向量空间

**定义**:以向量为元素的集合称为向量空间,若加法运算定义为两个向量之间的加法,乘法运算定义为向量与标量域中标量之间的乘法,并且对于向量集合中的向量和标量域中的标量,以下两个闭合性和关于加法及乘法的8个公理(axiom)(也称公设(postulate)或定律(law)均满足):

闭合性(closure properties)

1. 若和,则,即在加法下是闭合的,简称加法的闭合性(closure for addition)
2. 若是一个标量,,则,即在标量乘法下是闭合的,简称标量乘法的闭合性(closure for scalar multiplication)

加法的公理

1. ,称为加法交换律(commutative law for addition)
2. ,称为加法结合律(associative law for addition)
3. 在中存在一个零向量,使得对于任意向量,恒有(零向量的存在性)
4. 跟定一个向量,存在另一个向量使得 (负向量的存在性)

标量乘法的公理

1. 对所有向量和所有标量成立,称为乘法结合律(associative law for scalar multiplication)
2. 对所有向量的标量成立,称为标量乘法分配律(distributive law for scalar multiplication)
3. 对所有向量和所有标量成立(标量乘法分配律)
4. 对所有成立,称为标量乘法单位律(unity law for scalar multiplication)

如果中的向量为实向量,并且标量域为实数域,则称为实向量空间.若中的向量为复向量,且标量域为复数域,便称为复向量空间.

**定理**:如果是一个向量空间,则:

1. 零向量是唯一的
2. 对每一个向量,加法的逆运算是唯一的
3. 对每一个向量,恒有0
4. 对每一个标量,恒有
5. 若,则0或

**定义**:令和是两个向量空间,若是的一个非空子集合,则称子集合是的一个子空间.

显然,一个维零向量是维向量空间的一个子空间.

**定义**:的子集合是的一个子空间,当且仅当以下三个条件均满足:

1. 当向量属于,则也属于,即满足加法的闭合性:
2. 当,且是标量,则也属于,即满足与标量乘积的闭合性
3. 零向量是的元素

**定义**:若和是向量空间的两个子空间,则



称为子空间和的和,而



称为子空间和的交

**定义**:若和是向量空间的两个子空间,并满足和,则称是子空间和的求和,简称直和(direct sum),记作

**定义**:若和是向量空间的两个子空间,则和也是的向量子空间.

**推论**:若和是向量空间的子空间,则是中包含向量子空间和的最小向量子空间

**推论**: 若和是向量空间的子空间,则子空间的交是中既属于,又属于的最大向量子空间