内积空间,范赋空间和Hilbert空间

向量空间向量空间只定义了向量的加法以及标量与向量的乘法,并且向量空间的和,交与直和等也只涉及两个向量空间的元素(即向量)之间比较简单的关系.显然,向量之间的乘法也是必须考虑的一种基本运算.

令表示一标量域(field of scalars),它既可以是实数域,也可以是复数域,而为一维向量空间或.

**定义(内积与内积向量空间):**若对所有的和,映射函数满足以下三条公理:

1. 共轭对称性
2. **第一变元**的线性性
3. 非负性,并且(严格正性)

则称为向量下与的内积,为内积向量空间

两个向量的内积可以度量它们之间的夹角



满足内积三个公理的实向量空间和复向量空间分别称为**实内积空间**和**复内积空间**

注释1: 对于实内积向量空间,共轭对称性退化为实对称性,因为



注释2:第一变元的线性性包含了齐次性和可加性



注释3:共轭对称性和第一变元的线性性意味着



内积向量空间具有向量的加法,标量与向量的乘法以及两个向量的乘法(内积),可以度量两个向量之间的夹角.如果还能增加关于向量的长度(size或length),距离(distance)和领域(neighborhood)等测度的话,那么向量空间无疑将更加实用和完美;而向量的范数能够担当这一重任.

**定义(范数和赋范向量空间):**令是一(实或复)向量空间.向量的范数是一实函数,若对所有向量和任意一个标量(其中表示或者),下面公理全部成立:

1. 非负性:,并且
2. 齐次性:对所有复常数成立
3. 三角不等式:

并称为赋范向量空间(normed vector space)

最常用的向量范数为Euclidean范数或范数,记作,定义为



范数可以直接度量一个向量的长度,两个向量之间的距离



以及一个向量的领域(其中)



**定义(完备性)**:一个向量空间称为完备向量空间,若对于中每一个Cauchy序列,在向量空间内存在一个元素,使得,即内的每一个Cauchy序列都收敛在向量空间内.特别地,一个向量空间称为相对于范数完备的向量空间,若对于每一个Cauchy序列,在向量空间内存在一个元素,使得依范数收敛满足.

向量空间元素的任何一个Cauchy序列依范数收敛为空间内的一个元素也可等价叙述为:二者之差的范数趋于零,即.

**定义(Banach空间)**:一个赋范向量空间称为Banach空间,若对每一个Cauchy序列,在内存在一个元素使得.

一个有限维的赋范线性向量空间一定是Banach空间,因为它会自动满足Cauchy序列收敛的收敛条件.

**定义(Hilbert空间)**:一个相对于范数完备即满足范数收敛的赋范向量空间称为Hilbert空间.

显然,一个Hilbert空间一定是Banach空间,但一个Banach空间不一定是Hilbert空间.这时因为,范数收敛一定满足极限收敛,但极限收敛不一定意味着范数收敛.