Introduction

La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet de représenter une fonction par une autre fonction qui contient la même information totale, mais d'une façon différente. On peut parler de série temporelle ou de son spectre par exemple, les deux contenant la même information mais la présentant différemment. Le document présente les notions pratiques de base pour pouvoir adéquatement analyser un signal et obtenir son spectre de Fourier, calibré correctement.

Définitions

La transformée de Fourier est définie pour une fonction connue $f(x)$ comme:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

et sa transformée inverse est ainsi:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk$$

La variable k est la variable conjuguée de x et correspond à une fréquence angulaire $k = 2\pi\nu$, la fonction $F(k)$ est souvent appelée le spectre de $f(x)$. Notons que la variable x peut-être une variable d'espace (m) ou de temps (s). Ainsi, la variable conjuguée k aura respectivement des unités de $\mathrm{rad} \cdot m^{-1}$ ou $\mathrm{rad} \cdot s^{-1}$, et la variable ν aura des unités de m^{-1} ou s^{-1}. Pour calculer cette transformation, la fonction $f(x)$ doit être connue sur l'intervalle complet de $-\infty$ à $+\infty$.

Au laboratoire, on peut mesurer des signaux par échantillonnage discret: plutôt que d'avoir la représentation continue du signal, on ne connait la valeur de la fonction qu'à certains points discrets $x_j = j\Delta x$. On écrira parfois simplement $f[x_i]$, pour rappeler la syntaxe informatique pour l'accès d'un tableau. On définit la transformée de Fourier discrète comme:

$$F[\nu_i] = \sum_{j=0}^{N-1} f[x_j] e^{i2\pi\nu_i x_j}$$

et sa transformée inverse:

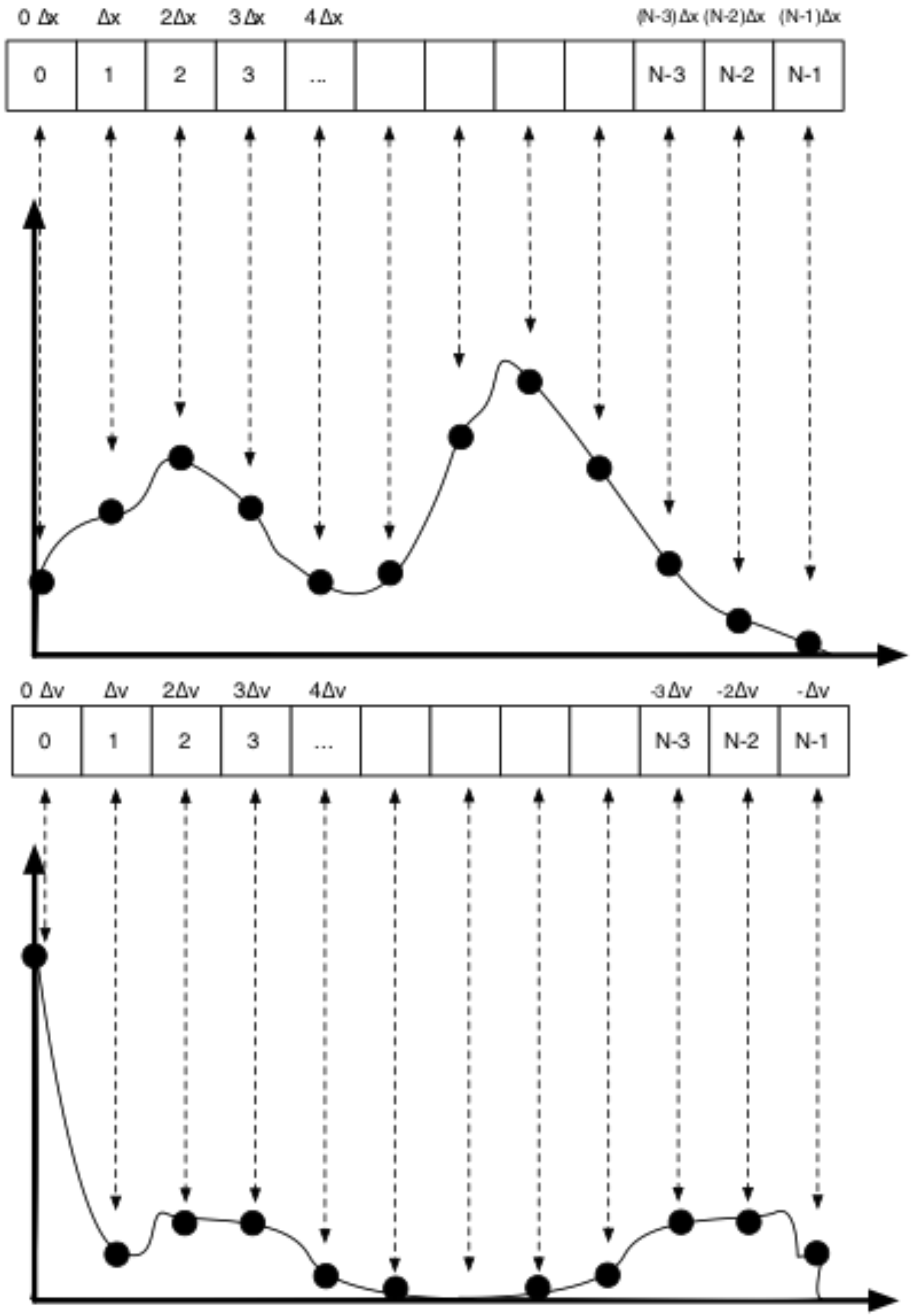
$$f[x_i] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F[\nu_j] e^{-i2\pi\nu_j x_i}.$$

Ainsi, avec un tableau de données f contenant N points, on peut obtenir un second tableau F contenant aussi N points. Si l'espacement entre les points de f est de ΔX, l'étendue du tableau est de $N\Delta X$. Après transformation de Fourier, le tableau en F sera défini de $]-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$ avec :

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{1}{N\Delta X} \\ \nu_{\max} &= \frac{1}{2\Delta X} \end{aligned}$$

Notez:

1. La transformée de Fourier discrète est définie sur les fréquences négatives et positives, de $-\nu_{\max}$ à $\nu_{\max}$.
2. Avec une fonction réelle $f(x)$, les composantes négatives et positives des fréquences seront identiques et réelles.
3. La composante $F[0]$ est la composante continue, ou DC, ou dit autrement la moyenne du signal $f[x]$.
4. La grande majorité des programmes (MATLAB, Mathematica, etc...) retourne le tableau en commençant par les composantes positives suivi par les composantes négatives.
5. La grande majorité des programmes (MATLAB, Mathematica, etc...) travaille dans l'espace de Fourier avec ν, et non $k = 2\pi\nu$. Ceci correspond mieux à la réalité (i.e. les fréquences sont des vraies fréquences, comme par exemple 60 Hz est 60 Hz, pas 376 rad Hz).
6. Les composantes $\nu_{\max}$ et $-\nu_{\max}$ sont identiques et sont au $N/2$-ième point du tableau.
7. La première composante du tableau est celle correspondant à $0\Delta\nu$, suivies de $\Delta\nu$, $2\Delta\nu$, etc... jusqu'à $(N/2)\Delta\nu$. Le dernier point du tableau est $-\Delta\nu$, l'avant dernier est $-2\Delta\nu$, précédé par $-3\Delta\nu$. Vous pourrez vérifier que le point que le dernier point du tableau est égal au deuxième, etc...



0 Δx
Δx
2Δx
3 Δx
4 Δx
(N-3)Δx
(N-2)Δx
(N-1)Δx
0
1
2
3
...
N-3
N-2
N-1
0 Δv
Δv
2Δv
3Δv
4Δv
-3 Δv
-2Δv
- Δv
0
1
2
3
...
N-3
N-2
N-1