Master Universitario en Sistemas Ferroviarios
Mecánica de la catenaria

Ecuaciones básicas de cables

Alberto Carnicero
Jesus Jiménez Octavio

Índice

1. Introducción **2**

2. Equilibrio en cables **3**

3. Ecuación de la catenaria **4**
3.1. Cambio del origen de coordenadas 4

4. Aproximación parabólica **5**
4.1. Ecuacion de cambio de condiciones 6
4.1.1. Ejemplo 7
4.1.2. Ejemplo 8

Índice de figuras

1. Página del Acta Erudiatorum de Jacob Bernoulli con la solucion de Leibniz (izda) y Huygen (dcha) 2
2. Equilibrio en un cable 3
3. Proyección horizontal del peso 5
4. Comparativa catenaria-parábola 6

Índice de cuadros

1. Comparativa de casos 6
2. Iteraciones de Newton Raphason 8
3. Datos del ejercicio 8

1. Introducción

En el siglo XV, Leonardo da Vinci había empezado a preguntarse cómo se comportaría un cable en tensión y ya en alguno de sus trabajos pueden encontrarse los primeros bocetos de una catenaria. En 1615 Beeckman diseñó un puente colgante suponiendo que la curva que éste adoptaba era una parábola. Esta solución innovadora no fue ampliamente conocida hasta que, dos siglos después, volviera a ser descubierta por el ingeniero ruso Fuss, ahijado de Euler, a quien se encargó que diseñara un puente sobre el río Neva en San Petersburgo.

Galileo afirmó en su Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze, publicado en 1638, que la forma que debe adoptar una cadena al ser colgada entre dos puntos debe ser parabólica. A mediados del siglo XVII el astrónomo, físico y matemático holandés Christiaan Huygens ya sabía que Galileo estaba equivocado, aunque no conocía aún la solución al problema. En 1690 Jacob Bernoulli publicó Acta Erudiatorum, documento en el que se explica por primera vez el concepto de integral. Para mostrar la potencia de la nueva herramienta de cálculo, Jacob propuso utilizarla para resolver definitivamente el problema al que Galileo no supo dar la solución correcta. Este reto fue resuelto de facto por tres personas: John Bernoulli (hermano de Jacob), Leibnitz y Huygens.

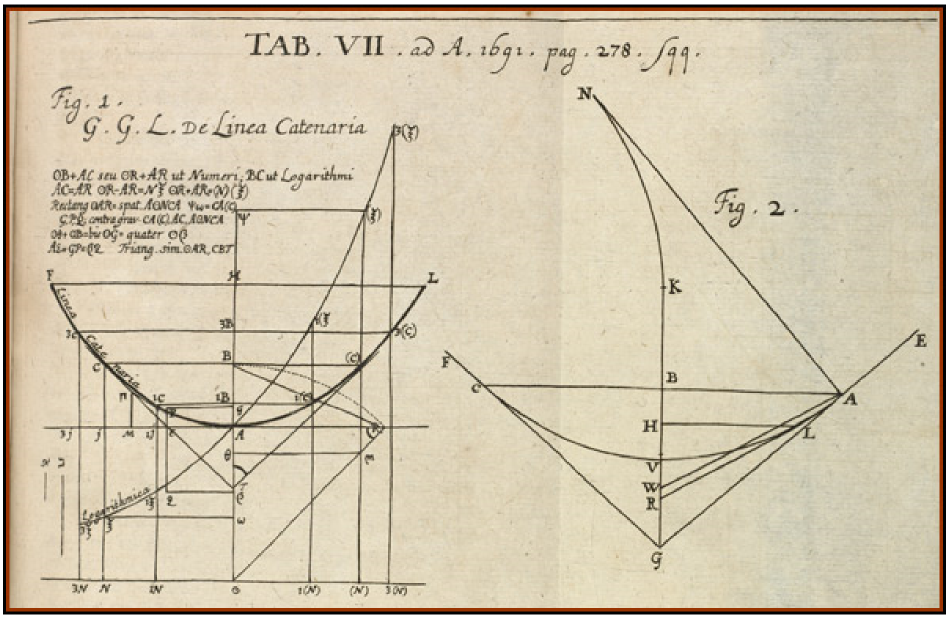


Figura 1: Página del Acta Erudiatorum de Jacob Bernoulli con la solucion de Leibniz (izda) y Huygen (dcha)

Bernouilli y Leibniz aplicaron el cálculo diferencial, por aquel entonces recién desarrollado, y Huygens, por su parte, utilizó un método gráfico. Es difícil saber quién lo hizo primero, ya que las respuestas se publicaron en un corto espacio de tiempo y la mala relación entre los autores no facilitó la tarea. Los hermanos Bernoulli además formularon la ecuación diferencial de equilibrio de una cadena sometida a diferentes estados de carga. Huygens fue quien le dio el nombre de catenaria a la curva. Este nombre proviene de la palabra latina catenarius, que significa cadena. También se le llamó funicular, basado en la denominación latina empleada para cuerda. Por último citar que [1] se una monografía sobre el comportamiento de estructuras de cables imprescindible para iniciarse en el estudio de las mismas.

2. Equilibrio en cables

Los cables son sólidos cuya forma hace que su sección sólo resista esfuerzos axiles de tracción. Realmente también soportan una pequeña componente de flexión pero esta es completamente despreciable frente a su rigidez a esfuerzos de tracción. La forma que adopta un cable bajo la acción de su propio peso se conoce comúnmente como catenaria. De cara a obtener la ecuación de la misma se parte del diagrama de cuerpo libre de una porción diferencial de cable (lo longitud ds) bajo su peso propio (m es la masa por unidad de longitud) puede verse en la figura 2

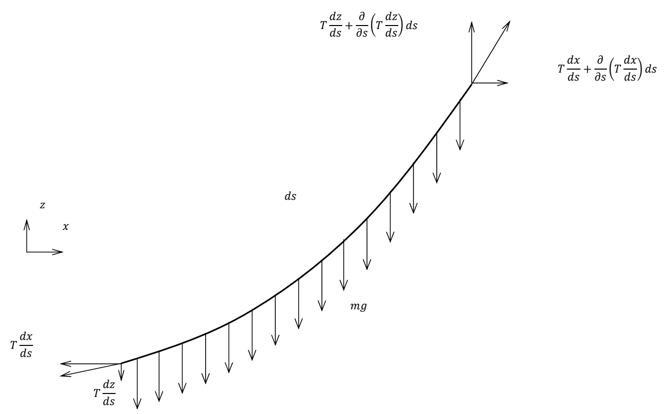


Figura 2: Equilibrio en un cable

dónde T es la tensión del cable. Dicho cuerpo libre debe estar en equilibrio, así, el equilibrio vertical de fuerzas permite escribir la ecuacion

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right) = mg \tag{1}$$

Por otro lado el equilibrio horizontal es

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) ds = 0 \tag{2}$$

de dónde se deduce que

$$T\frac{\partial x}{\partial s} = Cte = H \tag{3}$$

Es decir que la componente horizontal de la tensión del cable, H se mantiene constante a lo largo de todo el cable; por ello en el punto mínimo, donde existe una tangente horizontal la tensión de cable y la componente horizontal coinciden. Partiendo de 1 se puede desarrollar

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(H\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} = H\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\right) = mg \tag{4}$$

Por lo tanto la ecuación diferencial que modela el comportamiento de un cable es

$$H\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = mg\frac{\partial s}{\partial x} \tag{5}$$

3. Ecuación de la catenaria

Partiendo de la ecuación 5 y teniendo en cuenta que el elemento diferencial de longitud se puede escribir como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx \tag{6}$$

Se llega a

$$H\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = mg\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

que haciendo el cambio de variable $\frac{dz}{dx} = u$, permite llegar fácilmente a una solución que en el caso de suponer los apoyos a la misma altura y separados una distancia l es de la forma

$$z = -\frac{H}{mg}\left[cosh\frac{mgl}{2H} - cosh\left(\frac{mg}{H}\left(\frac{l}{2} - x\right)\right)\right] \tag{8}$$

Siendo l la separación horizontal entre los extremos. En el caso de considerar los apoyos a distinta altura la expresión se complica notablemente ya que depende de la posición del mínimo que es a priori desconocida. En este caso, la longitud del cable puede obtenerse por integración de la ecuación 6

$$s = \frac{H}{mg}\left[sinh\frac{mgl}{2H} - sinh\left(\frac{mg}{H}\left(\frac{l}{2} - x\right)\right)\right] \tag{9}$$

y la flecha máxima vale

$$|z_{max}| = \frac{H}{mg}cosh\frac{mgl}{2H} \tag{10}$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación 3, es posible determinar el valor de la tensión como

$$T = Hcosh\left(\frac{mg}{H}\left(\frac{l}{2} - x\right)\right) \tag{11}$$

3.1. Cambio del origen de coordenadas

La expresión 8 se obtenido suponiendo un cable con los apoyos a la misma altura y origen del sistema de coordenas en uno de los extremos. Dicha ecuación se simplifica notablemente si se considera un sistemas de coordenadas con origen en el punto mínimo de la catenaria, en ese caso, la determinación de las constantes de integración a partir de las condiciones $z(0) = \frac{H}{mg}, z'(0) = 0$, permiten obtener la solución de la ecuación 5 de la forma

$$z = Ccosh\frac{x}{C} \tag{12}$$

donde $C = \frac{H}{mg}$ es el llamado parámetro de catenaria. Así la longitud desde el punto mínimo hasta una coordenada x, puede calcularse como

$$s = Csinh\frac{x}{C} \tag{13}$$

y la tensión como

$$T = H\frac{1}{cosh\frac{x}{C}} = mgy \tag{14}$$

es decir, el peso de la proyección vertical del cable considerado.

4. Aproximación parabólica

El término de la parte derecha de la equación 5 representa el peso por unidad de longitud del cable. En el caso de cables muy tensos el diferencial de longitud ds y su proyección horizontal dx son aproximadamente iguales, resultando,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{mg}{H} \tag{15}$$

Cuya solución es de la forma

$$z = \frac{mg}{2H}x^2 + C_1 x + C_2 \tag{16}$$

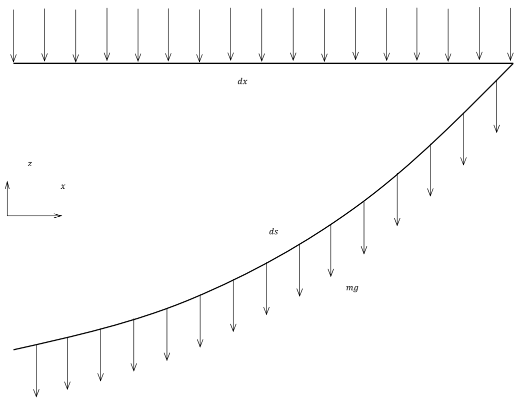


Figura 3: Proyección horizontal del peso

De ahí que para cables muy tensos se suela emplear una aproximación parabólica para la ecuación de la catenaria. Desde un punto de vista físico, esta aproximación parabólica implica suponer que la carga se distribuye de forma uniforme en la proyección horizontal y no según la longitud del cable (figura 3). La el caso particular de apoyos situados a la misma altura y separados una distancia d la ecuación 16 queda de la forma

$$z = \frac{mg}{2H}\left(x^2 - lx\right) \tag{17}$$

Al igual que se hizo en el caso de la ecuación de la catenaria, en el caso de considerar el origen en el punto mínimo, la solución queda de la forma

$$z = \frac{mgx^2}{2H} \tag{18}$$

resultando la flecha máxima

$$|z_{max}| = f = \frac{mgl^2}{8H} \tag{19}$$

De la misma forma, la longitud total del cable se puede obtener integrando el arco, haciendo el desarrollo de Taylor del mismo en el origen, se llega a una expresión de la forma

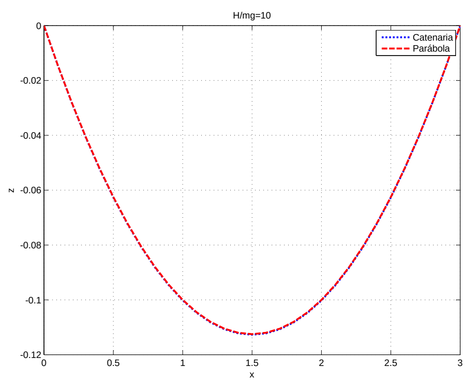
$$s = l + \frac{8f^2}{3l} = l + \frac{l^3\,(mg)^2}{24H^2} \tag{20}$$

En la tabla 1 se resumen algunos resultados empleando la ecuación de la catenaria y la aproximación parabólica. Como se puede apreciar, la aproximación resulta muy razonable en el caso de cables tensos que tienen valores altos del parámetro de catenaria. Este es el caso habitual de las catenarias ferroviarias.

mg(N/m)	**l(m)**	**H(kN)**	$f_{parab}(m)$	$f_{cat}(m)$
10	60	15	0,3	0,30001
20	60	15	0,6	0,60008
10000	60	15	30	41,43

Cuadro 1: Comparativa de casos

En la figura 4 se muestran dos comparativas de la solución exacta y la aproximación parábolica para dos valores diferentes del parámetro de catenaria



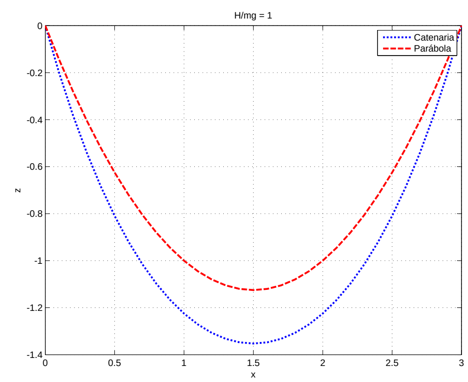


Figura 4: Comparativa catenaria-parábola

4.1. Ecuacion de cambio de condiciones

La ecuación de cambio de condiciones parte de la aproximación parabólica de la catenaria y considera dos estados diferentes. Un estado, denotaremos por 1 con un valor de tensión, H_1, temperatura, t_1, peso m_1g, longitud, s_1 y flecha f_1 y un estado 2 con sus correspondientes H_2, t_2, m_2g, s_2 y f_2. La diferencia de longitudes entre ambos estados puede escribirse en función del ecuacion 20 como

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{8}{3l}\left(f_2^2 - f_1^2\right) = \frac{l^3}{24}\left(\frac{(mg)_2^2}{H_2^2} - \frac{(mg)_1^2}{H_1^2}\right) \tag{21}$$

Esta diferencia de longitud puede se debe a dos causas, por un lado al alargamiento elástico de los cables Δs_e, por otro a la variación de longitud debida a los cables Δs_t. El primero puede cuantificase como

$$\Delta s_e = \frac{l}{EA}\left(H_2 - H_1\right) \tag{22}$$

y el segundo

$$\Delta s_t = \alpha l \left(t_2 - t_1\right) \tag{23}$$

Igualando 21 a la suma de 22 y 23 se tiene la llamada ecuación de cambio de condiciones

$$\frac{l^3}{24}\left(\frac{(mg)_2^2}{H_2^2} - \frac{(mg)_1^2}{H_1^2}\right) = \frac{l}{EA}\left(H_2 - H_1\right) + \alpha l \left(t_2 - t_1\right) \tag{24}$$

que como se puede ver reagrupando los términos se trata de una ecuación cúbica en T que puede escribirse de la forma

$$\frac{24}{l^2 EA} H_2^3 + \left(\frac{(mg)_1^2}{H_1^2} + \frac{24}{l^2}\alpha\left(t_2 - t_1\right) - \frac{24}{l^2 EA} H_1\right) H_2^2 - (mg)_2^2 = 0 \tag{25}$$

esta expresión puede resolverse por cualquiera de los métodos de resolución de ecuaciones no lineales que existen, por ejemplo con el método de Newton-Raphson.

El método de Newton Rapshon permite resolver la ecuación no lineal $g(x) = 0$ pertiendo del desarrollo en serie de Taylor de la función g alrededor del punto x_0

$$g(x) = g(x_0 + \frac{dg}{dx}\Delta x + O^2 = 0 \tag{26}$$

que permite despejar el incremento δx como

$$\Delta x = -\frac{g(x_0)}{\frac{dg}{dx}} \tag{27}$$

permitiendo actualizar el valor de x

4.1.1. Ejemplo

Considérese un caso de cable de 30 m de longitud, sección 116.2 mm^2 y peso de 0.433 kg/m, sometido a una tensión de H_1=1000 kg, el módulo de elasticidad del material vale E=8200 kg/mm^2 y el coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 17{,}8 \cdot 10^{-6o}C^{-1}$. Calcular la tensión en caso de producirse una bajada de la temperatura de 20 ^oC y tener una sobrecarga de hielo de 1.78 kg/m. Calcular la variación fecha.
Para este caso, sustituyendo los valores en la ecuación 25 se obtiene la expresión

$$2{,}79 \cdot 10^{-8} H_2^3 - 3{,}73 \cdot 10^{-5} H_2^2 - 3{,}17 = 0 \tag{28}$$

Empleando el método de Newton Raphson, se resuelve la ecuación 28. Obteniendo un valor de tensión de H_2=1395 kg. Las iteraciones para alcanzar dicho valor pueden verse en la tabla 2. La fecha máxima puede calcularse con la ecuación 19. Para el caso inicial la fecha es de 48.7 mm, para el caso con las condiciones modificadas la fecha alcanza un valor de 143.9 mm.

iter	$H_2^{inicial}$	**g**	$\frac{\partial g}{\partial H_2}$	ΔH_2	H_2^{final}
0	1000	-12.57	0.00928	1354.526	2354.526
1	2354.526	154.225	0.289	-532.977	1821.549
2	1821.549	41.694	0.142	-292.733	1528.815
3	1528.815	9.344	0.082	-113.945	1414.870
4	1414.870	1.184	0.062	-18.981	1395.889
5	1395.889	0.036	0.059	-0.605	1395.284
6	1395.284	0.000	0.059	-0.004	1395.280
6	1395.280	0.000	0.059	0.000	1395.280
7	1395.280	0.000	0.059	0.000	1395.280

Cuadro 2: Iteraciones de Newton Raphason

4.1.2. Ejemplo

Considérese un caso de cable de 30 m de longitud, sección 80 mm^2 y peso de 4.33 N/m, sometido a una tensión de H_1=10 kN, el modulo de elasticidad del material vale E=82 GPa. Sabiendo que la tensión máxima que puede soportar el cable es 27.5 kN, calcular la sobre máxima que puede soportar el cable.
En este caso, hay que sustituir en la ecuación 25 siendo $(mg)_2$ la incógnita del problema y el resto de valores son datos según aparecen en la tabla 3

Dato	**Valor**
l	30 m
A	80 mm^2
$(mg)_1$	4.33 N/m
H_1	10 kN
H_2	27.5 kN
E	82 GPa

Cuadro 3: Datos del ejercicio

En este caso la solución se obtiene despejando directamente el valor de $(mg)_2$, restando a este valor $(mg)_1$, para considerar sólo la sobrecarga. En este caso la sobrecarga máxima sería de 335 kN/m.

Referencias

[1] Irvine, M, "Cable Structures", Dover, 1992.