Probabilidade

Douglas Cardoso

9/8/2021

Modelos probabilísticos

Saídas de cada experimento parecem imprevisíveis, mas quando aumentamos muito o número de experimentos, surge um padrão que nos permite calcular as probabilidades, que é uma função matemática.

Conceitos fundamentais

- **Espaço amostral (Ω)**: conjunto de saídas do experimento - todas as saídas possíveis.
- **Evento (A)**: um elemento do espaço amostral - subconjunto de Ω.
  - Evento impossível: $\emptyset$
  - Evento certo: Ω
  - $A \cup B$: evento ocorre se A, ou B (ou ambos), ocorrem
  - $A \cap B$: evento ocorre se, e somente se, A e B ocorrem

Exemplos

Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral.

(i) Pelo menos um dos eventos ocorre.
$$A \cup B$$

(ii) O evento A ocorre, mas B não ocorre
$$A \cap \bar{B}$$

(iii) Nenhum deles ocorre
$$\bar{A} \cap \bar{B}$$

Probabilidade da união de eventos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O $P(A \cap B)$ é retirado porque é a parte em que os eventos A e B se intersectam, ou seja, se não retirasse estaria contando duas vezes.

Matematicamente:
$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

portanto,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional e Indepedência

Eventos se influenciam mutuamente, e dado que um evento aconteceu, isso influencia na probabilidade de outro evento.

Condicional

Qual a probabilidade de A acontecer tendo acontecido B?

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0$$

Exemplo

Calcule $P(A \mid B)$ onde: - $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ - $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega\ is\ even\}$ - $B = \{\omega \in \Omega \mid \omega > 5\}$

Os conjuntos ficariam da seguinte forma:

- A: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}
- B: {6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
- $A \cap B$: {6, 8, 10, 12, 14}
- Fora de ambos: {1, 3, 5}

Dessa forma:

- $P(A) = \frac{7}{15}$
- $P(B) = \frac{10}{15}$
- $P(A \cap B) = \frac{5}{15}$

Assim:

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{5}{15}}{\frac{10}{15}}$$

$$P(A \mid B) = \frac{5}{15} \times \frac{15}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Independência

A e B são independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Isso ocorre porque $P(A \mid B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Para verificar se são indepedentes, basta verificar se $P(A \cap B)$ é igual a $P(A)P(B)$.

Demonstração da probabilidade condicional

Seja $\omega \in \Omega$ e $B \in \Omega$, ou seja, ω e B em um mesmo espaço amostral. Para entender, pense em um dado e que B é a chance de um número ser par.

- (i) Se $\omega \in B$, então $P(\omega \mid B) = \alpha \ P(B)$
- (ii) Se $\omega \notin B$, então $P(\omega \mid B) = 0$

Assim, o somatório entre essas partes precisa ser igual a 1:

$$\sum_{\omega \in B} P(\omega \mid B) + \sum_{\omega \notin B} P(\omega \mid B) = 1$$

Trocando na fórmula, teremos:

$$\sum_{\omega \in B} \alpha \ P(\omega) = 1$$

Assim, sendo α uma constante, podemos isolá-la. Como estou somando todos os valores de B, então estou considerando todos os valores do dado que pode ser par, ou seja, estou pegando a probabilidade do número ser par, por isso $P(B)$.

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{\omega \in B} P(\omega)} = \frac{1}{P(B)}$$

Assim:

$$P(\omega \mid B) = \alpha \ P(B) = \frac{P(\omega)}{P(B)}$$

Podemos então pensar em, pegando um evento A qualquer:

$$P(A \mid B) = \sum_{\omega \in A \cap B} P(\omega \mid B) + \sum_{w \notin A \cap B} P(\omega \mid B)$$

Nós cortamos o segundo termo, porque ele é igual 0. Como estamos somando sobre todos os ω que pertecem a $A \cap B$, $P(\omega) = P(A \cap B)$.

$$= \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{P(\omega)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema da Probabilidade Total

Partição do espaço amostral

Definição: $B_1, B_2, ..., B_n$ formam uma partição do espaço amostral se:

- $B_i \cap B = \emptyset$: intersecção entre eles for igual a um conjunto vazio, não tem sobreposição
- $\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$: união entre todos eles formam o espaço amostral
- $P(B_i) \geq 0, i = 1, ..., n$: probabilidades de ocorrência de cada um deles é maior ou igual a zero

A partição do espaço amostral é como se fosse peça de quebra-cabeças. Por exemplo:

Seja um evento A no espaço amostral Ω e seja $B_1, B_2, ..., B_n$ uma partição amostral de Ω. Podemos escrever A considerando tal partição:

$$A = \cup_{i=1}^{n} A \cap B_i$$

Que significa que A é a união de todas as intersecções de Bi. Se fôssemos aplicar as probabilidades teríamos que

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{n} A \cap B_i)$$

Podemos notar que os elementos $A \cap B_i$ são mutuamente exclusivos, ou seja, são independentes. Assim:

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset, i \neq j$$

Como são disjuntos, a probabilidade da união vira a soma das probabilidades:

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{n} A \cap B_i) = \sum i = 1^n P(A \cap B_i)$$

A expressão $P(A \cap B_i)$ nos lembra do numerador da equação de probabilidade condicional, que, passada para o outro lado, nos oferece uma igualdade

$$P(A \mid B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)}$$

$$P(A \mid B_i)P(B_i) = P(A \cap B_i)$$

Portanto, temos nosso Teorema da Probabilidade total:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

Teorema de Bayes

Thomas Bayes desenvolveu uma nova forma de calcular probabilidades. A ideia dele era que probabilidades podem ser atualizadas com a observação de novos dados. A formulação matemática, publicada por Laplace, é:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A \mid B_j)P(B_j)},\ i = 1, 2, ...$$

Esse é um dos mais importantes da Teoria de Probabilidade.

Vimos que $P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$, e sabemos que:

$$P(A \mid B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A) = P(A \mid B)P(B)$$

Assim, o numerador de nosso teorema fica como $P(A \mid B_i)P(B_i)$. O denominador é a equação da Teoria da Probabilidade geral.

Termos

- $P(B_i \mid A)$: Probabilidade *a posteriori*
- $P(A \mid B_i)$: Verossimilhança
- $P(B_i)$: *priori*, conhecimento que tenho sobre o problema
- $\sum_j P(A \mid B_j)P(B_j)$: Evidência, que é uma constante normalizadora

O problema de Monty-Hall

É um problema que foi proposto em 1975 por Steven Selvin. A ideia dele é, estando em um programa de auditório, um participante é chamado para escolher entre três portas, onde em duas delas temos um bode em cada uma e na terceira temos um carro. Assim que o participante escolhe uma porta, o apresentador abre outra porta e pergunta se o participante quer mudar de porta ou continuar com a mesma. A pergunta do problema é: **se o participante mudar de porta, será que vale a pena?**

Primeiramente definimos alguns eventos:

- C_i = "carro na porta i"
- X_i = "porta i escolhida"
- A_i = "abre a porta i"

Iremos assumir que escolheremos a porta 1, ou seja, o apresentador irá poder abrir a porta 2 ou 3.

- Porta 1 é escolhida: X_1
- Carro na porta 3: C_3

Assim, temos: (i) Qual a probabilidade do apresentador abrir a porta 2 dado que escolhemos a porta 1 e o carro está na 3?

$$P(A_2 \mid X_1 C_3) = 1$$

(ii) Qual a probabilidade do apresentador abrir a porta 2 dado que escolhemos a porta 1 e o carro está na 2?

$$P(A_2 \mid X_1 C_2) = 0$$

(iii) Qual a probabilidade do apresentador abrir a porta 2 dado que escolhemos a porta 1 e o apresentador não sabe onde está o carro?

$$P(A_2 \mid X_1) = \frac{1}{2}$$

(iv) Qual a probabilidade de escolhermos a porta i e o carro está na porta 3? Lembrando que são dois eventos independentes.

$$P(X_i, C_j) = P(X_i)P(C_j) \ \forall_{i,j} = 1, 2, 3$$

O que iremos calcular é: **probabilidade do carro estar na porta 3 dado que escolhi a porta 1 e o apresentador abriu a porta 2** $= P(C_3 \mid X_1, A_2)$.

$$P(C_3 \mid X_1, A_2) = \frac{P(A_2, X_1, C_3)}{P(A_2, X_1)} = \frac{P(A_2 \mid X_1, C_3)P(X_1, C_3)}{P(A_2 \mid X_1)P(X_1)} = \frac{1 \times (1/3)^2}{1/2 \times 1/3} = \frac{2}{3}$$

Variáveis aleatórias

É uma **função** que mapeia o espaço amostral na reta real, sendo que cada elemento do espaço amostral é mapeado em um valor real. Suponha um exemplo:

- Lançamos duas moedas e temos o espaço amostral $\omega = \{CC, CR, RC, RR\}$, onde C representa Cara e R representa Coroa.
- Uma possível variável aleatória seria:
  - X: "número de cara"

Dessa forma podemos associar valores com a contagem do número de cara, por exemplo:

- $X(CC) = 2$
- $X(CR) = 1$
- $X(RC) = 1$
- $X(RR) = 0$

Notação

- X, Y, Z, W: Variáveis aleatórias
- x, y, z, w: valores das variáveis aleatórias

Discretas

Os valores possíveis de X podem ser colocadas em uma lista $x_1, x_2, ..., x_n$, sendo o número de valores possíveis finito ou infinito enumeráveis. Exemplo: número de filhos de um funcionários, valor 0 e 1 no lançamento de moeda, outros.

Com isso, temos a *função discreta de probabilidade*, ou simplesmente, *distribuição de probabilidade*, que é a função que atribui a cada valor da variável aleatória sua probabilidade.

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p_i, \ \ i = 1, 2, ...$$

Exemplo

Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 5 bolas vermelhas e 4 pretas. Seja a variável aleatória X: "número de bolas vermelhas retiradas no experimento". Determine a distribuição de probabilidades de X.

- O primeiro passo é os valores possíveis de X, isto é, as quantidades possíveis do número de bolas vermelhas.

  $X = \{0, 1, 2\}$

- O segundo passo, é montar uma tabela com as saídas possíveis, o valor de x e a probabilidade associada a esse x

Saídas	x	$P(X = x)$
(V, P)	1	$\frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$
(V, V)	2	11
(P, V)	1	111
(P, P)	0	111

Exercícios

1. Moedas de ouro são colocadas em 3 urnas com 12 moedas. A urna I possue 4 moedas de ouro, a II possue 3 moedas de ouro e a III possue 6 moedas de ouro. Todas as urnas possuem a mesma probabilidade: $P(I) = 1/3, P(II) = 1/3, P(III) = 1/3$. Qual é a probabilidade de se escolher uma moeda de ouro?
2. A probabilidade do time A perder é de 1/4; a probabilidade do treinador ser trocado dado que o time A perdeu é 9/10, e a probabilidade do treinador ser trocado dado que o time A ganhou é 3/10. Qual é a probabilidade do time A perder dado que seu treinador foi trocado?
3. Considere duas urnas. A primeira contém duas bolas brancas e sete bolas pretas e a segunda contém cinco bolas brancas e seis pretas. Nós lançamos uma moeda e retiramos uma bola da primeira ou da segunda urna, dependendo do resultado do lançamento, isto é, cara (urna 1) ou coroa (urna 2). Qual é a probabilidade condicional de que o resultado do lançamento da moeda foi cara, dado que uma bola branca foi retirada?
4. Um suspeito foi preso e o delegado está 60% convencido de que o suspeito é o assaltante procurado. Uma nova prova revela que o assaltante é tatuado, permitindo assim que o delegado atualize seu nível de certeza sobre a cupabilidade do acusado. Assim, se 20% da população usa tatuagem, quão certo ficará o delegado de que o suspeito é culpado após descobrir que este é tatuado?

Gabarito

1. 0,36 Sabendo que A = "Escolha uma moeda de ouro", temos:

$$P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap II) + P(A \cap III) = P(A \mid I)P(I) + P(A \mid II)P(II) + P(A \mid III)P(III)$$

Sabemos que:

- $P(A \mid I) = \frac{4}{12}$
- $P(A \mid II) = \frac{3}{12}$
- $P(A \mid III) = \frac{6}{12}$

Com isso, temos a equação final com as probabilidades de cada urna dada no enunciado:

$$P(A) = \frac{4}{12} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{12} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{12} \times \frac{1}{3} = 0,36$$

2. 1/2

$$P(loss) = \frac{1}{4};\ P(replacement \mid loss) = \frac{9}{10};\ P(replacement \mid win) = \frac{3}{10}$$

$$P(loss \mid replacement) = \frac{P(loss \cap replacement)}{P(replacement)}$$

$$P(loss \mid replacement) = \frac{P(replacement \mid loss) \times P(loss)}{P(replacement \mid loss)P(loss) + P(replcamente \mid win)P(win)}$$

$$P(loss \mid replacement) = \frac{(9/10) \times (1/4)}{(9/10)(1/4) + (3/10)(3/4)}$$

$$P(loss \mid replacement) = \frac{1}{2}$$

3. 22/67

Primeiramente, definimos os dois eventos que estão acontecendo:

A = "Lançamento foi cara" e B = "Bola branca retirada".

O que queremos saber é $P(A \mid B)$, então, temos:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap \bar(A))}$$

$$= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar(A))P(\bar(A))}$$

$$P(A \mid B) = \frac{2/9 \times 1/2}{2/9 \times 1/2 + 5/11 \times 1/2}$$

$$P(A \mid B) = \frac{22}{67}$$

4. 0,88 Definimos os eventos A e B:

A = "O suspeito é culpado"; B = "O suspeito é tatuado"

Queremos saber: $P(A \mid B)$.

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

Lembre-se que A^c é o contrário do evento A, ou seja, o suspeito é inocente.

$$P(A \mid B) = \frac{(1 \times 0,6)}{(1 \times 0,6) + (0,2 \times 0,6)} = 0,88$$