1.1 $\nabla \cdot \vec{v} = y + 0 + 2xyz = 2xyz + y$

1.2 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ car $\frac{\partial t}{\partial x} = 0$

1.3 $\nabla \phi = yz^2 \hat{i} + xz^2 \hat{j} + 2xyz \hat{k}$

1.4 $\nabla \times \vec{v} =$

1.5 $\vec{0}$

1.6 $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$

$\vec{\nabla} f = \frac{2x}{a^2} \hat{x} + \frac{2y}{b^2} \hat{y} + \frac{2z}{c^2} \hat{z}$ où x, y, z sont sur la surface

1.7 $f(x,y,z) = x - y^2 + z$

$\nabla f = \hat{x} - 2y \hat{y} + \hat{k}$

$|\nabla f| = 1 + 4y^2 + 1 = 2 + 4y^2$ donc

$\hat{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\hat{x} - 2y \hat{y} + \hat{k}}{2 + 4y^2}$

où x, y, z sont sur la surface

1.8 $\nabla u \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (2x \hat{i} + 2y \hat{j} + 2z \hat{k}) \cdot \frac{(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{\sqrt{3}}$

1.9 $-\frac{\partial v_x}{\partial y} \hat{k} = k \hat{k}$

2 Le gradient donne

$$\nabla V = (6xy - z)\hat{x} + 3x^2\hat{y} + -x\hat{z}$$

on remplace les points dans l'équation pour obtenir la direction

3. $\int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dA$ $\hat{n} = \hat{i}$ donc

$$\int_S (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot \hat{i}\, dy\, dz$$

$\int_S dy\, dz$ d'un disque donc $\pi r^2 = \pi$

$r = 1$

4.

5. Si on écrit

$$\oint_S \hat{n}\, dA$$, on peut aussi écrire

On sépare le problème en faisant la somme des composantes en x de $\hat{n}$

$$\oint \hat{n}\cdot\hat{i}\, dA = 0 \quad \text{car} \int \nabla\cdot\hat{i}\, dV = 0$$

même chose pour $\hat{j}$ et $\hat{k}$ donc

$$\oint \hat{n}\, dA = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

2. $$\int n\cdot(x\hat{i})\, dA = V \implies \int \nabla\cdot(x\hat{i})\, dV$$

$$= \int (1)\, dV$$

$$= V$$

3. $$\int n\cdot(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\, dA \implies \int \nabla\cdot(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\, dV$$

$$= \int (3)\, dV$$

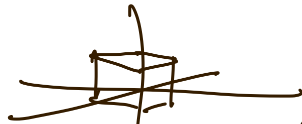
$$= 3V$$

6.1 $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2 y z \, dx\, dy\, dz$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}$$

$\nabla \cdot \vec{v} = x^2 y z$, $\vec{w} = \frac{x^3}{3} y z \hat{\imath}$ est coherent

Donc $\displaystyle\oint_S \vec{w} \cdot \hat{n}\, dA$ où S est un cube



ne sera pas zero seulement sur les faces $x=0$ et $x=1$

$$= \int_{\text{face } x=0} \cancelto{0}{(-\hat{\imath}) \cdot \left(\frac{x^3}{3} y z \hat{\imath}\right) dy\, dz} + \int_{\text{face } x=1} \hat{\imath} \cdot \left(\frac{x^3}{3} y z \hat{\imath}\right) dy\, dz$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1\int_0^1 y z \, dy\, dz$$

$$= \frac{1}{3} \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12} \quad \blacksquare$$

6.2 même raisonnement que 6.1

$$\int_V (x+y^2z)\,dx\,dy\,dz = \int x\,dx\,dy\,dz + \int y^2 z\,dx\,dy\,dz$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \left. y\right|_0^1 \left. z\right|_0^1 + \left. x\right|_0^1 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

On peut prendre

$\nabla\cdot\vec{v} = f$ avec $\vec{v} = \frac{x^2}{2}\hat{x} + \frac{y^3}{3}z\,\hat{y}$

car $\nabla\cdot\vec{v} = \frac{2x}{2}\hat{x}\cdot\hat{x} + \frac{3y^2}{3}z\,\hat{y}\cdot\hat{y} = x + y^2z$

donc

$\iint \left(\frac{x^2}{2}\hat{x} + \frac{y^3}{3}z\,\hat{y}\right)\cdot\hat{n}\,dA$ seulement $\neq 0$

sur face en $\hat{x}$ et $\hat{y}$

$$= \cancelto{0}{\iint_{\text{face } x=0} \frac{x^2}{2}\hat{x} \cdot (-\hat{x})\, dy\,dz} + \iint_{\text{face } x=1} \frac{x^2}{2}\hat{x}\,(\hat{x})\,dy\,dz \; +$$

$$+ \cancelto{0}{\iint_{\text{face on } y=0} \frac{y^3}{3} z(-\hat{y})\, dx\,dz} + \iint_{\text{face } y=1} \frac{y^3}{3} z\,(\hat{y})\,dx\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\, y\Big|_0^1 z\Big|_0^1 + \frac{1}{3}\left|\, \frac{z^2}{2}\right|_0^1 x\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

7. On sépare l'intégrale en 2, en faisant

C_1 : $(1.1.1) \rightarrow (1.2.3)$ ensuite

C_2 : $(1.2.3) \rightarrow (3.2.1)$

On paramétrise la première courbe, on obtient

$$C_1(\tau) \Rightarrow \hat{i} + (1+\tau)\hat{j} + (1+2\tau)\hat{k}$$

donc $x(\tau) = 1$, $y(\tau) = 1+\tau$ $z(\tau) = 1+2\tau$

$$C_2(\tau) \Rightarrow (1+2\tau)\hat{i} + (2\hat{j}) + (3-2\tau)\hat{k}$$

donc $x(\tau) = 1+2\tau$, $y(\tau) = 2$, $z(\tau) = (3-2\tau)$

Pour C_1, on obtient

$$\frac{dR(\tau)}{d\tau} = \hat{j} + 2\hat{k}$$

Pour C_2, on obtient

$$\frac{dR(\tau)}{d\tau} = 2\hat{i} - 2\hat{k}$$

Donc

$$\int_0^1 (xz^2\hat{i} - 3\hat{j} + 2y\hat{k}) \cdot (\hat{i} + (1+\tau)\hat{j} + (1+2\tau)\hat{k})\, d\tau$$

$$+ \int_0^1 (xz^2 - 3\hat{j} + 2y\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 2\hat{k})\, d\tau$$

$$= \int_{0\,C_1}^{1} \left(xz^2\hat{i} - 3\hat{j} + 2y\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i} + (1+\tau)\hat{j} + (1+2\tau)\hat{k}\right) d\tau$$

$$+ \int_{0\,C_2}^{1} \left(xz^2\hat{i} - 3\hat{j} + 2y\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i} - 2\hat{k}\right) d\tau$$

$$= \int_{0\,C_1}^{1} \left(x(\tau)\,z^2(\tau) - 3(1+\tau) + 2y(\tau)(1+2\tau)\right) d\tau$$

$$+ \int_{0\,C_2}^{1} \left(x(\tau)\,z^2(\tau) - 4\,y(\tau)\right) d\tau$$