

# Solución de la ecuación de conducción de calor en 2D

Daniel Casas-Orozco

11 de noviembre de 2018

## 1. Suposiciones

- El sistema se puede describir en coordenadas cartesianas (coordenadas rectas)
- Hay generación uniforme de calor en el sólido
- El proceso ocurre en estado transitorio
- Sólo hay cambios significativos de temperatura en los ejes  $x$  y  $y$  (conducción 2D)
- Las propiedades del material son constantes en el tiempo y con la posición

## 2. Desarrollo del modelo

Con las suposiciones mostradas en la sección anterior, la ecuación de conducción de calor se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

La idea ahora es expresar la Ec. (1) en diferencias finitas. Las segundas derivadas en el lado izquierdo de la Ec. (1) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\approx \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &\approx \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

La derivada temporal se puede expresar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t} \quad (3)$$

Si se asume una formulación *explícita* en el tiempo, las derivadas mostradas en las Ecs. (2) se escriben con el superíndice  $i$ , con lo cual la Ec. (1) queda formulada en diferencias finitas como:

$$\frac{T_{m+1,n}^i - 2T_{m,n}^i + T_{m-1,n}^i}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^i - 2T_{m,n}^i + T_{m,n-1}^i}{(\Delta y)^2} + \frac{q_{gen}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t} \quad (4)$$

### 3. Nodos de frontera

Las condiciones de frontera son de convección en los extremos en contacto con aire:

$$\begin{aligned} \frac{h}{k\Delta x} (T_{\infty} - T_{M,n}) + \frac{1}{k} \frac{T_{M-1,n} - T_{M,n}}{(\Delta x)^2} + \\ \frac{1}{2k(\Delta y)^2} (T_{M,n+1} - 2T_{M,n} + T_{M,n-1}) \\ + \frac{q_{gen}}{2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t} \quad (5) \end{aligned}$$

Los nodos de frontera tienen la mitad del volumen de un nodo central, con lo cual las Ecs. (??) se escribe como: