

## **Contexte**

Ce document, généré automatiquement à partir des questions individuelles, regroupe l'ensemble des questions en optique préparées par Daniel C. Côté.

Pour corriger les questions, veuillez vous référer [aux versions en ligne des documents](#), disponible sur GitHub.

Pour bien visualiser le document original en Markdown, utilisez Typora.io et le stylesheet questions, [disponible](#) dans le répertoire site. Copiez le repertoire au complet dans le Theme Folder de Typora.

## **Ondes**

- Rayon et front d'onde
- Origine de l'indice de réfraction
- Solution équation de Maxwell indépendante du temps
- Vecteur de Poynting
- Solution à l'équation d'onde
- Somme d'ondes sphériques
- Faisceau focalisant
- Focus de caméra
- Conversion photon et puissance
- Puissance et photons
- Indice de réfraction
- Longueur d'onde
- Exemples d'indices
- Indice de réfraction
- Paramètres d'illumination
- Photons et énergie

## **Optique Géométrique**

- Points cardinaux
- Distance focale
- Plans nodaux
- Plan principaux
- Plans nodaux et principaux
- Couches diélectriques
- Salle d'interrogation
- Lentille à distance focale donnée
- Lunette dans l'eau
- Laser dans l'eau
- Inversion
- Image-objet
- Tracé de rayons
- Loupe
- Doublet
- Objet dans l'eau

Lentilles cornéennes  
Déterminant matrices ABCD  
Grossissement  
Matrice de lentille  
Goutte d'eau  
Interface diélectrique et distances focales  
Rayon généralisé  
L'oeil et les lunettes  
Objectif  
Lentilles composées  
Diaphragme  
Mirages  
Examen 2016 partie 1  
Examen 2016, partie 2  
Lentille dans milieux différents

### **Instrumentation**

Objectif et résolution  
Balayage en  $x$  et  $\theta$   
Champ de vue microscope à balayage

### **Diffraction**

Point focal  
Plans de Fourier  
Point focal  
Conception et construction d'un spectromètre Czerny-Turner  
Diffraction par des billes  
Tache focale, lentille complètement illuminée  
Tache focale, petit faisceau  
Résolution de l'oeil  
Résolution télescope Keck  
## Tache focale  
Réseau blazé  
Masque sinusoidal  
Petit prisme  
Lamelle et aberrations  
Aberration

### **Détection**

Tube photomultiplicateur  
Caméra CCD  
Bruit de photon  
Sensibilité radiante de la photocathode  
Sensibilité radiante de l'anode  
Courbe spectrale de l'oeil  
Efficacité  
Efficacité quantique  
Paramètres bruit de photons  
Bruit CCD

Histogramme d'amplitudes

Concentration de fluorophores: microscope grand champ

Concentration de fluorophores: microscope à balayage

#### Faisceaux gaussiens

Focalisation faisceau gaussien

Propagation de faisceau gaussien

Résolution angulaire

Propagation de faisceau gaussien

Tailles de faisceaux

Cavité laser

#### Interactions linéaires

#### Impulsions brèves

# 1. Ondes

Les questions de cette section se rapportent aux phénomènes ondulatoires électromagnétiques de base. Les objectifs importants découlent directement de l'utilisation et de la compréhension des équations de Maxwell.

#### Objectifs

1. Expliquer la signification des termes dans les équations de Maxwell
2. Savoir dériver et utiliser l'équation d'onde de Helmholtz
3. Expliquer et utiliser les bases complètes (sphériques, planes et autres) représentant les ondes dans les matériaux et dans le vide
4. Expliquer le concept, savoir utiliser et identifier un front d'onde et un rayon
5. Interpréter, savoir calculer et utiliser le vecteur de Poynting
6. Expliquer l'origine de l'indice de réfraction et son impact sur les ondes
7. Définir et savoir utiliser la loi de la réflexion
8. Définir et savoir utiliser la loi de Snell pour la réfraction
9. Définir, identifier et utiliser les polarisations  $\hat{s}$  et  $\hat{p}$ .
10. Savoir utiliser les coefficients de Fresnel pour les deux polarisations
11. Expliquer l'origine et calculer l'angle de Brewster

#### Références

1. Notes de cours "Optique" de Daniel C. Côté, Chapitre 1 ([iBook](#) ou [iPDF](#)).
2. Hecht: Début de Section 5.2
3. Saleh & Teich: Section 1.1, Sections 2.1 et 2.2

## 1.1. Rayon et front d'onde

Durée: 1m

### Question

**[Vrai ou Faux]** Pour toute onde, un seul rayon pointant dans une direction donnée est suffisant pour décrire le front d'onde en tout point.

### Réponse

Faux. Pour une onde plane (i.e. un front d'onde plan), tous les rayons sont perpendiculaires au front d'onde et parallèles entre eux. Au contraire, une onde sphérique (i.e. un front d'onde courbe) a plusieurs rayons différents qui ne sont pas parallèles entre eux, donc plusieurs rayons représentent les front d'onde courbes.

## 1.2. Origine de l'indice de réfraction

Durée: 10m

### Question

Quel(s) terme(s) des équations de Maxwell est ou sont impliqué(s) dans la définition de l'indice de réfraction?

### Réponse

La constante diélectrique  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  est relié à l'indice de réfraction par  $n \equiv \sqrt{\epsilon_r}$ . Cette constante diélectrique dépend de la fréquence de l'onde et de la réponse du matériel, i.e. la densité de polarisation  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ .

En effet, une réponse plus longue nous montre que l'indice de réfraction apparaît lorsqu'on doit considérer la réponse du matériau. Lors de la manipulation des équations de Maxwell, on doit obtenir une expression pour la densité de flux électrique:

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1)$$

La densité de polarisation  $\mathbf{P}$  (ou densité de dipôles), c'est-à-dire la réponse du milieu lors de l'action d'un champ électrique, dépend de l'orientation du champ électrique, de sa fréquence d'oscillation, et des propriétés du matériau. Que se passe-t-il sur les dipôles lorsque nous appliquons un champ électrique? On sait que le dipôle se déplacera mais une force de rappel agira pour le ramener à son point d'équilibre. Le lien entre  $\mathbf{P}$  et le champ électrique appliqué  $\mathbf{E}$  est donné *en général* par la relation suivante:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \cdot \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^2 : \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots \quad (2)$$

où  $\chi$  et  $\chi^2$  sont les susceptibilités linéaire et non-linéaire de deuxième ordre respectivement et dépendent de la ou des fréquences du champ électrique. Dans cette formulation de l'équation (2), la susceptibilité est un tenseur et les opérateurs  $\cdot$  et  $:$  sont les produits scalaires des tenseurs avec les vecteurs de champs électriques. *Il s'agit de la relation la plus générale qu'on peut écrire entre deux fonctions:* aussi bien dire qu'on ne sait pas grand chose et c'est pourquoi on fera des hypothèses pour simplifier à quelque chose que l'on pourra manipuler. Dans le cadre qui nous intéresse (l'optique linéaire) et dans le cas des milieux homogènes (identiques en tous points) et isotropes (non biréfringents, c'est-à-dire identiques dans toutes les directions), nous nous intéressons seulement aux champs électriques faibles et considérons  $\chi$  comme un scalaire, ce qui fait que nous pouvons écrire:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (3)$$

L'induction électrique  $\mathbf{D}$  dans ce cas particulier est donc donnée par:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \equiv \epsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

ce qui revient à définir ce fameux indice de réfraction, à travers  $\epsilon_r$ .

## 1.3. Solution équation de Maxwell indépendante du temps

*Durée: 30m*

### Question

Trouvez une solution de l'équation d'onde vectorielle tridimensionnelle dépendante du temps:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

par séparation de variables.

### Réponse

On doit faire plusieurs suppositions pour arriver à une solution particulière.

1. D'abord, on suppose que  $\epsilon$  est une constante (i.e. plutôt qu'un tenseur) donc nous ne solutionnons que pour des milieux à indice homogène (pas de biréfringence) bien que la généralisation à des milieux biréfringents est directe.
2. De plus, on suppose que le champ est polarisé linéairement selon un axe (disons  $\hat{x}$ ), bien que la solution selon les autres axes, *dans un milieu homogène*, est aussi directe car les solutions sont indépendantes (i.e. une polarisation dans un axe n'affecte pas la polarisation dans un autre axe).

### Séparation de variables

En utilisant la méthode de séparation de variables, on pose une solution de la forme:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}(x)T(t) = [A(x)\hat{x}] T(t) \quad (6)$$

On séparant les composantes dépendantes du temps et de la position de chaque côté, on obtient:

$$\nabla^2[A\hat{x}]T - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2 A\hat{x}T}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon} \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (8)$$

La différentielle en temps est maintenant une différentielle totale car  $T$  ne dépend que de  $t$ .

Si les deux fonctions sont égales et ne dépendent pas des mêmes variables ( $\mathbf{r}$  et  $t$ ), elles doivent être égales à une même constante:

$$\frac{1}{\mu_0\varepsilon} \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = K^2 \quad (9)$$

Donc en prenant la partie spatiale de l'équation, on obtient :

$$\frac{d^2 A}{dx^2} + K^2 \mu_0\varepsilon A = 0 \quad (10)$$

et en prenant la partie temporelle de l'équation, on obtient :

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + K^2 T = 0 \quad (11)$$

### Solution en $T(t)$

On suppose une solution exponentielle. Les solutions en  $T$  sont clairement du type:

$$T(t) = T_+ e^{iKt} + T_- e^{-iKt} \quad (12)$$

donc  $K$  représente la fréquence d'oscillation dans le temps, que l'on peut renommer  $\omega$ :

$$T(t) = T_+ e^{i\omega t} + T_- e^{-i\omega t} \quad (13)$$

### Solution en $A(x)$

On suppose une solution exponentielle. Il y a plusieurs types, cependant, on peut vérifier que la solution suivante est valide:

$$A(x) = A_+ e^{-i\frac{\omega}{c}x} + A_- e^{i\frac{\omega}{c}x} \quad (14)$$

où on a remplacé  $c^2 \equiv \frac{1}{\mu\varepsilon}$ . De plus, on sait (ou saura) que le vecteur d'onde  $k \equiv \frac{\omega}{c}$ .

### Solution complète

La solution complète est donc le produit des deux  $A(x)$  et  $T(t)$ . On obtiendra 4 termes croisés:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= A(x)T(t) = \left( A_+ e^{-i\frac{\omega}{c}x} + A_- e^{i\frac{\omega}{c}x} \right) \left( T_+ e^{i\omega t} + T_- e^{-i\omega t} \right) \quad (15) \\ &= E_1 e^{-i(kx - \omega t)} + E_2 e^{i(kx - \omega t)} + E_3 e^{-i(kx + \omega t)} + E_4 e^{i(kx + \omega t)} \end{aligned}$$

qui correspondent à des ondes planes allant vers la gauche ou vers la droite. Les conditions initiales détermineront la valeurs de coefficients.

## 1.4. Vecteur de Poynting

*Durée: 1m*

### Question

**[Vrai ou Faux]** Le vecteur de Poynting correspond à la direction dans laquelle la puissance se propage.

### Réponse

Vrai. Il s'agit de la définition exacte du vecteur de Poynting, qui est donné par  $\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}$ .

## 1.5. Solution à l'équation d'onde

*Durée: 10m*

### Question

Montrez qu'une onde plane  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \}$  est une solution de l'équation d'onde

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$

### Réponse

La question peut sembler très simple, ou très compliquée: en effet, le vecteur  $\mathbf{E}$  peut avoir trois composantes, et il peut lui-même dépendre de l'espace, aussi en trois dimensions,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Donc, la solution générale est quand même assez complexe. Cependant, on nous demande de **vérifier** qu'une onde plane est une solution, pas de trouver toutes les solutions possibles. Notre onde plane, ici, a une direction donnée par  $\hat{\mathbf{k}}$ , et une grandeur donnée par  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ . Pour simplifier, on peut dire que la propagation est dans la direction de  $\hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{z}}$  car nous pouvons toujours définir le système de coordonnées comme bon nous semble. On ne considérera que la dépendance en  $z$  dans le laplacien  $\nabla^2$ . Finalement, on peut tout de suite supposer que l'onde

plane a une polarisation linéaire selon  $\hat{y}$ , car tout polarisation sera une somme d'onde plane. Ainsi, on ré-écrira la solution à vérifier comme:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(z, t) \hat{z} = e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}$ , et on se retrouvera avec l'équation beaucoup plus simple:

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

On peut vérifier que  $E_0 e^{i(kz - \omega t)}$  est une solution de cette équation d'onde:

$$\frac{\partial^2 (E_0 e^{i(kz - \omega t)})}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 (E_0 e^{i(kz - \omega t)})}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

$$(ik)^2 e^{i(kz - \omega t)} - \mu_0 \epsilon (-i\omega)^2 e^{i(kz - \omega t)} = 0 \quad (19)$$

$$-k^2 + \mu_0 \epsilon \omega^2 = 0 \quad (20)$$

ce qui est vrai si  $k = \omega \mu_0 \epsilon = \omega/c$ .

## 1.6. Somme d'ondes sphériques

*Durée: 1m*

### Question

**[Vrai ou Faux]** On ne peut pas décrire une onde plane par une somme d'ondes sphériques, car son front d'onde est droit.

### Réponse

Faux. L'ensemble des ondes planes est une base complète qui peut représenter toute onde, c'est-à-dire:

$$\vec{E}(r, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{E}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (21)$$

C'est la même chose pour les ondes sphériques:

$$\vec{E}(r, t) = \sum_{\vec{r}_i} \vec{E}(\vec{r}_i) e^{i(k|\vec{r} - \vec{r}_i| - \omega t)}. \quad (22)$$

La différence est simplement que pour représenter une onde plane par une somme d'ondes sphériques, nous aurons besoin de beaucoup de termes dans la somme puisque la géométrie sphérique n'est évidemment pas plane.

## 1.7. Faisceau focalisant

Durée: 1m

### Question

Quelle est la forme du front d'onde d'un faisceau focalisant?

### Réponse

Le front d'onde est sphérique.

## 1.8. Focus de caméra

Durée: 2m

### Question

Une caméra peut ajuster le *focus* sans changer le grossissement. Comment est-ce que ça fonctionne ?

### Réponse

Proposez votre solution à [dccote@cervo.ulaval.ca](mailto:dccote@cervo.ulaval.ca)

## 1.9. Conversion photon et puissance

Durée: 5m

### Question

1 photon par seconde donne combien de Watts à  $\lambda = 1 \mu m$ ?

### Réponse

Un photon à  $1 \mu m$  a une énergie de 1 eV, donc 1 photon ( $1 \text{ eV}/\text{photon}$ ) =  $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$  ou 0.2 zeptoJoule. En une seconde, on obtient simplement 0.2 zeptoWatt.

## 1.10. Puissance et photons

Durée: 1m

### Question

1 pW donne combien de photon par seconde à  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ?

### Réponse

Un photon à 500 nm a une énergie de 2 eV (ou  $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ), donc  $1 \text{ pW} / (2 \text{ eV}/\text{photon}) = 3 \times 10^6 \text{ photon/s}$  ou 3 photons par  $1 \mu\text{s}$ .

## 1.11. Indice de réfraction

Durée: 2m

### Question

Quel est l'origine de l'indice de réfraction dans le contexte des équations de Maxwell?

### Réponse

L'indice de réfraction vient de la réponse de la densité de polarisation (i.e. les dipôles par volume) dans le matériel. On suppose une réponse des dipôles proportionnelle  $P = \chi \epsilon_0 E$ , mais  $\chi$  est dépendant de la fréquence, et est un nombre complexe (donc une amplitude et une phase). On obtient ensuite que  $n^2 = (1 + \chi)^2 = \epsilon_r$

## 1.12. Longueur d'onde

Durée: 1m

### Question

Un laser rouge de longeur d'onde 632.8 nm illumine une piscine. Sachant que la vitesse dans un milieu est  $c/n$  et que la longueur d'onde dans un milieu est  $\lambda' = \lambda/n$ , est-ce que si vous regardez dans la piscine vous verrez que le laser est bleu dans l'eau?

## Réponse

Le laser est toujours rouge car la couleur est donnée par la fréquence d'oscillation de l'onde (qui est une propriété de l'onde indépendante de la propagation et qui détermine son énergie) alors que la longueur d'onde est une propriété découlant de la propagation.

## 1.13. Examples d'indices

Durée: 2m

### Question

Donnez des valeurs d'indice de réfraction pour l'eau, le verre, l'huile, les semiconducteurs. Est-ce que cette valeur dépend de la longueur d'onde? Pourquoi?

### Réponse

L'eau  $n = 1.33$ , le verre  $n \approx 1.50$  et les semi-conducteurs varient mais sont plutôt élevés  $n_{\text{Si}} = 3.4$  et  $n_{\text{GaAs}} = 3.5$ . Vous pouvez trouver une base de données très complète sur le site [refractiveindex.info](http://refractiveindex.info).

Cette valeur dépend évidemment de la longueur d'onde. Cependant, pour des milieux transparents (comme l'eau, le verre), l'indice varie peu sauf près de l'absorption, à longueurs d'ondes courtes. Ainsi, on utilise souvent un seul indice mais on doit confirmer lorsque les longueurs d'ondes approchent l'UV dans l'eau et le verre par exemple.

## 1.14. Indice de réfraction

Durée: 30 m

### Question

a. Partez des équations de Maxwell pour obtenir l'équation d'onde d'un champ électrique polarisé linéairement dans un milieu avec une densité de polarisation uniforme  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ . En 1D, vérifiez que  $\Re \{ E_0 e^{i(kx-\omega t)} \}$  est une solution.

b. Montrez que l'indice de réfraction vu par cette onde est  $n \equiv \sqrt{\epsilon_r}$ , où  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ .

c. En modélisant la polarisation comme une somme de dipôles, et chaque dipôle comme un électron attiré par une charge positive (immobile) avec une constante de rappel  $K$ , un coefficient d'amortissement  $\gamma$ , et une masse  $m$ , montrez que:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}_0, \quad (23)$$

où  $N$  est la densité de dipôles par volume et  $\omega_0^2 \equiv \frac{K}{m}$ . Notez: un dipôle d'une charge positive et négative est la charge multipliée par la distance entre les deux charges,  $\mathbf{p} = e\mathbf{d}$ .

## Réponse

c. On utilise ici un modèle classique d'un électron lié qui subit la force de rappel d'un noyau positif. La densité de polarisation (dipôles)  $\mathbf{P}$  est définie comme:

$$\mathbf{P} \equiv \sum_i q_i \mathbf{d}_i, \quad (24)$$

et réagit au champ appliqué en s'opposant à celui-ci. La densité de polarisation  $\mathbf{P}$  pour une petite région localisée de l'espace est donc donnée par:

$$\mathbf{P} = -Ned\mathbf{d}, \quad (25)$$

avec  $\mathbf{d}$  le déplacement moyen de  $N$  électrons de charge  $e$ . À l'aide d'un modèle simple d'un électron sous l'effet d'un champ électrique  $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  oscillant à une fréquence  $\omega$ , avec une force de rappel  $-K\mathbf{d}$  et avec une force de friction  $-K\dot{\mathbf{d}}$ , on peut écrire:

$$m \frac{d^2\mathbf{d}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{d}}{dt} + K\mathbf{d} = -e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (26)$$

qui est un électron qui subit l'action d'un champ électrique uniforme. En posant une dilution pour ainsi obtenir  $\mathbf{d}$  et la polarisation  $\mathbf{d}$  par l'équation :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E}_0 \quad (27)$$

avec  $\omega_0 \equiv \sqrt{K/m}$  et  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t}$ . D'autres modèles, plus ou moins complexes, permettent d'obtenir des relations plus complètes.

## 1.15. Paramètres d'illumination

*Durée: 5m*

### Question

Calculer pour un faisceau à 800 nm de 0.1 nm de largeur spectrale ayant une surface de  $10 \text{ mm}^2$  et une puissance moyenne de 1 mW

1. Fréquence du faisceau
2. Flux d'énergie pendant 1 seconde
3. Irradiance
4. Irradiance spectrale

## Réponse

1. La fréquence est défini  $f = \frac{c}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $c$  la vitesse de la lumière. On a donc:

$$f = \frac{800 \times 10^{-9} \text{m}}{3 \times 10^8 \text{m/s}} = 375 \times 10^{12} \text{Hz} = 375 \text{THz}$$

2. La puissance  $1\text{W} = 1\text{J/s}$ , donc  $1\text{mW} = 1\text{mJ/s}$

$$\text{3. L'irradiance: } I = \frac{P}{A} = \frac{10\text{mW}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{4. Irradiance spectrale: } I_{\text{spectrale}} = \frac{I}{\Delta f} = 100 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2 \cdot \text{nm}}$$

```
# Available at
c = 3e8 # SI units
wavelength = 800e-9
surface = 10*(1e-3)*(1e-3) # in m^2
power = 1e-3 # in Watts
duration = 1 # in seconds
spectralWidth = 0.1e-9
spectralWidthInNm = spectralWidth*1e9

frequency = c/wavelength #in Hertz
flux = power * duration
irradiance = power/surface #in W/m^2
irradianceInMwPerCm2 = irradiance * 1000/(1e2)/(1e2)
irradianceInMwPerCm2PerNanoMeter = irradianceInMwPerCm2/(spectralWidthInNm)

print("1. Frequency: {0} THz".format(frequency/1e12))
print("2. Energy flux in 1 second: {0} mJ".format(flux*1000))
print("3. Irradiance: {0} mW/cm^2".format(irradianceInMwPerCm2))
print("4. Irradiance spectrale: {0} mW/cm^2/nm".format(irradianceInMwPerCm2PerNanoMeter))

# Output:
#1. Frequency: 375.0 THz
#2. Energy flux in 1 second: 1.0 mJ
#3. Irradiance: 10.0 mW/cm^2
#4. Irradiance spectrale: 100.0 mW/cm^2/nm
```

## 1.16. Photons et énergie

*Durée: 15m*

## Question

- a. Quelle est la puissance en Watt pour un flux moyen de 1 photon verts par nanoseconde?
- b. Si un détecteur semi-conducteur génère une charge positive et une charge négative pour 90% des photons incidents à la même longueur d'onde qu'en a), quel est le courant généré en Ampère pour 1  $\mu\text{W}$  de puissance incidente ?

## Réponse

a. Un photon vert (environ  $\lambda = 532 \text{ nm}$ ) a une énergie d'environ 2eV (car on se rappelle que 1 micron donne 1 eV). Donc on a:

$$E_v = \frac{hc}{\lambda} = \quad (28)$$

La fréquence est défini  $f = \frac{c}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $c$  la vitesse de la lumière. On a donc:

$$f = \frac{800 \times 10^{-9} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 375 \times 10^{12} \text{ Hz} = 375 \text{ THz} \quad (29)$$

2. La puissance:  $1\text{W} = 1\text{J/s}$  donc  $1\text{mW} = 1\text{mJ/s}$
3. L'irradiance:  $I = \frac{P}{A} = \frac{10\text{mW}}{\text{cm}^2}$
4. L'irradiance spectrale :  $I_{\text{spectrale}} = \frac{I}{\Delta f} = 100 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2 \cdot \text{nm}}$

```
c = 3e8 # SI units
wavelength = 532e-9
pulseToPulseDelay = 1e-9 # in seconds
h = 6.63e-34 # J.s
frequency = c/wavelength #in Hertz
energyPerPhoton = h * c / wavelength
power = energyPerPhoton/pulseToPulseDelay

print("1. Power: {0} W".format(power))
print("2. Energy flux in 1 second: {0} mJ".format(flux*1000))
print("3. Irradiance: {0} mW/cm^2".format(irradianceInMwPerCm2))
print("4. Irradiance spectrale: {0} mW/cm^2/nm".format(irradianceInMwPerCm2PerNanoMeter))

# Output:
#1. Frequency: 375.0 THz
#2. Energy flux in 1 second: 1.0 mJ
#3. Irradiance: 10.0 mW/cm^2
#4. Irradiance spectrale: 100.0 mW/cm^2/nm
```

# 2. Optique Géométrique

Les questions de cette section se rapportent à l'optique géométrique, où la longueur d'onde est négligeable. On parle de lentilles, formation d'image et de systèmes optiques simples.

## Objectifs

1. Faire le tracé de rayons pour les rayons importants et pour obtenir une image
2. Définir et identifier la distance focale d'une lentille simple ou complexe, ses plans principaux et ses plans nodaux.
3. Comprendre et expliquer l'origine de la formation de l'image dans des systèmes simples et complexes et savoir calculer la position de l'image
4. Expliquer la différence entre une image réelle et une image virtuelle
5. Comprendre, expliquer et savoir faire des calculs impliquant les phénomènes qui régissent l'optique géométrique
6. Savoir utiliser la loi de l'imagerie, la loi de Lensmaker et bien utiliser les conventions de signes
7. Expliquer, connaître les propriétés, savoir reconnaître, concevoir et faire des calculs impliquant un système 4f
8. Définir et savoir utiliser les matrices représentant les différentes composantes simples pour transformer les rayons
9. Décrire et savoir utiliser le formalisme des matrices ABCD
10. Comprendre et savoir comment obtenir la condition d'imagerie, les plans principaux et les points nodaux d'un système complexe
11. Identifier la distance focale équivalente d'un système complexe
12. Calculer la position d'une image avec le formalisme matriciel
13. Résoudre des problèmes en utilisant le formalisme matriciel

## Références

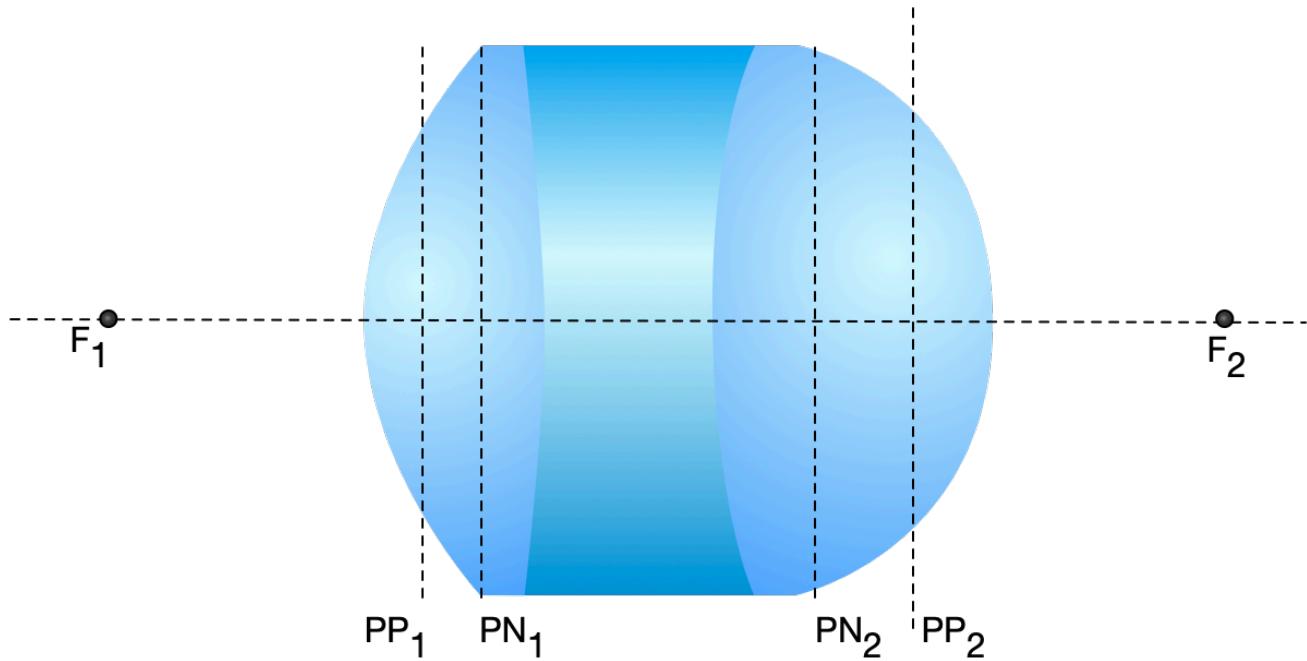
1. Notes de cours "Optique" de Daniel C. Côté, Chapitre 2, sections 1 et 2 ([iBook](#) ou [iPDF](#)).
2. Hecht, Section 5.2 et 6.1
3. Saleh & Teich: Sections 1.C

## 2.1. Points cardinaux

Durée: 2m

### Question

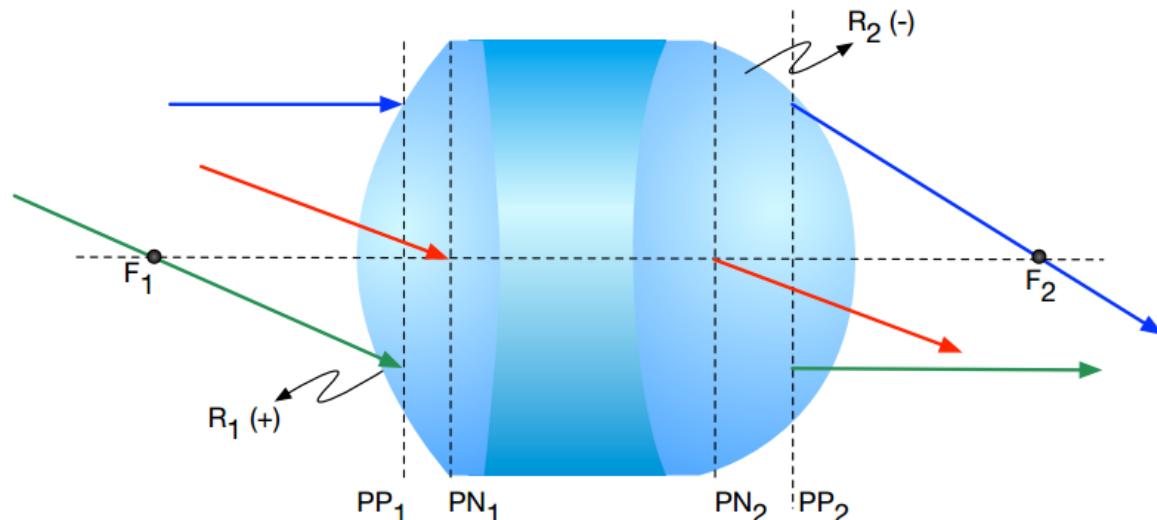
Sur la figure suivante:



tracez les rayons cardinaux passant par les points focaux  $[F_1]$  et  $[F_2]$  , nodal  $[PN_1]$  et  $[PN_2]$  et par les plans principaux  $[PP_1]$  et  $[PP_2]$  .

## Réponse

1. Le rayon au plan principal  $PP_1$  apparaît au plan principal  $PP_2$  à la même hauteur en subissant toute l'action de la lentille.
2. Un cône au plan nodal ressort avec un cône de même grandeur. Si un rayon croise la plan nodal sur l'axe optique, il continue tout droit (rayon rouge).
3. Un rayon passant par le point focal  $F_1$  ressort parallèle (rayon vert)
4. Un rayon parallèle se dirige vers le point focal  $F_2$  (rayon bleu)



## 2.2. Distance focale

*Durée: 1m*

### Question

**[V ou F]** La distance focale est définie comme la distance entre la surface (physique) d'une lentille et son point focal.

### Réponse

Faux. C'est la distance entre le plan principal et le point focal.

## 2.3. Plans nodaux

*Durée: 1m*

### Question

**[V ou F]** Les plans nodaux sont des plans de grossissement angulaire unitaire.

### Réponse

Vrai.

## 2.4. Plan principaux

*Durée: 1m*

### Question

**[V ou F]** Les plans principaux sont des plans de grossissement transverse unitaire.

## Réponse

Vrai.

## 2.5. Plans nodaux et principaux

*Durée: 1m*

### Question

Où sont les plans nodaux et les plans principaux pour une lentille mince ?

## Réponse

Au centre.

## 2.6. Couches diélectriques

### Question

Imaginez une série arbitraire de plaques diélectriques parallèles, d'indices de réfraction tout aussi arbitraires mais sans absorption, le tout, dans l'air (comme une fenêtre multi-couche épaisse). Démontrez de façon générale la relation entre les coefficients de réflexion (ou de transmission) dans un sens et l'autre, c'est-à-dire qu'arrive-t-il à l'intensité de la lumière provenant de la gauche et celle provenant de la droite en termes de coefficients de Fresnel ? Vous devez obtenir que le coefficient de transmission (ou de réflexion) de l'intensité par la gauche et par la droite est identique s'il n'y a pas d'absorption.

## Réponse

## 2.7. Salle d'interrogation

### Question

Vous savez que les coefficients de transmission par la gauche ou par la droite sont identiques (même chose pour les coefficients de réflexion). Dans les émissions de télé de Gangsters et Police, il y a souvent des fenêtres "miroirs" où le suspect ne peut pas voir à l'intérieur, mais les victimes peuvent le voir et essayer de l'identifier. À la lumière de la question précédente, expliquez ce qui se passe de façon formelle. Vous devriez utiliser une petite égalité très simple pour supporter votre explication.



*Illustration du problème: la fenêtre à l'arrière apparaît comme un miroir, pourtant, les victimes ou les autres détectives peuvent voir le suspect lorsqu'ils sont de l'autre côté.*

## Réponse

## 2.8. Lentille à distance focale donnée

*Durée: 20 m*

## Question

Pour une lentille biconvexe diélectrique épaisse d'indice  $n$  et de rayons de courbure avant et arrière identiques  $R$ , obtenez une expression pour l'épaisseur qui donne une distance focale infinie.

## Réponse

## 2.9. Lunette dans l'eau

### Question

Lorsqu'on regarde dans l'eau sans lunettes de plongée, on ne voit pas très bien. Au contraire, avec des lunettes de plongée, on voit clairement les objets. Comment expliquer cela considérant que l'oeil est identique dans les deux cas et que les lunettes de plongée sont plates?

### Réponse

La distance focale du dispositif optique qu'est l'oeil dépend du milieu incident du rayon (habituellement l'air). Lorsque nous sommes dans l'eau, l'image ne se forme plus directement sur la rétine mais plutôt un peu derrière, comme si nous étions myope. Si nous mettons des lunettes de plongée, le milieu du rayon incident est de nouveau de l'air et cela corrige notre vue.

## 2.10. Laser dans l'eau

### Question

Vous avez un pointeur laser inoffensif rouge et vous voulez viser un poisson rouge qui se trouve devant vous dans un lac sans vague alors que vous êtes sur un quai. Vous regardez le poisson. Où devez-vous viser pour atteindre le poisson sous l'eau: un peu en avant, un peu en arrière ou exactement où vous le voyez?

### Réponse

## 2.11. Inversion

### Question

Un miroir inverse la gauche et la droite. Pourquoi n'inverse-t-il pas le haut et le bas?

### Réponse

Un miroir n'inverse pas vraiment la gauche et la droite: il inverse le devant et le derrière (i.e. il inverse  $\hat{z}$  en  $-\hat{z}$ ). Ce faisant, le système de coordonnées est maintenant "main gauche" au lieu de "main droite" et en effet, la gauche et la droite sont inversés. Mais en fait, le haut et le bas, si on se tourne la tête de  $90^\circ$  vers la gauche sont aussi inversés, en ce sens que le haut est à ma droite mais à la gauche pour mon image.

## 2.12. Image-objet

### Question

Quelle est la position de l'image si un objet est placé à  $f/2$  devant une lentille de distance focale  $f$ ? L'image est-elle virtuelle ou réelle ?

### Réponse

## 2.13. Tracé de rayons

### Question

**[VRAI ou FAUX]** Pour trouver la position d'une image dans un système optique, on doit tracer au moins 3 rayons provenant de l'objet.

### Réponse

Faux. Deux sont suffisants.

## 2.14. Loupe

*Durée: 1m*

### Question

Comment faire la meilleure loupe ?

## Réponse

Pour utiliser une loupe, la meilleure position de l'objet est au plan focal. Une image à l'infini est obtenue, mais notre oeil, avec sa lentille, formera un image sur la rétine.

## 2.15. Doublet

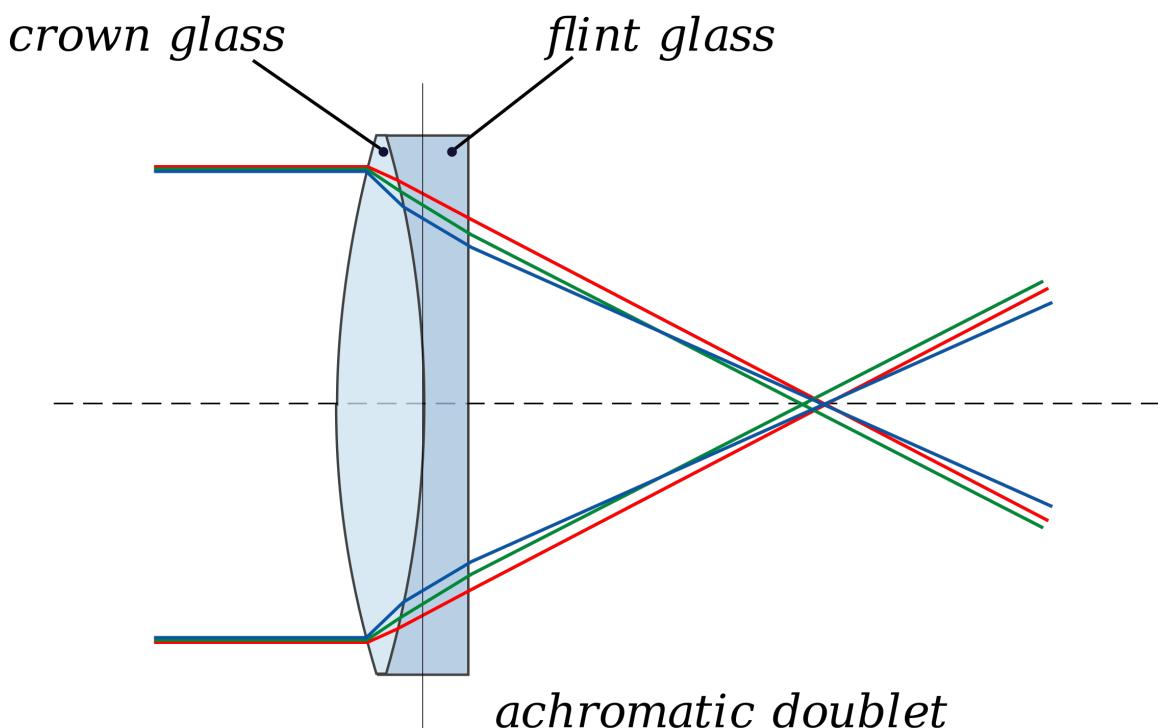
Durée: 1m

### Question

Y'a-t-il une bonne raison de faire une lentille de type doublet achromatique avec le même matériel ?

## Réponse

Non. Les deux matériaux sont de types Crown et de type Flint. Les verres de types Crown sont peu dispersifs, alors que les verres de type Flint sont très dispersif. Deux matériaux identiques ne permettraient pas de corriger les aberrations chromatiques.



## 2.16. Objet dans l'eau

*Durée: 1m*

### Question

Un objet dans l'eau a l'air plus profond ou moins profond?

### Réponse

Moins profond.

## 2.17. Lentilles cornéennes

*Durée: 1m*

### Question

Pourquoi les lentilles cornéennes avec correction pour l'astigmatisme sont-elle plus chères ?

### Réponse

Parce qu'elles doivent s'orienter dans l'oeil car la correction qu'elles produisent est associée à l'axe des  $x$  et  $y$ , elle n'est pas symétrique. Elle ont donc un poids dans le bas qui les fait s'orienter correctement.

## 2.18. Déterminant matrices ABCD

*Durée: 10 m*

### Question

Montrez que le déterminant des matrices ABCD est en général  $n_i/n_f$ , avec  $n_i$  l'indice du milieu incident et  $n_f$  l'indice du milieu sortant.

### Réponse

La matrice la plus générale est l'interface diélectrique courbe qui représente n'importe quels deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$  séparés par une quelconque interface de rayon  $R$ :

$$M_{1 \rightarrow 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Cette matrice a un déterminant de  $n_1/n_2$ . De plus, n'importe quelle série d'interfaces arbitraires entre deux milieux peut s'exprimer sous la forme d'un produit de matrices d'interfaces diélectriques de courbure arbitraires:

$$M_{1 \rightarrow f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_f - n_{f-1}}{n_f R_{f-1}} & \frac{n_{f-1}}{n_f} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_3 - n_2}{n_3 R_2} & \frac{n_2}{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{n_2 R_1} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_1 - n_i}{n_1 R_i} & \frac{n_i}{n_1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Sachant que le déterminant d'un produit est le produit de leur déterminant, on obtient:

$$\det M_{i \rightarrow f} = \det M_{f-1 \rightarrow f} \cdots \det M_{2 \rightarrow 3} \det M_{1 \rightarrow 2} \det M_{i \rightarrow 1} \quad (32)$$

$$\det M_{1 \rightarrow f} = \frac{n_{f-1}}{n_f} \cdots \frac{n_2}{n_3} \frac{n_1}{n_2} \frac{n_i}{n_1} = \frac{n_i}{n_f} \quad (33)$$

ce qu'il fallait démontrer.

## 2.19. Grossissement

*Durée: 1m*

### Question

VRAI ou FAUX: L'élément A d'une matrice de transfert ABCD représente toujours le grossissement.

### Réponse

Faux. Seulement lorsque le système est imageant. On ne parle pas de grossissement quand il n'y a pas d'image.

## 2.20. Matrice de lentille

*Durée: 1m*

### Question

Pour un système optique quelconque ayant une distance focale équivalente  $f$ , écrivez la matrice de transfert qui transforme un rayon d'un plan principal à l'autre plan principal.

## Réponse

Par définition, l'effet totale d'une lentille est appliquée entre ses plans principaux:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

## 2.21. Goutte d'eau

*Durée: 15m*

### Question

Une goutte de pluie de forme sphérique tombe en direction d'une feuille d'arbre dans une forêt à l'équateur. Trouvez les conditions dans lesquelles la lumière du soleil qui passe à travers la gouttelette est focalisée directement sur la feuille.

## Réponse

On obtient la matrice de transfert d'une surface diélectrique de rayon de courbure  $R$  et d'indice (à droite),  $n$  une propagation de  $2R$  suivi d'une autre surface diélectrique de rayon de courbure et  $-R$  d'indice (à gauche)  $n$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{R} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(1-n)}{n} + 1 & \frac{2R}{n} \\ (n-1) \left[ \frac{2}{R} + \frac{2(n-1)}{nR} \right] & 1 + \frac{2(1-n)}{n} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d(1-n)}{nR_1} + 1 & \frac{d}{n} \\ -(n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{d(n-1)}{nR_1 R_2} \right] & 1 + \frac{d(n-1)}{nR_2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

## 2.22. Interface diélectrique et distances focales

*Durée: 20m*

### Question

Supposez une interface diélectrique courbe de rayon  $R$  et d'indice  $n_1$  et  $n_2$ . Montrez que les points focaux de chaque côté de l'interface sont à des distances différentes de chaque côté de l'interface.

## Réponse

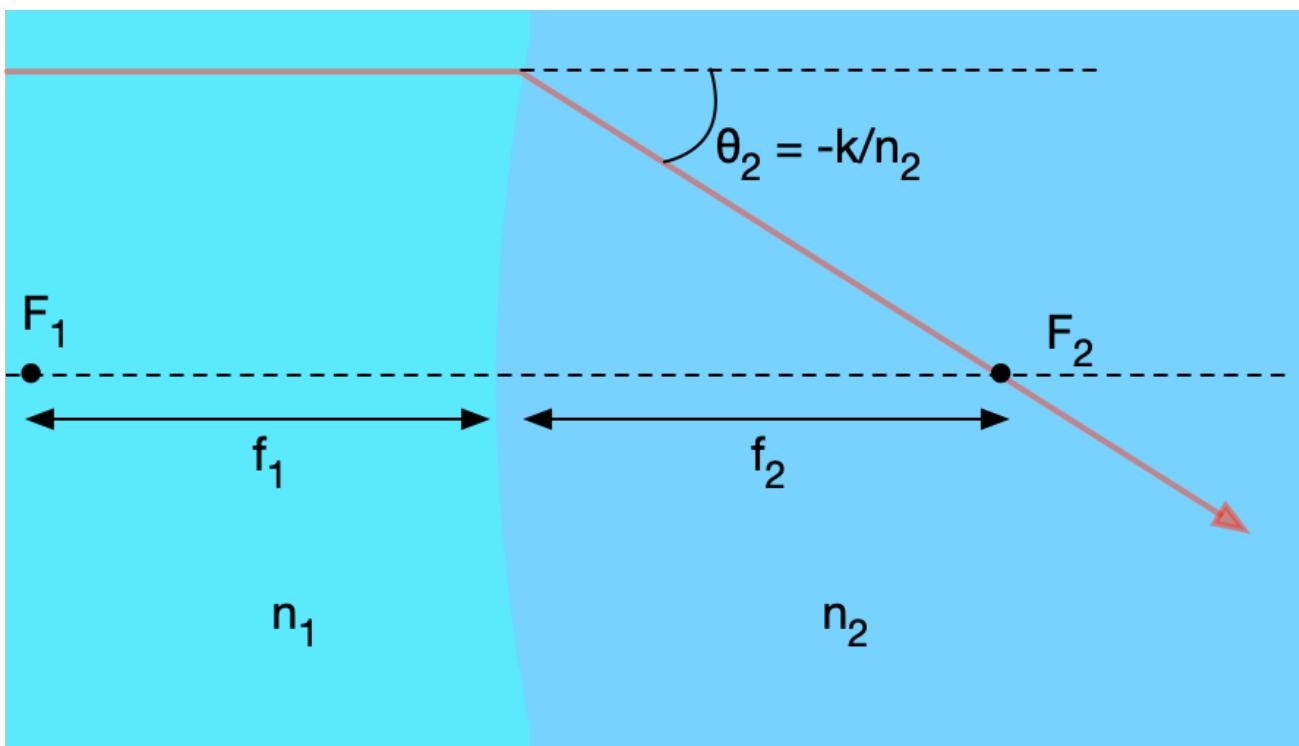
Nous avons obtenu la distance focale en prenant un rayon parallèle à l'axe dans un système en sachant que ce dernier, par définition croisera l'axe optique au point focal. Ainsi, en supposant une interface diélectrique:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

on prend un rayon à une hauteur unitaire ( $r=1$ ) et parallèle à l'axe ( $\theta = 0$ ) qui émergera à un angle de  $\theta_2 = -\frac{n_2-n_1}{n_2} R$ , et croisera donc l'axe à une distance  $f_2$  telle que  $\tan \theta_2 \approx \theta_2 = \frac{1}{f_2}$  donc  $f_2 = n_2 R / (n_2 - n_1)$ . Pour la partie avant, en prenant un rayon émergeant du point focal  $F_1$  et en propageant d'une distance  $f_1$  avant de traverser l'interface, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ -\frac{n_2-n_1}{n_2 R} & -\frac{n_2-n_1}{n_2 R} f_1 + \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Pour que le rayon ressorte parallèle, on veut que  $-\frac{n_2-n_1}{n_2 R} f_1 + \frac{n_1}{n_2} = 0$ , ce qui donne  $f_1 = n_1 R / (n_2 - n_1)$ .



## 2.23. Rayon généralisé

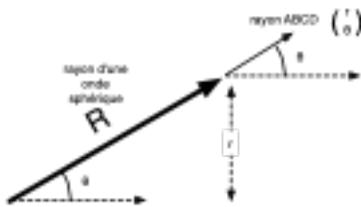
Durée: 30m

## Question

1. À partir des rayons tels que définis par le formalisme ABCD et de leur transformation, obtenez une expression en fonction de  $r$  et  $\theta$  pour le rayon de courbure  $\hat{R}$  du front d'onde d'un faisceau.
2. Obtenez la règle de transformation du rayon de courbure d'un faisceau en fonction des matrices ABCD. La propagation des ondes à fronts d'ondes courbes est donc incluse dans le formalisme ABCD. Nous verrons plus tard l'importance de cette règle.

## Réponse

1. On voit que le rayon de courbure peut facilement être obtenu en traçant le rayon qui part de l'axe optique ainsi que les paramètres utilisés dans le formalisme ABCD pour décrire un rayon. Il y a correspondance directe avec  $\tan \theta \approx \theta = r/\hat{R}$ , donc  $\hat{R} = r/\theta$ .



2. Puisqu'on sait les règles de transformation de  $r$  et  $\theta$ :

$$\begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ar + B\theta \\ Cr + D\theta \end{bmatrix} \quad (39)$$

on obtient simplement en divisant  $r'$  par  $\theta'$ , et ensuite en mettant  $\theta$  en évidence:

$$\hat{R}' = \frac{r'}{\theta'} = \frac{Ar + B\theta}{Cr + D\theta} = \frac{A\hat{R} + B}{C\hat{R} + D} \quad (40)$$

Nous verrons qu'avec un rayon généralisé, nous pourrons propager les faisceaux lasers gaussiens avec cette équation.

## 2.24. L'oeil et les lunettes

Durée: 120m

## Question

Référez-vous à la figure de Hecht suivante pour les questions.

1. Voici une citation de Hecht (p. 203):

**“The refracting components of the eye, the cornea and crystalline lens, can be treated as forming an effective double-element lens with an object focus of about 15.6 mm in front of the anterior surface of the cornea and an image focus of about 24.3 mm behind it on the retina.”** Pourquoi Hecht parle-t-il de deux distances focales? N'avons-nous pas dit que les points focaux sont équidistants de chaque côté d'une lentille? Expliquez.

2. Calculez la distance focale (ou puissance) de la cornée en supposant que l'indice de réfraction de l'humeur aqueuse est de 1.33 et le rayon de courbure de l'oeil est d'environ  $R = 23 \text{ mm}/2 = 11.5 \text{ mm}$ .
3. On utilise des lunettes pour “corriger” la vue. Les lunettes sont disposées sur le nez, environ au plan focal avant de l'oeil (soit 15.6 mm en moyenne). Calculez la matrice ABCD de l'oeil avec lunettes, et de l'oeil sans lunettes à partir du même plan de référence dans les deux cas. Pour simplifier la discussion, supposez que l'on peut remplacer les composantes optiques de l'oeil par une seule lentille de distance focale  $f = 15.6 \text{ mm}$  dans l'air, et intéressez-vous aux objets très lointains.
4. Quelles sont les distances focales du système complet dans les deux cas (avec et sans lunettes)?
5. Quel est le grossissement relatif du système avec lunettes par rapport au système sans lunettes?
6. Sachant cela, comment pouvez-vous expliquer qu'une paire de lunettes corrige la vue ? Expliquez-le de façon formelle avec les matrices ABCD.

## Réponse

1. Les deux côtés de l'oeil ne baignent pas dans le même indice de réfraction. Les deux distances focales (avant et arrière) d'une interface diélectrique ne sont les mêmes que lorsque l'indice est le même des deux côtés (par exemple, dans l'air).
2. On utilise la loi des diélectriques courbes ou la matrice ABCD diélectrique courbe qui donne simplement  $f = -1/C$ , donc  $f = \frac{1.33R}{1.33-1.00} = 4R = 46\text{mm}$ , par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2-n_1)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

3. Les matrices ABCD pour le cas sans lunettes et avec lunettes, telles que calculées à partir de  $f$  devant la lentille de l'oeil

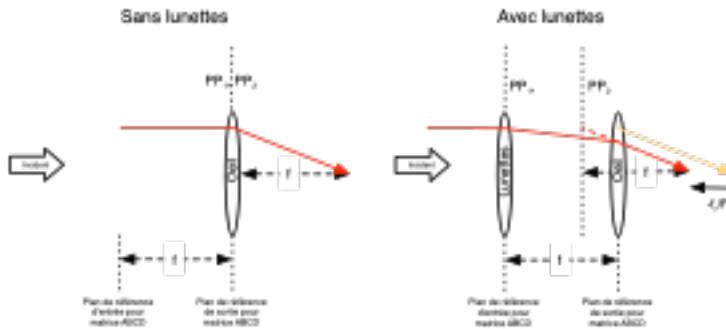
Cas sans lunettes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Cas avec lunettes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{f}{F} & f \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

4. La distance focale  $C^{-1}$  du système complet n'a pas changée et est toujours celle de l'oeil,  $f$ .
5. Le grossissement dépend de l'objet et de l'image. Les deux systèmes ont la même distance focale, donc le grossissement est identique.
6. Prenons le cas sans lunettes, avec l'équation (c.1) et la figure suivante:



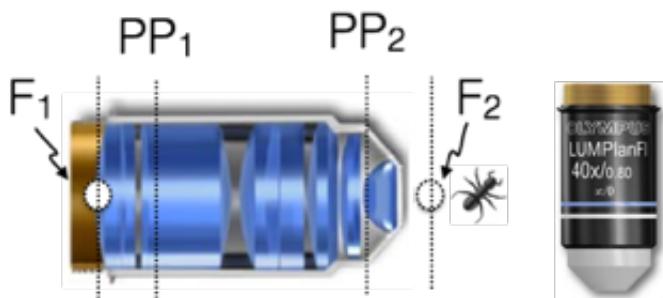
Le plan principal avant est à  $d_{PP_1} = \frac{1-D}{C} = -f$  devant le système, donc  $f$  vers la droite, i.e. sur la lentille mince. Le plan principal de arrière est à  $d_{PP_2} = \frac{1-A}{C} = 0$  donc lui aussi sur la lentille mince. Aucune surprise. Cependant, le plan principal arrière du système avec lunette a changé: on le voit tout de suite, l'élément  $A$  a changé. Un calcul de la position du plan donne  $PP_2$  qu'il est maintenant à  $d_{PP_2} = \frac{1-A}{C} = -\frac{f^2}{F}$ . Ainsi, le plan focal a été déplacé de  $-\frac{f^2}{F}$ , la distance focale reste la même mais le point focal est avancé, d'où la correction par les lunettes.

## 2.25. Objectif

*Durée: 60 m*

### Question

Vous avez l'objectif Olympus suivant, identifié « Olympus UPlanFl 40x ». Vous savez que cet objectif s'utilise normalement dans un système 4f avec une seconde lentille de distance focale  $f=18$  cm pour compléter ledit système 4f. Cependant, vous voulez l'utiliser seul, sans aucune autre lentille, pour tirer profit de ses excellentes propriétés optiques. Vous savez aussi que le point focal  $F_1$  est collé sur la première surface de l'objectif et que le point focal  $F_2$  est à 2 mm du bout de l'objectif, comme sur la Figure.



- Quelle est la distance focale de cet objectif Olympus 40X ?
- Écrivez la matrice ABCD qui permet de transformer un rayon entrant de la première surface de l'objectif au plan focal F2.
- Quelles sont les positions des plans principaux ? Donnez les distances en fonction des points focaux F1 et F2.
- Vous voulez maintenant utiliser l'objectif (sans aucune autre lentille) pour faire l'image d'un objet qui est à 2.5 mm du bout de l'objectif, donc 0.5 mm après le point focal F2. Où placeriez-vous votre

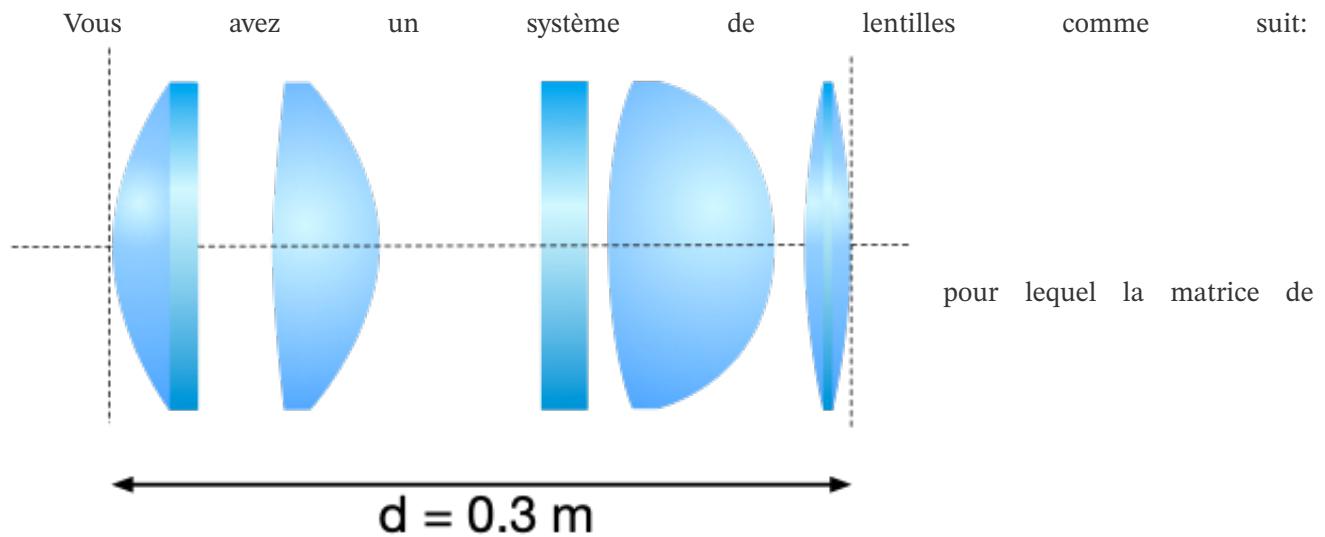
camera par rapport à la première surface de l'objectif pour obtenir une image claire de cet objet?

## Réponse

## 2.26. Lentilles composées

Durée: 15m

### Question



transfert ABCD (en unités métriques) du plan d'entrée au plan de sortie est :

$$M = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.11 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Si vous placez un objet 0.2 m devant le groupe de lentilles, où sera l'image et quel sera le grossissement?

## Réponse

## 2.27. Diaphragme

Durée: 30m

### Question

Vous avez une lentille de diamètre  $D = 5$  cm et de focale  $f = 50$  cm qui fait l'image du soleil, un disque d'illumination constante pour nos besoins. Le soleil sous-tend un angle de  $\theta = 0.5^\circ$  à la surface de la terre, où son irradiance est de  $1000 \text{ W/m}^2$ . Quelle est l'irradiance de l'image du soleil qui apparaît sur la caméra?

## Réponse

## 2.28. Mirages

*Durée: 90m*

## Question

Qu'est-ce qui explique la formation des mirages dans le désert? À partir de quelle température apparaîtront-ils?

## Réponse

## 2.29. Examen 2016 partie 1

*Durée: 25m*

## Question

Un exemple, en vrac, de question pour la partie 1 de l'examen.

1. [Vrai/Faux] Pour toute onde, un seul rayon pointant dans une direction donnée est suffisant pour décrire le front d'onde en tout point
2. [Vrai/Faux] On ne peut pas décrire une onde plane par une somme d'ondes sphériques, car son front d'onde est droit.
3. [Vrai/Faux] On peut avoir une onde qui a un front d'onde plan mais qui n'est pas une onde plane
4. [Vrai/Faux] Une onde plane qui se propage dans l'atmosphère sera perturbée par les variations d'indices de réfraction et ne restera plus une onde plane.
5. [Vrai/Faux] Le vecteur de Poynting correspond à la direction vers laquelle la puissance se propage
6. [Vrai/Faux] Le vecteur de Poynting a les unités de puissance par surface.
7. [Vrai/Faux] La distance focale est définie comme la distance entre la surface (physique) d'une lentille et son point focal.
8. Où sont les plans nodaux et les plans principaux pour une lentille mince ?

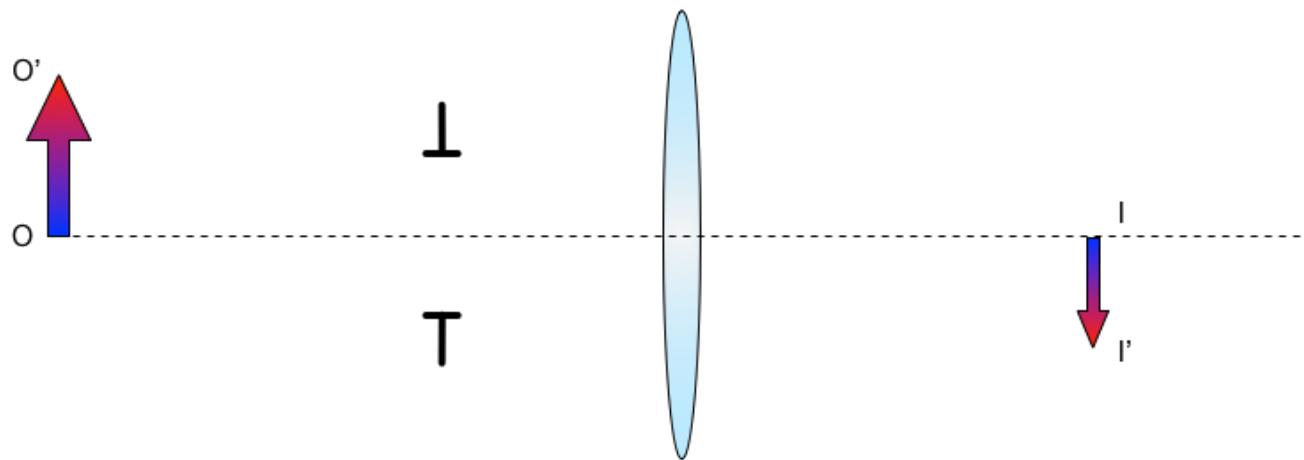
9. [Vrai/Faux] Les plans principaux sont des plans conjugués
10. Vous avez un pointeur laser inoffensif et vous voulez viser avec ce faisceau laser un poisson qui se trouve dans un aquarium. À partir du point A, où devez-vous viser pour atteindre le poisson sous l'eau? Tracez la lumière à partir du point A et expliquez.



11. [Vrai/Faux] Un miroir sphérique peut avoir des aberrations chromatiques
12. [Vrai/Faux] Pour trouver la position d'une image dans un système optique, on doit tracer au moins 3 rayons provenant de l'objet.
13. **GRIN** Pour quelles longueurs non nulles L une lentille GRIN, décrite par la matrice suivante donnera-t-elle une image à un bout de la lentille pour un objet collé à l'autre bout?

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha L & \alpha^{-1} \sin\alpha L \\ -\alpha \sin\alpha L & \cos\alpha L \end{bmatrix}$$

14. Avec l'iris devant la lentille qui bloque la lumière, tracez le rayon marginal du point O et le rayon principal du point O', sachant que ces points ont des images correspondantes aux points I et I'.



15. [Vrai/Faux] Le diamètre du diaphragme d'entrée (*aperture stop*) est la valeur qui définit le f# du système.
16. [Vrai/Faux] La pupille d'entrée définit la quantité de lumière qui entre dans un système
17. [Vrai/Faux] L'élément A d'une matrice représente toujours le grossissement.
16. [Vrai/Faux] La matrice suivante représente un ou plusieurs éléments optiques.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \text{ cm} \\ -2 \text{ cm}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

1. La focale équivalente est de 0.50 cm
  2. Il n'y a pas de focale équivalente, car l'élément B n'est pas zéro comme dans une lentille mince
  3. Si je mets un objet devant ce groupe d'éléments optiques, une image virtuelle ou réelle existera
17. [Vrai/Faux] Une goutte d'eau sphérique agit comme une lentille épaisse.
  18. [Vrai/Faux] Les lunettes corrigent la vue en diminuant ou augmentant la distance focale du système complet de l'œil et des lunettes ensemble
  19. [Vrai/Faux] L'étoile Vega, qui sous-tend un angle de 1 milliradians, formera un point sur une camera puisqu'elle est infiniment loin.

## Réponse

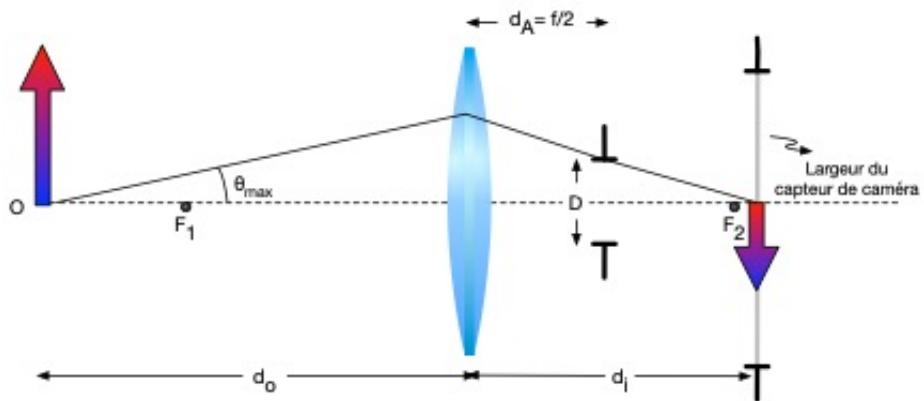
## 2.30. Examen 2016, partie 2

Durée: 45m

### Question

Un exemple, en vrac, de question pour la partie 2 de l'examen.

1. Pour un système optique quelconque ayant une distance focale équivalente  $f$ , écrivez la matrice de transfert qui transforme un rayon d'un plan principal à l'autre plan principal.
2. Quelle est la position de l'image si un objet est placé à  $2f$  devant une lentille de distance focale  $f$  ?
  1. L'image est-elle virtuelle ou réelle ?
3. Vous avez le système imageant suivant (pas à l'échelle) qui consiste en un objet à une distance  $4f$  d'une lentille de distance focale  $f=5$  cm. Le diaphragme d'entrée limitant la quantité de lumière se trouve à une position  $d_A=f/2$  après la lentille et a un diamètre de  $D=1$ cm.

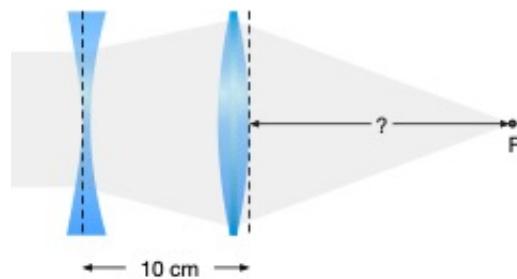


1. Pour un rayon sur l'axe et sur l'objet, quel est l'angle maximal  $\theta_{\max}$  pour lequel un

rayon se rendra jusqu'à l'image

2. Comment s'appelle ce rayon ?

4. Vous avez construit ce splendide objectif téléphoto inverse avec une lentille divergente de  $f_a = -2$  cm et une lentille convergente de  $f_b = 6$  cm, les deux étant séparées par une distance de 10 cm :

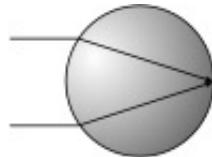


La matrice de transfert ABCD, de la première surface de la première lentille divergente à la dernière surface de la deuxième lentille convergente, qui provient de la multiplication des matrices représentant chaque lentille et l'espace entre les deux, est la suivante : 
$$\begin{bmatrix} 6 & 10 \text{ cm} \\ -\frac{1}{2} \text{ cm}^{-1} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

où est le point focal par rapport à la surface de la deuxième lentille ?

#### BONI FACULTATIF

5. En optique infrarouge, on utilise parfois des lentilles de type « sphérique » (ou *ball lens*) comme sur la figure. Il suffit de déposer la sphère sur un échantillon pour focaliser à sa surface. À partir de quel valeur de l'indice de réfraction le point focal sera-t-il directement sur la sphère?



## 2.31. Lentille dans milieux différents

Durée: 60m

### Question

Supposez une lentille de rayons  $R_1$ ,  $R_2$ , et d'indice  $n$  immergée dans un milieu  $n_1$  à l'entrée et  $n_2$  à la sortie. Montrez que les points focaux de chaque côté de l'interface sont à des distances différentes de la lentille..

### Réponse

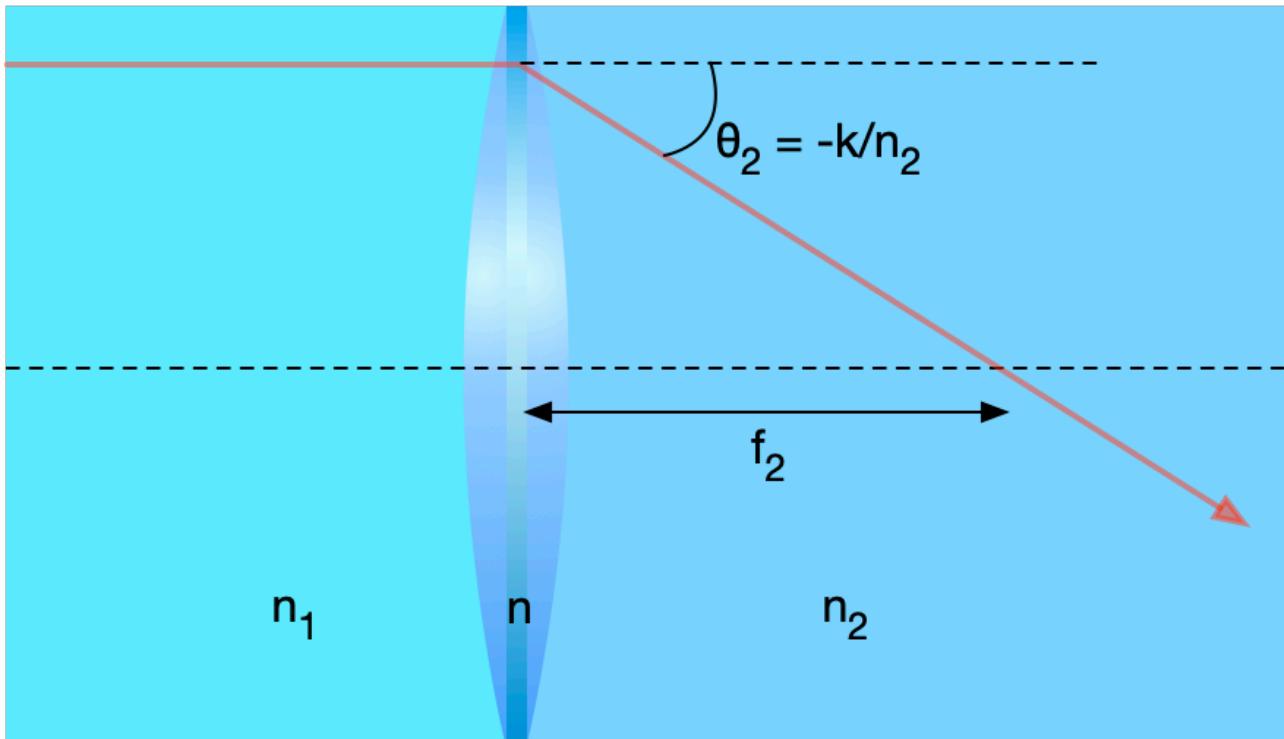
Nous avons obtenu la distance focale en prenant un rayon parallèle à l'axe dans un système en sachant que ce dernier, par définition croisera l'axe optique au point focal. La matrice de la lentille mince a été développée en supposant qu'elle était dans l'air. Ainsi, on ne peut partir de :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

et espérer redériver quelque chose de plus général dans des milieux différents. On doit plutôt essentiellement réécrire la lentille mince en la décomposant en deux interfaces courbes séparées par une distance négligeable. Ainsi, en supposant un indice  $n_1$  à l'entrée, un indice  $n$  dans la lentille et un indice  $n_2$  à la sortie, on obtient une lentille mince immergée dans deux milieux différents:

$$\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n}{n_2 R_2} & \frac{n}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-n_1}{n R_1} & \frac{n_1}{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

avec  $k \equiv \left( \frac{n-n_1}{R_1} - \frac{n-n_2}{R_2} \right)$ . On note qu'avec une lentille dans l'air ( $n_1 = n_2 = 1$ ), on retrouve l'équation du LensMaker  $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ . Un rayon à une hauteur unitaire ( $r=1$ ) et parallèle à l'axe ( $\theta=0$ ) émergera à un angle de  $\theta_2 = -\frac{k}{n_2}$ , et croisera donc l'axe à une distance  $f_2$  telle que  $\tan \theta_2 \approx \theta_2 = \frac{1}{f_2}$  donc  $f_2 = n_2/k$ . En inversant  $n_1$  et  $n_2$  et  $R_1$  et  $R_2$ , on obtiendrait  $f_1 = n_1/k$ .



### 3. Instrumentation

#### Objectifs

1. Définir et savoir identifier les diaphragmes d'entrée et de champ, les pupilles d'entrée et de sortie, les fenêtres d'entrée et de sortie
2. Expliquer l'importance des diaphragmes dans un instrument
3. Définir et savoir tracer le rayon principal et la rayon marginal d'une source ponctuelle
4. Définir le  $f_{\#}$  d'un système.
5. Savoir calculer la quantité de lumière captée par un système

### **Lecture préparatoire**

1. Notes de cours "Optique" de Daniel C. Côté, Chapitre 2, section 3 ([iBook](#) ou [iPDF](#)).
2. Pedrotti, Chapitre 6
3. Hecht, Section 5.3

## **3.1. Objectif et résolution**

*Durée: 1m*

### **Question**

Est-ce qu'un objectif 40x a une résolution optique spatiale meilleure ou pire qu'un objectif 100x ? Pourquoi?

### **Réponse**

Impossible à dire. La résolution optique est donnée par l'ouverture numérique ou par le  $f_{\#}$ , et cette information n'est pas donnée. Le 40x ou 100x ne nous donne que la distance focale de l'objectif: elle est 40x ou 100x plus petite que celle du *tube lens*.

## **3.2. Balayage en $x$ et $\theta$**

*Durée: 5m*

### **Question**

Prouver à l'aide des matrices ABCD qu'un balayage en angle au point focal donne un balayage en X/Y à l'autre point focal ?

### **Réponse**

Deux méthodes: par matrice ABCD ou par raisonnement de secondaire 5.

Un faisceau provenant du point focal ressort parallèle à l'axe. Par géométrie on obtient  $y = f\theta$ .

Par matrices ABCD, on obtient simplement:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f \\ -\frac{1}{f_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Le rayon sort à une hauteur de  $y = f\theta$  et parallèle à l'axe car  $\theta = 0$ .

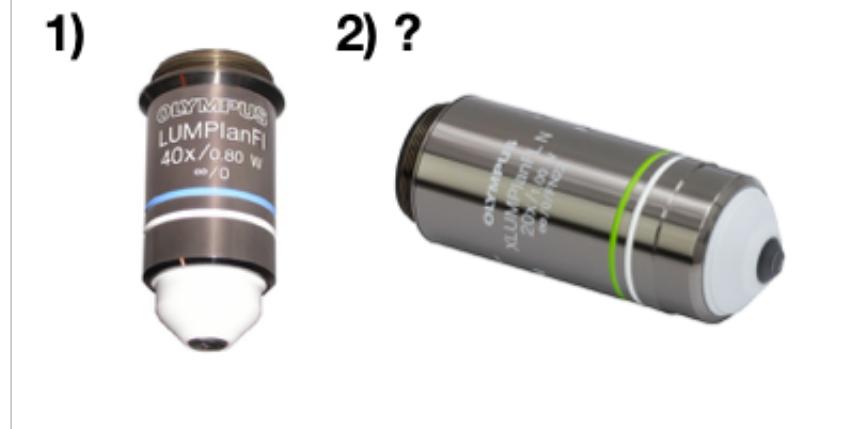
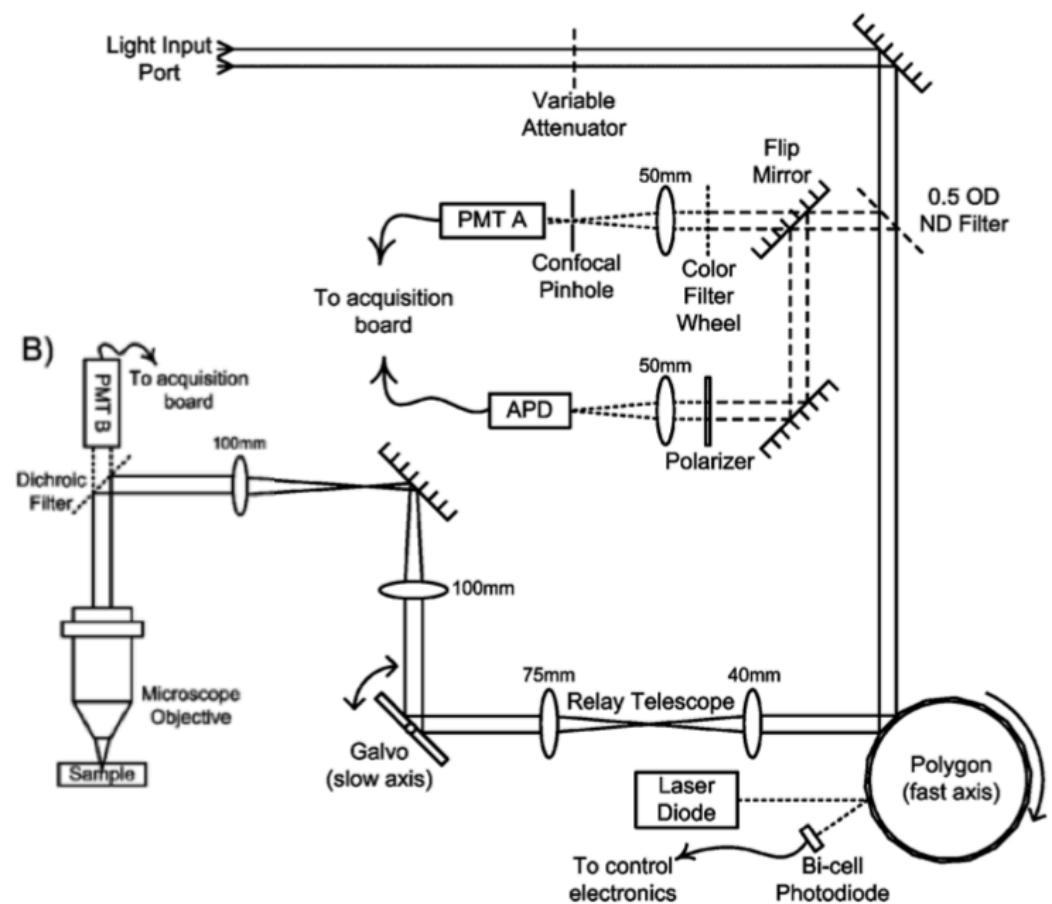
### 3.3. Champ de vue microscope à balayage

*Durée: 120m*

#### Question

Le microscope suivant, qui fonctionne avec un laser Ti:sapphire et un objectif Olympus 40x 0.8 NA (Objectif #1 ci-dessous), permet de balayer à 30 images par secondes avec un polygone à 36 faces. Tout l'optique a 1 pouce de diamètre.

1. Quel est le champ de vue du microscope?
2. Quel est la résolution optique du microscope?
3. Si vous numérisiez de façon idéale, quelle sera la taille de l'image (micron et pixels) à 30 images par secondes?
4. J'aimerais utiliser le 20X (Objectif #2 ci-dessous). Est-ce possible? Est-ce que j'ai des modifications à faire? Qu'arrivera-t-il au champ de vue?
5. Après avoir complété vos calculs, que devriez vous vérifier pour confirmer le tout? Où sont les incertitudes dans votre système?



Réponse

## 4. Diffraction

## Objectifs

1. Expliquer la diffraction et son origine physique, comprendre les conditions selon lesquelles une onde diffracte ou non
2. Expliquer le principe de Huygens-Fresnel
3. Savoir faire des calculs de diffraction pour des profils d'illuminations simples ou complexes
4. Comprendre, savoir expliquer et reconnaître que la diffraction de Fraunhofer correspond à la transformée de Fourier du champ électrique incident
5. Savoir faire la correspondance d'échelle pour les calculs de diffraction faisant appel aux transformées de Fourier, dans le cas de l'utilisation d'une lentille ou non
6. Savoir faire des calculs à l'aide de méthodes numériques pour obtenir le patron de diffraction d'un profil arbitraire
7. Connaître le critère de sélection pour les régimes de Fraunhofer et Fresnel, comprendre appliquer ces critères pour résoudre des problèmes
8. Connaître et savoir identifier des paires de transformées de Fourier importantes
9. Expliquer et savoir calculer les propriétés des réseaux de diffraction
10. Nommer, identifier et connaître les propriétés spécifiques des trois types de réseaux d'amplitude, de phase et blasé
11. Définir et expliquer l'intervalle spectral libre, la dispersion angulaire, la résolution et le pouvoir de résolution et savoir les utiliser dans des calculs

## Références

1. Notes de cours "Optique" de Daniel C. Côté, Chapitre 3, sections 1 et 2 ([iBook](#) ou [iPDF](#)).

## 4.1. Point focal

Durée: 5m

### Question

Vous voulez le plus petit point focal possible. Quelle lentille prenez vous et quelle laser prenez vous ?

### Réponse

Une lentille avec le plus petit  $f_{\#}$  possible: le plus petit ratio de distance focale sur diamètre. Je prends un laser avec la plus petite longueur d'onde possible, et je remplis la lentille avec ce laser car la grosseur du point focal est donnée par  $w = 1.22f_{\#}\lambda$ .

## 4.2. Plans de Fourier

Durée: 1m

### Question

Est-ce que des plans de Fourier sont des plans conjugués de l'objet ou de l'image?

### Réponse

Non. Les plans conjugués sont des plans objet-image. Deux plans de Fourier sont en effet conjugués entre eux, mais on ne sont pas des plans conjugués de l'objet ou de l'image.

## 4.3. Point focal

Durée: 5m

### Question

Vous envoyez un faisceau collimé (i.e. provenant de l'infini) de diamètre  $d_o = 1 \text{ mm}$  dans une lentille mince de 25.4 mm de diamètre et d'ouverture numérique 0.5. Quelle sera la grosseur du point focal ?

### Réponse

Le point focal sera de  $w = 1.22 f_{\#}^{\text{eff}} \lambda = 1.22 \frac{f}{d_o} \lambda$  car la lentille n'est pas remplie (i.e. la diffraction provient de la grosseur finie du faisceau, pas du diamètre de la lentille). La distance focale est obtenue de la définition du NA =  $\frac{D}{2f}$ , donc  $f = 25.4 \text{ mm}$ . Ainsi,  $w = 1.22 \times 25.4 \text{ mm}/1 \text{ mm} \approx 30 \times \lambda$ .

## 4.4. Conception et construction d'un spectromètre

### Czerny-Turner

Durée: 180m

### Question

Vous voulez construire un spectromètre de Czerny-Turner dans le visible (permettant des mesures de 400 nm à 700 nm inclusivement). Vous avez seulement des fentes de 50 microns pour travailler et vous voulez une résolution spectrale de 50 pm. Quels miroirs courbes, quel réseau de diffraction de type blasé utilisez-vous et à quelles positions les placez-vous ? Expliquez vos choix.

## Réponse

## 4.5. Diffraction par des billes

Durée: 180m

### Question

Vous voulez caractériser un jet assez dense de particules opaques de diamètres  $d$ . Le jet lui-même a un diamètre d'environ 1 cm. Vous avez un laser à 632.8 nm émettant un faisceau gaussien collimé (1 mm de diamètre), une boîte de lentilles convergentes de distances focales variées et une caméra avec un capteur CCD ayant 1024 x 768 pixels de 16  $\mu\text{m}$  et produisant 30 images par secondes. Vous ne savez pas la grosseur des particules, mais vous savez qu'elles sont toutes identiques, et qu'elles ont un diamètre d'au moins 1  $\mu\text{m}$  et probablement de moins de 10  $\mu\text{m}$ . Vous faites un montage pour que le laser (que vous pourrez collimer autrement ou non) diffracte sur les particules et vous voulez mesurer le patron de diffraction sur la caméra.

1. Dessinez votre montage de façon conceptuel.
2. Obtenez (équation à l'appui) le patron que vous verrez sur la caméra. Vous devrez utiliser le principe de Babinet. **Attention:** bien sûr, le flux de particules est tel que plusieurs particules se retrouvent dans le faisceau, à des distances variables l'une de l'autre. Restera-t-il un patron de diffraction non nul? Obtenez une expression mathématique décrivant cette situation.
3. Avec les lentilles que vous utiliserez et votre caméra, quelles sont les limites des diamètres que vous pourrez détecter (plus petit et plus grand diamètres de particules)?
4. Lorsque vous avez dérivé 2), vous avez fait des hypothèses (implicites ou non) sur la densité de particules. Donnez un critère sur la grosseur du jet et la densité maximale de particules (particules par surface par seconde) que le jet devrait avoir pour que vos mesures soient possibles. **Des indices:** est-ce qu'un photon diffracté pourrait diffracter à nouveau sur une deuxième particule? Quelle est la probabilité qu'un photon diffracte dans un jet de particule de diamètre  $d$ ?

## Réponse

## 4.6. Tache focale, lentille complètement illuminée

### Question

Une onde plane est incidente sur une lentille de distance focale  $f$  et de diamètre  $D$ . Quelle est la grosseur de la tache focale?

## Réponse

Ceci est un problème de diffraction par une fente circulaire, car la lentille bloque l'onde plane incidente. On a donc une illumination uniforme sur l'ensemble de la fente.

À partir de la solution de la diffraction d'une fente circulaire de l'exemple 3.1.2 présenté dans les notes

$$I_\sigma(r) \approx \frac{|E_\circ|^2 \pi a^2}{f^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{2\pi ar}{\lambda f}\right)}{\frac{2\pi ar}{\lambda f}} \right]^2 \quad (48)$$

on obtient que la largeur, que l'on peut définir de plusieurs façons (distance entre le maximum et le point où la fonction  $J_1(x)/x$  est nulle, ou entre les deux zéros). Donc avec  $J_1\left(\frac{2\pi ar_\circ}{\lambda f}\right) = 3.82$ , on obtient pour la distance entre les deux zeros  $2r_\circ = 2 \times 1.22 \frac{f}{2a} = 2.44 \lambda f \#$ . La tache focale, dans le cas où la lentille est remplie par l'illumination, est environ le double de la longueur d'onde multipliée par le *f-number* de la lentille.

## 4.7. Tache focale, petit faisceau

### Question

Un petit faisceau en forme de disque de diamètre  $d$  est incident sur une lentille de distance focale  $f$  et de diamètre  $D$ . Quelle est la grosseur de la tache focale?

## Réponse

Nous avons un problème dangereusement similaire au problème précédent. Cependant, l'intensité de l'illumination ne s'étend pas sur l'ensemble de la lentille car le faisceau est plus petit que celle-ci. Ainsi, en posant le problème de diffraction, l'intégrale sera nulle au-delà du faisceau, ce qui réduira le diamètre de l'intégrale à  $d$  au lieu de  $D$ . On refait donc le problème de la même façon.

À partir de la solution de la diffraction d'une fente circulaire de l'Exemple 3.1.2 des notes, on obtient

$$E_\sigma(r) \approx \frac{E_\circ e^{ikf} 2\pi}{f} \int_0^{d/2} J_0\left(\frac{kr'r}{f}\right) r' dr' \quad (49)$$

$$I_\sigma(r) \approx \frac{|E_\circ|^2 \pi^2 (d/2)^4}{f^2} \left[ \frac{2J_1\left(\frac{\pi dr}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi dr}{\lambda f}} \right]^2 \quad (50)$$

on obtient essentiellement la même solution que le problème précédent, sauf que le diamètre effectif de “blocage” est  $d$  au lieu de  $D$ . On obtient donc  $2r_0 = 2 \times 1.22\lambda \frac{f}{d}$ . Dans ce cas, on dit que le faisceau “n’utilise pas” toute la lentille est que le  $f_\#$  effectif est augmenté de  $f_\#^{\text{eff}} = \frac{D}{d} \times f_\#$  ce qui augmente proportionnellement la grosseur de la tache focale.

## 4.8. Résolution de l’oeil

Durée: 120m

### Question

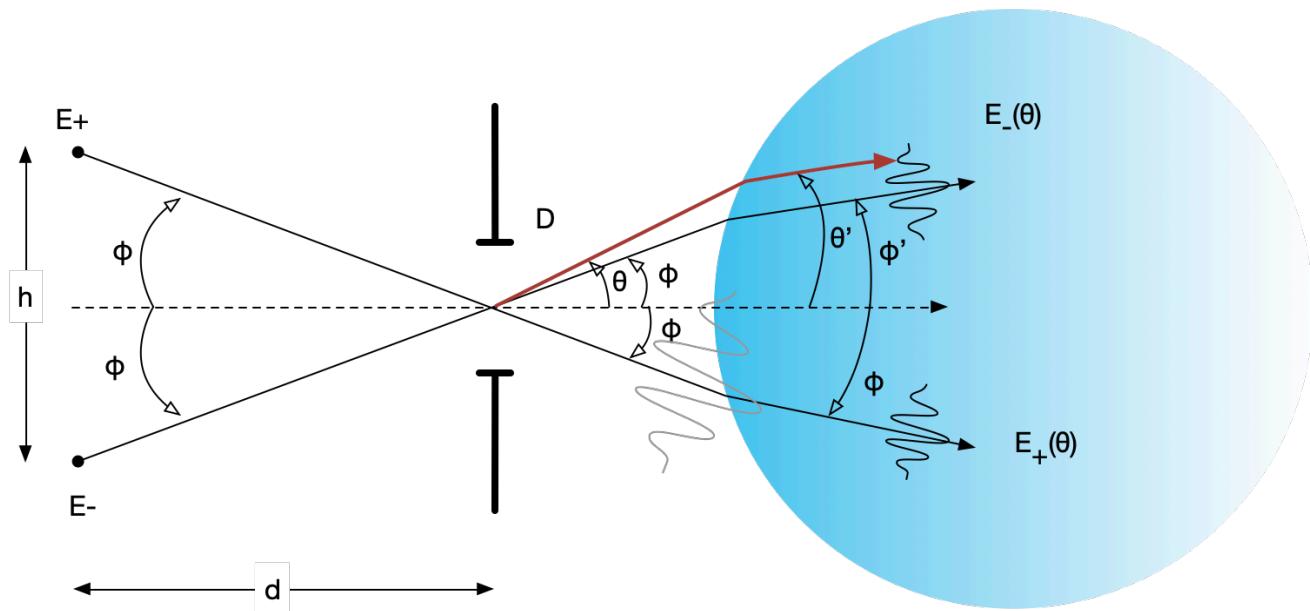
Les deux phares d’une voitures sont séparés par une distance de  $h = 1.5$  m. Quelle est la distance maximale  $d$  à partir de laquelle vous pourrez résoudre les deux phares comme étant distincts si votre pupille a un diamètre de  $D = 5$  mm et que la longueur d’onde principale est de 550 nm ?

### Réponse

#### Stratégie

L’onde de chaque phare frappe l’ouverture circulaire de l’oeil et diffracte en un disque d’Airy (le champ en fonction de l’angle). Ceci correspond à un ensemble de rayons qui frappent la lentille de l’oeil. On solutionne d’abord en ignorant l’oeil. Ensuite, on montre que finalement, la réfraction à l’interface de l’oeil ne change rien à la résolution.

Les phares  $E_+$  et  $E_-$  émettent des ondes sphériques, et chacune diffracte dans l’ouverture de la pupille. On obtient les champs diffractés selon  $\theta$  tout de suite après la pupille centré sur  $\pm\phi$ :



**Figure:** Les phares  $E_+$  et  $E_-$  émettent des ondes sphériques, mais la pupille lointaine reçoit une onde plane dans la direction  $\pm\theta$ . Indépendamment, chaque faisceau diffractera à travers la pupille de rayon  $D$ . Chaque source produira un patron de diffraction  $E_{\pm}(\theta)$ .

$$E_{\pm}(\theta) \propto E_0 \frac{2J_1\left(\frac{\pi D \sin(\theta \pm \phi)}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D \sin(\theta \pm \phi)}{\lambda}\right)} \quad (51)$$

On utilise le critère de Rayleigh, c'est-à-dire le premier minimum (zéro) du patron de diffraction  $E_+(\theta)$  doit être superposé au maximum du patron de diffraction de l'autre faisceau  $E_-(\theta)$  à  $\phi$ . On veut donc:

$$E_+(\theta = \phi) = \text{Premier zéro de la fonction } J_1 \quad (52)$$

Lorsque l'argument de  $J_1(x)$  est  $\frac{\pi D \sin(2\phi)}{\lambda} = 3.82$ , nous obtenons  $\phi = 1.22 \frac{\lambda}{2D}$ . Par considération géométrique, on obtient simplement que  $\tan \phi \approx \phi = \frac{h}{2d}$  donc  $d = \frac{hD}{1.22\lambda} = \frac{1.5 \text{ m} \times 10^{-3} \text{ m}}{1.22 \times 550 \times 10^{-9} \text{ m}} = 11 \text{ km}$ .

### Est-ce que l'indice de l'oeil ou sa courbure sont importants?

Le rayon au centre de la pupille est réfracté lors de la traverse de l'interface diélectrique. La relation entre l'angle avant l'interface  $\theta$  et après l'interface  $\theta'$  est par la loi de Snell:

$$\theta' = \frac{\theta}{n} \quad (53)$$

ce qui est équivalent à la transformation par une interface courbe avec les matrices ABCD pour un rayon au centre de la pupille. On remplace pour obtenir une expression en fonction des angles  $\theta'$  et  $\phi'$  à l'intérieur de l'oeil :

$$E'_{\pm}(\theta') \propto E_0 \frac{2J_1\left(\frac{\pi D \sin(n\theta' \pm n\phi')}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D \sin(n\theta' \pm n\phi')}{\lambda}\right)} \quad (54)$$

On refait le même cheminement: en fonction des angles intérieurs le premier minimum (zéro) du patron de diffraction  $E'_+(\theta')$  doit être superposé au maximum du patron de diffraction de l'autre faisceau à  $\phi'$ .

$$E'_+(\theta' = \phi') = \text{Premier zéro de la fonction } J_1. \quad (55)$$

On obtient donc:  $\phi' = 1.22 \frac{\lambda}{2nD}$ . Donc l'angle minimal pouvant être résolu est en effet plus petit à l'intérieur de l'oeil, cependant, un rapide calcul montre bien que l'angle correspondant à l'extérieur, entre les deux phares, est toujours le même car on a:

$$\phi = n\phi' = 1.22 \frac{\lambda}{2D}. \quad (56)$$

Donc l'oeil et son indice de réfraction n'ont pas d'impact sur la résolution.

## 4.9. Résolution télescope Keck

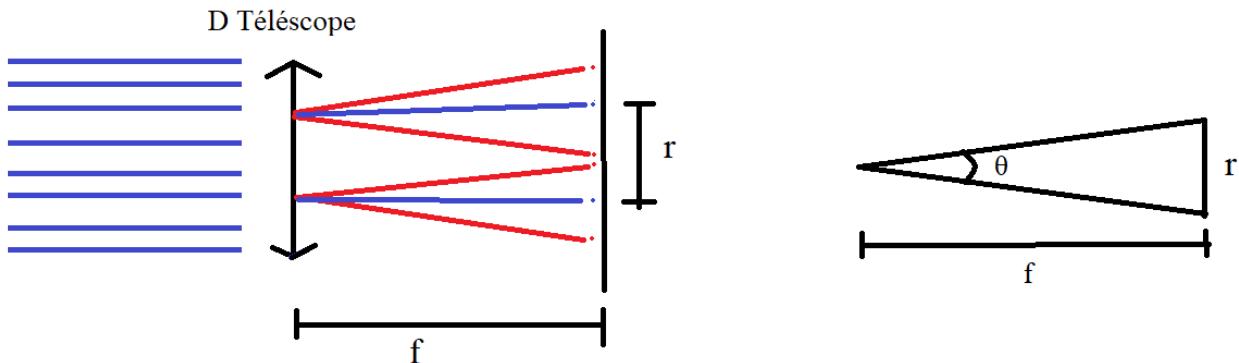
Durée: 20m

### Question

Trouvez l'angle minimale (critère de Rayleigh) entre deux structures qui peuvent être résolues par le télescope de Keck à Hawaii qui a un diamètre de 10 m et une distance focale de 17.5 m. Expliquez votre choix de longueur d'onde.

### Réponse

Le critère de Rayleigh correspond à la distance qui sépare le pic principal et le premier zéro et est donné par  $r = \frac{1.22f\lambda}{D}$ . Le télescope fonctionne dans le visible et l'infrarouge. On s'intéresse à la raie de Balmer de l'hydrogène à 656.2 nm mais toute autre ligne spectrale pourrait être utilisée pour les calculs.



Avec un peu de géométrie et le critère de Rayleigh, on arrive aux équations suivantes :

$$\tan\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{r}{2f} \quad (57)$$

et

$$\frac{r}{2f} = \frac{1.22f\lambda}{2fD}. \quad (58)$$

Donc

$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1.22\lambda}{2D}. \quad (59)$$

La résolution spatiale à la camera est donc :  $\Delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 0.04$  millirad dans le visible.## Résolution microscope

Durée: 20m

### Question

Trouvez la distance minimale détectable (critère de Rayleigh) entre deux petites molécules qui sont excitées par de la lumière bleue à 488 nm dans un objectif de microscope ayant une ouverture numérique de NA = 1.2 et un grossissement de 60X. Supposez que seule la diffraction limite la résolution. Notez: l'ouverture numérique est donnée par le demi-angle maximal d'acceptance d'une lentille (voir p.39 des notes d'étude)

## Réponse

L'entrée arrière d'un objectif est circulaire, on utilise la diffraction d'un obstacle circulaire. Nous savons le NA, pas besoin de savoir la distance focale car  $f_{\#} = \frac{1}{2NA}$ . Selon le critère de Rayleigh, nous aurons:

$$\Delta x = 1.22 \frac{f\lambda}{D} = 1.22 \frac{\lambda}{2NA} = 0.61 \frac{0.488}{1.2} \mu\text{m} = 0.248 \mu\text{m}. \quad (60)$$

## 4.10. ## Tache focale

*Durée: 20m*

### Question

Une lentille de distance focal  $f = 1$  cm possède un diamètre utile de  $D = 1$  cm. Vous l'utilisez pour illuminer des objets qui se trouvent au plan focal de la lentille avec un laser de  $\lambda = 633$  nm.

1. Quelle est la dimension de la tache au point focal si une onde plane est incidente sur la lentille et que l'on définit la largeur comme:
  1. la largeur à mi-hauteur en irradiance
  2. la largeur à mi-hauteur en champ électrique
  3. la distance entre les positions des deux premiers zéros d'irradiance au plan focal.
2. Si votre faisceau incident n'est pas une onde plane, mais plutôt un disque de 5 mm de diamètre sur la lentille. Quelle sera la dimension de la tache au point focal ? Sera-t-elle plus grande ou plus petite que la tache originale?

## Réponse

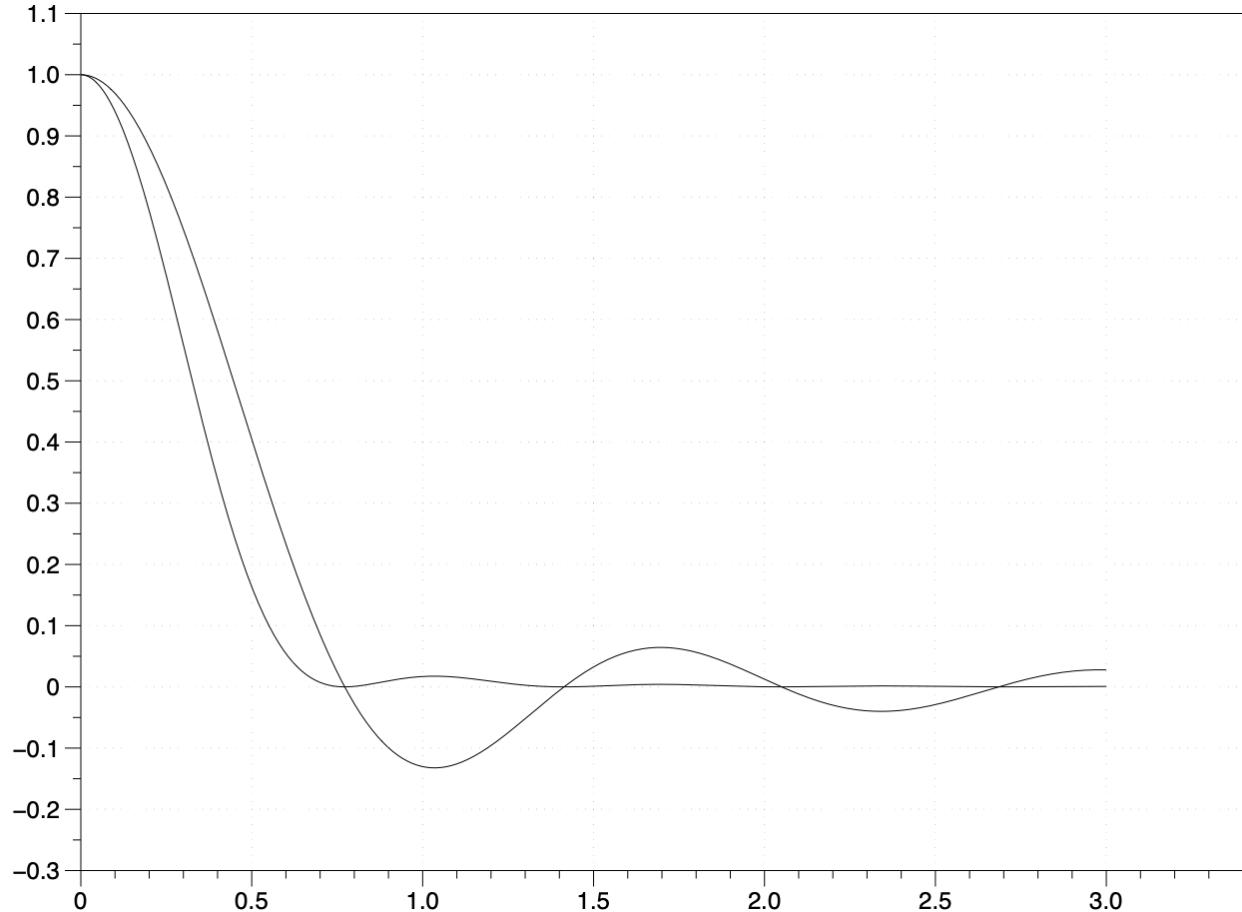
Diffraction par une fente circulaire, donc comme dans les notes:

$$E_{\sigma}(r) \approx \frac{2E_{\circ}e^{ikR}\pi a^2}{R} \frac{J_1\left(\frac{2\pi ar}{\lambda R}\right)}{\frac{2\pi ar}{\lambda R}} \approx 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi Dr}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi Dr}{\lambda f}} \quad (61)$$

Sachant que  $D = f$ , on a:

$$E_\sigma(r) \approx 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \quad (62)$$

$$I_\sigma(r) \approx 4 \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2$$



$$1.1) \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 = 0.5 \text{ à } r = 0.327 \mu\text{m}, \text{ donc } 0.654 \mu\text{m}$$

$$1.2) 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} = 0.5 \text{ à } r = 0.446 \mu\text{m}, \text{ donc } 0.892 \mu\text{m}$$

$$1.3) \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi r}{\lambda}\right)}{\frac{\pi r}{\lambda}} \right)^2 = 0 \text{ à } \pi r / \lambda = 3.82 \text{ donc } 1.54 \mu\text{m}$$

2) Le diamètre d'entrée est deux fois plus petit, donc la tache focale sera deux fois plus grosse pour chaque définition.

## 4.11. Réseau blazé

Durée: 1m

### Question

Un réseau de diffraction blazé de 5.08 cm de largeur (dimension perpendiculaire à la direction des sillons) est utilisé au premier ordre afin de résoudre avec une résolution de 0.1 nm le contenu spectral d'une source émettant autour de 1.5 μm. Calculer l'angle de blaze dans les 2 situations suivantes :

1. en configuration Littrow;
2. à incidence normale

### Réponse

Dans les deux cas, on utilise l'équation générale des réseaux:

$$d \sin \alpha + d \sin \beta = m\lambda \quad (63)$$

1. Configuration Littrow

La configuration de Littrow correspond à la situation où:

$$\alpha = \beta = \theta_B, \quad (64)$$

donc en utilisant l'équation générale du réseau, on obtient:

$$2d \sin \theta_B = m\lambda. \quad (65)$$

Il ne manque que  $d$  à trouver avec la définition du pouvoir de résolution

$$\text{PR} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Wm}{d} \Rightarrow d = \frac{Wm\Delta\lambda}{\lambda} \approx 3.34 \mu\text{m}. \quad (66)$$

Donc,

$$\theta_B = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2d}\right) \approx 12.80^\circ. \quad (67)$$

2. Incidence normale

En général, on a:

$$\theta_B = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (68)$$

et comme la configuration à incidence normale correspond à:

$$\alpha = 0, \quad (69)$$

alors nous avons:

$$\beta = 2\theta_B. \quad (70)$$

En utilisant l'équation générale du réseau :

$$\begin{aligned} d \sin \beta &= \lambda \\ d \sin(2\theta_B) &= \lambda \\ \theta_B &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right) \approx 13.25^\circ \end{aligned} \tag{71}$$

## 4.12. Masque sinusoidal

*Durée: 1m*

### Question

Une variation en **amplitude** sinusoïdale de période  $\Lambda$  est imprimée sur un transparent  $T = 1 + \sin(2\pi x/\Lambda)$ . Elle laisse passer entre 0 et 100% du champ électrique incident. Calculez le champ électrique diffracté si une onde plane est normalement incidente.

### Réponse

L'équation de Fraunhofer est toujours:

$$E_\sigma(\sin \theta_y) \approx \frac{e^{ikR}}{R} \int E_\Sigma(y) e^{-iky \sin \theta} dy. \tag{72}$$

Puisque  $E_\Sigma(y) = E_0 \frac{1}{2} (\cos\left(\frac{2\pi y}{\Lambda}\right) + 1) = E_0 \frac{1}{2} (\cos k_0 y + 1)$ , on a:

$$E_\sigma(\sin \theta) \approx \frac{1}{2} \frac{e^{ikR}}{R} \int [\cos k_0 y + 1] e^{-iky \sin \theta} dy. \tag{73}$$

avec  $k_0 \equiv \frac{2\pi}{\Lambda}$ . On peut obtenir la solution en remplaçant  $\cos k_0 y$  par  $(e^{ik_0 y} + e^{-ik_0 y})/2$ , ce qui résulte en :

$$E_\sigma(\sin \theta) \approx \frac{1}{2} \frac{e^{ikR}}{R} [\delta(k \sin \theta - k_0) + \delta(k \sin \theta + k_0) + \delta(k \sin \theta)] dy. \tag{74}$$

Donc trois pics de diffraction égaux au centre ( $\theta = 0$ ), à gauche, à droite aux angles  $\theta \approx \pm \frac{k_0}{k}$ .

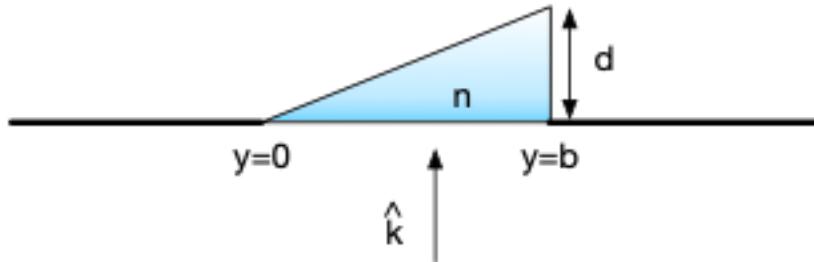
## 4.13. Petit prisme

*Durée: 60m*

## Question

Une onde plane en direction  $\hat{z}$  est incidente sur un masque de phase d'indice de réfraction  $n$  et de largeur  $b$  en forme de prisme rectangulaire d'épaisseur nulle à  $y=0$  et d'épaisseur  $d$  à  $y = b$ , et bloque la lumière à l'extérieur de la fente. L'onde subit donc un changement de phase  $knd(y/b)$  dans le prisme allant de 0 à  $knd$  le long de la fente, avec  $k \equiv \omega/c$  et  $c$  la vitesse dans le vide. Le chemin optique total sur la distance  $d$  combinant la propagation dans le prisme et la propagation dans l'air sera donc:

$$k [nd(y/b) + (d - d(y/b))] = k [(n - 1)yd/b + d] \quad (75)$$



1. Écrivez l'équation de diffraction de Fraunhofer décrivant la diffraction dans le champ lointain de cette situation.
2. Solutionnez en utilisant les propriétés des transformés de Fourier.
3. Obtenez l'angle où l'intensité sera maximum et comparez avec l'optique géométrique et la loi de Snell.
4. Si vous construisez une structure périodique en répétant ce prisme à chaque distance  $a$ , quelle doit être la séparation entre les répétitions pour que la majorité de la puissance se retrouve dans le premier ordre de diffraction?

## Réponse

1. Equation de Fraunhofer est toujours:

$$E_\sigma(\sin \theta_y) \approx \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^b E_\Sigma(y) e^{-iky \sin \theta} dy. \quad (76)$$

Puisque  $E_\Sigma(y) = E_\circ e^{ik((n-1)yd/b+d)}$ , on a:

$$E_\sigma(\sin \theta) \approx \frac{e^{ikR}}{R} \int_0^b E_\circ e^{ik((n-1)yd/b+d)} e^{-iky \sin \theta} dy. \quad (77)$$

2. On connaît la solution  $S_\sigma(\sin \theta)$  pour une fente sans phase:

$$S_\sigma(\sin \theta) = \frac{E_\circ e^{ikR}}{R} \int_0^b e^{-iky \sin \theta} dy = \frac{E_\circ b e^{ikR}}{R} \text{sinc}\left(\frac{kb \sin \theta}{2}\right). \quad (78)$$

On peut ré-écrire l'équation sous la forme suivante:

$$E_\sigma(\sin \theta) \approx \frac{E_\circ e^{ikR}}{R} \int_0^b e^{ik\phi_o y + ikd} e^{-iky \sin \theta} dy, \quad (79)$$

avec  $\phi_o \equiv (n - 1)d/b$ . On peut facilement réécrire:

$$E_\sigma(\sin \theta) \approx e^{i\beta d} \times \left[ \frac{E_\circ e^{ikR}}{R} \int_0^b e^{-ik(\sin \theta - \phi_o)y} dy \right]. \quad (80)$$

Il s'agit donc de la même forme que sans masque de phase, avec  $\sin \theta \rightarrow \sin \theta - \phi_o$ , donc:

$$P_\sigma(\sin \theta) = \frac{E_\circ b e^{ikR}}{R} \text{sinc}\left(\frac{kb(\sin \theta - \phi_\circ)}{2}\right) = S_\sigma(\sin \theta - \phi_\circ) \quad (81)$$

Ceci est essentiellement la même courbe de diffraction que  $S_\sigma$ , mais déplacée de  $\phi_\circ$ .

3. L'angle est  $\phi_\circ \equiv (n - 1)d/b$ . Sachant que l'angle d'incidence sur la partie oblique du prisme est de  $\theta_1 = d/b$ , et que l'angle de refraction (par rapport à la normale) est de  $\theta_2 = n\theta_1$ , on voit que l'angle de deviation est  $\theta_2 - \theta_1 = (n - 1)d/b$ , ce qui correspond simplement à la réfraction sur le prisme.
4. D'après les notes, on a des ordres de diffraction à chaque fois que  $a \sin \theta = m\lambda$ . On veut donc que  $\sin \theta = \lambda/a = (n - 1)d/b$ . On obtient  $a = \frac{b\lambda}{d(n-1)}$ . # Aberrations

Des questions simples sur les aberrations.

### Objectifs

1. Nommer les aberrations: chromatiques, géométriques
2. Nommer les types d'aberrations géométriques
3. Expliquer l'origine de l'aberration chromatique et savoir reconnaître sa présence, son absence et son importance
4. Savoir faire les calculs pour corriger l'aberration chromatique avec un doublet
5. Utiliser correctement des lentilles en laboratoire

## 4.14. Lamelle et aberrations

*Durée: 15m*

### Question

Prouvez qu'une lentille sphérique plano-convexe aura des aberrations sphériques

### Réponse

À faire.

## 4.15. Aberration

*Durée: 5m*

## Question

De quel côté doit-on placer une lentille au laboratoire si c'est une lentille Plano-convexe lorsqu'on a :

1. Un faisceau collimé incident
2. Un faisceau provenant d'un point près de la lentille

## Réponse

La règle: on veut faire travailler les deux côtés de la lentille.

1. Côté courbe d'abord
2. Côté plan d'abord.

# 5. Détection

## Objectifs

1. Expliquer l'effet photoélectrique
2. Expliquer le phénomène d'absorption dans les semiconducteurs
3. Obtenir et utiliser les paramètres importants d'un semiconducteur en ce qui a trait à l'absorption de photon: band interdite, dopants p et n, matériaux intrinsèques.
4. Nommer, expliquer le fonctionnement des types de détecteurs en optique et leurs différences.
5. Expliquer le mode de fonctionnement et la grandeur des signaux attendus dans des situations expérimentales
6. Connaître, nommer et utiliser dans des calculs les paramètres importants d'une caméra CCD ou CMOS
7. Expliquer le bruit de photon, et utiliser ses propriétés pour faire des prédictions dans des expériences
8. Calculer le nombre de photons attendus en relation aux surfaces efficaces

## Références

1. [Diapositives](#) sur la Détection pour le cours gradué "Imagerie Biomédicale".

## 5.1. Tube photomultiplicateur

Durée: 5m

### Question

Un tube photomultiplicateur (PMT) peut détecter un seul photon. Quel est taux de photons maximal qui peut être mesuré à 500 nm?

### Réponse

Les impulsions électriques d'une PMT sont typiquement entre 10 ns et 50 ns. Ainsi, pour détecter deux photons séparément, on devrait avoir plus que 2 photons par 10 ou 50 ns, ce qui donne entre  $2\text{eV}/10\text{ns} = 40 \text{ pW}$  et  $2\text{eV}/50\text{ns} = 8 \text{ pW}$ .

```
h = 6.62e-34 # m^2 kg/s
c = 3e8 # m/s
wavelength = 500e-9 # m
energyPerPhoton = h * c / wavelength # Joules

lowMaxPowerInPicoWatt = energyPerPhoton/50e-9 /1e-12 # en pW
highMaxPowerInPicoWatt = energyPerPhoton/10e-9 /1e-12 # en pW

print "Une PMT sature entre %.0f pW et %.0f pW" % (lowMaxPowerInPicoWatt,
highMaxPowerInPicoWatt)

# Output
# Une PMT sature entre 8 pW et 40 pW
```

## 5.2. Caméra CCD

Durée: 10m

### Question

Vous avez une caméra CCD 12-bit avec une profondeur de puits de 100,000e- et une efficacité quantique de 90% sans amplification. Quelle est la plus petite différence de photons qu'elle peut vous rapporter?

### Réponse

Simplement, la quantité de photons par bit est obtenue par:

$$\frac{100000 \text{ photoelectrons}}{\text{QE photoelectrons/photon} \times 2^{12} \text{bit}} = 27 \text{ photons par bit} \quad (82)$$

```

maxValue = 1 << 12 # 2^12
wellDepth = 100000 # photoelectrons
photonsAcquiredWellFull = wellDepth / 0.90 # 90 photoelectrons means 100 photons hit the
detector
photonsPerBit = photonsAcquiredWellFull/maxValue

print "Deux valeurs numerisees different par %.0f photons" % photonsPerBit

# Output
# Deux valeurs numerisees different par 27 photons

```

## 5.3. Bruit de photon

*Durée: 60m*

### Question

Un flux de photon de 1 pW à 632.8 nm est incident sur une PMT en mode “photon counting”.

1. Ceci correspond à combien de photons par seconde?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un photon dans un intervalle de 100 ns si les photons arrivent au hasard?
3. [Programmation]: Tracez des courbes typiques du nombre de photons accumulés toute les 100 ns jusqu'à un total de 1 seconde
4. Combien de temps devriez vous mesurer (i.e. intégrer) pour obtenir une mesure fiable à 1% ?
5. Quel est l'impact sur le temps d'intégration si on augmente la puissance du faisceau par un facteur 2?
6. Quel est l'impact sur le rapport signal sur bruit si on augmente la puissance du faisceau par un facteur 2?

### Réponse

## 5.4. Sensibilité radiante de la photocathode

*Durée: 10m*

## Question

Quelle est la *radiant sensitivity* de la cathode d'une PMT R3896 en A/W?

## Réponse

On trouve la [feuille de spécifications](#) sur le web. On obtient 100 mA/W. Ceci correspond à environ 1 photon sur 5 qui est converti en photoélectron.

## 5.5. Sensibilité radiante de l'anode

*Durée: 10m*

## Question

Quelle est la *radiant sensitivity* de l'anode d'une PMT R3896 en A/W?

## Réponse

On trouve la [feuille de spécifications](#) sur le web. Le courant qui sort de l'anode a été amplifié par les multiples dynodes. Avec un gain typique de  $10^7$ , on obtient donc  $100 \text{ mA/W} \times 10^7 = 1 \text{ MA/W}$ , ou  $1 \mu\text{A/pW}$ .

## 5.6. Courbe spectrale de l'oeil

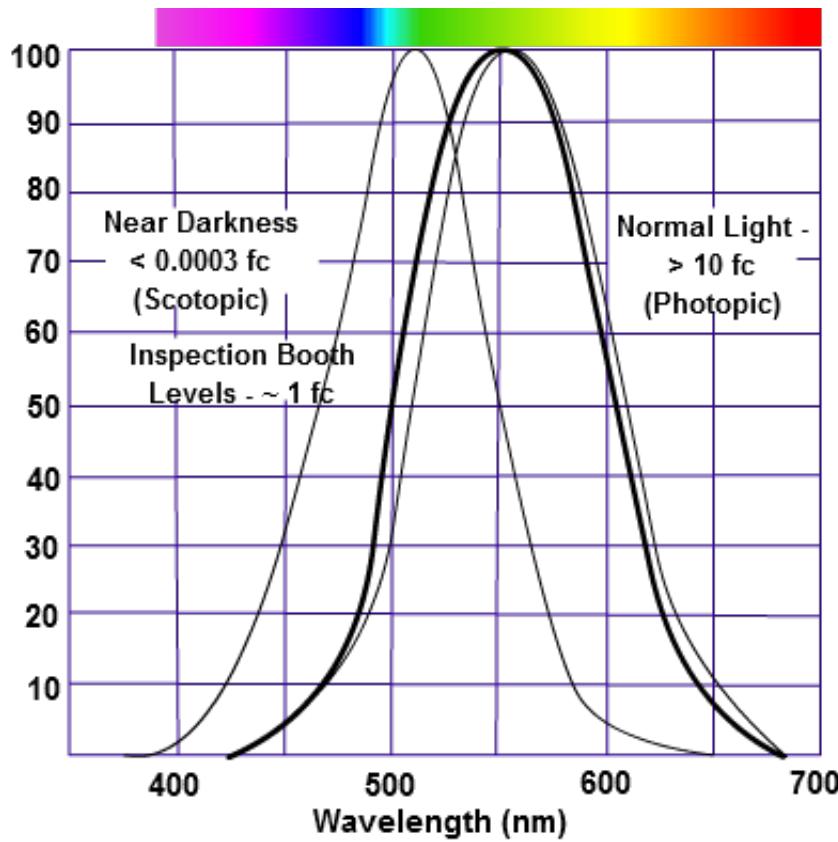
*Durée: 3m*

## Question

Pouvez vous regarder un fluorophore infrarouge à 750 nm sans une caméra?

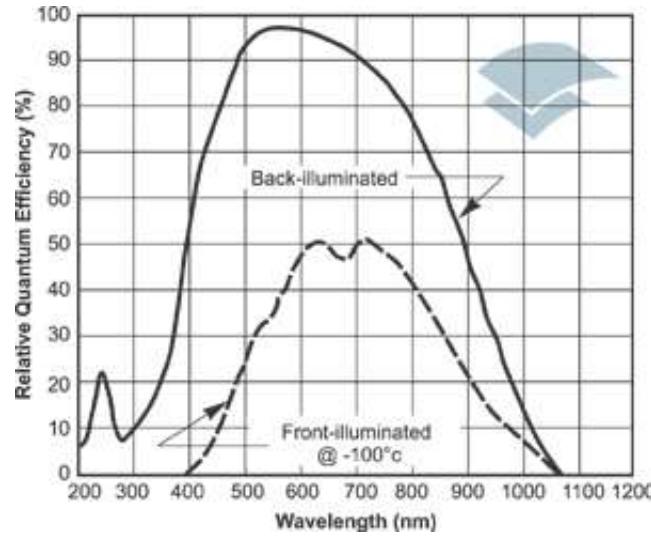
## Réponse

Non. La réponse de l'oeil est essentiellement nulle à 750 nm:



[Source de l'image](#)

Au contraire, une camera CCD, fait en silice, possède une réponse beaucoup plus élevée entre 650 et 1050 nm:



[Source de l'image.](#)

## 5.7. Efficacité

Durée: 5m

## Question

La sensibilité (*sensitivity*) d'une photodiode classique est d'environ 1 A par Watt de lumière dans le visible. Justifiez pourquoi c'est le cas par un calcul du nombre d'électrons par photon incident.

## Réponse

Dans une photodiode de type p-i-n, chaque photon donne lieu à une paire électron-trou, donc un courant de 2 charges pour chaque photon à 500 nm. On obtient donc 2 charges/2eV de lumière, ce qui donne 0.8A/W.

```
q = 1.6e-19 # C

h = 6.62e-34 # m^2 kg/s

c = 3e8 # m/s

I = 2 * q # charge/photon

wavelength = 0.5e-6 # m

energieParPhoton = h * c / wavelength # J/photon

radiantSensitivity = I / energieParPhoton # A/W

print "Radiant sensitivity:", radiantSensitivity, " A/W"

# Output:
# radiantSensitivity =
#
#      0.8056
```

## 5.8. Efficacité quantique

Durée: 5m

## Question

On dit qu'une photodiode a une efficacité quantique de presque 50-100%. Pourquoi utilise-t-on des PMT d'efficacité quantique de 10-30% ?

## Réponse

Parce que l'efficacité quantique n'est pas la seule chose à considérer: l'efficacité quantique est la fraction de photon convertie en électron. Cependant, la réponse (en Volt ou en Ampère) dépend du gain du détecteur. Une réponse élevée (en V) est plus facile à détecter qu'une petite réponse (en mV). Les PMTs ont des gains de  $10^6$ , ce qui leur donne un grand signal pour un seul photon.

## 5.9. Paramètres bruit de photons

*Durée: 60m*

### Question

Un flux de photon de 1 pW à 632.8 nm est incident sur une PMT en mode “photon counting”.

- Ceci correspond à combien de photons par seconde?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un photon dans un intervalle de 100 ns si les photons arrivent au hasard?
- [Programmation]: Tracez des courbes typiques du nombre de photons accumulés toute les 100 ns jusqu'à un total de 1 seconde
- Combien de temps devriez vous mesurer (i.e. intégrer) pour obtenir une mesure fiable à 1% ?
- Quel est l'impact sur le temps d'intégration si on augmente la puissance du faisceau par un facteur 2 ?
- Quel est l'impact sur le rapport signal sur bruit si on augmente la puissance du faisceau par un facteur 2 ?

## Réponse

## 5.10. Bruit CCD

*Durée: 10m*

### Question

Tracez la courbe du bruit total typique d'une CCD en fonction du temps d'intégration sur une échelle logarithmique. Décrivez les trois différentes régions du graphique.

## Réponse

### 5.11. Histogramme d'amplitudes

*Durée: 15m*

## Question

Supposez que des photons sont des gaussiennes de 20 ns de largeur (1/e), et supposez que vous mesurez l'amplitude de la tension à des temps aléatoires. Quelle sera l'histogramme que vous obtiendrez ? (solution programmée acceptée). Si ce sont plutôt des carrés, quel sera l'histogramme ?

## Réponse

### 5.12. Concentration de fluorophores: microscope grand champ

*Durée: 120m*

## Question

Un microscope à grand champ utilise une camera Orca Flash de Hamamatsu et un objectif Olympus 40x pour imager une mince couche de fluorophore ( $2 \mu\text{m}$ ) fluoresceine de concentration inconnue. L'excitation se fait avec un laser 488 nm avec des filtres bleus. Lorsque vous sauvegardez l'image, vous obtenez des valeurs de 16-bit allant de 950 à 1050, avec une moyenne de 1000 lorsque vous intégrez 100 ms. Quelle est la concentration de marqueurs fluorescents en fluorophores/ $\mu\text{m}^3$ ?

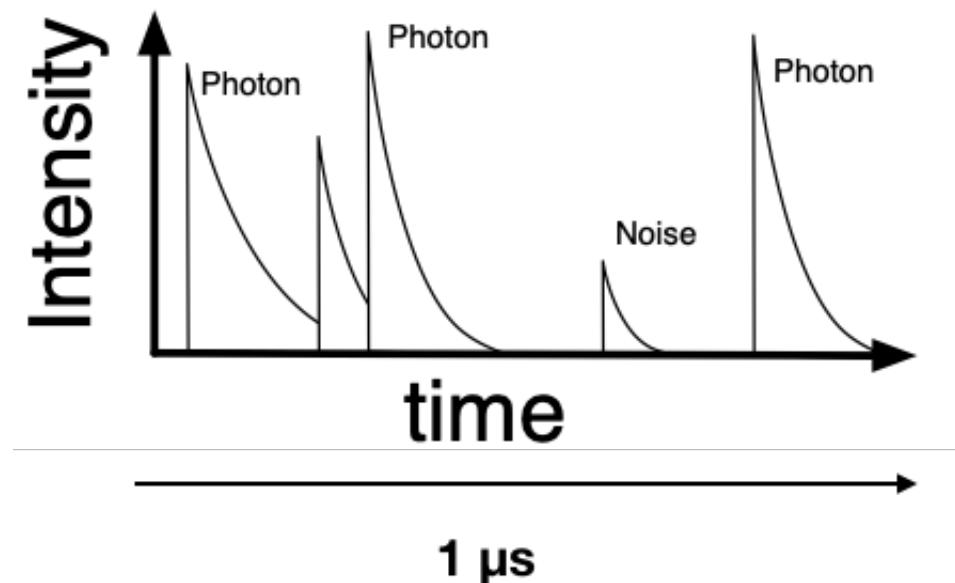
## Réponse

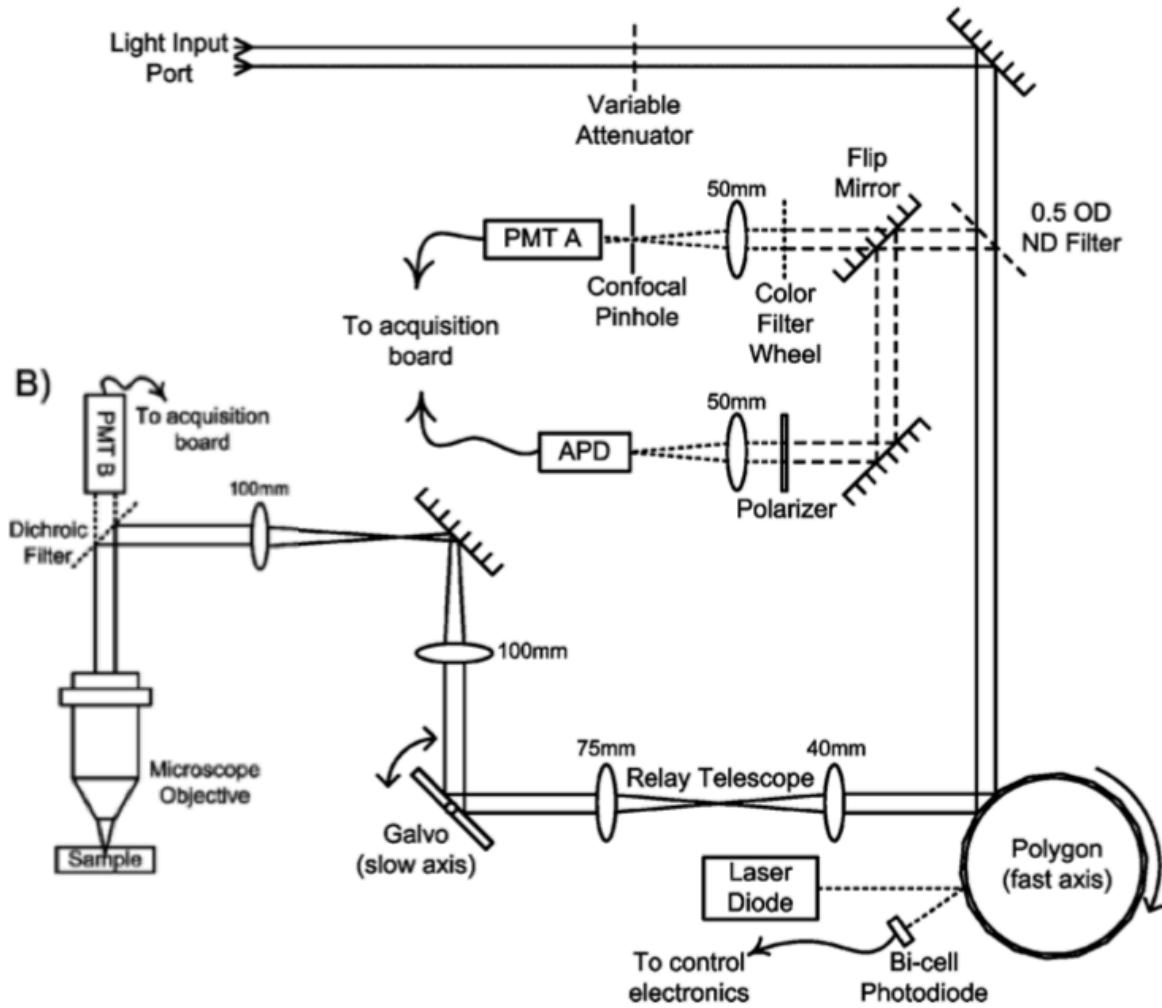
## 5.13. Concentration de fluorophores: microscope à balayage

Durée: 120m

### Question

Le microscope à balayage (recopié ici bas) utilise un tube photomultiplicateur R3896 avec un socket C7950 en détection confocale pour imager du FITC. L'objectif 40x est utilisé correctement. Le sténopé (*pinhole*) devant la PMT A a un diamètre de 10 µm. Quel est la concentration de FITC si vous mesurez ceci à l'oscilloscope en provenance d'un seul pixel en illuminant avec un laser bleu à 488nm qui produit 10 mW:





## Réponse

### Stratégie générale

Le problème serait extrêmement simple si on savait déjà le volume excité et qu'on détectait tout. On aurait simplement la puissance totale émise (en photons/s ou en puissance) qui serait obtenue par l'irradiance et la surface totale de fluorophores:

$$P_{\text{émis}} = I_{\text{exc}} N \sigma = I_{\text{exc}} V C \sigma, \quad (83)$$

avec  $N$  le nombre de fluorophores excités par l'irradiance  $I_{\text{exc}}$  et  $\sigma$  la section efficace du fluorophore. On remarque que les unités sont :

$$\frac{\text{Photons}}{\text{s}} = \frac{\text{Photons}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \cdot \text{Molecules} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{Molecule}} = \frac{\text{Photons}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \cdot \text{m}^3 \cdot \frac{\text{Molecules}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{Molecule}} \quad (84)$$

et que tout fonctionne. La complexité vient du fait 1) qu'on ne détecte pas tous les photons et 2) qu'on ne sait pas quel volume est excité et imaginé. On doit donc retrouver le volume, l'irradiance et le nombre de photons émis.

On sépare le problème en quatre:

1. **Détection:** Le capteur *déetecte* 3 photons par  $\mu\text{s}$  ( $P_{\text{Dé t}}$ ). Cela correspond à combien de photons émis par le volume ( $P_{\text{é mis}}$ )? On cherche la correspondance entre  $P_{\text{Dé t}} = \alpha P_{\text{é mis}}$  où  $\alpha$  est la fonction de transfert du microscope qui dépend de l'optique, de l'objectif, etc..
2. **Volume détecté**
3. **Irradiance d'excitation:** Quelle est l'irradiance  $I_{\text{Exc}}$  qui atteint le volume d'excitation qui sera imaginé et quel est ce volume  $V$ ?
4. **Concentration:** Sachant la puissance de l'excitation et de la détection, combien de fluorophores de sections efficaces  $\sigma$  sont présents dans le volume pour permettre ce niveau de détection? Nous devrons obtenir de l'information sur le volume excité et le volume imaginé ou détecté.

## Détection

Un tube PMT a une efficacité de 20% environ ( $\eta$ ). En supposant que tout l'optique utilisée est essentiellement parfaite et que les filtres ne bloquent pas l'émission de fluorescence, il ne reste que le filtre OD 0.5 qui est utilisé comme réflecteur partiel (30% perdu en transmission, 70% en réflexion), donc de l'arrière de l'objectif à la PMT, on aura une perte de  $10^{-0.5} = 30\%$ , donc 70% de transmission  $T$  de notre signal. L'objectif utilisé a une ouverture numérique de  $\text{NA} = n \sin \theta_{\text{NA}} = 0.8$  dans l'eau, donc un angle d'acceptance de  $37^\circ$ . Si on calcule la fraction  $F$  d'angle solide que cela représente, on obtient:

$$F = \frac{2\pi(1 - \cos \theta_{\text{NA}})}{4\pi} = 0.1 \quad (85)$$

On peut même simplifier pour les petits angles:

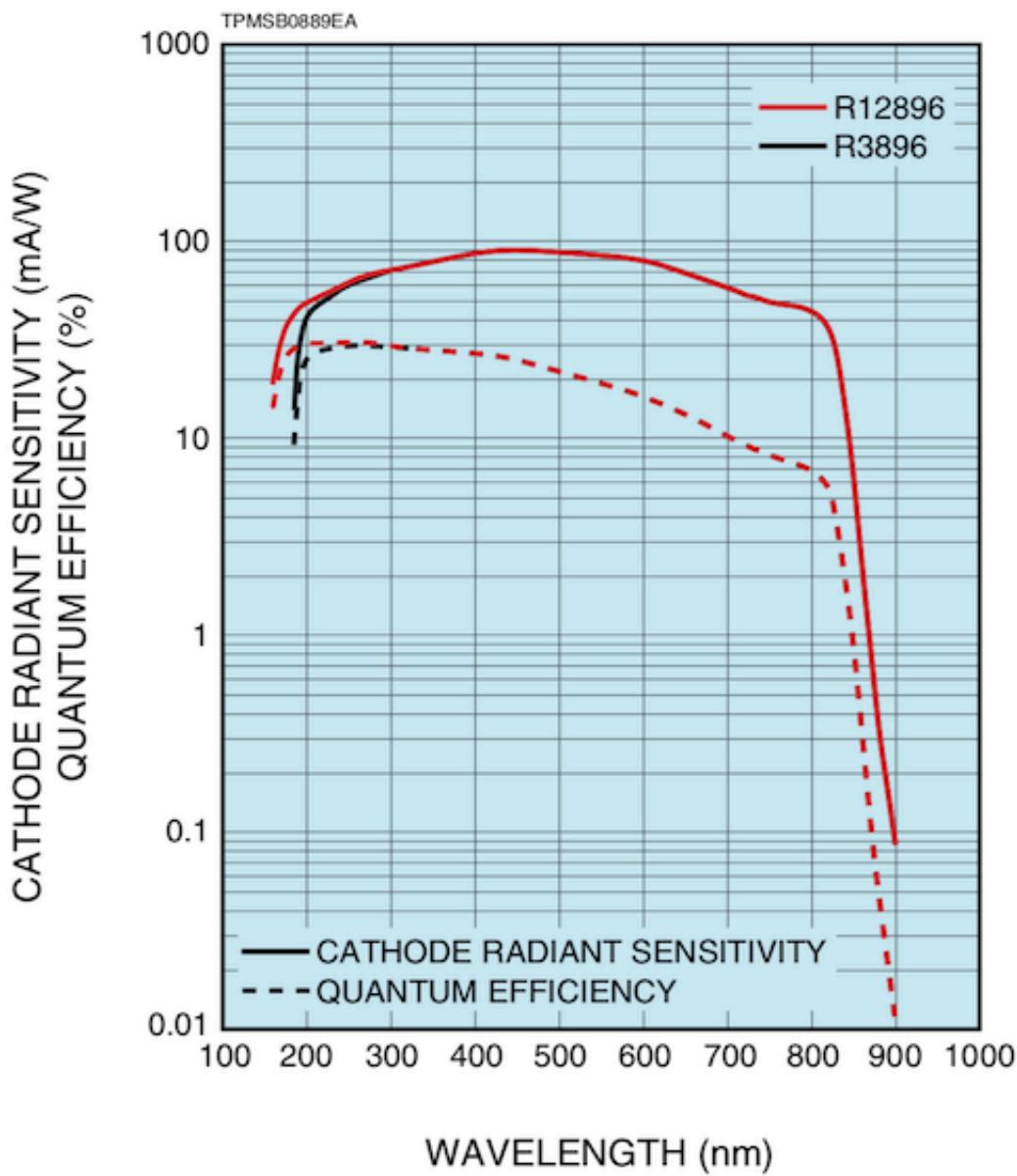
$$F = \frac{1 - \cos \theta_{\text{Max}}}{2} = \frac{1 - (1 - \frac{\theta_{\text{Max}}^2}{2} + \dots)}{2} \approx \frac{\theta_{\text{Max}}^2}{4} \quad (86)$$

Ainsi, on a  $\alpha = \eta T F$ :

$$P_{\text{é mis}} = \frac{P_{\text{Dé t}}}{\eta T F} = 71.4 \times P_{\text{Dé t}} = 214 \text{ Photons}/\mu\text{s} \quad (87)$$

Donc il y a 214 photons/s émis par le volume détecté. On ne sait pas quel est ce volume qui est imaginé.

Figure 1: Typical Spectral Response



### Volume détecté

Deux aspects entrent en jeu ici: quel volume est excité et quel volume est détecté? L'image du sténopé donne le diamètre de la tache imagée mais la tache d'Airy du faisceau donne le diamètre excité. Le plus petit des deux doit être considéré.

- Par optique géométrique on voit une série de télescope de grossissement  $f_2/f_1$  fait l'image du sténopé de  $d_s = 10 \mu\text{m}$  au plan objet. Le sténopé correspond donc à un cercle de diamètre de  $d_o$  à l'objet:

$$d_o = \frac{180 \text{ mm}/40}{100 \text{ mm}} \frac{100 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \frac{40 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} d_s = 0.048 d_s = 0.48 \mu\text{m} \quad (88)$$

- Par simple calcul de diffraction, le diamètre de la tache d'Airy de l'excitation est  $\frac{1.22\lambda}{\text{NA}} = 0.76 \mu\text{m}$ .

Donc le facteur limitant ici est le sténopé, qui est plus petit que le diamètre du disque d'Airy (on voit aussi que la différence entre les deux reste mineure). Pour voir comment faire un calcul approximatif de la profondeur de champ, lisez la partie supplémentaire à la fin de ce document intitulé "[Information supplémentaire](#)". On obtient une profondeur de champ d'environ  $h = 1 \mu\text{m}$ , pour un volume de :

$$V = \pi(d_o/2)^2 h = 0.18 \mu\text{m}^3 \quad (89)$$

## Irradiance d'excitation

La totalité de la lumière arrive sur la tache d'Airy, donc l'irradiance est de 10 mW sur  $\pi(0.76 \mu\text{m})^2$  donc

$$I_o = \frac{P}{A} = \frac{10 \text{ mW}}{1.81 \mu\text{m}^2} = 5.5 \text{ mW}/\mu\text{m}^2 \quad (90)$$

## Concentration

Finalement, on peut obtenir la concentration sachant que  $P_{\text{Emis}} = I_o V C \sigma$ , donc:

$$C = \frac{P_{\text{Emis}}}{I_o V \sigma} = \frac{214 \times 10^6 \text{ Photons/s} \times 3.2 \times 10^{-19} \text{ J/Photon}}{0.0055 \text{ W}/\mu\text{m}^2 \times 0.18 \mu\text{m}^3 \times 3 \times 10^{-8} \mu\text{m}^2} = 2.3 \text{ molécules}/\mu\text{m}^3 \quad (91)$$

## Information supplémentaire

Approximation géométrique de la profondeur de champ: On peut obtenir la fonction de transfert d'un plan à une distance  $\Delta$  du plan objet: il suffit d'obtenir une expression de la hauteur du rayon à la position du sténopé en fonction de cette distance au plan objet. C'est en fait relativement simple: la matrice ABCD de transfert entre le plan de l'objet et le plan du sténopé est connue: c'est simplement une série de télescope donc:

$$\begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \quad (92)$$

Pour obtenir la matrice à une distance  $\Delta$  du plan focal, on ajoute une propagation dans l'air de  $\Delta$ :

$$\begin{bmatrix} r' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & \Delta M \\ 0 & 1/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} \quad (93)$$

Le système n'est plus imageant ( $B \neq 0$ ), donc à une distance  $\Delta$  devant le plan focal pour une hauteur de rayon  $r$ , certains rayons seront projetés au-delà du sténopé car la hauteur  $r'$  est donnée par:

$$Mr + \Delta M\theta < r'. \quad (94)$$

Un rayon  $(r, \theta)$  originant à une distance  $\Delta$  du plan focal sera détecté s'il entre dans le sténopé de rayon  $r_o = 5 \mu\text{m}$ :

$$Mr + \Delta M\theta < r_o, \quad (95)$$

et ne sera pas détecté si il arrive à l'extérieur du sténopé:

$$Mr + \Delta M\theta > r_o. \quad (96)$$

Donc pour un  $(r, \theta)$  donné, l'angle maximale possiblement détecté est:

$$\theta_{\text{Max}} = \frac{r_o - Mr}{\Delta M}. \quad (97)$$

qui doit être inclus entre  $[-\theta_{\text{NA}}, \theta_{\text{NA}}]$  sachant que l'ouverture numérique permet la détection de  $\pm\theta_{\text{NA}}$ .

Si on regarde au plan focal, ( $\Delta = 0$ ), on voit que:

$$r' = Mr \quad (98)$$

comme montré plus haut, un rayon à une hauteur  $r$  est grossi à  $Mr$ , donc les rayons jusqu'à 0.24  $\mu\text{m}$  seront imaginés à l'intérieur du sténopé ( $10 \mu\text{m} / 2 = 21 \times 0.48 \mu\text{m}/2$ ), pour tous les angles de rayons jusqu'à  $\theta_{\text{NA}}$ . Pour les rayons avant le plan focal où  $\Delta > 0$ , on voit que les rayons seront projetés selon 94. En regardant sur l'axe ( $r = 0$ ), on obtient que :

$$r' = \Delta M\theta. \quad (99)$$

On veut savoir à partir de quelle position les rayons à l'intérieur de l'ouverture numérique commenceront à être projeter au delà du sténopé, donc:

$$\theta < \frac{r_o}{\Delta M}. \quad (100)$$

À partir de  $\Delta > \frac{r_o}{M\theta}$ , les rayons commenceront à être bloqués car l'angle maximal qui passera dans le sténopé sera de  $\frac{r_o}{\Delta M}$  au lieu de  $\theta_{\text{NA}}$ . Pour  $\Delta < \frac{nr_o}{M\text{NA}}$  l'angle maximal est  $\theta_{\text{NA}}$ .

On obtient l'efficacité de collection relative au plan focal avec  $\frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \approx \frac{\theta^2}{4}$  et donc:

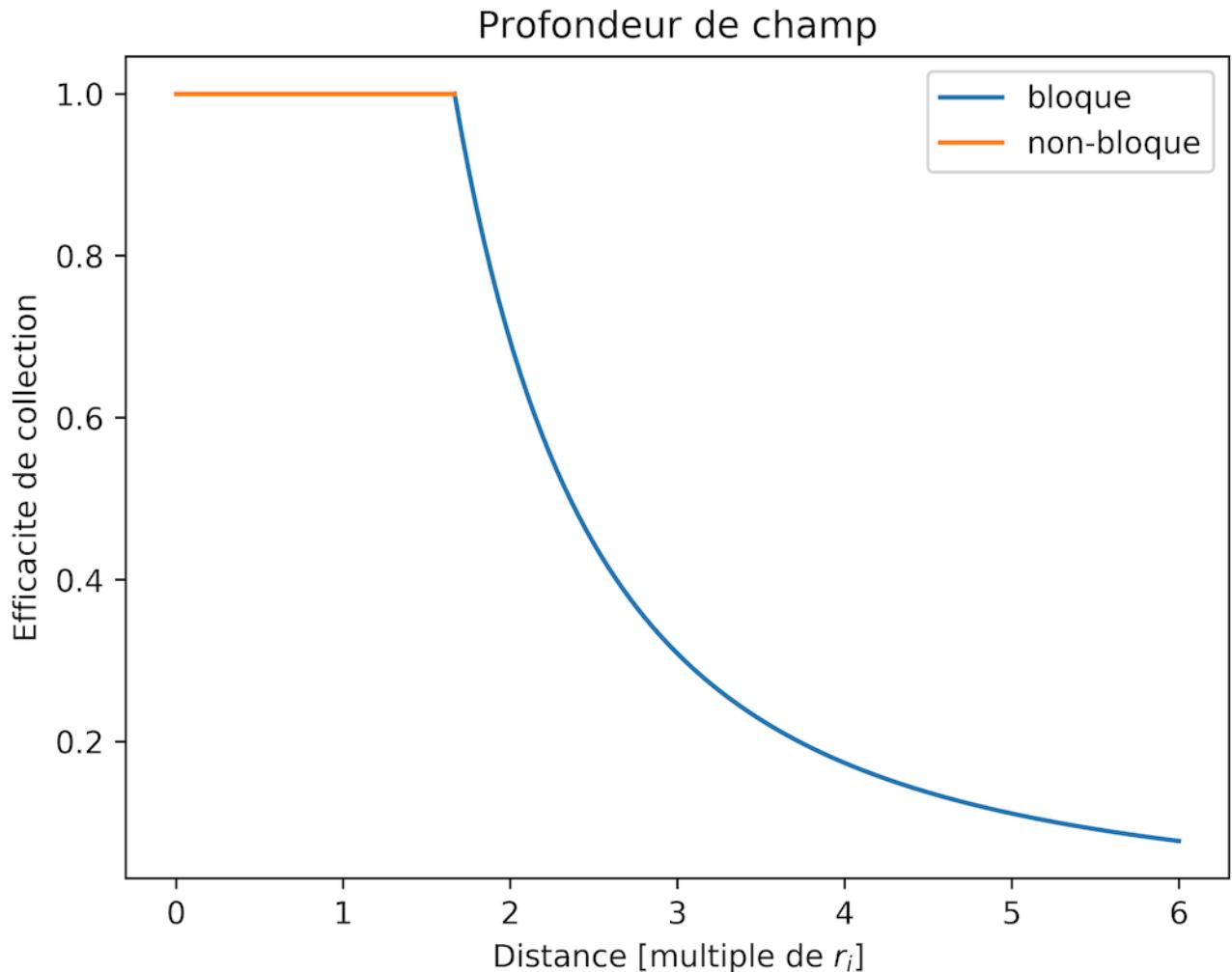
$$\mathcal{F} = \frac{1}{\theta_{\text{NA}}^2 \Delta'^2} \text{ pour } \Delta' > \theta_{\text{NA}}^{-1} \quad (101)$$

avec  $\Delta' = \frac{\Delta}{r_o/M}$ , soit la distance  $\Delta$  en unité de grosseur de sténopé imagé au plan focal. L'efficacité de collection est tracé à l'aide du script Python suivant.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

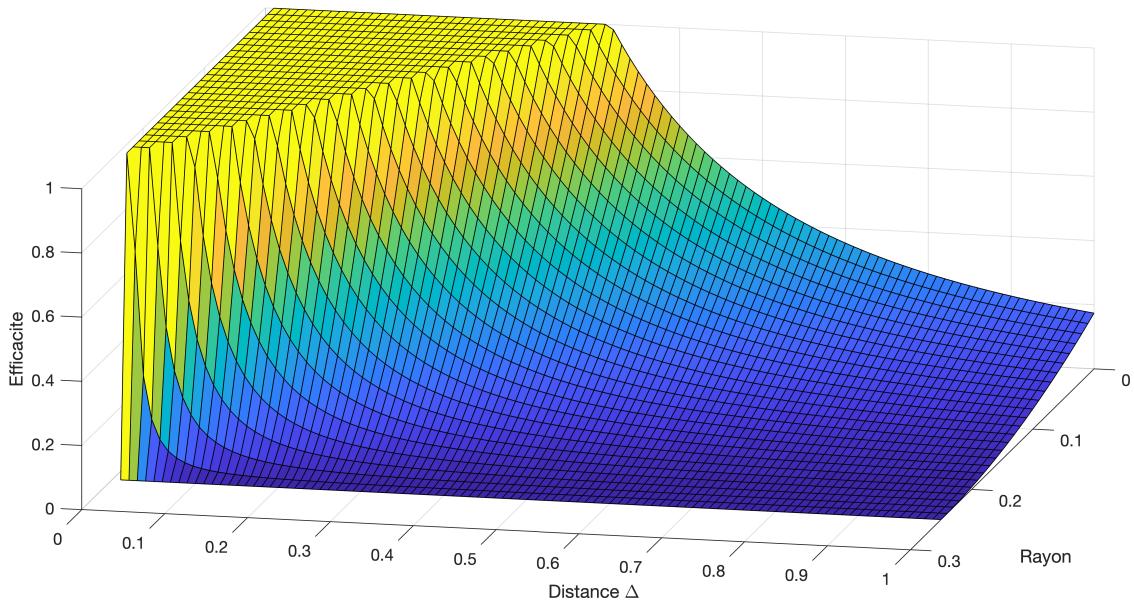
xb = np.linspace(1/0.6, 6, 100)
xnb = np.linspace(0, 1/0.6, 100)
plt.plot(xb, 1/(0.6*0.6)/(xb*xb), label='bloque')
plt.plot(xnb, 1+0*xnb, label='non-bloque')
plt.xlabel('Distance [multiple de $r_i$]')
plt.ylabel('Efficacité de collection')
plt.title("Profondeur de champ")
plt.legend()
plt.savefig("graph.pdf", bbox_inches='tight')
plt.savefig("graph.png", bbox_inches='tight', dpi=600)
```

```
plt.show()
```



On voit qu'a partir de  $\Delta' = 2$ , l'efficacité a tombé à moins de 50%, donc on peut dire que la profondeur de champ sera approximativement de  $\Delta' = 4$ , soit 4 fois le diamètre du sténopé au plan focal (ici, 2 microns). Le volume imagé sera donc  $\pi\left(\frac{r_o}{M}\right)^2 \times 4\left(\frac{r_o}{M}\right) = \frac{4\pi r_o^3}{M^3} = 1.35 \mu\text{m}^3$ .

```
% Code MATLAB
[r,d] = meshgrid([0:0.01:0.25],[0.01:0.01:1]);surf(r,d,max(min((ro - M.*r)./(d*M),
0.6),-0.6).*max(min((ro - M.*r)./(d*M), 0.6),-0.6)/4/(0.6*0.6/4));figure(1)
zlabel('Efficacite de collection')
xlabel('Rayon')
ylabel('Distance \Delta')
```



## 6. Faisceaux gaussiens

Les problèmes de cette section concernent les faisceaux laser gaussiens. Ces faisceaux ont une grande utilité et le formalisme pour les manipuler est très puissant et très approprié dans une grande majorité des cas qui nous intéressent.

### 6.1. Focalisation faisceau gaussien

*durée: 10 m*

#### Question

Quelle sera la grosseur du point focal d'un faisceau gaussien collimé de longueur d'onde 500 nm et de diamètre  $w_o = 5\text{mm}$  tout juste avant la lentille qui frappe une lentille de diamètre D = 2.5 cm et de distance focale f = 10 cm ?

#### Réponse

De faisceau générale, un faisceau à l'entrée d'une lentille est transformé jusqu'au plan focal de la lentille avec :

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (102)$$

La matrice de transformation de la lentille  $f$  est simplement

$$\begin{bmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \quad (103)$$

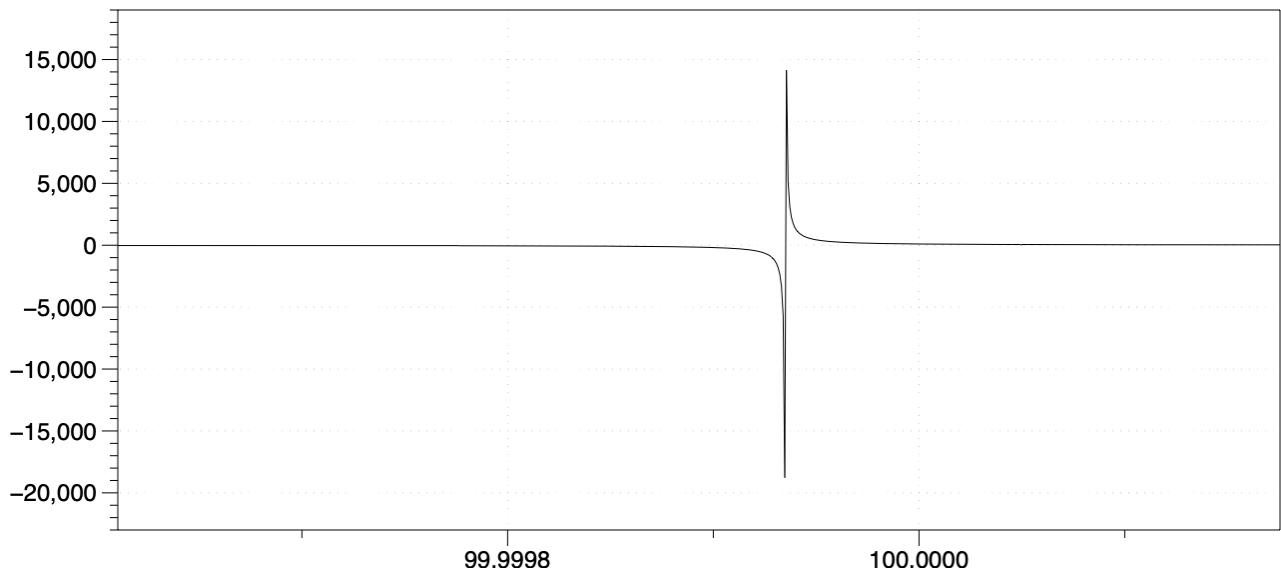
On a donc:

$$q' = \frac{f}{-q/f + 1} \quad (104)$$

Puisque le faisceau gaussien incident a un rayon complexe  $q = jz_o = j\frac{\pi w_o^2}{\lambda}$ , on a en utilisant  $\frac{1}{q'} \equiv \frac{1}{R'} - j\frac{\lambda}{\pi w'^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'} &= \frac{f - q}{f^2} = \frac{1}{f} - \frac{q}{f^2} \\ \frac{\lambda}{\pi w'^2} &= \frac{\pi w_o^2}{\lambda f^2} \\ w' &= \frac{\lambda f}{w_o \pi} = \frac{500 \times 10^{-6} \text{mm} \cdot 100 \text{mm}}{\pi \cdot 5 \text{ mm}} = 6.36\lambda = 3.18\mu\text{m} \end{aligned} \quad (105)$$

On peut être surpris que le rayon de courbure soit  $R = f$  à une distance de  $f$  après la lentille. Cependant, le rayon incident n'est pas un faisceau colligé: c'est un faisceau qui a son étranglement sur la lentille. Si on regarde le comportement du rayon autour du point focal de la lentille, on remarque que l'étranglement dans ce cas est tout juste avant. Le rayon a une dépendance non-linéaire dans une petite région de  $\pm z_o$  autour de l'étranglement.



Le code suivant qui utilise le module Raytracing de python permet d'obtenir les données (vous devez les mettre dans un logiciel de graphique séparé):

```
from raytracing import *

inputBeam = GaussianBeam(w=5)
beamAfterLens = Lens(f=100)*inputBeam
zo = beamAfterLens.zo
delta = zo / 100
path = LaserPath()
path.append(Lens(f=100))
path.append(Space(d=100-delta))
N = 1000
for i in range(2*N):
    path.append(Space(d=delta/N))

trace = path.trace(inputRay=inputBeam)

fig, axes = plt.subplots(figsize=(10, 7))
axes.set(xlabel='Distance', ylabel='Radius')
axes.set_xlim(100-delta, 100+delta)

x = []
y = []
for q in trace:
    x.append(q.z)
    y.append(q.R)
axes.plot(x, y, 'r', linewidth=1)
plt.show()

# for beam in trace:
#     print(beam.z, beam.R)

#path.display()
```

## 6.2. Propagation de faisceau gaussien

*durée: 20 m*

### Question

Les astronautes américains d'Apollo 11,14 et 15 de même que les soviétiques avec le Lunokhod-1 et -2 ont laissé des rétroréflecteurs sur la lune pour permettre de mesurer précisément la distance terre-lune. Ces mesures se font avec un faisceau laser de longueur d'onde 532 nm au profil spatial gaussien qui, une fois à la surface de la lune à 384 467 km de la source, a une dimension de 3 km (largeur gaussienne 1/e en champ électrique).

1. Écrivez l'inverse du rayon complexe  $1/q$  du faisceau sur la lune
2. Quelle est la largeur (largeur gaussienne 1/e en champ électrique) du faisceau original sur la terre ?

### Réponse

## 6.3. Résolution angulaire

*durée: 30 m*

### Question

Les phares d'une automobile sont séparées par un distance de 1.5 m. Les phares ont un diamètre de 10 cm, et vos pupilles 5mm. Jusqu'à quelle distance pouvez-vous résoudre les phares la nuit?

### Réponse

## 6.4. Propagation de faisceau gaussien

*durée: 30 m*

### Question

Vous avez un système de deux lentilles (infiniment larges) composé de deux lentilles de distances focales  $f_1$  et  $f_2$  (avec  $f_2/f_1 = 3$ ) et séparées par la somme de leurs distances focales. On s'intéresse au faisceau d'un point focal à l'autre, c'est donc un système 4f. Un faisceau laser de  $\lambda=500$  nm gaussien ayant un point d'étranglement (waist)  $w_o = 1$  mm au plan focal de la première lentille est incident.

1. Obtenez d'abord la matrice de transfert d'un point focal à l'autre.
2. Obtenez ensuite le nouveau rayon complexe au point focal de la deuxième lentille en fonction du rayon complexe original?
3. Quelle sera la dimension du faisceau transformé en fonction du faisceau original au point focal de la deuxième lentille après avoir traversé les deux lentilles?
4. Où se trouve le point d'étranglement (i.e. le point focal) du faisceau transformé?

## Réponse

- On obtient:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{bmatrix} \quad (106)$$

$$2. q' = \frac{Aq+B}{Cq+D} = 9q = 9j\pi w_o^2/\lambda$$

- Pour obtenir la dimension physique et le rayon de courbure, on doit utiliser la définition  $\frac{1}{q'} \equiv \frac{1}{R'} - j\frac{\lambda}{\pi w'^2}$ , on obtient donc:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q'} &= -\frac{\lambda}{9j\pi w_o^2} & (107) \\ \frac{1}{R'} - j\frac{\lambda}{\pi w'^2} &= -\frac{\lambda}{9j\pi w_o^2} \\ \frac{\lambda}{\pi w'^2} &= \frac{\lambda}{9\pi w_o^2} \\ w' &= 3w_o \end{aligned}$$

- Le point d'étranglement se trouve à l'endroit où le rayon complexe est imaginaire car lorsque le rayon complexe est imaginaire, on voit que  $1/R = 0$ , donc  $R \rightarrow \infty$ . Ainsi, le point d'étranglement du faisceau est au point focal de la lentille.

## 6.5. Tailles de faisceaux

*durée: 30 m*

### Question

Pour un faisceau gaussien en champ électrique  $E = E_0 e^{-\frac{x^2}{w^2}}$ , obtenez les facteurs de conversion pour passer de la largeur gaussienne à:

- $W_{E-FWHM}$ , la largeur complète à mi-hauteur en champ électrique
- $W_{E-HWHM}$ , la demi-largeur à mi-hauteur en champ électrique
- $W_{E-RMS}$ , la largeur root-mean-square en champ électrique
- $W_{L-FWHM}$ , la largeur complète à mi-hauteur en irradiance
- $W_{L-HWHM}$ , la demi-largeur à mi-hauteur en irradiance
- $W_{L-RMS}$ , la largeur root-mean-square en irradiance

## Réponse

## 6.6. Cavité laser

durée: 60 m

### Question

Une cavité laser est composée d'un miroir courbe concave de rayon de courbure  $R = 40$  cm et d'un miroir plan, séparés par  $d = 42$  cm. Au centre, le milieu de gain est un cristal cylindrique de Nd :YAG d'indice de réfraction  $n = 1.8$  et de longueur  $L = 10$  cm. Calculez les paramètres du faisceau gaussien qui est stable dans la cavité, c'est à dire le faisceau gaussien qui est identique après un aller-retour dans la cavité.

### Réponse

On obtient la matrice de transfert de la cavité, en partant de n'importe où, c'est sans importance. Ensuite, on utilisera simplement la transformation des faisceaux gaussiens et on obtiendra un  $q$  qui répond à:

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (108)$$

ou encore

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0 \quad (109)$$

donc la solution sera:

$$q = \frac{A - D \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2C} \quad (110)$$

### La matrice d'un aller-retour de la cavité

On se propage dans l'air, ensuite on entre dans un cristal (interface dielectrique plane), on se propage, on sort du cristal, on se repropage, on frappe le miroir, en revient dans le cristal jusqu'au miroir plan. Pour rapidement simplifier, faisons la propagation air-dielectrique-air avec  $d_o = 16$  cm (i.e. le cristal est au centre):

$$\begin{aligned} M_p &= \begin{bmatrix} 1 & d_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_o \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (111) \\ M_p &= \begin{bmatrix} 1 & 2d_o + L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qu'on simplifie en posant  $d \equiv 2d_o + L/n = 37.5$  cm. Ainsi, la matrice d'un aller-retour est simplement:

$$\begin{aligned} M_{\text{ar}} &= \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (112) \\ M_{\text{ar}} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2d}{R} & 2d - \frac{2d^2}{R} \\ -\frac{2}{R} & 1 - \frac{2d}{R} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Astuce:* on vérifie rapidement que le déterminant est 1 pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur de calcul, ce qui est le cas  $\left(1 - \frac{2d}{R}\right)^2 - \left(-\frac{2}{R}\right)\left(2d - \frac{2d^2}{R}\right) = 1$ . On remarque que  $A = D$ , donc  $A - D = 0$

## La solution stable

On utilise eq. 110 et on remplace les valeurs pour notre cavité dans l'eq ??? :

$$\begin{aligned} q &= \pm \frac{\sqrt{4BC}}{2C} \\ q &= \pm \frac{\sqrt{4(2d - \frac{2d^2}{R})(-2/R)}}{2(-2/R)} \\ q &= \pm \frac{\sqrt{-16\frac{d}{R}(1 - \frac{d}{R})}}{4/R} \\ q &= \pm \frac{\sqrt{-16\frac{d}{R}(1 - \frac{d}{R})}}{4/R} \\ q &= \pm j\sqrt{Rd(1 - \frac{d}{R})} \\ q &= \pm j\sqrt{40 \cdot 37.5(1 - \frac{37.5}{40})} \text{ cm} = j9.68 \text{ cm} \end{aligned} \tag{113}$$

Donc  $z_o = 9.68$  cm pour ce faisceau. En prenant une longueur d'onde de  $1.064 \mu m$  (Nd:YAG est un milieu de gain centré sur cette longueur d'onde), le faisceau a donc une largeur minimale de  $w_o = \sqrt{\frac{z_o \lambda}{\pi}} = 180 \mu m$  au miroir plan avec un front d'onde courbe.

# 7. Interactions linéaires

Les problèmes de cette section concernent les interactions linéaires entre la lumière et les particules ou les tissus. Les concepts de section efficace, coefficient de diffusion, d'absorption et d'anisotropie de même que la fluorescence par excitation linéaire sont exposés dans des problèmes.

## Question

Vous savez que la probabilité qu'un photon soit diffusé dans un élément différentiel d'épaisseur  $ds$  est  $dP = \mu_s ds$ , et que  $\mu_s = N\sigma_s$  (voir les notes), où  $N$  est la densité de particules de section efficace  $\sigma_s$ . À grande densité, cette égalité ne tient plus: obtenez la condition sur la densité à partir de laquelle une erreur de 5% sera obtenue.

## Réponse

### Question

Un tissu a une épaisseur de 1 mm. Supposez  $\mu_a = 0 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\mu_s = 200 \text{ cm}^{-1}$  et  $g = 0.8$ . Quelle est la probabilité qu'un photon sorte sur l'axe d'entrée après une distance  $d = 1 \text{ mm}$  sans avoir été diffusé ?

## Réponse

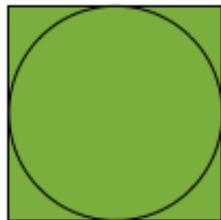
### Question

Vous utilisez une cuvette de 1 cm de chemin optique contenant une solution de FITC. Un laser à 488 nm se propage et 1% de la lumière est absorbée après avoir traversé la cuvette. Quelle est la concentration de FITC dans la cuvette? Note: FITC et fluorescein sont des synonymes.

## Réponse

### Question

Si vous choisissez des nombres entre -0.5 et 0.5 de façon uniforme à l'aide de la fonction Random() de votre langage de programmation préféré, vous pouvez obtenir une série de points (x,y) à l'intérieur du carré de côté unitaire centré sur l'origine.



1. Quelle est la probabilité que le point soit à l'intérieur d'un cercle de rayon  $r = 0.5$ ? Quelle est la probabilité qu'il soit à l'intérieur du carré?
2. Obtenez la valeur de  $\pi$  à l'aide de la méthode Monte Carlo. Note: ma solution prend 14 lignes en Perl, incluant le texte de sortie et prend 5 secondes à calculer.

## Réponse

### Question

Faites un code Monte Carlo pour calculer la propagation dans un milieu homogène (sans interface) de coefficient  $\mu_s$ ,  $\mu_a$  et  $g$  arbitraire, pour un source isotrope (attention: réfléchissez à ce que veut dire source isotrope et comment le programmer). Allez <http://omlc.org/software/mc/>, en particulier: <http://omlc.org/classroom/ece532/class4/index.html> la section sur Sampling of probability distribution. Il existe des tonnes de solutions et de programmes sur le Web. Cependant, c'est un excellent exercice de pouvoir le programmer soi-même.

## Réponse

## Question

Vous illuminisez votre doigt avec un laser rouge à 630 nm.

1. Quelle fraction de la lumière sera absorbée? Indice: vous devez trouver le coefficient d'absorption dû au sang. Vous devrez sûrement faire un estimé du volume de sang dans votre doigt.
2. Quelle serait la réponse si la longueur d'onde était 488 nm ?

## Réponse

### Question

Obtenez le code Monte Carlo Multi Layer (MCML) du site: <http://omlc.ogi.edu/software/mc/>. Sentez-vous bien libre de vous référer à la documentation [http://omlc.ogi.edu/pubs/pdf/man\\_mcml.pdf](http://omlc.ogi.edu/pubs/pdf/man_mcml.pdf). Utilisez une couche seulement de  $d = 5 \text{ mm}$ ,  $\mu_s = 100 \text{ cm}^{-1}$  et  $g = 0.75$ . On appelle la réflectance diffuse et la transmittance diffuse la quantité totale de lumière réfléchie et transmise.

1. Obtenez la quantité de lumière **totale** réfléchie et transmise de façon diffuse (i.e deux nombres)
2. Obtenez la distribution de la fluence (Energie par surface) dans un plan 2D transverse à la surface du tissu centré sur le faisceau dans l'échantillon. Cette donnée est essentiellement dans le fichier de sortie du programme.
3. Obtenez la distribution de la fluence dans un plan 2D passant au centre du faisceau dans l'échantillon. Cette donnée est essentiellement dans le fichier de sortie du programme.

## Réponse

### Question

À l'aide de techniques Monte Carlo en 3D, calculez l'irradiance [en  $\text{W/cm}^2$ ] à 2 mm d'une source ponctuelle isotrope (émission dans toutes les directions) de 1 W pour du tissu infini et homogène diffusant ayant  $\mu_s = 10 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\mu_a = 0 \text{ cm}^{-1}$  et  $g = 0$  (donc uniquement de la diffusion isotrope).

## Réponse

### Question

Calculez la quantité **moyenne** de photons émis par secondes par un fluorophore FITC (Fluorescein) à concentration  $1 \mu\text{M}$  dans une sphère de diamètre  $0.5 \mu\text{m}$  pour 1 mW de lumière à 488 nm?

## Réponse

La littérature scientifique qui discute de l'émission de fluorescence par excitation à 1-photon suit deux courants principaux: l'utilisation du coefficient d'absorption molaire  $\epsilon$  et de l'équation de Beer-Lambert ou l'utilisation de la section efficace  $\sigma$  (plutôt dans le domaine de la physique et moins répandue). La loi de Beer-Lambert pour l'absorption à 1-photon avec l'absorption molaire est  $I(L) = 10^{-\epsilon CL} I_0$ . Elle peut aussi s'écrire en terme des puissances  $P(L) = 10^{-\epsilon CL} P_0$ . Elle s'applique car les photons ne sont pas diffusés sur cette petite distance ( $1 \mu\text{m}$ ). Nous supposons que la lumière est focalisé entièrement sur la sphère, comme dans un

microscope. Puisque nous savons la concentration et le diamètre de la sphère, nous pouvons simplement calculer le coefficient d'absorption avec le coefficient d'absorption molaire  $\epsilon$  et obtenir la quantité de photons absorbés dans le volume focal. Ensuite, avec l'efficacité quantique du fluorophore ( $\eta$ ), nous pourrons simplement convertir la puissance absorbée en puissance ré-émise.

Nous trouvons facilement<sup>footnote</sup><http://www.dclab.ca/fluorophores/> ou <http://www.piercenet.com/instructions/2162081.pdf> le coefficient d'absorption molaire de la fluorescein (aussi appelé FITC) avec  $\epsilon = 70000 \text{ cm}^{-1}\text{M}^{-1}$  et une efficacité quantique de  $\eta = 0.99$ . Il y a deux façons de calculer la puissance absorbée :

- Soustraire la puissance juste avant et juste après le point focal pour obtenir la puissance absorbée dans le volume focal.  $P_o - 10^{-\epsilon CL}P_o$  avec  $L = 1\mu\text{m}$ .
- Calculer la différentielle pour obtenir la variation d'intensité en fonction de la distance parcourue, ce qui est essentiellement le calcul précédent de façon plus élégante.  $dP = 10^{-\epsilon CL}P_o(-\epsilon C \ln 10)dL$ ,

avec  $L = 0 \mu\text{m}$  et  $dL = 1 \mu\text{m}$ . Dans les deux cas, on obtient qu'il y a une quantité  $\Delta P = 0.000002P_o$  qui est absorbée. Ensuite, nous savons que 99% des photons sont ré-émis en fluorescence, donc nous obtenons 2 nW de puissance émise, isotropiquement, dans toutes les directions. Pour l'avoir en nombre de photons par seconde, on fait simplement:

$$F_{\text{em}} = \frac{\eta \Delta P}{\frac{hc}{\lambda}/\text{photon}} = 8 \times 10^9 \text{ photon} \cdot \text{s}^{-1} \quad (114)$$

## 8. Impulsions brèves

Les problèmes de cette section concernent les impulsions brèves, la dispersion, la puissance au pic, les taux de répétition, les largeurs de spectre.

### Question

Vous avez un laser Ti:Saphire qui émet un faisceau sur  $2 \text{ mm}^2$  des impulsions de 150 femtosecondes (*transform-limited*) à toutes les 12 nanosecondes. La lumière émise est centrée à 800 nm et il y a 10 mW de puissance moyenne c'est à dire que si on fait la moyenne de la puissance en 150 femtosecondes de lumière et 12 nanosecondes de "vide", on obtient 10 mW.

1. Calculez la puissance au pic des impulsions (en kW).
2. Quelle est la largeur spectrale du faisceau ? (en nanomètres). Utilisez les notes de cours.
3. Quel est l'irradiance au pic de l'impulsion en  $\text{MW/cm}^2$  ?
4. Quel est l'irradiance spectrale en  $\text{MW/nm/cm}^2$  ?
5. Qu'arrivera-t-il à la durée des impulsions si elles voyagent dans 3 cm de verre BK7 ? Trouvez le coefficient de dispersion dans le verre BK7 sur le web. Utilisez le tableau en annexe pour convertir les coefficients, ou pour les calculer.
6. Calculez le produit  $\Delta t \Delta f$  avant le bloc de verre et après le bloc de verre

7. Vous utilisez un puissance-mètre pour mesurer la puissance avant et après le verre. Que mesurez-vous? Discutez (brièvement, bien sûr).

# Résumé

	Définition	( $\omega$ )	( $\lambda$ )
vitesse de phase	$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$	$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$	
vitesse de groupe	$\frac{dk}{d\omega} = \left( \frac{1}{v_g} \right)$	$\frac{dk}{d\omega} = \left( \frac{1}{v_g} \right)$	$v_g = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}}$
dispersion de vitesse de groupe (GVD)	$\frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{v_g} \right)$	$D_{\omega} = \frac{\lambda_o^3}{2\pi c^2} \frac{d^2n}{d\lambda_o^2} [\text{s}^2/\text{m}]$	$D_{\lambda} = -\frac{\lambda_o}{c} \frac{d^2n}{d\lambda_o^2} [\text{s}/\text{m}^2]$
delai de dispersion de groupe (GDD)		$\Delta t = D_{\omega} \Delta\omega \Delta z$	$\Delta t = D_{\lambda} \Delta\lambda \Delta z$

## Réponse

## Question

Vous avez un laser Ti:Sapphire qui émet un faisceau sur  $2 \text{ mm}^2$  des impulsions de 30 femtosecondes (*transform-limited*) à toutes les 12 nanosecondes. La lumière émise est centrée à 800 nm et il y a 10 mW de puissance moyenne c'est à dire que si on fait la moyenne de la puissance en 150 femtosecondes de lumière et 12 nanosecondes de "vide", on obtient 10 mW.

1. Calculez la puissance au pic des impulsions (en kW).
2. Quelle est la largeur spectrale du faisceau ? (en nanomètres). Utilisez les notes de cours.
3. Quel est l'irradiance au pic de l'impulsion en MW/cm<sup>2</sup> ?
4. Quel est l'irradiance spectrale en MW/nm/cm<sup>2</sup> ?
5. Qu'arrivera-t-il à la durée des impulsions si elles voyagent dans 3 cm de verre BK7 ? Trouvez le coefficient de dispersion dans le verre BK7 sur le web. Utilisez le tableau en annexe pour convertir les coefficients, ou pour les calculer.
6. Calculez le produit  $\Delta t \Delta f$  avant le bloc de verre et après le bloc de verre
7. Vous utilisez un puissance-mètre pour mesurer la puissance avant et après le verre. Que mesurez-vous? Discutez (brièvement, bien sûr).

# Résumé

	Définition	$(\omega)$	$(\lambda)$
vitesse de phase	$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$	$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$	
vitesse de groupe	$\frac{dk}{d\omega} \equiv \left( \frac{1}{v_g} \right)$	$\frac{dk}{d\omega} \equiv \left( \frac{1}{v_g} \right)$	$v_g = \frac{c}{n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}}$
dispersion de vitesse de groupe (GVD)	$\frac{d^2 k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{v_g} \right)$	$D_\omega = \frac{\lambda_o^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda_o^2} [\text{s}^2/\text{m}]$	$D_\lambda = -\frac{\lambda_o}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda_o^2} [\text{s}/\text{m}^2]$
delai de dispersion de groupe (GDD)		$\Delta t = D_\omega \Delta\omega \Delta z$	$\Delta t = D_\lambda \Delta\lambda \Delta z$

## Réponse

### Question

En supposant que seule la dispersion du verre de silice compte dans une fibre optique, calculez la dispersion d'impulsions de 150 femtosecondes à 800 nm dans 10 cm de fibre optique et dans 2 mètres de fibre optique.

## Réponse

### Question

En supposant que seule la dispersion du verre de silice compte dans une fibre optique:

1. Calculez la dispersion d'impulsions de 150 femtoseconds à 800 nm dans 10 cm de fibre optique et dans 2 mètres de fibre optique.
2. Discutez l'importance pour l'endoscopie multiphoton.

## Réponse