Ssu-yüan yú-chien* (Preciosos espelho dos quatro elementos) uma técnica especial para a resolução da equação polinomial do 2º grau, baseada em aproximações sucessivas, de grande precisão, denominada método *fan-fan*, que foi apresentado de forma retórica e chega a uma única raiz (positiva).

Em 1819, o matemático inglês William George Horner reivindica a descoberta do método *fan-fan*, rebatizado de método de Horner.

Vejamos no que consistia o método *fan-fan*: para encontrar, por exemplo, a solução da equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, ele partia de uma solução aproximada, no caso, $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre 19 e 20), e usava o *fan-fan*, no caso, a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y , cuja solução está entre 0 e 1. Fazendo $y^2 = y$, obtinha o valor das duas primeiras casas decimais: $y = 143/291 = 0,49$. Como $y = x - 19$ então $x = 0,49 + 19$, que é uma aproximação da raiz positiva. A idéia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse. No caso, fazendo $z = x - 19,49$ obtinha-se a equação em z , $z^2 + 290,98z = 66$ e, daí:

²⁸ BOYER, História da Matemática, p.23.

$z = 0,66/291,98 = 0,0022$, o que já confirmava as 2 casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são 19,49226).²⁹

EUROPA

Embora ainda não se usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo as atuais equações do 2º grau resumia-se na receita usada por Bhaskara. Do século XV ao XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representação e resolução da equação polinomial do 2º grau.³⁰

MÉTODO DE VIÈTE PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU:

O método fornece as soluções da equação sem que se aplique uma fórmula, ou então, se aplicado à equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, fornecerá a fórmula de Bhaskara.

Professores, apoiando-se nos livros didáticos atuais, ou dão a fórmula de Bhaskara como receita, sem nenhuma demonstração quanto à sua validade, ou a deduzem pelo processo de “completar quadrados”. O método de Viète oferece uma outra alternativa.³¹

O Método

Vamos descrever o método de Viète para a resolução de equações do 2º grau.

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$\begin{aligned} a(u+v)^2 + b(u+v) + c &= 0 \\ a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c &= 0. \end{aligned}$$

E reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v , obtemos:

²⁹ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº 43, p.23.

³⁰ FRAGOSO, Revista do Professor de Matemática, nº 43, p. 23.

³¹ AMARAL, Revista do Professor de Matemática, nº 13, p. 18.

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Viète transformou essa equação numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de v , isto é, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

e chegou, após simples manipulações, $av^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

$$\text{Se } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ então } v = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logo, $x = u + v = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que é a fórmula de Bhaskara.

Aplicação

Vamos então resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pelo método de Viète. Fazendo $x = u + v$ e substituindo na equação dada, temos:

$$(u + v)^2 - 3(u + v) + 2 = 0, \text{ que é equivalente a}$$

$$v^2 + (2u - 3)v + u^2 - 3u + 2 = 0.$$

Escolhendo $u = \frac{3}{2}$ (para anular o coeficiente de v) virá:

$$v^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0 \text{ ou } v^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\text{Daí, } v = \pm \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x = u + v = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

As soluções da equação são **2** e **1**.

O método de Viète possibilita uma demonstração da fórmula de Bhaskara, de fácil compreensão e sem grandes artifícios. É possível que tal método seja utilizado como acessório do conteúdo normalmente dado na abordagem de equações do 2º grau.³²

Quem foi...

François Viète,

foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou-se membro do parlamento da Bretanha. Não era, portanto, um matemático por profissão; porém o seu lazer era dedicado à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas sem dúvida, foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das idéias modernas. Em sua obra foi encontrada, pela primeira vez, em Álgebra, uma distinção clara entre o conceito de *parâmetro* e a idéia de uma *quantidade desconhecida* (incógnita). Viète utilizou uma vogal para representar uma grandeza ou um número supostamente conhecido ou dado. Na época de Viète a álgebra árabe já havia sido aperfeiçoada, tanto pela resolução das equações cúbicas e quárticas como por um uso parcial de símbolos. Viète teve uma participação muito efetiva na renovação do simbolismo e na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Viète desenvolveu novos métodos de solução, percebeu algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, embora seu trabalho tivesse ficado tolhido por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativas.³³

Um outro método conhecido na Europa, foi desenvolvido pelo francês *René Descartes*:

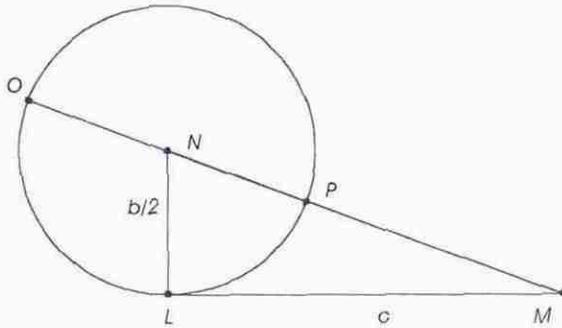
³² AMARAL, Revista do Professor de Matemática, nº 13, p. 20.

³³ AMARAL, Revista do Professor de Matemática, nº 13, p. 18.

Em 1637, o francês René Descartes, além de possuir notação que diferia da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da solução positiva. No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O discurso do método*, Descartes resolve equações do tipo:

$x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$ sempre com b e c positivos. Por exemplo, para resolver equações do 1º tipo, $x^2 = bx + c^2$, ele usou o seguinte método:

Traça-se um segmento \overline{LM} , de comprimento c , e, em L, levanta-se um segmento \overline{NL} igual a $b/2$ e perpendicular a \overline{LM} . Com centro em N, construímos um círculo de raio $b/2$ e traçamos a reta por M e N que corta o círculo em O e P. Então a raiz procurada é o segmento \overline{OM} .



Com efeito, no triângulo retângulo MLN, se $OM = x$, tem-se:

$$(x - b/2)^2 = (b/2)^2 + c^2 \text{ e daí: } x^2 - bx = c^2.$$

Hoje, sabemos que a segunda raiz é $-\overline{PM}$, mas Descartes não considerava a raiz negativa.

Quem foi....

René Descartes,

nasceu perto de Tours em 1596. Aos oito anos de idade foi enviado a uma escola jesuíta em La Flèche. Foi então que desenvolveu (de início devido à sua saúde frágil) o hábito que o acompanhou por toda a vida de ficar até tarde na cama de manhã. Posteriormente Descartes consideraria essas horas matinais de descanso como seus períodos de tempos mais produtivos. Em 1612 deixou a escola e foi para Paris onde, logo depois, passou a dedicar

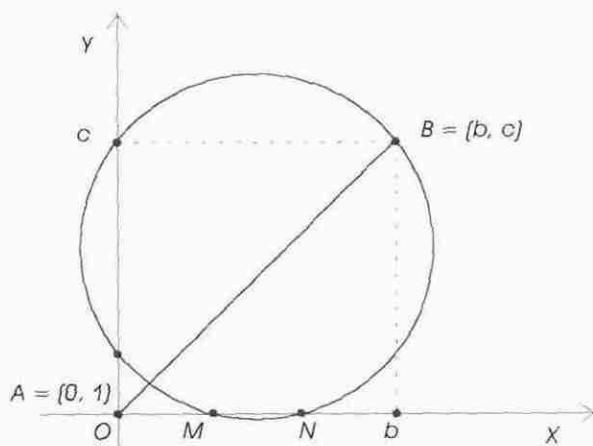
parte do seu tempo ao estudo da matemática. Em 1617, juntando-se ao exército do príncipe Maurício de Orange, iniciou uma carreira militar de vários anos. Depois de abandonar a vida militar passou quatro ou cinco anos viajando pela Alemanha, Dinamarca, Holanda, Suíça e Itália. Retornando a Paris, onde ficaria uns dois anos, continuou os seus estudos matemáticos e suas contemplações filosóficas e, por algum tempo, dedicou-se a construir instrumentos ópticos. Depois disso resolveu mudar para a Holanda, então no auge de seu poder, onde viveu cerca de vinte anos, consagrando-se à filosofia, à matemática e à ciência. Em 1649, relutantemente, foi para a Suécia a convite da rainha Cristina. Poucos meses mais tarde ele contraiu uma infecção pulmonar, vindo a morrer em Estocolmo no início de 1650.³⁴

No século XVIII, o inglês Sir John Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, apresenta o seguinte procedimento:

É dada uma equação quadrática $x^2 - bx + c = 0$. Sobre um sistema cartesiano retangular de referência, marque os pontos $A = (0, 1)$ e $B = (b, c)$. Trace o círculo de diâmetro AB . As abscissas dos pontos em que esse círculo cortar o eixo x, se cortar, são as raízes da equação quadrática dada. $M = (x_1, 0)$ e $N = (x_2, 0)$

Com efeito, a equação do círculo traçado é:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left[y - \left(\frac{c+1}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{c+1}{2}\right) - 1\right]^2 \text{ e, daí, quando } y = 0, \text{ tem-se } x^2 - bx = -c.$$



³⁴ EVES, Introdução à História da Matemática, p.383.

CAPÍTULO II

AVALIAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Conhecer um pouco da realidade de nossas escolas é também conhecer os livros didáticos adotados. Foram selecionados três livros de escolas da rede pública e particular. Os livros escolhidos foram:

Livro 1: A Conquista da Matemática – Teoria e Aplicação – Autores: José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr.
Adotado pelos Colégios Bardal e Getúlio Vargas.

Livro 2: Matemática – 8^a série - Autores: Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis
Adotado pelo Colégio Aníbal Nunes Pires.

Livro 3: Matemática 8^a série – Idéias e Desafios – Autores: Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga.
Adotado pelo Instituto Estadual de Educação e Colégio Catarinense.

Vamos procurar destacar alguns pontos chaves, como por exemplo, a introdução do conteúdo *Equações do 2º grau*, procurando chamar a atenção para o modo como o conteúdo foi apresentado. Os textos que serão apresentados a seguir não correspondem à totalidade do conteúdo encontrado no livro original, mesmo porque o trabalho se tornaria por demais extenso.

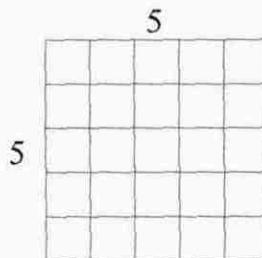
Livro 1:**Introdução****Equações do 2º grau**

As referências mais antigas sobre a resolução de problemas do 2º grau foram encontradas em textos dos babilônios, escritos cerca de 4000 anos atrás. Um dos problemas que mais apareciam nesses escritos tratava da determinação de dois números, quando era conhecida a soma e o produto desses dois números. Veja como eles tratavam e resolviam o problema abaixo.

A soma de dois números é 10 e o produto entre eles é 24. Quais são esses dois números?

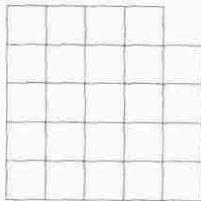
Resolução:

- Se os dois números fossem iguais, cada um deles valeria 5; logo, o produto entre eles seria 5×5 ou 5^2 ou 25, o que os levaria a fazer a seguinte figura:

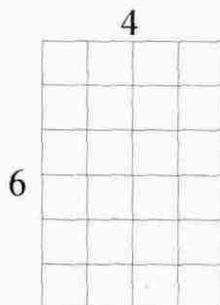


Essa figura representa um quadrado com 5 unidades de comprimento de lado, o que corresponde a uma área de 25 unidades de superfície \square .

- Como o produto dos números é 24, a figura desenhada tem uma unidade de superfície a mais, a qual deve ser eliminada conforme a figura:



- A figura obtida teria a mesma área da figura seguinte:



- Considerando as medidas dos lados dessa última figura, notamos que:

$$6 + 4 = 10$$

$$6 \times 4 = 24$$

Logo, os números procurados são 6 e 4.

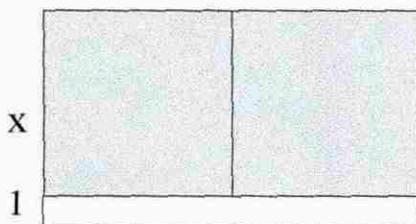
Esse tratamento geométrico dado aos problemas do 2º grau levou, mais tarde, os gregos e, posteriormente, os árabes a darem um procedimento mais metódico à resolução de tais problemas: surge, então, a álgebra geométrica e o seu desenvolvimento leva um matemático árabe chamado Al-Khowarizmi a estabelecer o completamento de quadrados para a resolução dos problemas do 2º grau.

Foi, porém, um matemático hindu chamado Bhaskara que apresentou, no século XII, um processo algébrico que permitia resolver qualquer equação do 2º grau, chegando a uma fórmula que ficou conhecida como **fórmula de Bhaskara ou fórmula resolutiva**.

Equação do 2º grau com uma incógnita

Consideremos a seguinte situação:

A figura seguinte representa parte de um escritório. As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m^2 de área. Cada sala tem x metros de lado e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida x de cada sala quadrada?



De acordo com os dados do problema, podemos escrever a equação:

$$\underline{2x^2} + \underline{2x} = 40$$

↓ área do corredor
área das duas salas

Equações desse tipo são denominadas **equações do 2º grau com uma incógnita**.

Vem, então, a definição:

Denomina-se **equação do 2º grau** na incógnita x toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b, c são números reais e $a \neq 0$.

Nas equações do 2º grau com uma incógnita, os números reais expressos por a, b, c são chamados **coeficientes** da equação.

Livro 2:**Introdução:****Equações do 2º grau e Sistemas de Equações**

Essas sentenças são equações:

$$4x + 3 = 7 \quad \frac{5y^2}{3} - \frac{12}{5} = 4y$$

- Elas têm um sinal de igualdade;
- Elas têm uma incógnita.

Equações são úteis para solucionar problemas em que se procura um número desconhecido. Por isso, é importante saber resolver equações.

E o que significa resolver uma equação? Significa achar o valor da incógnita, ou seja, achar o número representado pela letra x (ou y ou s , etc.).

Para resolver equações, podemos também efetuar operações iguais nos dois lados da igualdade:

Observe com atenção a resolução desta equação de 2º grau:

$$(-7) \quad 3x^2 + 7 = 82 \quad (-7)$$

$$(\div 3) \quad 3x^2 = 75 \quad (\div 3)$$

$$x^2 = 25$$

Há dois números que, elevados ao quadrado, dão 25. Por isso...

$$x = +\sqrt{25} \text{ ou } x = -\sqrt{25}$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -5$$

Certas equações não têm solução alguma!

$(-x) \cdot x + 2 = x + 3 \cdot (-x)$ $2 = 3$ <p>Sentença falsa. Não há solução.</p> <p>Repare que a equação pede um número que, somado com 2, seja igual a ele mesmo somado com 3. Isso é impossível!</p>	$x^2 + 10 = 1$ $x^2 = -9$ $x = \sqrt{-9}$ ou $x = -\sqrt{-9}$ <p>Sentença falsa. Não há solução.</p> <p>Repare que: $\sqrt{-9}$ não é -3 porque $(-3)^2$ não dá -9. $\sqrt{-9}$ não é 3 porque $(3)^2$ não dá -9.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Livro 3:

Introdução:

Equações do 2º grau com uma incógnita

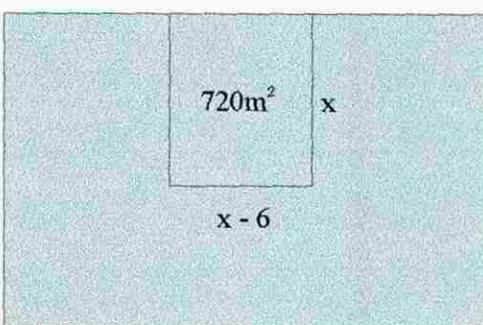
Muitas situações podem ser equacionadas usando a Matemática e, em algumas delas, as expressões envolvidas são polinômios do 2º grau com uma incógnita.

Observe a situação a seguir:

Um terreno será loteado. Todos os lotes serão iguais, retangulares e deverão ter 720 m² de área. Se cada lote tem de frente 6 m a menos do que de fundo, quais serão as medidas de cada um deles?

Se você tentou equacionar este problema, deve ter encontrado uma equação que ainda não conheça.

Veja:



de fundo (comprimento) \longrightarrow x metros

de frente (largura) \longrightarrow $(x - 6)$ metros

De acordo com as informações, a área do lote é 720 m^2 .

$$x \cdot (x - 6) = 720$$

$$x^2 - 6x = 720 \longrightarrow x^2 - 6x - 720 = 0$$

$x^2 - 6x - 720 = 0$ é uma **equação do 2º grau com uma incógnita**.

Chamamos **equação do 2º grau com uma incógnita x** toda equação que pode ser escrita na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

As letras **a, b, c e x** são números reais e $a \neq 0$.

Como a equação $x^2 - 6x - 720 = 0$ está na forma reduzida, temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = -720$.

Observação: Costuma-se dizer que **a** é coeficiente do termo em x^2 , **b** é coeficiente do termo em **x** e **c** é o termo independente.

Comentários:

- O *Livro 1* aborda o assunto apresentando um pouco sobre a história das equações do 2º grau. Interessante também que o primeiro exemplo de resolução de uma equação é seguido conforme a resolução dos babilônios. Em seguida, através do equacionamento de um problema, obtém-se a equação do 2º grau, para então, a apresentação da definição e os devidos exemplos. A expressão “*incógnita*” é utilizada, mas não é esclarecida ou relacionada com o problema. O livro chama bastante a atenção para a identificação dos coeficientes, através de exemplos.
- Muito importante e difícil encontrar na maioria dos livros a resolução de uma equação com as operações efetuadas em ambos os lados de uma igualdade. O *Livro 2*, introduz o conteúdo resolvendo equações do 1º e 2º graus (incompletas), dessa maneira. Explica claramente o que significa resolver uma equação, ou seja, encontrar um valor representado por letras, o que neste caso, seria a *incógnita*. O livro traz inúmeros lembretes, tais como multiplicar a equação por -1 , calcular o m.m.c e, ainda o item “Conversando sobre o texto”, onde os alunos são questionados sobre os conceitos apresentados: equação, *incógnita*, resolver uma equação, entre outros. Além disso, é sugerido aos alunos que inventem algumas equações. A definição formal não é apresentada como nos outros dois livros.
- O *Livro 3* explica o que significa resolver uma equação. Apresenta um exemplo prático para que, quando equacionado, obtenha-se uma equação do 2º grau. Essa relação entre áreas, problemas práticos é fundamental, antes mesmo de apresentar a definição matemática formal. O livro também enfatiza os coeficientes e principalmente a redução de equações através de exemplos e exercícios. Os exercícios propostos são de um nível muito bom, havendo a relação entre exercícios e problemas.

Livro 1: Equações incompletas - Resolução

Dizemos que equações que estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$, estão na forma normal ou forma reduzida de uma equação do 2º grau com uma incógnita.

Há, porém, algumas equações do 2º grau que não estão escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$; por meio de transformações convenientes, onde aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo, podemos reduzi-las a essa forma.

A Resolução das Equações Incompletas

Na resolução das equações incompletas do 2º grau, usaremos a fatoração e duas propriedades importantes dos números reais:

1ª propriedade

Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x \cdot y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

2ª propriedade

Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$

A equação é da forma $ax^2 + bx = 0$

Exemplo: $x^2 - 9x = 0$

A equação é da forma $ax^2 + c = 0$

Exemplo: $x^2 - 49 = 0$

Livro 2: Equações Incompletas - Resolução

Equações resolvidas por fatoração

Você consegue adivinhar quais são os fatores desta multiplicação?

$$\boxed{?} \cdot \boxed{?} = 0$$

Se o produto é zero, um dos dois números tem que ser zero.

Quando transformamos a expressão numa multiplicação, nós *fatoramos* a expressão.

Usando a fatoração e o que observamos sobre multiplicações de produto zero, vamos resolver a equação $7x^2 - 3x = 0$.

- Colocamos x em evidência.

$$7x^2 - 3x = 0$$

$$x(7x - 3) = 0$$

- Como o produto é zero, há duas possibilidades: $x = 0$ ou $7x - 3 = 0$

$$7x - 3 = 0$$

$$7x = 3$$

$$x = \frac{3}{7}$$

Observe que os dois números obtidos são soluções da equação $7x^2 - 3x = 0$:

para $x = 0$, temos:

$$7 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

para $x = \frac{3}{7}$, temos:

$$7 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{7} = 0$$

$$7 \cdot \frac{9}{49} - \frac{9}{7} = 0$$

$$\frac{9}{7} - \frac{9}{7} = 0$$

Mais resoluções por fatoração

A expressão $(a + b)^2$ é a multiplicação de $(a + b)$ por $(a + b)$, ou seja:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Agora veja como descrever o padrão:

Uma soma ao quadrado...

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

...os quadrados das parcelas
mais duas vezes o produto
delas

$$(x + 3)^2 =$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

$$(x)^2 \quad 2 \cdot x \cdot 3 \quad (3)^2$$

O resultado do quadrado de uma soma é uma expressão chamada *trinômio quadrado perfeito*. Esse nome também se aplica ao resultado do *quadrado de uma diferença*:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Reconhecendo um trinômio quadrado perfeito, podemos resolver diversas equações de 2º grau.

Por exemplo, vimos que $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito. Podemos, então, fatorá-lo. A forma fatorada é $(x + 3)^2$.

Livro 3: Equações incompletas - Resolução

As equações do 2º grau que têm, na forma reduzida, $b = 0$ ou $c = 0$ ou, ainda, $b = 0$ e $c = 0$, são chamadas **incompletas**. Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, as equações são chamadas **completas**.

Forma reduzida: chamamos $ax^2 + bx + c = 0$ de forma reduzida de uma equação do 2º grau.

Muitas vezes, as equações de 2º grau com uma incógnita não vêm escritas numa forma reduzida. Quando isto ocorre, podemos escrevê-las nessa forma, se for conveniente.

Raiz ou Solução

Considere a equação do 2º grau com uma incógnita, dada ao lado. O número 1 é a solução dessa equação? E o número -5?

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Verificamos se 1 é (ou não) solução dessa equação, substituindo x por 1 e efetuando os cálculos. Se obtivermos uma sentença verdadeira, 1 será solução. Se a sentença for falsa, 1 não será a solução.

Um número é raiz de uma equação do 2º grau com uma incógnita se esse número, quando colocado no lugar da incógnita, transforma a equação numa sentença verdadeira.

Equações do 2º grau incompletas: $c = 0$

César pensou em dois números. Um deles excede o outro em 6 unidades, e o produto desses números é igual ao dobro do menor deles. Quais são os números em que César pensou?

Equacionando o problema, temos uma equação do 2º grau com uma incógnita.

A equação obtida é $x^2 + 4x = 0$ e é incompleta, pois o termo independente é igual a zero, ou seja, $c = 0$.

Para resolvê-la, fatoramos $x^2 + 4x$ e observamos o produto:

A equação $x^2 + 4x = 0$ tem duas soluções: 0 e -4.

Com estes valores para x , temos:

números de César

$$x = 0 \quad x + 6 = 0 + 6 = 6 \quad 0 \text{ e } 6$$

$$x = -4 \quad x + 6 = -4 + 6 = 2 \quad -4 \text{ e } 2$$

Portanto, César poderia ter pensado nos números **0 e 6** ou **-4 e 2**.

Equações do 2º grau incompletas: $b = 0$

Exemplo: Qual é o conjunto solução da equação $3x^2 - 75 = 0$?

Resolução: Isolamos x^2 num dos membros da equação.

$$3x^2 - 75 = 0 \quad 3x^2 = 75 \quad x^2 = \frac{75}{3} \quad x^2 = 25$$

Podemos escrever:

Lembre-se:

$$\square^2 = 25$$

$$[-5]^2 = 25 \quad [+5]^2 = 25$$

$$x^2 = 25$$



$$x = -\sqrt{25} \quad x = -5$$

ou

$$x = +\sqrt{25} \quad x = 5$$

Completando quadrados para determinar soluções

Quais são as soluções da equação ao lado?

$$4x^2 - 4x + 1 = 9$$

Se você pensou nos trinômios quadrados perfeitos, então encontrou um caminho.

Veja: $4x^2 - 4x + 1$ é um trinômio quadrado perfeito.

Fatorando

$$\underline{4x^2 - 4x + 1 = 9}$$



$$4x^2 - 4x + 1$$

$$2x - 1 = -3 \quad |+1 \quad 2x = -3 + 1 \quad |:2 \quad x = \frac{-2}{2} \quad x = -1$$

$$(2x - 1)^2 = 9$$

ou

$$2x - 1 = 3 \quad |+1 \quad 2x = 3 + 1 \quad |:2 \quad x = \frac{4}{2} \quad x = 2$$

$$S = \{-1, 2\}$$

Nesta equação não temos um trinômio quadrado perfeito.

Como determinar as soluções?

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Nesta etapa o livro apresenta a resolução pelo processo do trinômio quadrado perfeito assim como na demonstração da fórmula de Bhaskara (Capítulo I, p. 10) através da geometria.

Comentários:

- O *Livro 1*, a princípio define a equação completa e exemplifica, tal qual faz para as incompletas, apresentando os coeficientes. Os primeiros exercícios tratam de identificar se as equações são completas ou não, escrevendo seus coeficientes. Em seguida o livro trata da redução de equações, com manipulação dos princípios, aditivo e multiplicativo, eliminação dos parênteses e para o caso das frações redução ao mesmo denominador. No entanto, não se encontra nos primeiros 10 exemplos sequer um exemplo prático. Apenas, no último exemplo antes dos exercícios é apresentado um problema bastante simples de geometria, com respeito a área de um quadrado. Dada a área de um quadrado, encontrar o lado desse quadrado. Os exercícios, em geral são de cálculo algébrico, enunciados do tipo: “determine o conjunto solução de cada uma das equações”.
- O *Livro 2* trata da resolução das equações incompletas sem mencionar que são equações incompletas. Ele se preocupa em apenas encontrar a solução. Trata de uma grande parte dessas equações, resolvendo-as por fatoração. Muito interessante que já no início do conteúdo, o autor apresenta equações de graus 3 e 4 propondo exercícios como $x^4 - 16 = 75$. O mesmo acontece para as equações irracionais. Talvez ousadia, mas em nenhum momento o autor fala em coeficientes da equação. O livro é riquíssimo em problemas, uns tratando de áreas, outros utilizando o Teorema de Pitágoras, ou mesmo problemas que envolvem física.
- Nesta etapa, da resolução das equações incompletas, o *Livro 3* parece ser um pouco de cada um dos livros mencionados anteriormente. Ele aborda as definições das equações, separando aquelas em que $b = 0$ e $c = 0$. Há exemplos e exercícios separadamente. Exemplifica com um exemplo prático para cada tipo e propõe a resolução por fatoração. Sendo a solução vazia ou não, existe no final de cada exercício um pequeno comentário a respeito.

- **Livro 1: Resolução da Equação completa – Fórmula de Bhaskara**

Fórmula resolutiva ou fórmula de Bhaskara: usando o processo de Bhaskara e partindo da equação escrita na sua forma normal, foi possível chegar a uma fórmula que vai nos permitir determinar o conjunto solução de qualquer equação do 2º grau de maneira mais simples e mais “econômica”.

“Apresentação da demonstração da fórmula de Bhaskara.”

Nesta fórmula, o fato de x ser ou não um número real vai depender do discriminante Δ ; temos, então, três casos a estudar:

1º caso: Δ é um número real positivo ($\Delta > 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é um número real e existem dois valores reais diferentes para a incógnita x , sendo costume representar esses valores por x' e x'' , que constituem as raízes da equação.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

2º caso: Δ é zero ($\Delta = 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ é igual a zero e ocorre:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Observamos, então, a existência de um único valor real para a incógnita x , embora seja costume que a equação tem duas raízes reais e iguais, ou seja:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

3º caso: Δ é um número real negativo ($\Delta < 0$).

Neste caso, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real pois não há no conjunto dos números reais a raiz quadrada de um número negativo.

Dizemos, então, que não há valores reais para a incógnita x , ou seja, a equação não tem raízes.

Neste 3º caso, as raízes da equação pertencem a um outro conjunto numérico chamado **conjunto dos números complexos**, cujo estudo será feito na 3ª série do 2º grau.

Livro 2: Resolução da Equação completa – Fórmula de Bhaskara

Pense na equação $x^2 + 4x + 3 = 0$

Não podemos isolar a incógnita, porque x^2 não pode ser somado com $4x$. Também não podemos fatorar, porque não há fator comum, nem trinômio quadrado perfeito. Como resolver, então?

“Apresentação da demonstração da fórmula de Bhaskara.”

Livro 3: Resolução da Equação completa – Fórmula de Bhaskara

“Apresentação da demonstração da fórmula de Bhaskara.”

Equações do 2º grau e problemas

O equacionamento de várias situações-problema envolve equações do 2º grau com uma incógnita. Isso evidencia a importância das equações do 2º grau com uma incógnita, do processo da determinação de raízes e do conhecimento das propriedades.

Aceitar essas raízes como soluções, ou não, depende da situação-problema, pois é a situação que determina o conjunto universo dessas soluções.

Raízes e coeficientes de uma equação do 2º grau

Numa equação do 2º grau com uma incógnita, a soma e o produto das raízes podem ser calculados usando os valores de **a**, **b**, **c**.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

SOMA

$$S = -\frac{b}{a}$$

PRODUTO

$$P = \frac{c}{a}$$

Você deseja conferir?

Então, comece pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Agora, acompanhe:

$$S = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

Soma

$$S = -\frac{b}{a}$$

$$P = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot c}{1 \cdot a}$$

Produto

$$P = \frac{c}{a}$$

Comentários:

Notamos que atualmente, é muito importante que os livros tragam a demonstração da fórmula de Bhaskara, para que o aluno perceba que na matemática existe sempre um fundamento para qualquer resultado ou fórmula. Mesmo que o professor não demonstre em sala de aula, o livro tem papel importante pois o aluno tem a oportunidade de conhecer a demonstração. Não foram apresentadas as três demonstrações de cada livro neste trabalho para que o mesmo não se tornasse repetitivo, visto que já apresentamos no capítulo anterior. Apenas destacamos que estão presentes em cada livro escolhido.

Dos três livros, apenas o *Livro 2* não faz referência a Soma e o Produto das Raízes da Equação do 2º grau. Os outros dois trazem inclusive de maneira clara, a obtenção da expressão da soma $-\frac{b}{a}$ e do produto $\frac{c}{a}$. O mesmo acontece com as propriedades que relacionam o sinal do discriminante e as raízes da equação.

Um assunto importante e que os três livros abordam são os Sistemas de Equações. O *Livro 2* se destaca pela diversidade de situações expressas em problemas que recaem em um sistema de equações do 2º grau. Os *Livros 1 e 3* que, paralelo a simples resolução, apresentam alguns problemas também interessantes.

Os *Livros 1 e 3* diferem, ainda, do *Livro 2* por apresentarem as equações biquadradas e as irracionais.

O livro que melhor faz a relação da solução com o problema é o *Livro 3*, já que usa situações reais como ferramenta.

CAPÍTULO III

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

De um encontro de professores de Matemática em Florianópolis, em setembro deste ano, o palestrante professor Gelson Iezzi falou sobre motivação. A palestra era voltada para a resolução de problemas e por isso foram levantados alguns questionamentos importantes:

Por que deve o aluno aprender Matemática?

- para ter instrumentos que lhe permitam conhecer o mundo que o rodeia e ter acesso aos centros de decisão política, notadamente no que se refere à produção e distribuição dos bens materiais;
- para desenvolver o raciocínio lógico;
- para dispor de uma ferramenta das outras ciências.

Como está a maior parte dos alunos com que trabalhamos?

- Desinteressada: “Matemática é chata”, “Matemática é difícil”, “Eu não preciso de Matemática”;
- imediatista: “Por que devo aprender isto?”, “Para que isto serve?”
- passiva: só observam, só anotam o que o professor diz ou escreve, “dê uma dica”, “resolva um igual pra gente ver como faz”;
- carente de raciocínio lógico: não sabem analisar a situação, não tem iniciativa, têm raciocínio desorganizado;
- não fixaram conteúdos anteriores: “não me lembro disso”, “isso eu nunca vi”, “nunca me ensinaram isso”.

Por que têm os alunos esse comportamento?

- Há razões localizadas fora da escola: o aluno carrega para dentro da escola toda a problemática econômica-social-cultural vivida pela sua família e pelo seu país;

- há causas relacionadas com a escola mas fora da nossa aula: condições materiais, pessoal administrativo, direção, outros professores;
- há motivos ligados ao aluno: sua condição de adolescente, sua escolaridade anterior;
- há razões na própria Matemática;
- há razões ligadas ao curso que damos.

Quais são as possíveis causas ligadas ao curso que damos?

- A falta de significação da Matemática formal (em contraposição com a utilidade do conhecimento matemático informal): a teoria, as técnicas de cálculo, os exercícios e problemas dados na escola guardam pouca relação com a realidade do aluno;
- A ênfase dos algoritmos, fórmulas e receitas em detrimento da formação de conceitos e entendimento de propriedades;
- A valorização do resultado e da rapidez e a desvalorização do raciocínio do aluno (na resolução de problemas, nas aulas e nas provas);
- A preocupação com o cumprimento de um programa em detrimento da formação.

A mentalidade da “resolução de problemas”

Algumas causas do fracasso escolar ligadas ao curso que damos podem ser atenuadas ou eliminadas se tivermos a preocupação de orientar nosso curso para a resolução de problemas. Isto significa nos alinharmos com importantes especialistas em Educação Matemática (como Polya, Begle, Lester Jr. e Hatfield) segundo os quais: “a razão principal de se estudar Matemática é que ela é útil e, em particular, auxilia na resolução de muitas espécies de problemas” ou “o currículo de Matemática deve ser organizado em torno da resolução de problemas”.

Nessa reorientação do nosso curso faríamos o seguinte:

1. distribuição de problemas ao longo de todo o curso;
2. colocação de diferentes espécies de problemas em cada assunto;
3. estimulação à iniciativa e raciocínio do aluno;
4. valorização da resolução feita pelo aluno.

Nossos objetivos seriam:

- fazer o aluno pensar produtivamente;
- desenvolver o raciocínio do aluno;
- ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- envolver o aluno com as aplicações da Matemática;
- tornar as aulas mais interessantes e desafiadoras;
- dotar o aluno de estratégias resolutivas;
- dar ao aluno boa base matemática.

A diferença entre exercício e problema:

Para a aprendizagem matemática há diferentes atividades possíveis: manipulação de materiais, jogos, desenhos, resolução de exercícios, resolução de problemas, etc.

A finalidade dos exercícios é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito ou uma propriedade (exercícios de reconhecimento) ou, então, é fazer com que o aluno treine uma técnica de cálculo, um algoritmo ou fórmula (exercícios de algoritmos).

Exemplos de exercícios de reconhecimento:

1. Dos números 104, 156, 172 e 321 quais são múltiplos de 3?
2. Qual é o sucessor de 147?
3. Qual das equações seguintes não tem raiz real?
4. Qual das funções abaixo é periódica?
5. Qual das sucessões abaixo é uma PA?

Exemplos de exercícios de algoritmos:

1. Efetue: $421 + 347$, $754 - 81$, 84×76 , $1411 : 95$, 5^4 , $\sqrt{900}$.
2. Resolva: $x + 1 = -7$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $7x - 1 \leq 0$, $\sin x = \frac{1}{2}$, $\log x = -2$, $(2^n) = 21$.
3. Calcule: a área de um retângulo de lados ... e ..., o volume de um cilindro circular reto de raio... e altura...

4. Simplifique: $\frac{66}{180}$, $\sqrt[4]{2^{34}}$, $\frac{a^2 + a}{a^2 - 1}$, $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b}$.

Um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.

Há problemas matemáticos de diferentes espécies:

- Problemas-padrão:** são os problemas tradicionais que aparecem nos livros didáticos. Sua resolução é feita transformando a linguagem usual em linguagem matemática e aplicando diretamente um ou mais algoritmos estudados anteriormente. Esses problemas são úteis para recordar e fixar os algoritmos e também para ligar as técnicas matemáticas ao cotidiano, porém têm um ponto fraco: não estimulam a curiosidade do aluno.

Exemplos:

- Num estacionamento há 28 automóveis e 11 motos. Quantos veículos estão estacionados?
 - Uma hora tem 60 minutos. Quantos minutos tem um dia?
 - Qual é o número que multiplicado pela sua terça parte dá um produto igual a $\frac{3}{4}$?
 - 78 palitos de fósforo foram colocados em duas caixas de tal maneira que uma das caixas ficou com doze palitos a mais do que a outra. Quantos palitos ficaram na caixa?
 - De quantos modos distintos é possível formar uma comissão de dois homens e duas mulheres em uma fábrica onde trabalham 30 homens e 40 mulheres?
- Problemas-processo:** são problemas que não comportam uma tradução direta para a linguagem matemática e não podem ser resolvidos pela aplicação automática de algoritmos. Para resolvê-los o aluno tem que pensar e descobrir um plano de resolução. Esses problemas estimulam a curiosidade do aluno, permitem que desenvolva sua criatividade e iniciativa e contribuem para que ele aprenda a enfrentar situações-problema novas que possam surgir.

Exemplos:

- Numa festinha de sábado, reuniram-se 8 alunos da 6^a série. Se cada um cumprimentar todos os outros, quantos apertos de mão serão dados?
 - Para numerar as páginas de um livro bem grosso, um tipógrafo utilizou 2989 algarismos. Quantas páginas tem o livro?
 - Um fusca acomoda 2 pessoas nos bancos dianteiros e 3 no banco traseiro. De quantos modos diferentes é possível lotar um fusca quando se tem um grupo de 10 pessoas das quais só 3 sabem dirigir?
 - Um banco oferece a seus clientes a utilização de computadores para retirada de dinheiro. O computador faz pagamentos utilizando notas de 10 ou de 50 reais. De quantos modos diferentes o computador poderá pagar a quantia de 1000 reais?
3. **Problemas de aplicação:** são problemas que retratam uma situação real e exigem o uso da matemática na sua resolução. São problemas que exigem pesquisa, levantamento e organização de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos, podem usar conhecimentos de outras disciplinas. Devem estar relacionados com algo que desperte interesse no aluno.

Exemplos:

- As 7^{as} séries resolveram realizar um campeonato denominado “Vôlei para todos”. Os 70 alunos vão se reunir aos sábados, no colégio, para formar as equipes, escalar os juízes e os controladores. O campeonato vai decidir quais são as 3 melhores equipes e distribuir prêmios. Uma comissão de 3 alunos ficou encarregada de organizar, arrecadar dinheiro e fazer as compras. Com quantos reais cada aluno vai ter de contribuir?
 - Análogo: festa de comemoração pela formatura.
 - Análogo: excursão na Semana Santa ou da Pátria
4. **Problemas de recreação:** são problemas que envolvem e desafiam os alunos. Sua solução depende de um golpe de sorte, ou de um truque ou de muita observação.

Exemplos:

- Um retângulo A tem dimensões 10 cm e 3 cm. Outro retângulo B mede 15 cm por 2 cm. Como se deve cortar A em duas peças de medidas iguais de maneira que justapostas recubram completamente B?
- Como é possível retirar de um rio exatamente 6 litros de água se só se dispõe, para medir a água, de dois baldes com 4 litros e 9 litros de capacidade?

O papel do professor na resolução de problemas

O papel do professor, estritamente um orientador e organizador da aprendizagem, é criar ou selecionar problemas o mais próximo possível do interesse dos alunos, cuidar muito bem da decodificação dos enunciados dos problemas, auxiliar na resolução.

1. Seleção de problemas atraentes

O professor vai fazer dos problemas uma presença constante no seu curso. Toda semana o aluno tem algum problema para resolver. O problema está ligado ao interesse da clientela, o qual deve ser pesquisado no início do curso (perguntando-se, por exemplo, o que cada aluno faz e o que seus pais fazem). Os personagens dos problemas têm nomes e, se possível, nomes de pessoas conhecidas da classe (alunos, professores, pais, pessoas do bairro, artistas, políticos). A redação do problema deve ser clara com períodos curtos.

A idéia é evitar a alienação da teoria matemática e das técnicas de cálculo desvinculadas de aplicações práticas, é não ficar exclusivamente nos exercícios “efetue”, “calcule”, “resolva”. A idéia é aplicar a teoria na resolução de problemas práticos e treinar as técnicas de cálculo durante a resolução, dando significado aos resultados obtidos.

Quando o conteúdo matemático é abstrato por se tratar de assunto preparatório para outras teorias mais importantes (exemplo; cálculo algébrico), ainda assim o professor deve manter a freqüência de problemas, propondo à classe problemas que exercitem o raciocínio lógico.

Decodificação dos enunciados

O professor vai pedir que o aluno resolva um problema cujo enunciado foi suficientemente entendido e concretizado. Para o aluno de 1º grau entender e concretizar o enunciado de um

problema é uma dificuldade quase sempre comparável à da resolução matemática. Um bom exercício para alunos principiantes é ler em voz alta o enunciado e responder a um questionário exploratório referente à situação retratada no problema.

A intelecção do texto dos problemas é um exercício de Língua Portuguesa que faz parte do programa da disciplina “Matemática”.

Auxílio na resolução

A melhor forma de aprender a resolver problemas é resolver problemas. Uma vez dada ao estudante a bagagem teórica necessária à resolução de um problema, é preferível que o aluno tente resolvê-lo pelos seus próprios meios. Pode acontecer, entretanto, que o problema exija a superação tão complicada que o aluno sozinho se sinta impotente e acabe caindo no desânimo e desistindo da resolução depois de algumas tentativas infrutíferas. Cabe ao professor auxiliar o estudante, apenas na medida em que este necessita, a superar os obstáculos que surgem durante a resolução.

O auxílio do professor é dado por meio de questões, recomendações ou sugestões que possibilitem ao estudante descobrir o caminho mais adequado.

Os objetivos da ajuda prestada pelo professor são:

- Possibilitar a resolução do problema pelo aluno (reforço positivo);
- Desenvolver no aluno a capacidade de resolver sozinho outros problemas (aprendendo a organizar-se e questionar-se)

O texto a seguir foi extraído do livro “*A arte de resolver problemas*”, de George Polya:

COMO RESOLVER UM PROBLEMA

Compreensão do problema

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

Estabelecimento de um plano

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

Execução do plano

Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Retrospecto

É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Em seguida serão apresentados seis problemas propostos a três turmas de 8^a série do ensino fundamental do Instituto Estadual de Educação. Paralelo a cada problema está a resolução e o gráfico que expressa os resultados da resolução dos alunos, tais como o número de erros e acertos.

PROBLEMA 1

O jardim

Um jardim representado pelo triângulo PQR tem área de 75 m².

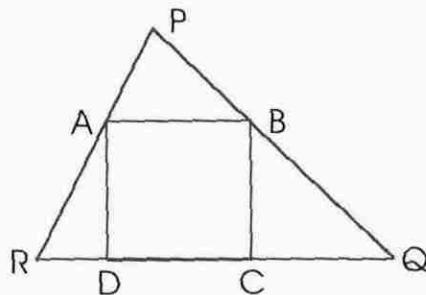
Seu José deseja plantar flores no canteiro em forma de um quadrado ABCD, conforme a figura.

Dizemos então que o quadrado ABCD está **inscrito** no triângulo PQR.

Sabe-se ainda que:

- A medida QC é igual ao lado do quadrado;
- A medida RD é igual a 3 metros;
- A altura do triângulo ABP relativa a AB é igual a 4 metros.

Quanto mede o lado do quadrado que representa o canteiro?



Resolução: seja x a medida do lado do quadrado ABCD. Então a base b e a altura h do triângulo PQR são, respectivamente,

$$\{b\} = \{3 + x + x\} = \{3 + 2x\} \text{ e}$$

$$\{h\} = \{4 + x\}$$

Utilizando a expressão que fornece a área de um triângulo, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(3+2x) \cdot (4+x)}{2} = \frac{12+3x+8x+2x^2}{2} = \frac{2x^2+11x+12}{2} \Rightarrow A = \frac{2x^2+11x+12}{2}$$

Sendo a área do triângulo igual a 75m^2 , obtemos:

$$\frac{2x^2+11x+12}{2} = 75$$

Simplificando, obtemos a equação do 2° grau:

$$2x^2 + 11x - 138 = 0 \quad \text{onde, } a = 2, b = 11 \text{ e } c = -138$$

Vamos resolver a equação utilizando a fórmula de Bhaskara:

Primeiramente, vamos encontrar o valor do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-138)$$

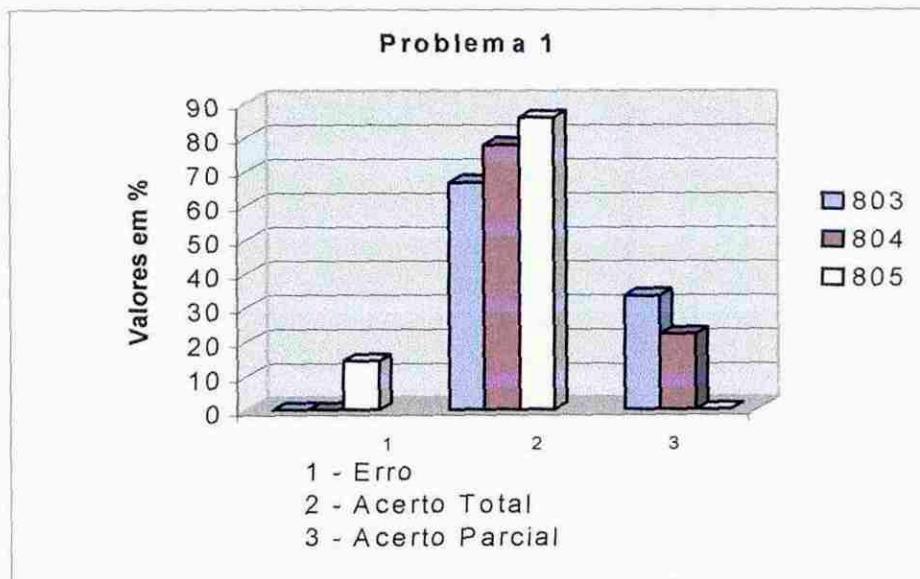
$$\Delta = 121 + 1104$$

$$\Delta = 1225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-11 \pm 35}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{-11 + 35}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-11 - 35}{4} = \frac{-46}{4} = -11,5$$

Resposta: O lado do quadrado que representa o canteiro mede 6 m.

Aplicação em sala de aula: apresentação gráfica dos resultados

Para apresentação dos resultados foram levados em consideração o número de erros (1), acertos (2) e o percentual de alunos que resolveram corretamente a questão, mas não indicaram a resposta (3). Considerando que a equação do 2º grau pode fornecer dois valores reais para x , é importante que o aluno saiba identificar a solução no contexto do problema.

PROBLEMA 2

A Casa de Bruno

Bruno vai construir uma casa num terreno retangular que tem 60 m de perímetro.

Ele pretende construir um calçadão com 3 m de largura num dos lados e 4 m de largura no outro lado.

Se a casa for construída numa área de 126 m^2 , quais serão as dimensões do terreno no qual Bruno construirá a casa?



Resolução:

Extraindo os dados do problema, temos:

Perímetro = 60 m, então:

$$\begin{aligned} 2.(4+x) + 2.(3+y) &= 60 \\ 8 + 2x + 6 + 2y &= 60 \\ 2x + 2y + 14 &= 60 \quad (\div 2) \\ x + y + 7 &= 30 \\ x + y &= 23 \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

A área da casa é representada pela área de um retângulo:

$A = b \cdot h$, onde base (b) = x , altura (h) = y e $A = 126 \text{ m}^2$.

Então: $x \cdot y = 126 \quad (\text{II})$

Obtemos com I e II o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 23 & (\text{I}) \\ x \cdot y = 126 & (\text{II}) \end{cases}$$

Da equação (II): $y = \frac{126}{x}$

Substituindo em I:

$$x + \frac{126}{x} = 23 \Rightarrow x^2 - 23x + 126 = 0, \text{ onde } a=1, b=-23 \text{ e } c=126$$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - 23x + 126 = 0$, obtemos $x = 14$ ou $x = 9$.

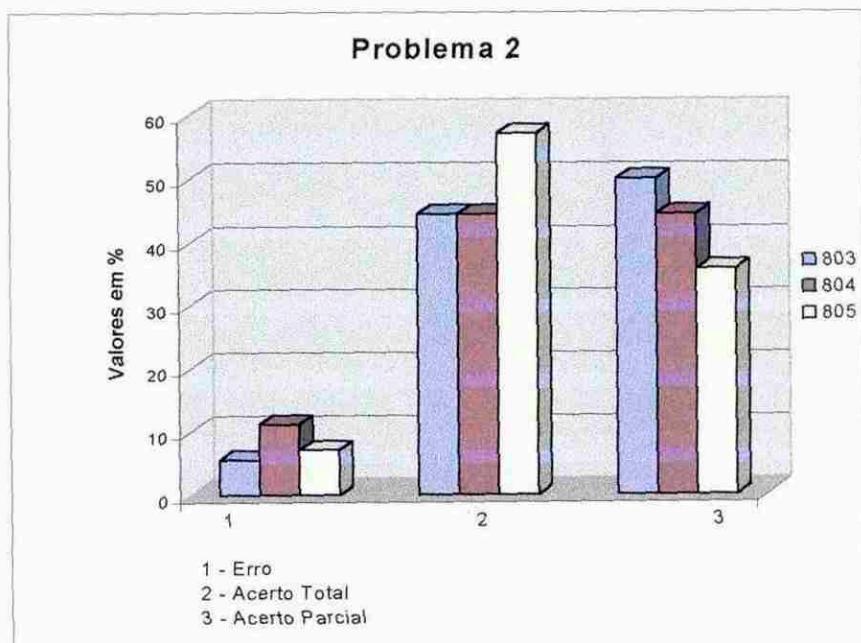
(i) para $x = 14$, temos $y = 9$.

(ii) para $x = 9$, temos $y = 14$.

Resposta:

Considerando (i), as dimensões do terreno serão: largura = 12m e comprimento = 18m.

Considerando (ii), as dimensões do terreno serão: largura = 17m e comprimento = 13m.



PROBLEMA 3

O Problema dos doces

Um professor dispunha de 144 doces para dividir igualmente entre os alunos de sua classe. Como no dia da distribuição faltaram 12 alunos, ele dividiu os 144 doces igualmente entre os presentes, cabendo a cada aluno um doce a mais. Quantos alunos estavam presentes no dia da distribuição?

Resolução:

Vamos representar o número de alunos por x e a quantidade de doces distribuída para cada aluno por y :

Considerando as condições do problema, obtemos o seguinte sistema de equações:

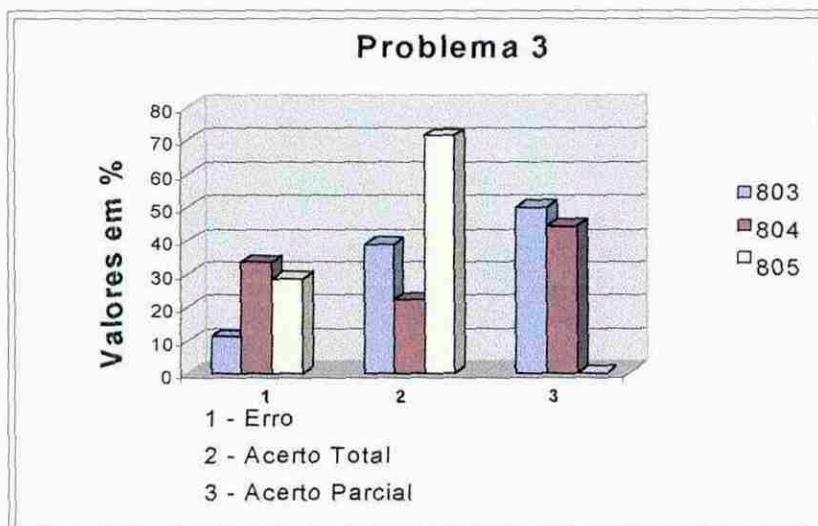
$$\begin{cases} \frac{144}{x} = y & \text{(I)} \\ \frac{144}{x-12} = y+1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a equação I na equação II, temos:

$$x^2 - 12x - 1728 = 0, \text{ onde } a=1, b=-12 \text{ e } c=-1728$$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - 12x - 1728 = 0$, obtemos $x = -36$ ou $x = 48$.

Resposta: Consideramos o valor positivo de $x = 48$. Como x representa o número de alunos então no dia da distribuição compareceram 36 alunos.

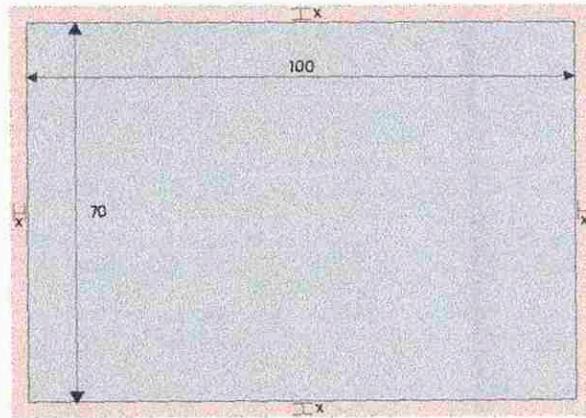


PROBLEMA 4

Um campo de futebol, situado em um espaço aberto, tem como dimensões: 70 m de largura por 100 m de comprimento.

Para maior segurança o campo será cercado. Assim, haverá entre o campo e a cerca uma pista com x metros de largura, conforme a figura abaixo.

- Escreva a expressão que representa a área total limitada pela cerca.
- Se a área total vale 7696 m^2 , quanto mede a pista entre o campo e a cerca?



Resolução:

a) Através da área do retângulo obtemos a seguinte expressão:

$A = b \cdot h$, onde o comprimento é $\{b\} = (100 + 2x)$ e a largura $\{h\} = (70 + 2x)$, então:

$$A = (100 + 2x) \cdot (70 + 2x)$$

$$A = 4x^2 + 340x + 7000$$

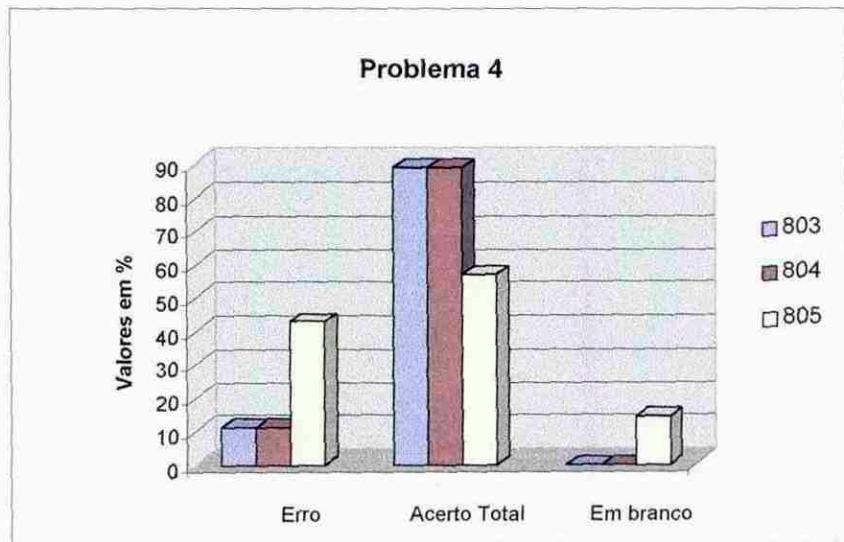
b) Se $A = 7696 \text{ m}^2$, então: $4x^2 + 340x + 7000 = 7696$ ou

$$4x^2 + 340x - 696 = 0 \quad (\div 4),$$

$$x^2 + 85x - 174 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 + 85x - 174 = 0$, obtemos $x = -87$ ou $x = 2$.

Resposta: A pista entre o campo e a cerca mede 2m.



PROBLEMA 5

Numa festa das turmas de 8^a série do IEE, todos os convidados trocaram apertos de mãos. Um aluno que estava observando tudo, percebeu que foram 528 cumprimentos e que 2/3 dos convidados eram mulheres. Quantos homens foram convidados?

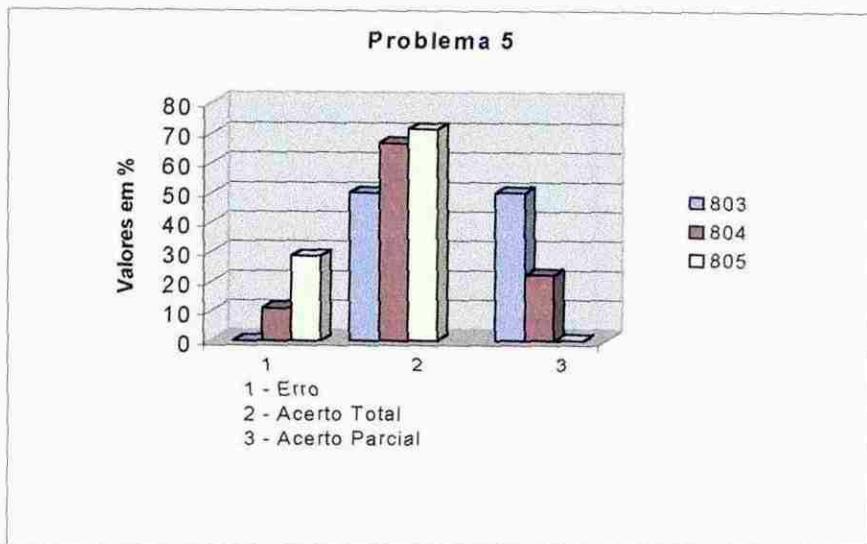
Resolução:

Vamos indicar por x o número total de convidados. Cada pessoa dá $x - 1$ apertos de mãos, no entanto, por exemplo, quando Carlos cumprimenta Cristina, Cristina também cumprimenta Carlos. Logo, o número de apertos de mãos é igual a $\frac{x(x - 1)}{2}$.

Assim $\frac{x(x - 1)}{2} = 528$, ou seja, $x^2 - x = 1056$.

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - x = 1056$, obtemos $x = 33$ ou $x = -32$. Como x deve ser positivo, temos $x = 33$.

Resposta: Como 2/3 dos convidados eram mulheres concluímos que 1/3 eram homens. Portanto, foram convidados 11 homens (1/3 dos convidados) e 22 mulheres.



PROBLEMA 6

Introdução:

Sem sombra de dúvida as guerras são acontecimentos tristes e que aconteceram ao longo de nossa história. Mas não se pode negar que as guerras tem muito a ver com Matemática. Vamos então tratar dos tiros de canhão e a equação do 2º grau.

Os primeiros canhões começaram a ser usados por volta de 1400.

Eram armas tão rudimentares que causavam tanto danos a seus possuidores quanto ao inimigo.

Aos poucos, com ajuda dos cientistas da época, os canhões foram sendo aperfeiçoados. Mais ou menos em 1630, o grande físico Galileu Galilei fez um estudo matemático das balas de canhão, o que contribuiu bastante para que eles acertassem seus alvos.

Galileu concluiu que a trajetória da bala obedece a uma expressão de 2º grau.

A altura y da bala é dada por uma expressão do tipo $y = Ax^2 + Bx$, na qual x é a distância horizontal da bala até o canhão.

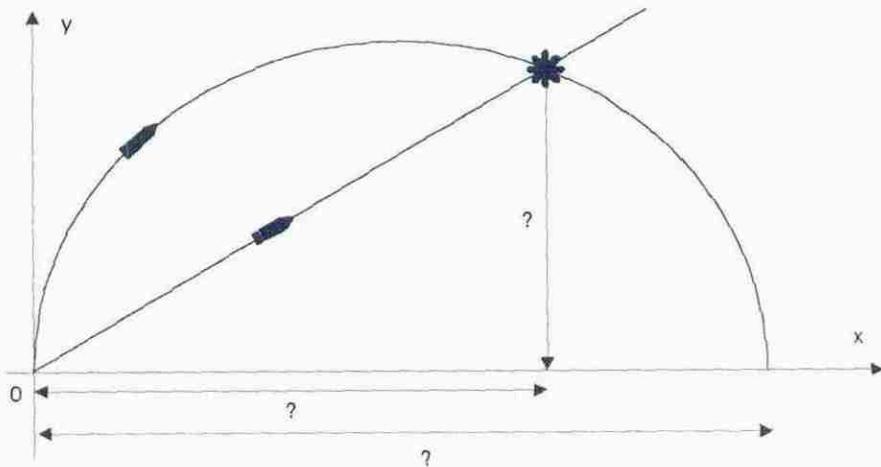
Quando a bala atinge o solo, a altura é zero. Teremos então a equação: $0 = Ax^2 + Bx$. Resolvendo esta equação, teremos a distância x , ou seja, descobriremos a que distância do canhão a bala cairá.

Vamos agora resolver um problema em que, em vez de canhões, teremos um foguete e um míssel.

Um foguete é lançado acidentalmente de uma base militar e cairá, perigosamente, de volta à Terra. A trajetória plana desse foguete segue o gráfico da equação $y = \frac{-x^2}{250} + 2x$, com x e y em metros.

Para interceptá-lo, um míssel é lançado da mesma base. A trajetória em linha reta desse míssel é dada pela equação $y = \frac{3}{5}x$, com x e y em metros. Veja o gráfico abaixo:

- Se o foguete não fosse interceptado, a que distância do ponto de lançamento ele cairia?
- A que distância horizontal cairão seus destroços?
- A que altura do solo o foguete vai ser atingido?



Resolução:

- Quando o foguete atinge o solo, $y = 0$. Substituindo na equação da trajetória do foguete, temos:

$$0 = \frac{-x^2}{250} + 2x, \text{ ou seja, } x^2 - 500x = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - 500x = 0$, temos $x = 0$ ou $x = 500$.

Resposta: O foguete cairia a 500 m da base de lançamento.

- b) Combinando as equações da trajetória do míssil e do foguete, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} y = \frac{-x^2}{250} + 2x & (\text{I}) \\ y = \frac{3}{5}x & (\text{II}) \end{cases}$$

Igualando I e II, temos a equação do 2º grau: $x^2 - 350x = 0$

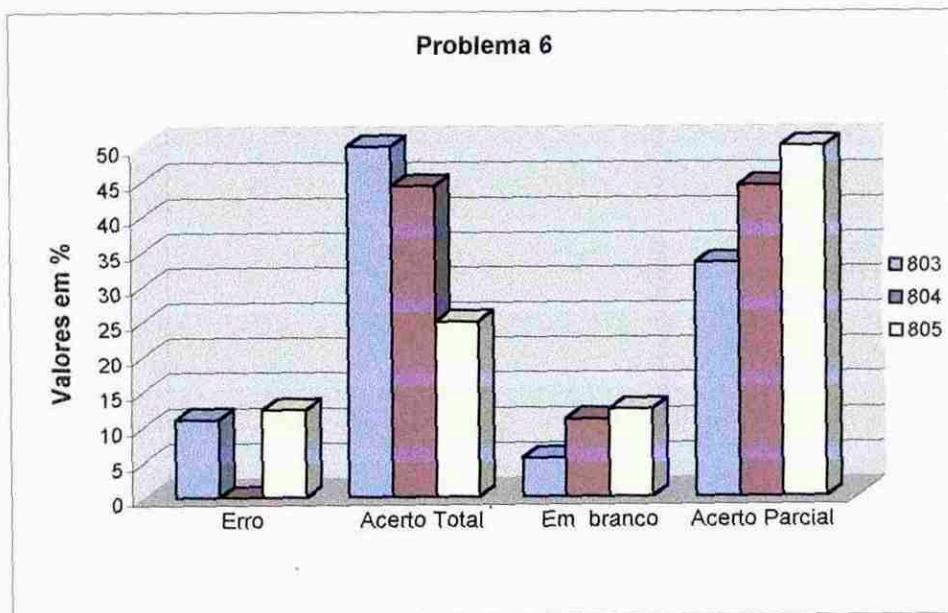
Resolvendo a equação $x^2 - 350x = 0$, temos $x = 0$ ou $x = 350$.

Resposta: Os destroços cairão a 350 m da base de lançamento.

- c) Para encontrar a altura na qual o míssil e o foguete irão colidir, basta substituir o valor de x , do item anterior em I ou II, assim:

$$y = \frac{3}{5}x = \frac{3}{5}(350) = 210$$

Resposta: O foguete vai ser atingido a 210 m de altura.



A tabela a seguir resume os dados relativos aos tipos de erros cometidos pelos alunos na resolução dos seis problemas:

<i>Erros</i>	<i>Turmas</i>			<i>Geral</i>
	803	804	805	
Interpretação do problema	77,77%	50%	63,63%	65,38%
Operações elementares	11,11%	33,33%	9,09%	15,38%
Álgebra	11,11%	16,67%	27,27%	19,23%

Considerações finais:

Baseado na tabela quanto aos erros mais comuns, fica claro que grande parte dos alunos têm maior dificuldade na interpretação do problema. Desta forma, têm dificuldades em retirar os dados, escrever a equação e consequentemente obter a resposta. Em alguns casos, como as turmas 803 e 805, os erros de interpretação superam em grande escala os demais erros. No quadro geral de erros, a situação se repete, onde temos 65,38% de erros de interpretação contra 34,61% dos erros de álgebra e operações elementares.

Antes dos alunos trabalharem os seis problemas apresentados anteriormente, outros quinze problemas foram estudados, alguns com menor grau de dificuldade outros um pouco mais complexos. Um dos primeiros problemas era enunciado da seguinte forma: “*O produto de dois números inteiros negativos e consecutivos é 306. Determine esses números*”. Resposta: -18 e -17.

Na etapa em que os problemas foram estudados, os alunos já conheciam a equação do 2º grau, bem como a resolução que se deu através dos vários exercícios propostos, além de resolverem sistemas de equações.

CONCLUSÃO

O mais importante em se escrever sobre um tema é encontrar uma motivação. Neste trabalho, embora a inexperiência e as dificuldades, existia uma expectativa quanto ao resultado final. O assunto Equações do 2º grau é simples, os alunos gostam de resolver a equação, aplicar a fórmula de Bhaskara, mas isto se dá automaticamente. O aluno que assiste a aula, copia o conteúdo, observa a resolução e em seguida parte para os exercícios, não tem grandes dificuldades, supondo que este aluno, domine os conhecimentos básicos de matemática, como as quatro operações.

Mas tal situação, cria um estado de comodismo, de matemática inerte, sem aplicação. Embora sejam apresentados exemplos práticos durante a aula expositiva, o aluno precisa entrar em contato direto com a situação-problema, pensar sobre ela, equacioná-la e consequentemente resolvê-la. Os alunos sentem a necessidade de conhecer, de enxergar a aplicação de um conteúdo, apesar da educação ao qual estão acostumados, que é a de não instigar o raciocínio. Talvez alguns achem a crítica um pouco grave, mas tal comentário surge, pela resistência que os alunos apresentam ao se deparar com um problema. Certa vez, um aluno pediu que fosse mostrada a aplicação da equação e num momento seguinte pediu que lhe fosse ensinado a interpretar.

Infelizmente, a realidade é um pouco difícil. Alunos ótimos em manipular álgebra e fazer cálculos, tem verdadeiro horror em resolver um problema, chegando a pedir que seja escrita a equação que o representa. A primeira etapa então, é desenvolver a motivação. Por que resolver um problema e não somente aplicar a fórmula? Partindo de problemas simples, se pode fazer entender o objetivo, que é o de esclarecer um pouco, como eles mesmo questionaram, o “para que serve?”

As maiores dificuldades, sem dúvida, foram a resistência em pensar sobre o problema, a língua portuguesa, na questão da leitura e interpretação e o imediatismo que muitos alunos sofrem, ao querer resolvê-lo brevemente, sem mesmo analisar a solução. Muitos dos alunos, que descobrem a equação e a resolvem, ainda não sabem apontar a solução.

A experiência foi trabalhosa, visto a realidade de sala de aula, o grande número de alunos, em média quarenta por turma, com os mais diversos níveis de conhecimento matemático, enfim, é estranho e curioso, saber que mesmo com um assunto tão discutido, abordado em livros didáticos, existe ainda uma grande rejeição quando se trata da Resolução de Problemas.

A compensação foi que alguns alunos passaram a ter interesse e traziam, a cada dia, questionamentos e até novos problemas. A curiosidade lhes fazia, ao menos, pensar em qual resposta seria possível. Conversavam com os colegas, com os pais e, posteriormente, resolviam integralmente o problema, já o conhecendo bastante. Alguém uma vez disse uma frase bastante famosa: “Ninguém ama aquilo que não conhece”. Talvez não pudesse indicar alguém que gostasse tanto assim de resolver problemas, mas os alunos saíram de seu estado passivo e foram desafiados.

A inexperiência no magistério pode ter deixado algumas falhas durante a realização do trabalho, mas é um primeiro grande passo saber que um aluno só aprende a resolver problemas resolvendo e, muitas vezes, através destes problemas entende o conteúdo. A matemática é ferramenta importantíssima por abrir caminho para outras ciências e desenvolver o raciocínio lógico possibilitando assim, que o homem conheça o mundo e interfira sobre ele como sujeito de sua história.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUMGART, John K.

Tópicos de História da Matemática: Álgebra: Para uso em sala de aula. Atual, São Paulo, 1994.

EVES, Howard.

Introdução à História da matemática. Tradução: Hygino Domingues. Editora da Unicamp, São Paulo, 1995.

BOYER, Carl B.

História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide,
Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1985.

MORI, Iracema e Onaga, Dulce Satiko.

Matemática Idéias e Desafios – 8^a série, Saraiva, São Paulo, 1999.

BIGODE, Antonio José Lopes.

Matemática Atual – 8^a série - Editora Atual, São Paulo, 1997.

GIOVANNI, José Ruy/ Castrucci, Benedito e Giovanni Jr., José Ruy.

A Conquista da Matemática – Teoria e Aplicação - 8^a série.
Edição Renovada, Editora FTD, São Paulo, 1992.

JAKUBOVIC, José e Lellis, Marcello.

Matemática na Medida Certa – 8^a série.
Editora Scipione, São Paulo, 1990.

JAKUBOVIC, José , LELLIS, Marcelo Cestari, IMENES, Luiz Márcio.

Equação do 2º grau: Pra que serve Matemática? 12^a ed. São Paulo: Atual, 1992.

IMENES, Luiz Márcio e Lellis, Marcelo.

Matemática – 8^a série.

Editora Scipione, São Paulo, 1997

IEZZI, Gelson/ Dolce, Osvaldo e Machado, Antonio.

Matemática e Realidade – 8^a série.

3^a ed., Editora Atual, São Paulo, 1996.

POLYA, George.

A Arte de Resolver Problemas. 2^a ed. Rio de Janeiro: editora Interciência, 1995.

Revista do Professor de Matemática – Número 12

Artigo: Resolução Geométrica da Equação do 2º Grau

Autor: Nelson Tunala

Revista do Professor de Matemática – Número 12

Artigo: Equações do 2º grau – Completando Quadrados

Autor: A Leonardo P. Pastor

Revista do Professor de Matemática – Número 13

Artigo: Método de Viète para Resolução de Equações do 2º Grau.

Autor: João Tomas do Amaral.

Revista do Professor de Matemática – Número 13

Artigo: A Equação do 2º Grau.

Autor: Elon Lages Lima

Revista do Professor de Matemática – Número 26

Artigo: Tecnologia, Gráficos e Equações.

Autor: Gilda de La Roque Palis.

Revista do Professor de Matemática – Número 43

Artigo: Uma abordagem histórica da Equação do 2º Grau

Autor: Wagner da Cunha Fragoso.