引论

组合数学是数学的一个重要分支， 是关于离散性问题讨论的。

在计算机飞速发展的今天， 在现代科学技术中发挥了极为重要的作用。

组合数学和组合算法已被广泛应用于计算机科学、信息科学、

电子工程、 人工智能、生命科学、 管理科学等诸多领域。

组合数学主要研究： 按某种约束条件组成的各种离散问题。

一、问题的解

二、解的存在性

三、计数问题与分类

四、能行性问题（构造算法）

五、最优化问题

当然，实际问题的求解不见得刻板的分几步走，

借鉴前人经验加上创新，通盘考虑。

组合数学不需要高深的数学基础，

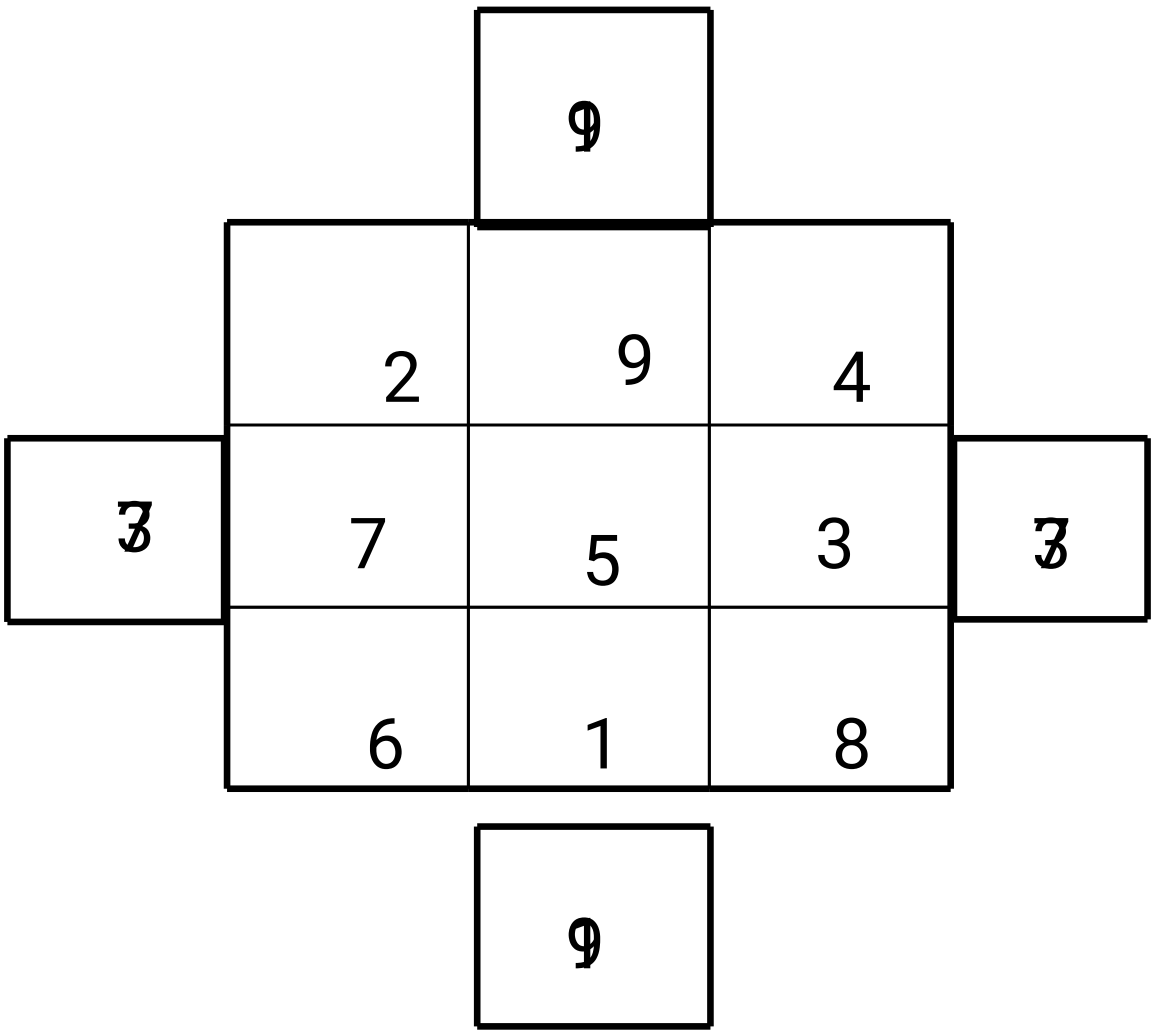
但它有特有的技巧和方法。

更多的是根据实际情况构造一种方法。

解决以上问题不仅需要知识和经验，

也需要技巧和运气（包括毅力）

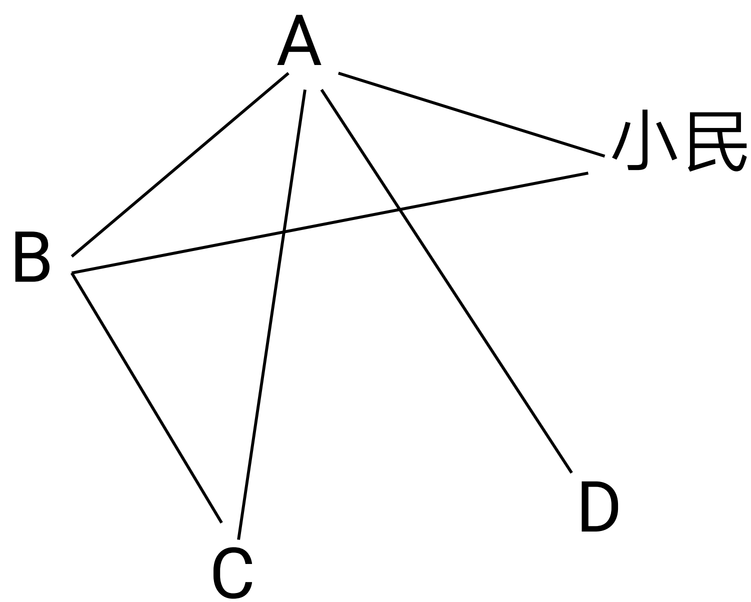
用1、2、…8、9填入下面3阶幻方，使得横竖对角线的三数和相等。



用1、2、…15、16填入下面4阶幻方，使得横竖对角线的三数和相等。

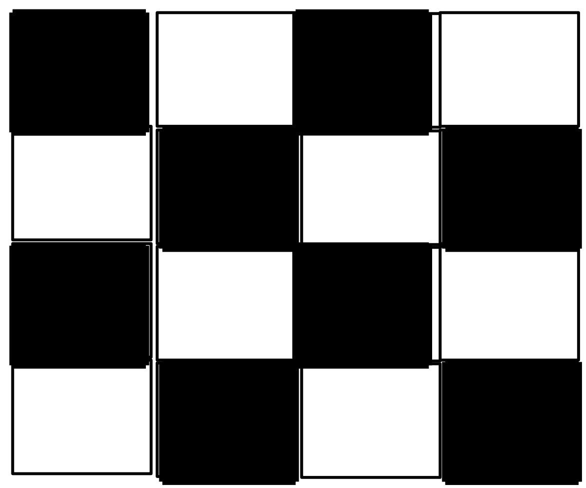
1	12/15	12/14	4
12/19	6	7	12/18
5/8	10	11	12/18
13	13/14/15	12/14/15	16

小民与其他4个同学进行单循环象棋比赛，
比赛到某一时刻，发现A、B、C、D同学
分别比了4、3、2、1场。问此时小民比了几场？与谁比？



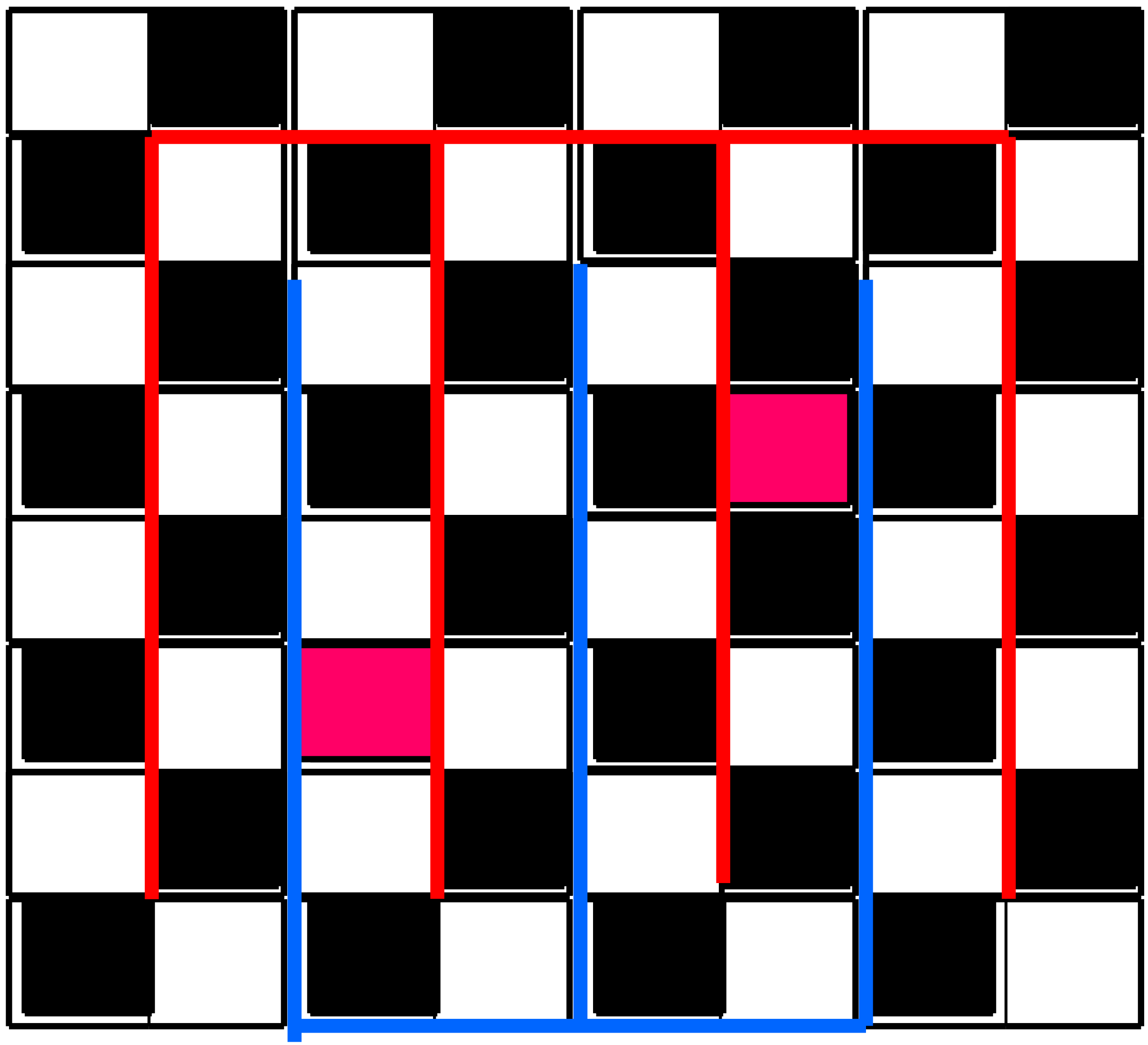
问题 下图是从围棋盘上裁下来的一块，
它有14个小方格．

请问，能否把它剪成7个1×2的小矩形？



问题 一个国际象棋盘，共8×8个黑白相间的正方形棋盘，如果任意挖去一个黑格和一个白格。

请问，能否用31个1×2的小矩形覆盖残盘？如何覆盖？



1. 乒乓球比赛问题

101名选手参加乒乓球单淘汰赛，问产生冠军要比赛几场？

50+25+13+6+3+2+1=100

2. Hanoi塔问题

某药店运来某药品10瓶，每瓶1000粒，

外观完全一样。后发现有一瓶药丸每粒超重10毫克，

称几次可以找出？怎么称？

解：每瓶分别记为1，2，.....，10。

从第k瓶拿出k颗放在一起称　不失一般性

如果设总质量超出50毫克　就可以判断是第五瓶超重

某药店运来某药品10瓶，每瓶1000粒，

外观完全一样。后发现有若干瓶药丸每粒超重10毫克，

称几次可以找出？怎么称？

解：每瓶分别记为1，2，4，8.....，512 $=2^{(10-1)}$。要化为二进制

从第k瓶拿出k颗放在一起称　不失一般性

如果设总质量超出270毫克　$27=16+8+2+1=2^4+2^3+2+2^0$

就可以判断是第五、四、二、一瓶超重

鸽巢原理和Ramsey定理

鸽巢原理的简单形式及其应用

鸽巢原理也称为抽屉原理　是组合数学中的基本原理

是证明问题的解的存在性很有效的基本工具

从这个原理出发可以得到许多并非显而易见的有趣结果

遵循一个最不利原则

这个原理指：有n只鸽子飞进m（$n>m$）个鸽笼时，

则至少有一个笼内有2只或以上鸽子

其作为数学原理的简单形式如下：

鸽巢原理

把$n+1$个物体放入n个盒子中，

则至少有一个盒子内有两个或两个以上物体。

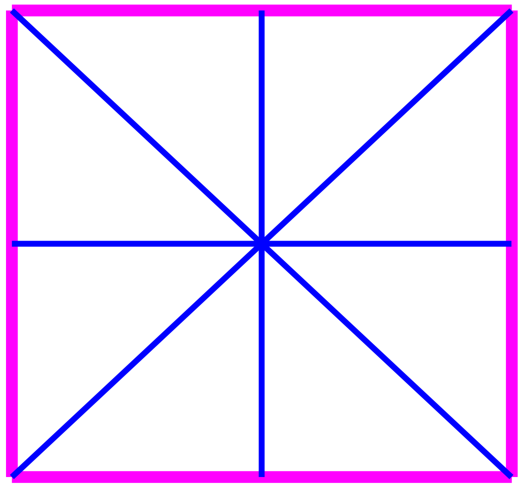
什么当盒子？什么当物体？

例1.　13个人中至少有两个人是同一月出生。

例2.　一个弹药库每天有一人保卫，六个人在一周内至少有一个人保卫不少于两天。

例3.　有10双鞋放在鞋架上，任取11只，则至少有两只鞋人恰好是配对的。

例4. 在 边长为2的正方形中5个点，至少存在两个点，使得它们之间的距离小于等于$\sqrt{2}$



巧妙的构思使粗看浅显的鸽巢原理显示强大的生命力

关键是**构造**

例5. 设 a_1, a_2, a_3 是三个任意的整数，b_1, b_2, b_3 是 a_1, a_2, a_3 的任意排列 $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ 中至少有一个偶数。

用最不利原理说明。分情况讨论

或：b_1, b_2, b_3 是 a_1, a_2, a_3 的一个排列

a_1, a_2, a_3 b_1, b_2, b_3 至少有4个同是奇数或同是偶数

将这4个数放入3个盒子中， 则必有两个在同一盒子中

其差为偶数

故 $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3$ 至少有一个偶数

例6. 在1,2.3…$2n$ 中取出$n+1$个不相等的数，则至少存在两个数是互素的。

任意两个相邻的自然数n、$n+1$是互素的

先在1,2.3…$2n$ 中取出n

(1,), (3 ,), (5 ,), (7,) ,… , ($2n$-1,)

再取其他的任何一个数

总可以跟原来的一个数构成一组相邻的自然数的。

例7. 在1,2.3…2n 中取出n +1个不相等的数，则至少存在一个数是另一个数的倍数。

任意一个数可以写成 $2^k \cdot l$

其中 k 为非负整数 l 为正奇数

在1,2.3…2n 中只有n 个不相等的奇数

所取的$n+1$ 个数可以写成 $2^{k_i} \cdot l_i$

共有$n+1$ 个 l_i

而 l_i 只有n 种情况 则至少有两个 l_i, l_j 使得 $l_i = l_j$

则相应的两个数，一个数是另一个数的倍数。

题中$n+1$ 是使命题成立的最小的数，若取n 个，

则$n+1$， $n+2$ …$n+n$ 满足不了要求。

例8. 任意一群人中至少存在两个人，他们在这群人中认识的人数恰好相等。

设任意一群人为*n*人 $n \geq 2$ **当*n=2*时，显然成立**

当 $n \geq 3$ **时，设** x_i **表示第*i*个人的熟人数目** $0 \leq x_i \leq n-1$

分情况讨论：

(1):设每人均有熟人 则 $x_i \neq 0$ 有：$1 \leq x_i \leq n-1$

则至少存在*l*与*k*，使得： $x_l = x_k$

(2):设只有一人没有熟人 不妨假设 $x_n = 0$

则有：$1 \leq x_i \leq n-2$ **归纳到情况(1)**

(3):设至少有两人没有熟人，则这两人熟人的人数均为0，

例9. 任意给定n个整数 $a_1, \ldots, a_n$

证明：存在着连续的若干个数，其和是n的倍数

证明： $S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$

则 $S_i = p_i n + r_i$ 有：$0 \le r_i \le n-1$

(1):如果某一 $r_i = 0$ 结论显然成立

(2):否则有 $1 \le r_i \le n-1$

则至少存在l与k，使得： $r_l = r_k$ $l < k$

$$S_k - S_l = (p_k n + r_k) - (p_l n + r_l) = (p_k - p_l) n$$

$$a_{l+1} + a_{l+2} + \ldots + a_k = (p_k - p_l) n$$

结论成立

例10. 一个棋手为参加比赛进行了77天的练习。

每天至少下一盘棋 每周至多下12 盘棋

证明：存在一个n 天里共下了21盘棋。

证明：设 a_i 表示从第一天到第i 天下棋的总盘数

则 $1 \le a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_{77} \le 12 \times \frac{77}{7} = 132$

构造序列 $a_1 + 21,\ a_2 + 21,\ \ldots a_{77} + 21 \le 132 + 21 = 153$

则有 $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{77}$ $a_1 + 21,\ a_2 + 21,\ \ldots a_{77} + 21$

共154个数

$1 \le a_i \le 153$ $1 \le a_i + 21 \le 153$

则至少存在l 与k， 使得：$a_l = a_k + 21$

$$a_l - a_k = 21$$

鸽巢原理的基本形式：

把m个物体放入n个盒子中，

则至少有一个盒子内至少有 $1+[\frac{m}{n}]$ 个物体。

例1. 13个人中至少有两个人是同一月出生。

例2. 40个人中至少 $1+[\frac{40}{12}]$ 有两个人是同一月出生。

例3：在人数为6的一群人中，一定有至少三个人彼此认识或彼此不认识。

解：这群人中任取一个人设为*P*

则其余5人分成两部分：*F*和*S*

F={与P认识的人}　　S={与P不认识的人}

*F*或*S*中至少有一个至少有3人。

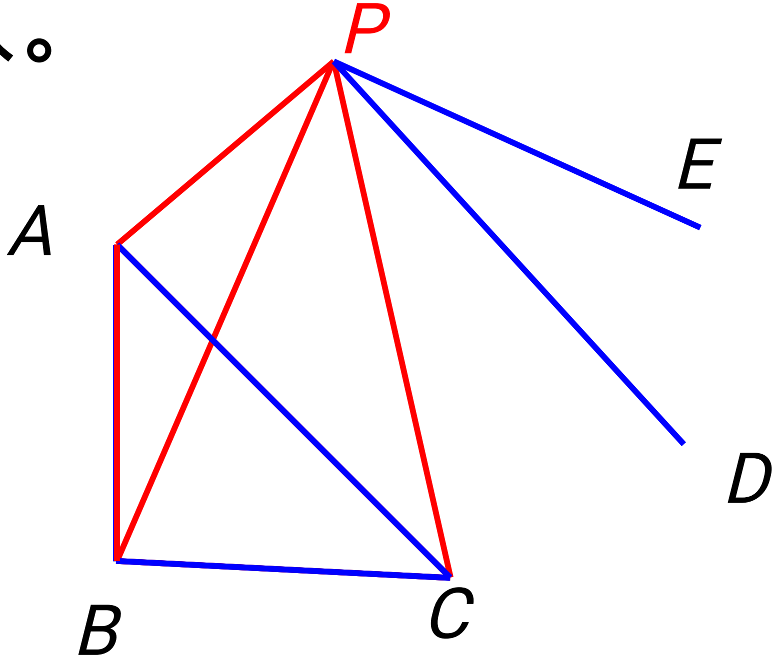
不妨设*F*有3人*A,B,C*。

*A,B,C*中分情况讨论：

(1):设三人都不认识

(2):设三人都认识

(3):不妨*A,B*认识



鸽巢原理的加强形式：

设 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ 为正整数 若 $q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$

个物体放入n个盒子中。 则第一个盒子含有q_1个物体，

或者第二个盒子含有q_2个物体，

……或者第n个盒子含有q_n个物体，

令 $q_1=q_2=\ldots=q_n=r$ 则有

推论1：若把 $n(r-1)+1$ 个物体放入n个盒子中。

则至少有一个盒子至少含有r个物体。

至少有一个大于等于平均数

推论2：设$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 为正整数 满足 $\dfrac{m_1+m_2\ldots+m_n}{n}>r-1$

则$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 至少有一个 大于等于r r为正整数

$$m_1+m_2\ldots+m_n>n(r-1) \quad \geq n(r-1)+1$$

例:将1,2,...,10随机摆成一圈，必有相连的三个数的和至少为17。

解：设 m_i **为该圈上相连三个数的和** $i=1,2\ldots,10$

$$m_1+m_2\ldots+m_n=3\sum_{n=1}^{10}n \quad \mathbf{=165}$$

$$\frac{m_1+m_2\ldots+m_n}{10}=16.5 \quad \mathbf{>17\text{-}1}$$

r=17

例:设有两个队Q_1和Q_2　每队均有30人，

Q_1由15名男孩15名女孩组成　Q_2男、女不限。

两队按序号面对面站好。Q_1队不动　Q_2队迂回往右错动。每次依次错动一个位置，　证明：当Q_2错动某一位置时。Q_1和Q_2在对应位置上两个小孩至少有15对是性别相同的。

解：Q_2队错动一圈回到初始状态时， 无论男孩女孩

在对应位置上都与Q_1队的15名小孩同性别，

故同性别的总对数为 $15\times 30=450$

每个位置上同性别的平均数为 $\dfrac{450}{30}=15>15-1$

$r=15$

例. 任意给定n^2+1个不等实数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$

证明：该序列中至少存在一个由$n+1$个实数组成的单调增或单调减子序列

证明： 设不存在长为$n+1$单调减子序列

设：m_i 表示从a_i开始单调增子序列的项数或长度，

给定n^2+1个不等实数 故可产生n^2+1个长度

$$m_1, m_2, \ldots, m_{n^2+1}$$

如果某个 $m_i \geq n+1$ 结果成立

如果全部的 $m_i < n+1$ $(i = 1, 2, \ldots, n^2+1)$

$$1 + [\frac{n^2+1}{n}] = n+1$$ 即至少有$n+1$个长度相等

不妨设：$m_{k_1} = m_{k_2} \ldots = m_{k_{n+1}} = m$ $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots k_{n+1} \leq n^2+1$

则应有 $a_{k_1} > a_{k_2} \ldots > a_{k_{n+1}}$ 矛盾！

例序列10,4,13,8,21,9,18,19,17,14 有 4,8,9,17

Ramsey数

Ramsey定理是鸽巢原理的推广，其一般形式很复杂。

引理1：在人数为6的一群人中，一定有至少三个人彼此认识或彼此不认识。

或：设G是具有6顶点的完全图K_6，对任意一条边涂以红色或蓝色，则G中一定含有一个红色的三角形，或者蓝色的三角形

引理2：在人数为10的一群人中，一定有至少四个人彼此认识或彼此三人不认识。

或：设G是具有10顶点的完全图K_{10}，对任意一条边涂以红色或蓝色，则G中一定含有一个红色的四角形，或者蓝色的三角形

引理3：在人数为10的一群人中，一定有至少三个人彼此认识或彼此四人不认识。

或：设G是具有10顶点的完全图K_{10}，对任意一条边涂以红色或蓝色，则G中一定含有一个红色的三角形，或者蓝色的四角形

引理4：在人数为20的一群人中，一定有至少四个人彼此认识或彼此四人不认识。

或：设G是具有20顶点的完全图K_{20}，对任意一条边涂以红色或蓝色，则G中一定含有一个红色的四角形，或者蓝色的四角形

定义：设a，b为正整数，令$R(a,b)$是保证

至少有a个人彼此认识　或b个人彼此不认识

的最少人数。 称$R(a,b)$为Ramsey数

定义： G是完全图，对任意一条边涂以红色或蓝色，

设a，b为正整数，令$R(a,b)$是保证

至少有红色a边形 或蓝色b边形

的最少顶点数。称$R(a,b)$为Ramsey数

有上述知：

$R(3,3) \le 6$　　$R(3,4) \le 10$

$R(4,3) \le 10$　　$R(4,4) \le 20$

Ramsey数的计算很困难，至今知道的很少。

*Ramsey*数的性质：

$R(a,b) = R(b,a)$

$R(a,2)=a \quad R(2,b)=b$

$$R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1)$$

$R(p-1,q)+R(p,q-1)$ 个人中任取一人*P*。

其余 $R(p-1,q)+R(p,q-1)-1$ 个人分两类

与*P*认识为*F*　与*P*不认识为*T*

则或者*F*至少有 $R(p-1,q)$　或者*T*至少有 $R(p,q-1)$

(1) $|F| \ge R(p-1,q)$　加*P*即得

(2) $|T| \ge R(p,q-1)$　加*P*即得

Ramsey数的性质：

$$R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1)$$

这一性质给出了Ramsey数的上界估计

但不一定是最好的结果

当 $R(p-1,q)$ $R(p,q-1)$ **均为偶数时，有**

$$R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1) - 1$$

证明 $R(3,4) = 9$

$R(3,3) = 6$ $R(2,4) = 4$

$$R(3,4) \le R(3,3) + R(2,4) - 1 = 9$$

排列和组合

两个基本计数原理：　加法原理　和乘法原理

加法法则

如果做一件事情一步可以完成：

第一种方法有m_1种，第二种方法有m_2种，第三种方法有m_3种.

则完成这件事情的方法共有$m_1+m_2+m_3$种

乘法法则

如果做一件事情三步可以完成：

第一步方法有m_1种，第二步方法有m_2种，第三步方法有m_3种.

则完成这件事情的方法共有$m_1 . m_2 . m_3$种

在1、2、3、4、5中任意选三个数字，可以组成多少没有重复数字的 三位数？

可以组成多少个没有重复数字的三位奇数？

6个人排成一排，任意的排法有几种？

甲排在第一个的有多少?　甲乙必须排在一起的有多少？

甲乙不排在一起的有多少？

金华到杭州共5个站，问 有多少种车票？多少种票价？

从n个物品中取到m个，共有多少种取法?

一种是排列，　一种是组合。

8个男同学选出4个　各选择一束不同的花

送给4个女生。　一共有多少种方法？

6个人围成一圈，排法有几种？

4个男同学4个女生围成一圈，

交替而坐。一共有多少种方法？

以上为无重复的排列与组合。

对于排列与组合，不仅仅要掌握代数运算。

在1、2、3…300中任意选三个数字，其和能被3 整除有多少种方法？

解： $A=\{$除3余0$\}$ $B=\{$除3余1$\}$ $C=\{$除3余2$\}$

$$3C_{100}^{3}+C_{100}^{1}C_{100}^{1}C_{100}^{1}$$

证明：$C_{2n}^{2}=2C_{n}^{2}+n^{2}$　　利用组合分析法

C_{2n}^{2} 表示$2n$个中取出2个

分$2n$个物品成2堆，A、B　　每堆各有n个

分别从A中取两个　　或从B中取两个

或A、B各一个

证明：$C_{n+1}^{k+1}=C_k^k+C_{k+1}^k+\ldots+C_n^k$

$$S=\{a_1, a_2 \ldots, a_n, a_{n+1}\}$$

从S中取出$k+1$个元素，分类如下:

取出的元素含a_1: C_n^k

不含a_1而含 C_{n-1}^k

不含a_1，a_2而含a_3 C_{n-2}^k

以此类推得:

多重集的排列和组合

多重集的排列

S是一个多重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ldots,\ \infty\cdot a_k\}$ 无限多重集

或： $S=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ldots,\ n_k\cdot a_k\}$ 有限多重集

从S中取出r个元素的有序编排称为S的r排列。

如果S中共有n个元素。 S的n排列称为S的全排列

定理： 若 $S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2,\ldots,\ \infty\cdot a_k\}$

则S的r排列数为： k^r

或：

定理：

若 $S=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2,\ldots,\ n_k\cdot a_k\}$ $\forall n_i\geq r$

则S的r排列数为： k^r

例：求四位数的二进制数的个数？

相当于 $S=\{\infty\cdot 0,\ \infty\cdot 1\}$ **4排列。** $2^4=16$

定理：若 $S=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2\ldots,\ n_k\cdot a_k\}$ $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$

则S的全排列数为 $$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots n_k!}$$

若：$S=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2\}$ $$N=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!}=C_n^{n_1}$$

例：用两面红旗，三面黄旗依次悬挂在一根旗杆上。问可以组成多少种不同的标志。

相当于 $S=\{2\cdot\text{红旗}, 3\cdot\text{黄旗}\}$ 全排列。

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=C_5^2=10$$

例：由1,2,3,4,5,6这六个数字能组成多少个五位数？多少个大于34500的五位数？

相当于$S=\{\infty\cdot 1,\ \infty\cdot 2,,\ \infty\cdot 3,\ \infty\cdot 4,\ \infty\cdot 5,\ \infty\cdot 6\}$ ***5*-排列。**

（1） $N=6^5$

（2） 万位数为：4,5,6时 $N_1=3\times 6^4$

万位数为：3，千位数5,6时 $N_2=2\times 6^3$

万位为：3，千位4，百位为5,6时 $N_3=2\times 6^2$

例：一楼梯共有九阶，某人一步走一阶或二阶，问有多少种走法？

每步都是一阶， $S=\{9\cdot 1,\ 0\cdot 2\}$ C_9^0

一步都是二阶，7步一阶 $S=\{7\cdot 1,\ 1\cdot 2\}$ C_8^1

二步都是二阶，5步一阶 $S=\{5\cdot 1,\ 2\cdot 2\}$ C_7^2

三步都是二阶，3步一阶 $S=\{3\cdot 1,\ 3\cdot 2\}$ C_6^3

四步都是二阶，1步一阶 $S=\{1\cdot 1,\ 4\cdot 2\}$ C_5^4

$S=\{n_1\cdot a_1,\quad n_2\cdot a_2\ldots,\quad n_k\cdot a_k\}\qquad n=n_1+n_2+\ldots+n_k$

的r-排列数N问题小结如下

若$r>n$： $N=0$

若$r=n$： $N=\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ldots n_k!}$

若$r<n$： $\forall n_i\geq r$ $\quad N=k^r$

若$r<n$： **且某一** $n_i<r$

对N没有一般的解　　其他方法解决。

多重集的组合

$S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2\ldots,\ \infty\cdot a_k\}$

或： $S=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2\ldots,\ n_k\cdot a_k\}$ $\forall n_i\geq r$

从S中取出r个元素 可以认为S的r-组合为一个子多重集。

$\{x_1\cdot a_1,\ x_2\cdot a_2\ldots,\ x_k\cdot a_k\}$ $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ $\forall x_i\geq 0$

定理： 若 $S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2\ldots,\ \infty\cdot a_k\}$

或： $S=\{n_1\cdot a_1,\ n_2\cdot a_2\ldots,\ n_k\cdot a_k\}$

则S的r-组合数为： C_{k+r-1}^{r}

方程： $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的解的个数就是组合数

给定一个多重集 $T=\{(k-1)\cdot 0,\ r\cdot 1\}$ 给T一个排列

$\underbrace{11\ldots1}_{x_1}\ 0\ \underbrace{11\ldots1}_{x_2}\ 0\ldots0\ \underbrace{11\ldots1}_{x_k}$ 一个排列相当一个解

就是一个组合。

$S = \{\infty \cdot a_1, \ \infty \cdot a_2 \ldots, \ \infty \cdot a_k\}$

要求*S*的*r*-组合中每个元素至少出现一次。

则*S*的*r*-组合数为： C_{r-1}^{k-1}

满足要求的*S*的*r*-组合 相当于的*S*的*(r-k)*-组合

$$C_{k+(r-k)-1}^{r-k} = C_{r-1}^{r-k} = C_{r-1}^{k-1}$$

例：求 $S = \{1 \cdot a_1, \ \infty \cdot a_2 \ldots, \ \infty \cdot a_k\}$ *r*-组合数

（1）a_1在组合中 $N_1 = C_{(r-1)+(k-1)-1}^{r-1} = C_{r+k-3}^{r-1}$

（2）a_1不在组合中 $N_2 = C_{r+(k-1)-1}^{r} = C_{r+k-2}^{r}$

有一个电冰箱厂生产15种电冰箱， 装入集装箱销往外地。每个集装箱可以装18台电冰箱，要求每个集装箱每种电冰箱至少有一台。不同的集装箱的种类有多少？

相当于18-组合

进一步相当于(18-15)-组合

$$C_{r-1}^{k-1} = C_{18-1}^{15-1} = C_{17}^{3} = 680$$

证明：$C_{n+k+1}^{k}=C_{n+k}^{k}+C_{n+k-1}^{k-1}+C_{n+k-2}^{k-2}\cdots+C_{n}^{0}$

模型：国家委托某大学建一支k名成员的专家攻关组，连同该大学可用$n+2$个单位中选取，每个单位名额不限，

相当于 $M=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2\ldots,\ \infty\cdot a_{n+1}\ \ \infty\cdot a_{n+2}\}$ 选k个

有：$C_{(n+2)+k-1}^{k}=C_{n+k+1}^{k}$

从该大学来看，分类如下:

该大学没人选上 C_{n+k}^{k}

该大学一人选上 C_{n+k-1}^{k-1}

该大学二人选上 C_{n+k-2}^{k-2}

……

该大学k人选上 C_{n}^{0}

$S=\{n_1\cdot a_1,\quad n_2\cdot a_2\ldots,\quad n_k\cdot a_k\}\qquad n=n_1+n_2+\ldots+n_k$

的r-组合数N问题小结如下

若$r>n$： $N=0$

若$r=n$： $N=1$

若$r<n$： $\forall n_i\geq r\qquad N=C_{k+r-1}^{r}$

若$r<n$： **且某一** $n_i<r$

对N没有一般的解　　其他方法解决。

包容排斥原理

包容排斥原理是一个计数原理，其主要思想是：

但问题的直接计算相当困难时， 应考虑间接求解的方法。

设S是有限集，P_1, P_2为两种性质。

$A=\{x \mid x具有性质P_1\}$　　$B=\{x \mid x具有性质P_2\}$

求S中既不具有性质P_1又不具有性质P_2的元素的个数。

或：

求S中具有性质P_1或具有性质P_2的元素的个数。

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

或：

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

推广：$|\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}|=|S|-|A|-|B|-|C|$

$$+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\ -|A\cap B\cap C|$$

$$|A\bigcup B\bigcup C|\ =|A|+|B|+|C|$$

$$-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|\ +|A\cap B\cap C|$$

进一步：

$$|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}^{n}|A_i\cap A_j|-\ldots(-1)^n|A_1\cap A_2\ldots\cap A_n|$$

或：

$$|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}^{n}|A_i\cap A_j|-\ldots(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\ldots\cap A_n|$$

例：在1,2,3...,9中取7个不同的数构成7位数

如果不允许5和6相邻，问有多少种方法?

如果5和6相邻

$$N_1 = 6! \times 2 \times C_7^5 = 30240$$

任意排法：

$$P_9^7$$

满足要求：

$$N = P_9^7 - N_1 = 151200$$

例：某班有学生60人，其中24个喜欢数学，28个喜欢物理26个喜欢化学，10个同时喜欢数学物理，8个同时喜欢数学化学14个喜欢物理化学，6个喜欢数理化，问多少人对数理化都不喜欢

设A_1，A_2，A_3分别表示喜欢数、理、化

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|$$

$$+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=8$$

例：52张扑克牌，取13张。求*A*、*K*为同花色的取法？

设A_1，A_2，$A_{3,}$ A_4表示取到草花，方块，红桃，黑桃。

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{1}^{4} |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j|$$

$$+\sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= C_4^1 \times C_{50}^{11} - C_4^2 \times C_{48}^9 + C_4^3 \times C_{46}^7 - C_4^4 \times C_{44}^5$$

例：求在1和1000之间不能被5、6和8整除的个数

$S=\{1,2,\ldots,1000\}$ $A_i=\{x \mid x\in S \wedge i \mid x\}$ $i=5,6,8$

$|A_5|=[\frac{1000}{5}]=200$ $|A_6|=[\frac{1000}{6}]=166$

$|A_8|=[\frac{1000}{8}]=125$

$|A_5\cap A_6|=[\frac{1000}{[5,6]}]=33$ $|A_5\cap A_8|=[\frac{1000}{[5,8]}]=25$

$|A_8\cap A_6|=[\frac{1000}{[8,6]}]=41$

$|A_5\cap A_6\cap A_8|=[\frac{1000}{[5,6,8]}]=8$

$$|\overline{A_5}\bigcap\overline{A_6}\bigcap\overline{A_8}|=1000-(200+166+125)$$
$$+(33+25+41)-8=600$$

例: n是正整数，$n>1$,欧拉函数$\Phi(n)$表示小于n且与n互质的正整数的个数， 求$\Phi(n)$的表达式

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k} \qquad p_1, p_2, \ldots, p_k$$ 为素数

$$S = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad A_i = \{x \mid x \in S \wedge p_i \mid x\}$$

$$|S| = n \qquad |A_i| = [\frac{n}{p_i}] = \frac{n}{p_i}$$

$$|A_i \cap A_j| = [\frac{n}{[p_i, p_j]}] = \frac{n}{p_i p_j} \qquad |A_i \cap A_j \ldots A_k| = \frac{n}{p_i p_j \ldots p_k}$$

$$\Phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}| = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{n}{p_i p_j}$$

$$+ \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_i p_j \ldots p_k} = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_k})$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad \Phi(30) = 30(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 8$$

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

重要公式： A_1, A_2, A_3 **为有限集** S为全集

$$A_1 \cap (\overline{A_1 \cap A_2}) = A_1 \cap (S - (A_1 \cap A_2)) = A_1 \cap S - A_1 \cap (A_1 \cap A_2)$$

$$= A_1 - A_1 \cap A_2$$

$$|A_1 \cap (\overline{A_1 \cap A_2})| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$$

$$\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3 = (S - A_1) \cap A_2 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 - A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$|\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$A_1 \bigcap \overline{A_2} \bigcap \overline{A_3} = A_1 \bigcap (\overline{A_2 \bigcup A_3}) = A_1 \bigcap (S - (A_2 \bigcup A_3))$$

$$= A_1 - A_1 \bigcap (A_2 \bigcup A_3)$$

$$|A_1 \bigcap \overline{A_2} \bigcap \overline{A_3}| = |A_1 - A_1 \bigcap (A_2 \bigcup A_3)| = |A_1| - |A_1 \bigcap (A_2 \bigcup A_3)|$$

$$= |A_1| - |(A_1 \bigcap A_2) \bigcup (A_1 \bigcap A_3)|$$

$$= |A_1| - |A_1 \bigcap A_2| - |A_1 \bigcap A_3| + |A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3|$$

用肯定的语气符号化。用 $\overline{A}$ **表示对立面**

例：外语教研室有15位教师，教英语有9人，教日语有7人，教法语有6人，兼教英语和日语有5人，兼教英语和法语有4人，兼教日语和法语有3人，有3人英、法、日都可以教。

(1) 问英、法、日以外的课有几人？

(2) 只教英、法、日一门课有几人？

(3) 问英、法、日二门课有几人？

设A_1，A_2，A_3分别表示教英、日、法语

$|A_1|=9$ $|A_2|=7$ $|A_3|=6$ $|A_1\cap A_2|=5$ $|A_1\cap A_3|=4$ $|A_2\cap A_3|=3$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3$

(1) $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|$

$+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|=2$

(2) 只教英、法、日一门课有几人？

$|A_1| = 9 \quad |A_2| = 7 \quad |A_3| = 6 \quad |A_1 \cap A_2| = 5 \quad |A_1 \cap A_3| = 4 \quad |A_2 \cap A_3| = 3$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

(2) $|A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| + |\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}| + |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3|$

$$= |A_1| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$+ |A_2| - |A_2 \cap A_1| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$+ |A_3| - |A_3 \cap A_1| - |A_3 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7$$

(3) 问英、法、日二门课有几人？

$|A_1| = 9 \quad |A_2| = 7 \quad |A_3| = 6 \quad |A_1 \cap A_2| = 5 \quad |A_1 \cap A_3| = 4 \quad |A_2 \cap A_3| = 3$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

(3) $|A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}| + |A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| + |\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3|$

$= |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$+ |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$+ |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

错位排列

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$是有限集，　　则S排列有n！

其中两个为$12..n$和 $i_1,i_2,\ldots\ldots i_n$

$i_1 \neq 1, i_2 \neq 2 \ldots\ldots i_n \neq n$

称 $i_1,i_2,\ldots\ldots i_n$　　为$12..n$的一个错排　用D_n表示错排数

一个错位排列就是使得原排列的每个元素都不在原来的位置上

10名司机驾驶10辆汽车进入一汽车试验场，试车时，

要求每个司机都不能驾驶自己原来的车，有多少种排法？

$D_1=0$　$D_2=1$　　21　　　$D_3=2$　　231.　312

$D_4=9$　　2143.　3142.　4123.　2341.
3412.　4312.　2413.　3412.
4321

定理： $n \geq 1$ 有 $D_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$ 则S的 全排列U 有n！

$p_1 p_2 \ldots p_n$ **为$S=\{1,2,\ldots,n\}$的一个排列** $A_i = \{ x \mid x \in U \ \wedge \ p_i = i\}$

$$D_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$$

$|A_i| = (n-1)!$ $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

$$|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} |A_i \cap A_j| - \ldots (-1)^n |A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n|$$

$$= n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \ldots (-1)^n C_n^n (n-n)!$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots$$

$$n!\, e^{-1} = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots)$$

$$= D_n + n!((-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \ldots)$$

$$e^{-1} \approx \frac{D_n}{n!}$$

误差 $$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

D_n 满足下面等式：$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) & n \geq 3 \\ D_1 = 0, \qquad D_2 = 1 \end{cases}$

$i_1, i_2, \ldots\ldots i_n$ 为12..n 的一个错排

考虑1、2、..n 的所有错排

第一位数字是2、3、..n 的错排可以划分为n-1类

每一类的错排数都相等 $D_n = (n-1)\, d_n$

d_n 表示第一位是2的错排数

考虑d_n 错排 *形如* $2 i_2\, i_3 \ldots\ldots i_n$ 分两类：

第一类形如 $21 i_3\, i_4 \ldots\ldots i_n$ $i_3, i_4, \ldots\ldots i_n$ 为34..n 的一个错排 D_{n-2}

第二类形如 $2 i_2\, i_3 \ldots\ldots i_n$ $i_2, i_3, \ldots\ldots i_n$ 为134..n 的一个错排 D_{n-1}

D_n 满足下面等式：$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) & n \geq 3 \\ D_1 = 0, & D_2 = 1 \end{cases}$

$i_1, i_2, \ldots\ldots i_n$ 为12..n 的一个错排

考虑1、2、..n 的所有错排可以分成互不相容的两类

第一类的第一位数字是k $k \in \{2, 3, \ldots\ldots, n\}$

令： $a_1 = k, a_k = 1$ 将剩余的n-2个数进行错排

相当于 $\{2, 3, \ldots, k-1, k+1.., n\}$ 此类含有（n-1）D_{n-2}

第二类的第一位数字是k $k \in \{2, 3, \ldots\ldots, n\}$

令： $a_1 = k, a_k \neq 1$ 相当于$\{2, 3, \ldots, k-1, 1, k+1.., n\}$

此类含有（n-1）D_{n-1}

$$D_n = (n-1) D_{n-1} + (n-1) D_{n-2} = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

利用迭代法求解D_n $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$$

$$D_{n-1} - (n-1)D_{n-2} = -[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}]$$

$$D_{n-2} - (n-2)D_{n-3} = -[D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}]$$

以此类推有：

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^2[D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}]$$

$$= (-1)^3[D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}]$$

$$\cdots\cdots$$

$$= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2}$$

再利用迭代法求解D_n

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^{m-2}$$

$$= n[(n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}] + (-1)^n$$

$$= n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= n(n-1)[(n-2)D_{n-3} + (-1)^{n-2}] + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= \dots\dots\dots\dots$$

$$= n(n-1)(n-2)\dots 2D_1 + n(n-1)(n-2)\dots 3(-1)^2$$

$$+ n(n-1)(n-2)\dots 4(-1)^3 + \dots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$= n![(-1)^2\frac{1}{2!} + (-1)^3\frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!}]$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{n!})$$

例:(1)重新排列123456789，使得偶数在原来的位置而奇数都不在原来的位置，有多少种排法?

(2)如果要求只有4个数在原来的位置上，又有多少种排法?

解:(1) 排列1、3、5、7、9的错排问题。

$$D_5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^5 \frac{1}{5!}\right) = 44$$

(2) 任取4个剩余5个的错排问题。

$$C_9^4 D_5 = 126 \times 44 = 5544$$

例n封信n个信封，任意摆放，恰好有r封信匹配的排法？

$$C_n^r \quad D_{n-r}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\ (n-r)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-r}\ \frac{1}{(n-r)!}\right)$$

$$=\frac{n!}{r!}\ \left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-r}\ \frac{1}{(n-r)!}\right)$$

例:设有n 不同的册书给n 个学生，之后又将这n 册书重新收回后分给这n 个学生，问有多少种分配方法使得没有一个同学两次拿到同一本书？

$$P_n^n \ D_n = n! \times n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$\approx (n!)^2 \ e^{-1}$$

有限制条件的排列问题

问题：设有n个学生，每天要排成一列做早操，除第一个以外，

每一个人的前面都有另一个学生，

由于学生们不喜欢每天排在自己前面的是同一个人，

希望每天都可以改变一下排在自己前面的那个人，

有多少种方法？

相对位置上有限制的排列问题。 抽象如下：

原排列为12..n　　后排列不允许出现12　23　34　…(n-1)n

这样的排列数记为：Q_n

$Q_1=1$　　$Q_2=1$　　$Q_3=3$　　$Q_4=11$

对于一般的n，有下列定理：

定理：$n \geq 1$ 有 $Q_n = n! - C_{n-1}^{1}(n-1)! + C_{n-1}^{2}(n-2)! - C_{n-1}^{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 1!$

证明：设$X=\{1,2,\ldots n\}$的排列有n！

把这些排列构成的集合记为S $j = 1, 2, 3 \ldots, n-1$

如果X的一个排列中有$j(j+1)$出现 则称这个排列具有性质P_j

$A_j = \{ x \mid x \in S \wedge \text{具有性质} P_j \}$

$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$

$|A_1| = (n-1)!$ $|A_j| = (n-1)!$

再计算：$|A_i \cap A_j|$

如果一个排列属于 $A_i \cap A_j$ 则有：$i(i+1)$ $j(j+1)$

分两种情况：

$(1): i+1 = j$ 排列中有：$i(i+1)(i+2)$ 有：$(n-2)!$

$(2): i+1 \neq j$ 排列中有：$i(i+1),\quad j(j+2)$ 有：$(n-2)!$

类所有：$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$

$$\therefore Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}}| = |S| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le n-1}^{n} |A_i \cap A_j| - \dots (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}|$$

$$= n! - C_{n-1}^{1}(n-1)! + C_{n-1}^{2}(n-2)! - \dots (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 1!$$

求集合$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$个全排列中$abc$，$efgh$均不出现的全排列的个数？

解：集合的全排列有8！ 把这些排列构成的集合记为S

排列中有abc出现 则称这个排列具有性质P_1

排列中有$efgh$出现 则称这个排列具有性质P_2

$A_j=\{x \mid x\in S\wedge$具有性质$P_j\}$ $j=1, 2$

$\therefore |\overline{A_1}\cap\overline{A_2}| = |S| - (|A_1|+|A_2|) + |A_1 A_2|$

$= 8! - (6! + 5!) + 3!$

有n个小孩坐在旋转的木马上，问有多少种方法？

使得交换座位后一个小孩前面的小孩都不是用来的。

解：$X=\{1,2,\ldots n\}$的圆排列有$(n-1)!$

把这些排列构成的集合记为S

如果X的一个排列中有$j(j+1)$出现　则称这个排列具有性质P_j

如果X的一个排列中有$n1$出现　　则称这个排列具有性质P_n

$$A_j=\{x \mid x\in S \wedge \text{具有性质} P_j\} \qquad j=1,2,3\ldots,n-1,n$$

$$|A_1|=(n-2)! \qquad |A_j|=(n-2)! \qquad |A_i\cap A_j|=(n-3)!$$

$$\therefore Q_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=(n-1)!-C_n^1(n-2)!$$

$$+C_n^2(n-3)!-C_n^3(n-4)!+\ldots+(-1)^n C_n^n\cdot 0!$$

有限制条件排列问题与错位排列问题的关系

错位排列是对元素排列位置的限制

有限制条件排列是对元素之间相邻关系的限制

两者有密切的联系

$$Q_n = n! - C_{n-1}^{1}(n-1)! + C_{n-1}^{2}(n-2)! - C_{n-1}^{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 1!$$

$$= n! - (n-1)(n-1)! + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}(n-2)! - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}(n-3)! + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 1!$$

$$= n! - (n-1)(n-1)! + (n-1)!\frac{(n-2)}{2!} - (n-1)!\frac{(n-3)}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= (n-1)!\left[n - (n-1) + \frac{(n-2)}{2!} - \frac{(n-3)}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right]$$

$$= (n-1)!\left[n - \left(\frac{n}{1!} - \frac{1}{0!}\right) + \left(\frac{n}{2!} - \frac{1}{1!}\right) - \left(\frac{n}{3!} - \frac{1}{2!}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}\right)\right]$$

$$= (n-1)!\left[n - \left(\frac{n}{1!} - \frac{1}{0!}\right) + \left(\frac{n}{2!} - \frac{1}{1!}\right) - \left(\frac{n}{3!} - \frac{1}{2!}\right) + \ldots + (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}\right)\right]$$

$$= (n-1)!\,[\,n - \frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} - \frac{n}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n}{(n-1)!}]$$

$$+ (n-1)!\,[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}]$$

$$= n!\,[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}]$$

$$+ (n-1)!\,[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}]$$

$$= D_n + D_{n-1}$$

某班有25个学生，其中14人会打篮球，12人会打排球，6人会打篮球和排球，5人会打篮球和网球，还有2人会打这三种球，已知6个会打网球的人都会打篮球或排球，求三种球不会打球的人

求关于数列 $a_n = 7 \cdot 3^n$ 的母函数*F(x)*

有禁区的排列问题——禁位排列

所谓“禁位排列”，是指在一个排列中禁止某些元素占据某些位置。

先介绍有关的棋盘多项式。

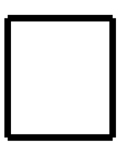
设C是一个棋盘　$r_k(C)$表示把k个相同的棋子布到C中的方案数

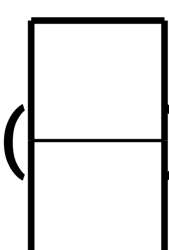
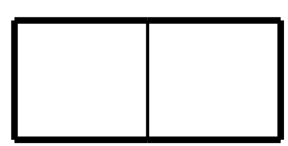
规定：当一个棋子放入到C的某格时，

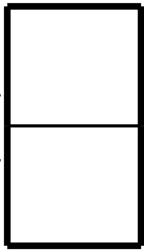
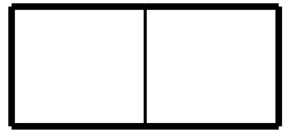
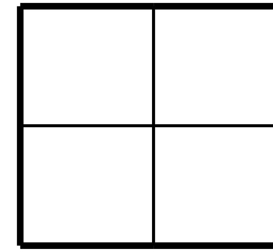
这个格所在的行和列就不能再放其他的棋子。

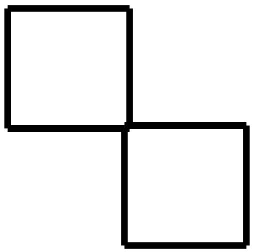
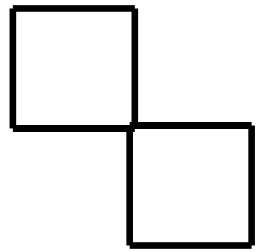
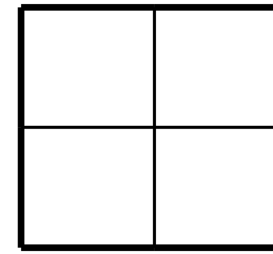
并规定任意的棋盘C　$r_0(C)=1$

不难有下面的结果：

$r_1($  $)=1$

$r_1($  $)=2$　　$r_1($  $)=2$

$r_2($  $)=0$ $r_2($  $)=0$ $r_1($  $)=4$

$r_1($  $)=2$ $r_2($  $)=1$ $r_2($  $)=2$

布棋方案数$r_k(C)$的性质：

(1) 任意的棋盘C和正整数k　如果k大于棋盘的方格数

则有$r_k(C)=0$

(2) $r_1(C)$等于C的方格数

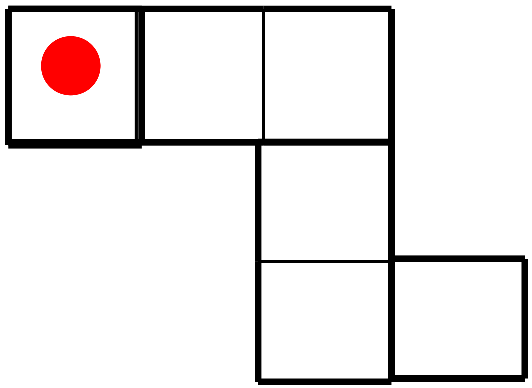
(3) 设C_1和C_2是两个棋盘，C_1可以通过旋转或翻转就变成C_2,

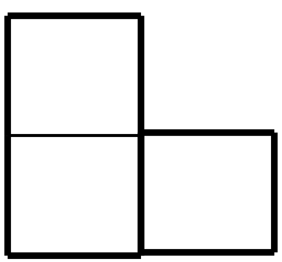
则$r_k(C_1)=r_k(C_2)$

(4) 设C_1 是从棋盘C 中去掉指定的方格所在的行与列以后的棋盘，

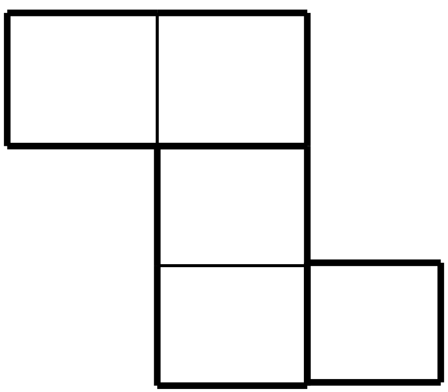
C_2 是从棋盘C 中去掉指定的方格以后的棋盘，

则有 $r_k(C) = r_{k-1}(C_1) + r_k(C_2)$ 加法法则可证明





C_1

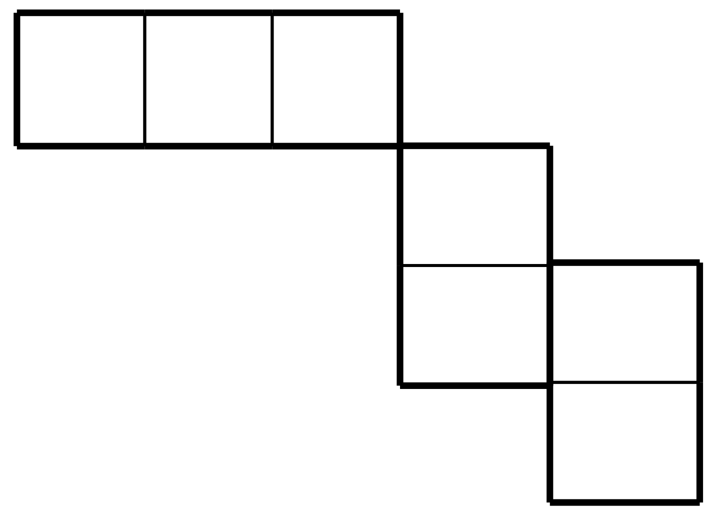


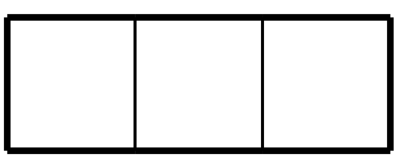
C_2

(5) 设棋盘C 由两子棋盘C_1 ，C_2 组成

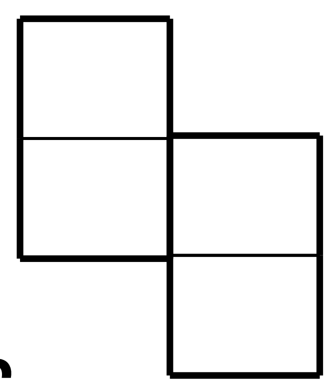
且C_1 ，C_2 的布棋方案相互独立

则有 $r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$ 加法乘法法则可证明





C_1



C_2

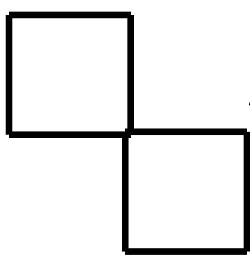
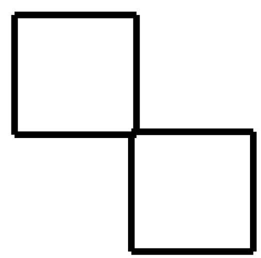
定义： 设棋盘C

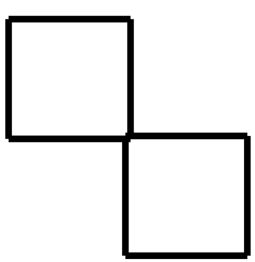
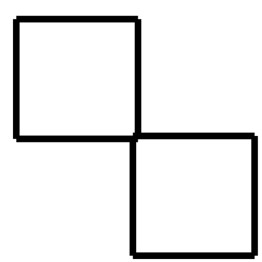
则 称$R_k(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)\, x^k$ 为棋盘多项式

如果k大于棋盘的方格数 则有$r_k(C)=0$

所以棋盘多项式为有限项的

$R_k($无棋盘$)=1$

R() = r_0()

$+r_1$()x $+r_2$()x^2 $=1+2x+x^2$

设C_1是从棋盘C中去掉指定的方格所在的行与列以后的棋盘，

C_2是从棋盘C中去掉指定的方格以后的棋盘，

由$r_k(C)$的性质可以求得$R(C)$的性质

(1) $R(C)=xR(C_1)+R(C_2)$ 该性质可以使得棋盘简单化。

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)\cdot x^k = r_0(C)+\sum_{k=1}^{\infty} r_k(C)\cdot x^k$$

$$= r_0(C)+\sum_{k=1}^{\infty}[r_{k-1}(C_1)+r_k(C_2)]\cdot x^k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_1)\cdot x^k + r_0(C_2)+\sum_{k=1}^{\infty} r_k(C_2)\cdot x^k$$

$$= x\sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_1)\cdot x^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_2)\cdot x^k$$

$$= x\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_1)\cdot x^k+\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_2)\cdot x^k = xR(C_1)+R(C_2)$$

(2) 设棋盘C由两子棋盘C_1，C_2组成 且C_1，C_2相互独立

则有 $R(C)=R(C_1)R(C_2)$

$$r_0(C)=r_0(C_1)r_0(C_2)$$

$$x\cdot r_1(C)=[r_0(C_1)r_1(C_2)+r_1(C_1)r_0(C_2)]\cdot x$$

$$x^2\cdot r_2(C)=[r_0(C_1)r_2(C_2)+r_1(C_1)r_1(C_2)+r_2(C_1)r_0(C_2)]\cdot x^2$$

以此类推得：

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)\cdot x^k=r_0(C)+r_1(C)x+r_2(C)x^2+\ldots$$

$$=r_0(C_1)[r_0(C_2)+r_1(C_2)x+r_2(C_2)x^2+\ldots]$$

$$+x\cdot r_1(C_1)[r_0(C_2)+r_1(C_2)x+r_2(C_2)x^2+\ldots]$$

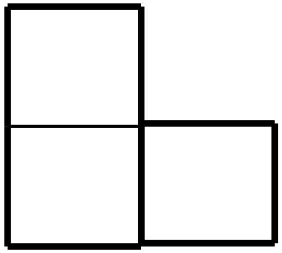
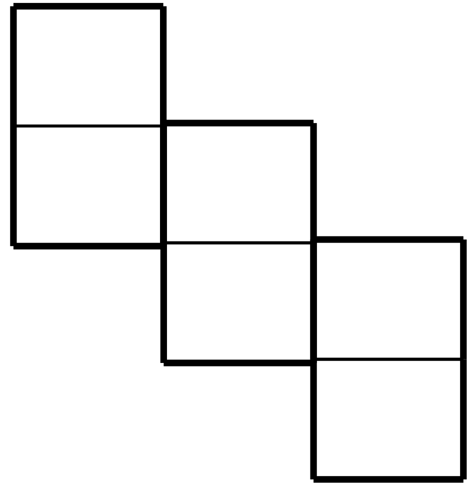
$$+x\cdot r_1(C_1)[r_0(C_2)+r_1(C_2)x+r_2(C_2)x^2+\ldots]+\ldots$$

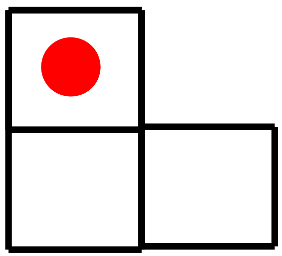
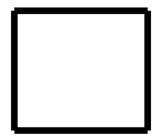
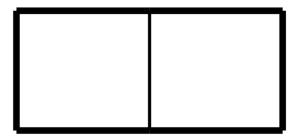
$$= r_0(C_1)\ R(C_2)\ + x \cdot r_1(C_1) R(C_2) + x \cdot r_1(C_1)\ R(C_2) + \ldots$$

$$= [\, r_0(C_1) + x \cdot r_1(C_1)\ + x \cdot r_1(C_1) + \ldots]\ R(C_2)$$

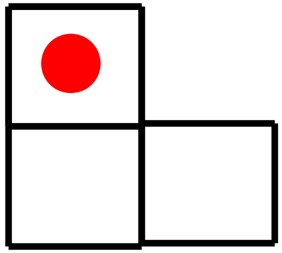
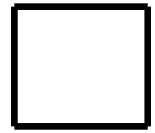
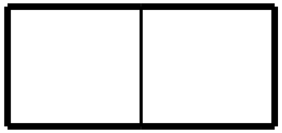
$$= R(C_1)\, R(C_2)$$

利用这两条性质可以求棋盘多项式。

求 $R($  $)$ 和 $R($  $)$

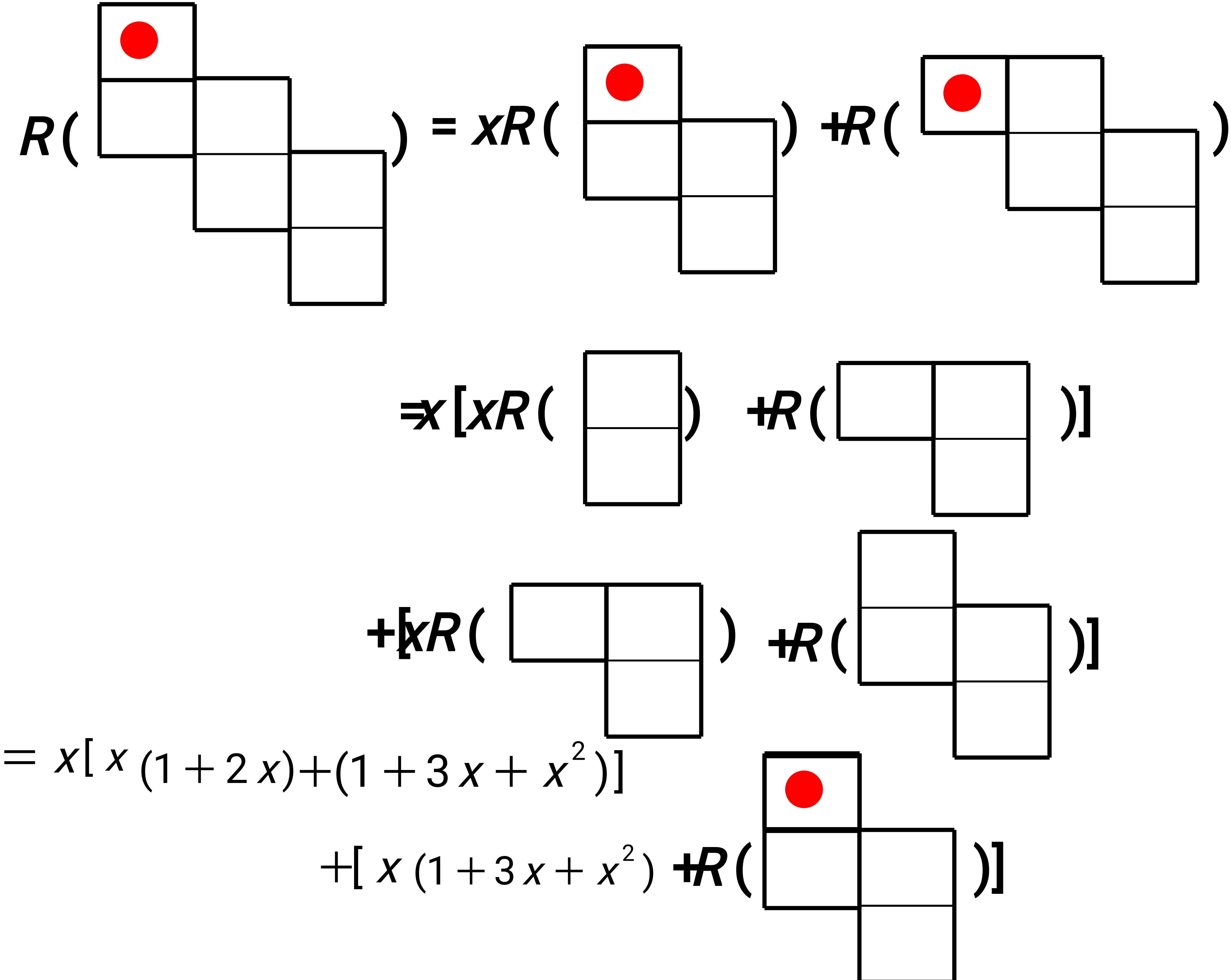
解：$R($  $) = x R($  $) + R($  $)$

$$= x(1+x) + (1+2x)$$

解：$R($  $) = xR($  $) + R($  $)$

$$= x\,(1+x) + (1+2x)$$

$$= 1+3x+x^2$$



R( ) = xR( ) +R( )
=x[xR( ) +R( )]
+[xR( ) +R( )]
= x[x(1+2x)+(1+3x+x^2)]
+[x(1+3x+x^2) +R( )]

$$= x(1+4x+3x^2)+(x+3x^2+x^3)+(1+4x+3x^2)$$

$$=1+6x+10x^2+4x^3$$

利用棋盘多项式解决有禁区的排列问题:

行表示X中的元素，列表示排列中的位置。

若限制第i个元素不能放在第j个位置，

则相应的棋盘的第i行第j列的方格不能放棋子

这样的方格称为禁区。

定理：有禁区的排列数为：

$$Q_n = n! - r_1 \cdot (n-1)! + r_2 \cdot (n-2)! - r_3 \cdot (n-3)! + \ldots + (-1)^n r_n 0!$$

r_i 是有i 个棋子落入禁区位置上的方案数。

若有n 个棋子布入$n \times n$ 棋盘　　有i 个棋子落入禁区为A_i

有1个棋子落入禁区为r_1　其余n-1 个无限制排列　　$r_1 \cdot (n-1)!$

有2个棋子落入禁区为r_2　其余n-2 个无限制排列　　$r_2 \cdot (n-2)!$

以此类推由容斥原理得：

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$$

$$= n! - r_1 \cdot (n-1)! + r_2 \cdot (n-2)! - r_3 \cdot (n-3)! + \ldots + (-1)^n r_n 0!$$

关键是求r_1 ……r_n

该定理适用于$n \times n$棋盘的小禁区的布棋问题，

如果是$m \times n$棋盘或大禁区的布棋问题，

直接用棋盘多项式$R(C)$求解。

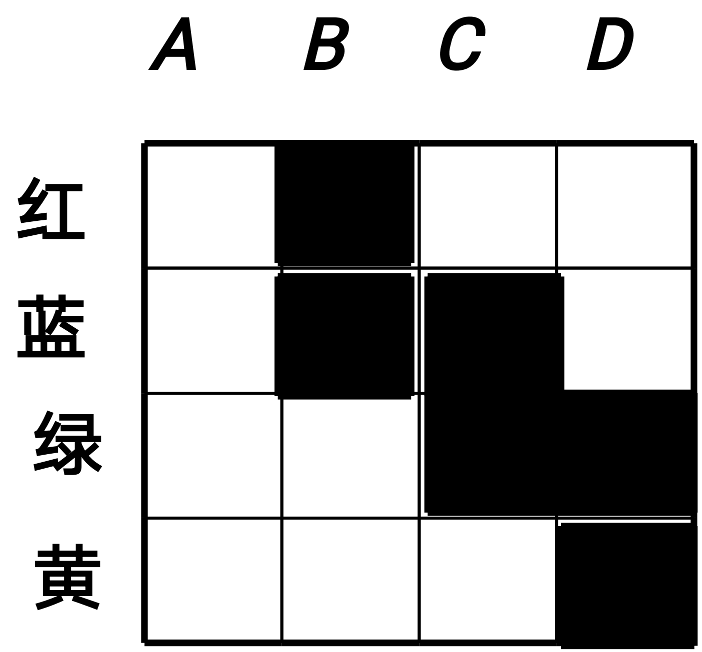
例：用四种颜色（红、蓝、绿、黄）涂染四台仪器A,B,C,D

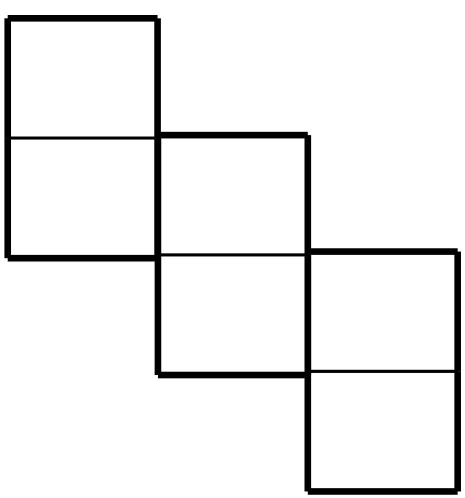
规定每台仪器只能用一种颜色并且每两台仪器的颜色不能相同。

B不能用蓝和红　　C不能用蓝和绿　　D不能用绿和黄

问有多少种染色方案？

解:有禁区棋盘　棋盘多项式为



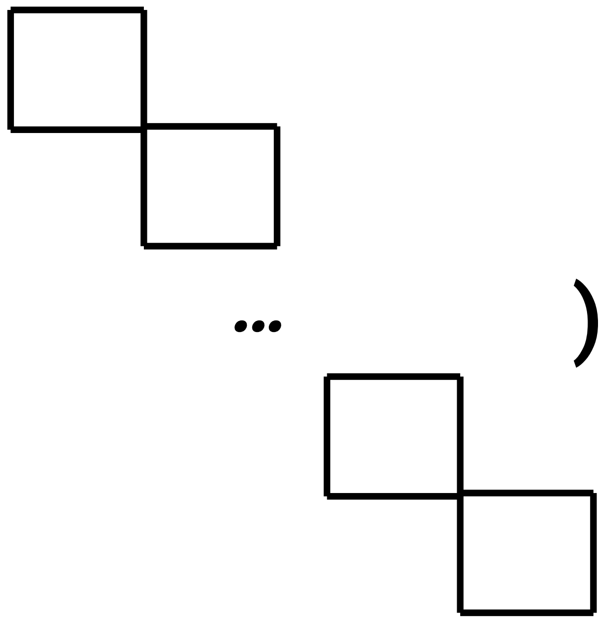
$R($  $)$

$$=1+6x+10x^2+4x^3$$

$r_1 = 6$ $r_2 = 10$ $r_3 = 4$ $r_4 = 0$

$$N = 4! - 6 \cdot 3! + 10 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 4$$

错位排列可以看做是有禁区排列问题，其禁区在主对角线上棋盘多项式为

$R($  $) = R(\square)\,R(\square)\cdots R(\square)$

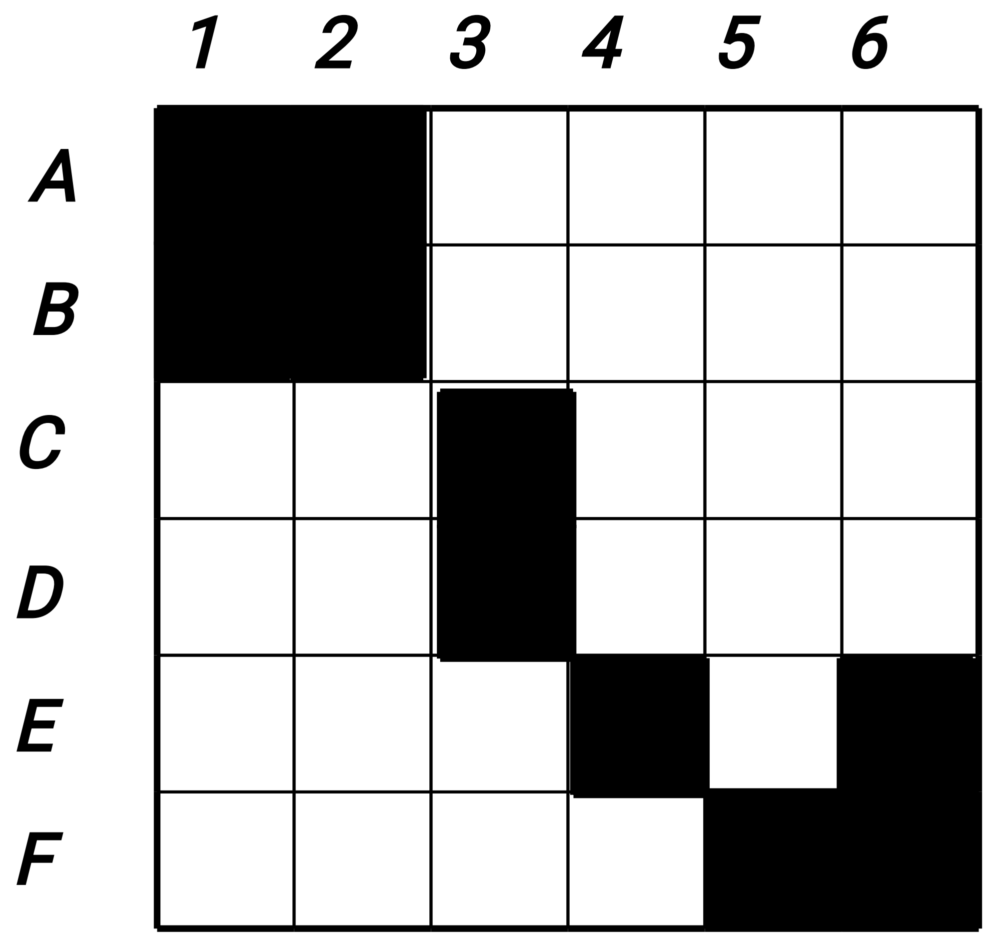
$$= (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

$$r_k = C_n^k$$

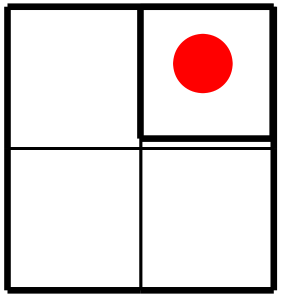
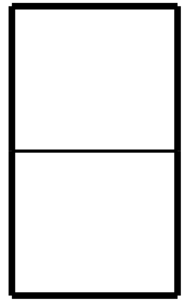
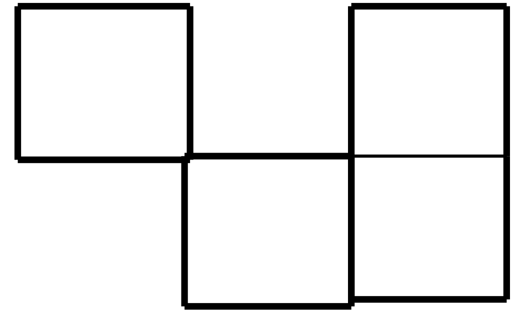
$$Q_n = n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n C_n^n 0!$$

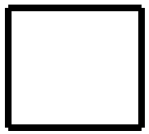
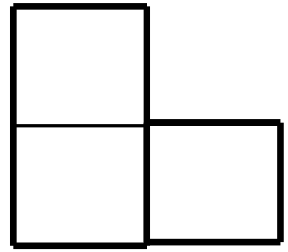
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

例：有A,B,C,D,E,F共6个不同病的病人，
又有1,2,3,4,5,6六种不同的新药品。为了检验新药品的疗效
要对6个病人进行试验， 要求A不能用1和2号药，
B不能用1和2号药，
C不能用3号药，
D不能用3号药，
E不能用4、6号药，
F不能用5、6号药，
问有多少种试验方案？

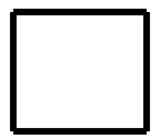


棋盘可以分成三个相互独立的棋盘 C_1 、C_2 、C_3

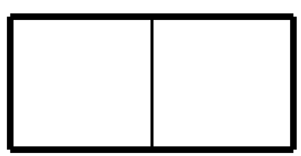
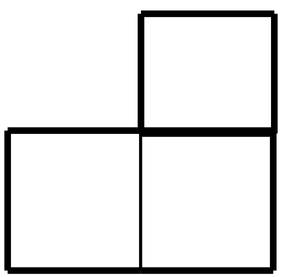
C_1  C_2  C_3 

$R(c_1) = x\,R($  $) + R($  $)$

$$= x(1+x) + (1+3x+x^2)$$

$R(c_2) = x\,R(\qquad) + R($  $)$

$$= x + (1+x) = 1+2x$$

$R(C_3) = x\,R($  $) + R($  $)$

$$= x(1+2x) + (1+3x+x^2) = (1+3x+x^2)$$

$$R(C) = R(C_1)\, R(C_2)\, R(C_3)$$

$$= (1 + 4x + 2x^2)\,(1 + 2x)\,(1 + 4x + 3x^2)$$

$$= 1 + 10x + 37x^2 + 62x^3 + 46x^4 + 12x^5$$

$r_1 = 10$ $r_2 = 37$ $r_3 = 62$

$r_4 = 46$ $r_5 = 12$ $r_6 = 0$

$$N = 6! - 10 \cdot 5! + 37 \cdot 4! - 62 \cdot 3! + 46 \cdot 2!$$

$$- 12 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 116$$

母函数

利用母函数方法是组合数学研究的一个重要方法。

不仅可以解决许多计数问题、具体组态问题，

而且也是解决递归关系的一种十分有力的工具。

母函数的概念　　幂级数型母函数　指数型母函数

母函数的概念

设有a，b，c三个球， 从中任意取一个 或选a 或选b 或选c

把这些可能的选择形象地表示为$a+b+c$

从中任意取二个 或选a、b 或选b、c 或选a、c

把这些可能的选择形象地表示为$ab+bc+ac$

从中取三个 只有一种方法。形象地表示为abc

看多项式：$(1+ax)\ (1+bx)\ (1+cx)$

$$=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ac)x^2+(abc)x^3$$

这些可能的选择是x的幂的系数

其中x^i的系数是从三个球中选取i个的方法的形象表示

因子 $(1+ax)$ 理解为： 不选a 或选a

1表示不选a x的系数表示选a

x是一个形式变量 只当标志用

或：

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

其中x^i的系数是从三个球中选取i个的方法数

前一种具体组态问题， 后一种计数问题

母函数的定义

定义： 给定数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 构造一函数

$$F(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x) \ldots$$

称$F(x)$是数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的母函数

序列函数 $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$ 只当标志用

称为标志函数

选取标志函数时要注意的是

不能使两个不同的数列产生同一母函数。

标志函数 $f_n(x)$ 最有用和最重要的形式为： x^n

在这种情况下 数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的母函数为：

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$$

幂级数型母函数

已知$F(x)$可以求得 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

同样已知 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 可以求得$F(x)$

由二项式定理 $(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k$

项x^i的系数 C_n^k 就是n个中取k个的组合数

定义：对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 生成一函数：

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$$

称为对应数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的幂级数型母函数

或组合计数母函数

a_n 就是取到n个的组合数

例：对于数列 $1,1,1,\ldots 1,\ldots$ 和数列 $1,2,3,\ldots n,\ldots$

分别求它们的母函数$F(x)$

解：对于数列 $1,1,1,\ldots 1,\ldots$ 它的母函数

$$F(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n\ldots=\frac{1}{1-x}$$

对于数列 $1,2,3,\ldots n,\ldots$ 它的母函数

$$F(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

例：对于数列 $a_n = 7 \cdot 3^n$ **的母函数*F(x)***

解： $F(x) = 7 + 7 \cdot 3x + 7 \cdot 3^2 x^2 + \ldots + 7 \cdot 3^n x^n \ldots$

$$= 7 + 7 \cdot (3x) + 7 \cdot (3x)^2 + \ldots + 7 \cdot (3x)^n \ldots$$

$$= \frac{7}{1 - 3x}$$

例：对于数列 $1, 0, 1, 0 \ldots 1, 0 \ldots$ 和数列 $1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$

分别求它们的母函数 $F(x)$

解：对于数列 $1, 0, 1, 0 \ldots 1, 0 \ldots$ 它的母函数

$$F(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} \ldots = \frac{1}{1 - x^2}$$

对于数列 $1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots$ 它的母函数

$$F(x) = 1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} \ldots = \frac{1}{1 - x^3}$$

例：对于多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \ \infty\cdot a_2 \ldots, \ \infty\cdot a_k\}$ **n-组合数**

$$a_n = C_{n+k-1}^{n}$$

对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 求母函数*F(x)*

解：$F(x) = C_{k-1}^{0} + C_{k}^{1}x + C_{k+1}^{2}x^2 + \ldots + C_{n+k-1}^{n}x^n \ldots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(k+1)k}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n-k+1)\ldots(-k-1)(-k)}{n!}(-x)^n = (1-x)^{-k} = \frac{1}{(1-x)^k}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)^k = (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^k$$

$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ 形象地表示为 或者不选 或者选一个

或者选二个 ……或者选*n* 个……

例：对于多重集 $S=\{\infty\cdot a_1, \ \infty\cdot a_2 \dots, \ \infty\cdot a_k\}$ **n-组合数**

$$a_n = C_{n+k-1}^{n}$$

解：

对于k=1 $S=\{\infty\cdot a_1\}$ **它的n-组合数永远是1**

$$F(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \dots = \frac{1}{1-x}$$

对于k=2 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2\}$ **它的n-组合数是n+1**

$$F(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

例：平方数列 $0,1,4,9\ldots n^2,\ldots$ 的母函数*F(x)*

解：它的母函数

$$F(x)=0+x+4x^2+\ldots+n^2x^n\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$$

$$\frac{F(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$$

$$g(x)=\int\frac{F(x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int n^2x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n\int nx^{n-1}dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$\frac{g(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\int \frac{g(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int n x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n} = \frac{x}{1-x}$$

$$\therefore \quad \frac{g(x)}{x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^{2}}$$

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^{2}}$$

$$\frac{F(x)}{x} = (g(x))' = \left[\frac{x}{(1-x)^{2}}\right]' = \frac{x+1}{(1-x)^{3}}$$

~~母函数~~ $$F(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^{3}}$$

例：平方数列 $0, 1, 4, 9 \ldots n^2, \ldots$ **的母函数*F(x)***

另解： $$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \ldots$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n \ldots$$

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} \ldots$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} \ldots$$

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots + n^2 x^n \ldots = F(x)$$

例：对于数列 $0,1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},\ldots$ 求母函数$F(x)$

解： 母函数

$$F(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7\ldots$$

$$(F(x))'=1+x^2+x^4+x^6\ldots=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

$$F(x)=\int\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)}{(1-x)}$$

有一些重要的性质：

例如对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的母函数为F(x)

另一数列 $b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ 其母函数为G（x） 则有：$G(x) = \frac{F(x)}{1-x}$

例计数下面级数的和 $1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$

数列 $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots n^2, \ldots$ 的母函数为F(x)

$$F(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

由上述性质知：$\frac{F(x)}{1-x}$ 就是数列 0^2 0^2+1^2 $0^2+1^2+2^2$

…… $0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2$ …… 的母函数

$$\frac{F(x)}{1-x} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4} = \frac{x^2}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^4}$$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} x^n$$

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} x^n$$

$$b_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+2)(n+1)n}{3!}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$$

例：若用1克、2克、3克、4克、5克的砝码个一枚，

问能称出多少种重量？ 各有几种可能的方案？

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$$

$$=1+x+x^2+2x^3+3x^4+3x^5+3x^6+3x^7+3x^8$$

$$+3x^9+3x^{10}+2x^{11}+2x^{12}+2x^{13}+x^{14}+x^{15}$$

$3x^5$

$5=\ 5\ =1+4\ =2+3$

例：若用1克、2克、4克、8克、16克的砝码个一枚，

问能称出多少种重量？ 各有几种可能的方案？

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$$

$$=\sum_{n=0}^{31} x^n \qquad a_n \equiv 1$$

十进制与二进制的一一对应

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^8}{1-x^4}\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

例：若人民币1元3张、2元2张、5元1张、10元1张、50元1张

问能称出多少种币值？ 各有几种的方案？

$$F(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4)(1+x^5)(1+x^{10})(1+x^{50})$$

$$=1+x+x^2+2x^3+3x^4+3x^5+2x^6+3x^7+2x^8$$

$$+2x^9+\ldots+3x^{57}+\ldots+2x^{66}+3x^{67}+2x^{68}+\ldots+x^{72}$$

$3x^{57}$

$50+5+2$

$50+5+1+1$

$50+2+2+1+1+1$

例：用1元、2元、5元的邮票可贴出多少种不同邮费的方案数？

$$F(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)$$

$$(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)$$

$$=1+x+x^2+2x^3+2x^4+4x^5+5x^6+6x^7+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^5}$$

$6x^7$

$1+1+1+1+1+1+1$ $1+1+1+1+1+2$ $1+1+1+2+2$

$1+2+2+2$ $1+1+5$ $2+5$

例：有红球2个，黄球2个，白球4个，问从中抽取5个的具体取法？

设红为r，黄为y，白为w

$$F = (1+r+r^2)(1+y+y^2)(1+w+w^2+w^3+w^4)$$

$$= 1+r+r^2+\ldots$$

$$\ldots+r^2y^2w+r^2yw^2+ry^2w^2+r^2w^3$$

$$+ryw^3+y^2w^3+rw^4+yw^4+\ldots$$

例：求不定方程$x_1+2x_2=15$ 的非负整数解的个数

$$F(y)=(1+y+y^2+y^3+\ldots)(1+y^2+y^4+y^6+\ldots)$$

$$=\frac{1}{1-y}\cdot\frac{1}{1-y^2}=\frac{1}{(1-y)^2}\cdot\frac{1}{1+y}$$

$$=\frac{A}{1-y}+\frac{B}{(1-y)^2}+\frac{C}{1+y}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-y}+\frac{\frac{1}{2}}{(1-y)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1+y}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{1-y}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+y}$$

例：求不定方程$x_1+2x_2=15$ 的非负整数解的个数

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{1-y}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1+y}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}y^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-y)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4}\right)y^n$$

$$a_n=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{(-1)^n}{4} \qquad a_{15}=8$$

(1, 7) (3, 6) (5, 5) (7, 4) (9, 3) (11, 2) (13, 1) (15, 0)

例：对于多重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2\ldots,\ \infty\cdot a_k\}$

每个元素至少取一个的*n*-组合数

解：

$$F(x)=(x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)\cdot(x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)$$
$$\ldots(x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)$$
$$=(x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots)^k$$
$$=x^k\cdot(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots)^k$$
$$=x^k\cdot\frac{1}{(1-x)^k}=x^k\cdot\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{n}x^{n+k}$$

$n+k\rightarrow n$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}C_{n-1}^{n-k}x^n=\sum_{n=k}^{\infty}C_{n-1}^{k-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n-1}^{k-1}x^n$$

$n\rightarrow n-k$

$n+k-1\rightarrow n-1$

$k>n,\ C_n^k=0$

$$a_n=C_{n-1}^{k-1}$$

指数型母函数

由二项式定理 $(1+x)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^k x^k$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k k! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} P_n^k \frac{x^k}{k!}$$

项 $\frac{x^k}{k!}$ 的系数 就是*n*个中取*k*个的排列数数 P_n^k

定义： 对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 生成一函数：

$$F_e(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} \ldots$$

称为对应数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的指数型母函数

或排列计数母函数

a_n 就是取到*n*个的排列数

例：对于数列 $1,1,1,\ldots 1,\ldots$ 和数列 $1, a, a^2, \ldots a^n, \ldots$

分别求它们的指数型母函数

解：对于数列 $1,1,1,\ldots 1,\ldots$ 它的指数型母函数

$$F_e(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \ldots = e^x$$

对于数列 $1, a, a^2, \ldots a^n, \ldots$ 它的母函数

$$F_e(x) = 1 + a\frac{x}{1!} + a^2\frac{x^2}{2!} + \ldots + a^n\frac{x^n}{n!} \ldots$$

$$= 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + \ldots + \frac{(ax)^n}{n!} \ldots = e^{ax}$$

例：数列 $a, a^2, \ldots a^n, \ldots$ 指数型母函数

解：数列 $a, a^2, \ldots a^n, \ldots$

$$F_e(x) = a + a^2 \frac{x}{1!} + a^3 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a^{n+1} \frac{x^n}{n!} \ldots$$

$$= a[1 + \frac{ax}{1!} + \frac{(ax)^2}{2!} + \ldots + \frac{(ax)^n}{n!} \ldots] = ae^{ax}$$

幂级数型母函数 和指数型母函数有一个重要区别

幂级数型母函数含有因子序列：

$$\{\ 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \ldots \quad x^n \ldots\}$$

指数型母函数含有因子序列：

$$\{\ 1 \quad \frac{x}{1!} \quad \frac{x^2}{2!} \quad \frac{x^3}{3!} \ldots \quad \frac{x^n}{n!} \ldots\}$$

但两者也有密切的联系：

对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的指数型母函数

就是数列 $a_0, \frac{a_1}{1!}, \frac{a_2}{2!}, \ldots \frac{a_n}{n!}, \ldots$ 幂级数型母函数

两者的联系有下面的定理：

设 $F(x)$, $F_e(x)$ 分别是数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的幂级数型母函数和指数型母函数 则有

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} F_e(sx)\, ds$$

$$F_e(sx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(sx)^n}{n!}$$

$$e^{-s} F_e(sx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s} \frac{(sx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-s} \frac{x^n s^n}{n!}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s} F_e(sx)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-s} s^n\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = F(x)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s} s^n\, ds = n!$$

例：求多重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\ \infty\cdot a_2\ldots,\ \infty\cdot a_k\}$ ***n*-排列数**

解：

$$F_e(x)=[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n\ldots]^k$$

$$=[e^x]^k=e^{kx}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kx)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}k^n\frac{x^n}{n!}$$

$$a_n=k^n$$

例：求多重集 $S=\{2\cdot a,\ 3\cdot b_k\}$ **4-排列数**

解：$F_e(x)=(1+x+\frac{1}{2!}x^2)\cdot(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3)$

$$=\ldots+(1\times\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{2!})x^4+\ldots$$

$$=\ldots+(4+6)\frac{x^4}{4!}+\ldots \qquad a_4=10$$

$aabb$ $abab$ $abba$ $baab$ $baba$

$bbaa$ $abbb$ $babb$ $bbab$ $bbba$

例:求由1、2、3、4、5五个数字组成的六位数。要求满足:

1出现不超过2次，但不能不出现； 2出现不超过1次；

3出现可达3次； 4出现为偶数次； 5必须出现1次。

求满足要求的种数。

解:

$$F_e(x)=(x+\frac{1}{2!}x^2)\cdot(1+x)\cdot(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3)$$

$$\cdot(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4)\cdot x$$

$$=\dots+1290\times\frac{x^6}{6!}+\dots$$

$$a_6=1290$$

例:求由1、2、3、4四个数字组成的五位数。要求满足：

1出现2次或3次　2出现0次或1次；　3无限制

4出现奇数次；　求满足要求的种数。

解：
$$F_e(x)=\left(\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3\right)\cdot(1+x)\cdot\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots\right)$$
$$\cdot\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\ldots\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4\right)\cdot e^x\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4\right)\cdot(e^{2x}-1)$$
$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{12}x^4\right)$$

考虑： x^5 **的系数**

$$\frac{1}{4}\times\frac{2^3}{3!}+\frac{1}{3}\times\frac{2^2}{2!}+\frac{1}{12}\times\frac{2^1}{1!}$$

$$=\frac{1}{5!}\times 140$$

$$a_5=140$$

例n位四进制数中1、2、3至少出现一次的数码个数？

解：

$$F_e(x) = \left(x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\right)^3$$

$$\cdot\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots\right)$$

$$= (e^x - 1)^3 \cdot e^x = (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1) \cdot e^x$$

$$= e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} - e^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \frac{x^n}{n!} - 3\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} 1 \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = 4^n - 3 \times 3^n + 3 \times 2^n - 1$$

例:用红、白、蓝三色涂1×n的方格，每格一色，要求偶数个方格涂成白色，有多少种方法？

解：

$$F_e(x) = \left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots\right)\cdot\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots\right)^2$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot e^{2x}=\frac{1}{2}\left(e^{3x}+e^x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}3^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}1\frac{x^n}{n!}\right]$$

$$a_n=\frac{3^n+1}{2}$$

递归关系

递归关系在计算机科学，特别在算法分析中有着广泛的应用。

如何建立递归关系、已给的递归关系有什么重要性质、

如何通过求解递归关系求得通项公式。

大千世界的变化是有规律的，这种规律呈现出前因与后果的关系。

这一思想正体现了递归的思想。

定义：对于数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

把该数列中除了有限项以外的任何数 a_n

和它前面的一个或一些关联起来的方程叫做递归关系

为了能够着手计算　必须知道数列中的一个或一些数，称为初始条件。

例： Hanoi塔问题

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$$

例： 在一个平面上有一个园和n条直线，这些直线中的每一条在园内都与其他直线相交，如果没有任何三条的直线相交与一点，试问这些直线将园分成多少个区域？

n条直线将园分成a_n个区域 $a_0 = 1$

$n-1$条直线将园分成a_{n-1}个区域

第n条直线与前n-1条直线共有(n-1)个交点 共产生n条线段

每条线段对原来的区域一分为二 即增加了n个区域

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

例： 在一个平面上有*n*条封闭曲线，任何两条恰好相交于两点，任何三条不相交于同一点。问这些直线将园分成多少个区域？

*n*条封闭曲线分平面为a_n个区域 $a_1=2$

*n-1*条封闭曲线分平面为a_{n-1}个区域

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

例：Fibonacci数列

*1202*年，意大利数学家Fibonacci研究了著名的兔子繁殖数目问题

年初买来一对兔子　　雌雄各一（成熟）

第二个月就繁殖了一雌一雄的一对小兔子

以后凡成熟的一对大兔子每月都繁殖一雌一雄的一对小兔子

而小兔子依照同样的规律　　　一个月长大成熟

第二个月开始每月都繁殖一雌一雄的一对小兔子

问一年以后共有多少对小兔子？

图示 第一个月 (A, B) $a_{12} = 233$

第二个月 (A, B) +(a, b) $a_{13} = 377$

第三个月 (A, B) +(a, b) +(A, B)

第四个月 (A, B) +(a, b)+(A, B) +(A, B) +(a, b)

以此类推：……

a_n 表示第n个月开始时兔子的对数 $a_1 = 1$ $a_2 = 2$

a_n 有两部分构成： 第n-1个月开始时兔子的对数 a_{n-1}

第n-2个月开始时兔子在第n个月开始时都繁殖一对新兔子 a_{n-2}

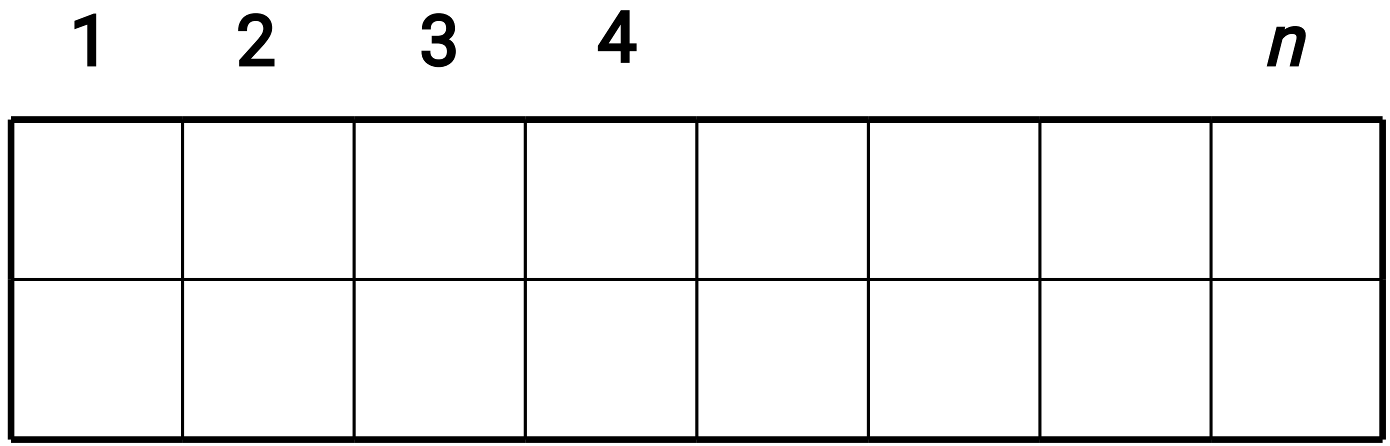
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \end{cases}$$

Fibonacci数列在优选法

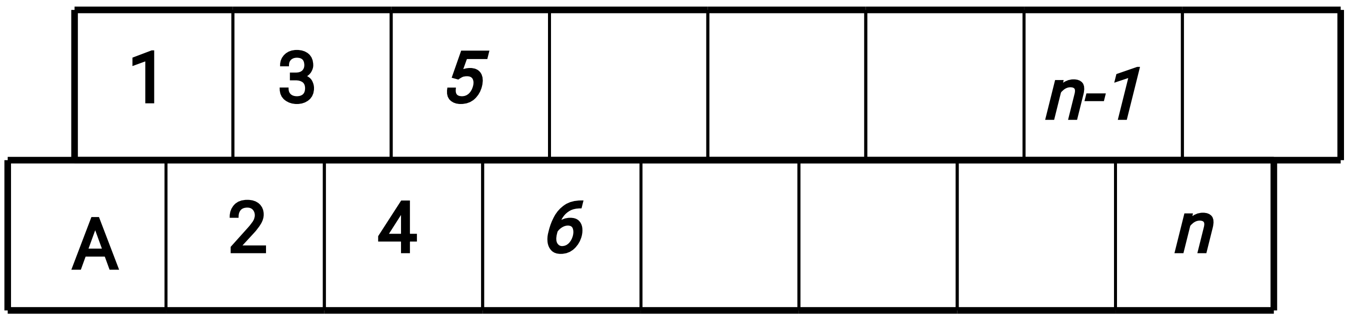
算法分析中起着重要的作用

下面几个不同背景的例子都可归类到Fibonacci数列

例：$2\times n$ 的棋盘用1×2的多米诺骨牌作完全覆盖的方案数



例：一只蜜蜂自A蜂房爬到第n好蜂房，每次都只从蜂房爬向右侧邻近蜂房而不会逆行，问有多少中不同的方式？



例：某人举步上高楼，每步走一阶或二阶。

上n 个台阶有多少中不同的方式？

植物叶子的片数也有类似Fibonacci数列的情形

递归关系的类型很多，

目前还没有一种一般的方法可以求得所有类型的递归关系

不过却有一些特殊的方法适用于求解某些特殊类型的递归关系

迭代法

$$a_n = a_{n-1} + n = (a_{n-2} + n - 1) + n$$

$$= (a_{n-3} + n - 2) + n - 1 + n$$

$$= \ldots\ldots$$

$$= (a_0 + 1) + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

利用母函数的方法求解递归关系

形如：$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = f(n)$

$f(n)$ 为已知的关于n的表达式

$c_0, c_1, c_2, \ldots c_r$ 为常数

这类常系数线性齐次、非齐次的递归关系可以用母函数方法求解

常系数、非线性的递归关系也可以用母函数方法求解

Fibonacci数列

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \end{cases}$$

解：设母函数 $F(x)$ 对应数列为 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

$$= a_0 + a_1 x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 1 + x + x\,(F(x) - 1) + x^2 F(x)$$

$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{(1 - ax)(1 - bx)} = \frac{A}{1 - ax} + \frac{B}{1 - bx}$$

$$F(x) = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} \qquad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

解得： $$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \qquad B = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$F(x) = A \times \frac{1}{1-ax} + B \times \frac{1}{1-bx}$$

$$= A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n + B \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (bx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (Aa^n + Bb^n)x^n$$

$$\therefore \quad a_n = Aa^n + Bb^n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

例： Hanoi塔问题

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

解：设母函数 $F(x)$ 对应数列为 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + 2x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$$

$$= a_0 + a_1 x + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + 2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= x + 2x F(x) + \frac{x^2}{1-x} = F(x)$$

$$(1-2x)F(x) = x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$F(x) = \frac{x}{1-2x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-2x)} = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$$ **解得：** $A = -1 \quad B = 1$

$$F(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)\, x^n$$

$$a_n = 2^n - 1$$

例： 平面分割问题：

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \qquad a_1 = 2$$

解：设母函数 $F(x)$ **对应数列为** $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 2x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n-1} + 2(n-1)] x^n$$

$$= 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^n$$

$$= 2x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) x^{n-2}$$

$$= 2x + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$= 2x + xF(x) + 2x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = F(x)$$

$$(1-x)F(x) = 2x + \frac{2x^2}{(1-x)^2}$$

$$F(x) = \frac{2x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$= 2x \cdot \frac{1}{1-x} + 2x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}^{2} C_{n+3-1}^{n} x^n$$

$$a_n = 2 + 2C_n^2 = n^2 - n + 2$$

例： 求递归关系

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \qquad n \geq 2 \qquad a_1 = 1, a_2 = 1$$

解：设母函数 $F(x)$ 对应数列为 $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$F^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_1^2 x^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_1) x^3 + (a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1) x^4 + \ldots$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) x^n \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = F(x) - a_1 x$$

解得：

$$F_1(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \qquad F_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

$$F(0)=0 \qquad F_1(0)\neq 0$$

舍去： $F_1(x)$

$$\therefore \quad F(x)=F_2(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4x)^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n}}[1\times 3\times 5\ldots\times(2n-3)]}{n!}(-4)^{n}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)2^{n}[1\times 3\times 5\ldots\times(2n-3)]}{n!}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1})\ x^{n}$$

$$\therefore\quad F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}x^{n}$$

$$a_{n}=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

利用母函数的方法求解递归关系的步骤

1.设 $F(x)$ 表示数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ 的母函数

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ldots\ldots * $$

2.利用递归关系a_n 的表达式与上述之间的关系

将*化为含$F(x)$的方程　　即：$g(F(x)) = 0$

3.由方程解出$F(x)$

4.将$F(x)$的表达式展开成幂级数　　即可求a_n

常系数线性型递归关系的求解

形如：$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = f(n)$

为常系数线性型r阶递归关系

$c_0, c_1, c_2, \ldots c_r$ 为常数

$f(n) \equiv 0$ 为常系数线性齐次

$f(n) \neq 0$ 为常系数线性非齐次

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = 0$$

相应的特征方程为：$\lambda^r + c_1 \lambda^{r-1} + c_2 \lambda^{r-2} + \ldots + c_{r-1} \lambda + c_r = 0$

方程解的情况：这些根可能互异，可能有重根，还可能有复根。

以2阶为例说明

设常系数线性型2阶齐次递归关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$$

相应的特征方程有不相同的根： λ_1 λ_2

则 $$a_n = q_1 \lambda_1^n + q_2 \lambda_2^n$$

Fibonacci数列

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \end{cases}$$

解：相应的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = q_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + q_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

由初始条件得： $q_1 + q_2 = 1$

$$q_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + q_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

解得： $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ $q_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$$\therefore \quad a_n=q_1\lambda_1^n+q_2\lambda_2^n=\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_1 = 3 \qquad a_2 = 8 \end{cases}$$

解：相应的特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3} \qquad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$$

$$a_n = q_1(1+\sqrt{3})^n + q_2(1-\sqrt{3})^n$$

由初始条件得： $q_1(1+\sqrt{3}) + q_2(1-\sqrt{3}) = 3$

$$q_1(1+\sqrt{3})^2 + q_2(1-\sqrt{3})^2 = 8$$

解得： $q_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ $q_2=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$$\therefore\ a_n=q_1\lambda_1^n+q_2\lambda_2^n$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$$

设常系数线性型2阶齐次递归关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$$

相应的特征方程有相同的根： $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

则 $$a_n = q_1 \lambda^n + q_2 n \lambda^n$$

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 2 \end{cases}$$

解：相应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ $\qquad a_n = q_1 3^n \quad + q_2 n 3^n$

由初始条件得： $q_1 = 1 \qquad 3q_1 + 3q_2 = 2$

解得： $q_1 = 1 \qquad q_2 = -\frac{1}{3}$

$$\therefore \quad a_n = q_1 \lambda^n + q_2 n \lambda^n \quad = 3^n - \frac{n}{3} 3^n$$

$$= 3^n - n3^{n-1}$$

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4} \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \end{cases}$$

解：相应的特征方程为 $\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 1) + \lambda(\lambda^2 - 1) - 2(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$(\lambda + 1)^3(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -1 \quad \lambda_4 = 2$

$$a_n = q_1(-1)^n + q_2 n(-1)^n + q_3 n^2(-1)^n + q_4 2^n$$

由初始条件得： $q_1 = \frac{7}{9} \quad q_2 = -\frac{1}{3} \quad q_3 = 0 \quad q_1 = \frac{2}{9}$

$$a_n = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{2}{9}2^n$$

特殊的常系数线性型非齐次递归关系

求：

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$$

$$S_{n-1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + (n-1)^2$$

所以有： $S_n - S_{n-1} = n^2$

同理有： $S_{n-1} - S_{n-2} = (n-1)^2$

相减得： $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 2n - 1$

同理有： $S_{n-1} - 2S_{n-2} + S_{n-3} = 2(n-1) - 1$

相减得： $S_n - 3S_{n-1} + 3S_{n-2} - S_{n-3} = 2$

$$S_{n-1} - 3S_{n-2} + 3S_{n-3} - S_{n-4} = 2$$

相减得： $S_n - 4S_{n-1} + 6S_{n-2} - 4S_{n-3} + S_{n-4} = 0$

相应的特征方程为 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda - 1)^4 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$$

$$S_n = q_1(1)^n + q_2 n(1)^n + q_3 n^2 (1)^n + q_4 n^3 (1)^n$$

$$S_n = q_1 + q_2 n + q_3 n^2 + q_4 n^3$$

而$S_0 = 1 \quad S_1 = 1 \quad S_2 = 5 \quad S_3 = 14$

$$q_1 = 0 \quad q_2 = \frac{1}{6} \quad q_3 = \frac{1}{2} \quad q_1 = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

设常系数线性型2阶齐次递归关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$$

相应的特征方程有复根： $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \tan\theta = \frac{\beta}{\alpha}$$

则

$$a_n = \rho^n (q_1 \cos n\theta + q_2 \sin n\theta)$$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \end{cases}$$

解：相应的特征方程为 $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$a_n = q_1 \cos\frac{n\pi}{3} + q_2 \sin\frac{n\pi}{3}$$

由初始条件得： $q_1 = 1 \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

常系数线性非齐次递归关系的求解

形如： $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = f(n)$

$f(n) \neq 0$

相应的齐次递归关系 的解　　与满足$f(n)$的特解的叠加

其中找出满足$f(n)$的特解是关键。

这种满足$f(n)$的特解没有一般方法。

当$f(n)$比较特殊时有一些特殊的解法。

当$f(n)$为多项式时

$$f(n) = an^2 + bn + c$$

$f(n)$的特解也有类似的形式。

特别相应的特征方程特征解有1时要注意。

例： Hanoi塔问题

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \qquad a_1 = 1$$

解：相应的特征方程为 $\lambda - 2 = 0$ $\lambda = 2$

解：相应的齐次递归关系通解为 $a_n^* = q \cdot 2^n$

$f(n) = 1$

设非齐次递归关系特解为 $\overline{a_n} = A$

代入原来递归关系得 $A = 2A + 1$ $A = -1$

$$a_n = a_n^* + \overline{a_n} = q \cdot 2^n - 1$$

由初始条件得： $q = 1$

$$a_n = 2^n - 1$$

例： 平面分割问题：

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \qquad a_1 = 2$$

解：相应的特征方程为 $\lambda - 1 = 0$ $\qquad \lambda = 1$

解：相应的齐次递归关系通解为 $a_n^* = q \cdot 1^n$

$f(n) = 2n - 2$ **特征解为1**

设非齐次递归关系特解为 $\overline{a_n} = (An + B) \cdot n = An^2 + Bn$

代入原递归关系： $An^2 + Bn = A(n-1)^2 + B(n-1) + 2(n-1)$

$A = 1 \qquad B = -1 \qquad \overline{a_n} = (n-1)n$

$$a_n = a_n^* + \overline{a_n} = q \cdot 1^n + (n-1)n$$

由初始条件得： $q = 2 \qquad a_n = 2 + (n-1)n$

例： $S_n - S_{n-1} = n^2$ $a_1 = 1$

解：相应的特征方程为 $\lambda - 1 = 0$ $\lambda = 1$

解：相应的齐次递归关系通解为 $S_n^* = q \cdot 1^n$

$f(n) = n^2$ **特征解为1**

设非齐次递归关系特解为 $\overline{S_n} = (An^2 + Bn + C) \cdot n$

代入原递归关系得： $A = \frac{1}{3}$ $B = \frac{1}{2}$ $C = \frac{1}{6}$

$\overline{S_n} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ $S_n = S_n^* + \overline{S_n} = q \cdot 1^n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

由初始条件得： $q = 0$ $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

当 $f(n)=\beta^n$

*f（n）*的特解也有类似的形式。

特别相应的特征方程特征解有 β 时要注意。

当特征解无 β 时 $\overline{a_n}=A\beta^n$

当特征解有1 β 时 $\overline{a_n}=An\beta^n$

$$\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 2^n \\ a_0 = 1 \qquad a_1 = 2 \end{cases}$$

解：相应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \qquad a^*_n = q_1 3^n + q_2 n 3^n$

$f(n) = 2^n$ 特解设为 $\overline{a_n} = A2^n$

代入原递归关系得：$A = 4$

$$a_n = a^*_n + \overline{a_n} = q_1 3^n + q_2 n 3^n + 4 \times 2^n$$

由初始条件得：

$q_1 = -3 \qquad q_2 = 1$

$$a_n = (-3 + n) \cdot 3^n + 4 \times 2^n$$