凸函数的判定

**定义**:给定一个凸集,则映射函数称为

1. 在凸集上单调(monotone)



1. 在凸集上严格单调(strictly monotone),若



1. 在凸集上强单调(strongly monotone),若



特别地,若将函数的梯度向量取作映射函数,即,则可以得到凸函数判定的一阶充分条件.

1. 凸函数判定的一阶充分必要条件

**定理**:令是一个定义在维向量空间内的凸集上的函数,并且可微分,则



**定理**:若在凸定义域是可微分的,则为凸函数,当且仅当



1. 凸函数判定的二阶充分必要条件

**定理**: 令是一个定义在维向量空间内的凸集上的函数,并且可二次微分,则是凸函数,当且仅当Hessian矩阵半正定

****

与严格极小值点的充分条件(只)要求Hessian矩阵在一点正定不同,这里要求Hessian矩阵在整个凸集的所有点均正定.

下面的基本性质对于判断一个函数凸性非常有用:

1. 函数是凸函数,当且仅当它在所有线段上是凸的,即对和所有都是凸的.
2. 凸函数的非负求和是凸函数



1. 凸函数的无穷求和.积分为凸函数



1. 凸函数各点的上确界为凸函数



1. 凸函数的仿射变换为凸函数



值得注意的是,除范数之外,向量所有范数



都是凸函数.