拉格朗日对偶性

# 原始问题

假设是定义在上的连续可微函数.考虑约束最优化问题





称此约束最优化问题为原始最优化问题或原始问题.

首先,引入广义拉格朗日函数



这里,是拉格朗日乘子,.考虑的函数:



这里,下标表示原始问题.

假设给定某个.如果违反原始问题的约束条件,即存在某个使得或者存在某个使得,那么就有



因为若某个使约束,则可令,若某个使,则可令使,而将其余各均取为0.

相反地,如果满足约束条件,则可知,.因此,



所以如果考虑极小化问题



它是与原始最优化问题等价的,即它们有相同的解.问题称为广义拉格朗日函数的极小极大问题.为了方便,定义原始问题的最优值



称为原始问题的值.

# 对偶问题

定义



再考虑极大化,即



问题称为广义拉格朗日函数的极大极小问题.

可以将广义拉格朗日函数的极大极小问题表示为约束最优化问题:

 

称为原始问题的对偶问题.定义对偶问题的最优解



称为对偶问题的值.

# 原始问题和对偶问题的关系

1. (弱对偶性)若原始问题和对偶问题都有最优解,则

 

1. 设和分别是原始问题和对偶问题的可行解,并且,则和

分别是原始问题和对偶问题的最优解.

1. 假设函数和是凸函数,具有仿射函数形式:,并且假设不等式约束(即Slatert条件,若也具有仿射函数形式,则不等式不需要严格成立),即存在,对所有有,则存在,使是原始问题的解,是对偶问题的解,并且



1. 假设函数和是凸函数,具有仿射函数形式:,并且假设不等式约束(即Slatert条件,若也具有仿射函数形式,则不等式不需要严格成立),则和分别是原始问题和对偶问题的解的充分必要条件是满足下面的Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件(可通过此方式):

