Geometria Plana

Conceitos Iniciais

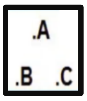
A palavra Geometria significa medidas da terra sendo:

- **Geo** = Terra
- **Metria** = Medida

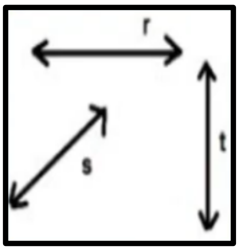
A geometria plana irá tratar dos elementos planos.

Assim temos três entes primitivos, ou melhor, conceitos iniciais que não possuem definição, são eles:

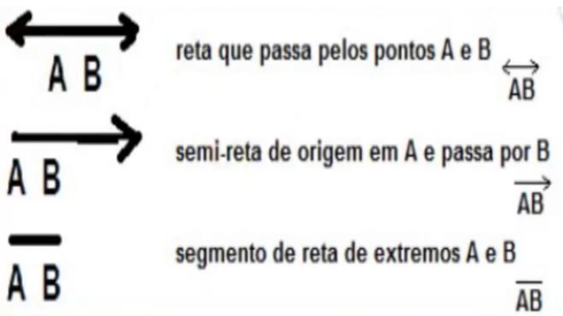
- **Ponto**: ao invés de definição o que temos são imagens de pontos como por exemplo as estrelas do céu, cada uma corresponde a imagem de um ponto. A representação do ponto ocorre por meio de letras MAIÚSCULAS do nosso alfabeto.



- **Reta**: podemos até dizer que é um conjunto de pontos alinhados mas na realidade o que temos é a imagem de uma reta como por exemplo o encontro do céu com o mara que é chamado de linha do horizonte. Nele vemos a imagem de uma reta. E as retas são representadas por letras MINÚSCULAS do nosso alfabeto como as retas r, s e t.



As retas possuem setas em suas pontas o que indica que elas são infinitas para os dois lados. Porém cabe colocar uns pontos importantes sobre a reta:



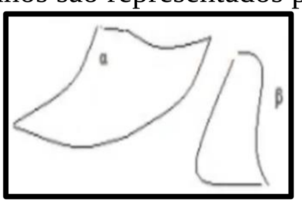
Reta: Infinita para os dois lados,

Semi-reta: Tem a origem em A mas segue sem fim.

Segmento de Retas: Inicia em A e termina em B.

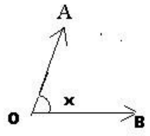
É importante atentar em como são as anotações.

- **Plano**: é o terceiro ente primitivo. Trata-se da imagem de um plano como por exemplo o chão da nossa casa, a nossa parede, o quadro da nossa sala, o quadro que temos nos exemplos anteriores e a seguir, eles são planos e o que temos nele e dentro deles temos exemplos. A seguir veja dois exemplos de imagem de plano, o plano Alfa e o plano Beta (os planos são representados por letras do alfabeto grego).



ÂNGULOS

Quando se fala em ângulos logo vem a mente a questão de abertura.
Considere duas semi-retas de mesma origem sendo uma semi-reta de origem $\overrightarrow{OA}$ e outra de origem $\overrightarrow{OB}$, agora na figura abaixo nos é mostrado um ângulo e percebemos que nele há a união das duas semi-retas na mesma origem ($A\hat{O}B$).



Definição: ângulo é a união de duas semi-retas de mesma origem

$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

Medida de ângulo:

Todos conhecemos o sistema decimal de medida. Ele é que utilizamos no dia-a-dia e ocorre de 10 em 10 elementos. É formado por pelo C / D / U, ou seja:

- Unidade (U): elemento inteiro minimo
- Dezena (D): corresponde a 10 unidades
- Centena (C): corresponde a 10 dezenas ou 100 unidades

No caso dos ângulos a medida ocorre pelo sistema sexagesimal, isto é, de 60 em 60. A sua representação se dá por:

- (º) Grau = 1/360 da circunferência, ou seja, a circunferência possui 360º
- (')Minuto = 1/60 do grau
- ('')Segundo = 1/60 do Minuto

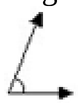
É importante notar que quando falamos em notação é comum vermos o exemplo abaixo:

O atleta fez o percurso em 3h 20'32"
ou
O atleta fez o percurso em 3h 20 mim 32 seg

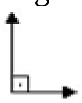
Nós entendemos a mensagem de ambas as formas escritas porém a primeira forma escrita esta totalmente errada. Nesse exemplo estamos falando em medida de tempo o que no caso exige que sejam realmente escritas. Esta parte que diferencia (20'32") é medida de ângulo, em outras palavras, na primeira frase o atleta teria corrido um percurso em 3 horas, parado dado uma voltinha de 20 minutos e outra voltinha menor ainda de 32 segundos.

Classificação:

1. Ângulo agudo (0º<x<90º)

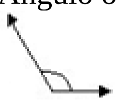


2. Ângulo reto (x= 90º)



Obs.: sempre se coloca o quadrado com um pingo central

3. Ângulo obtuso (90º <x<180º)



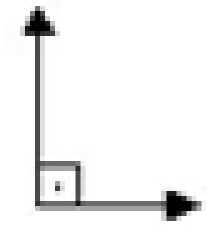
4. Ângulo raso (x = 180º)

5. Ângulo volta completa (x= 360º)

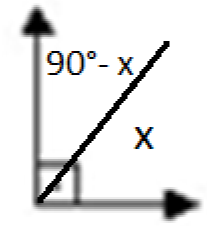
Propriedades:

Agora vamos tratar das propriedades dos angulos. Para isso vamos utilizar três clasificações para enterdermos melhor.

Ângulos complementares: soma igual a 90º

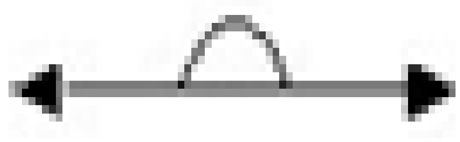


Primeiro pegamos o ângulo reto (90º);
Depois acrescentamos uma reta dividindo ele;
Na sequência chamamos um lado de X
Como o ângulo reto possui 90º, o outro lado passa a ser chamado de 90° - X.
Portando:
Ângulo Complementar de X = 90° - X

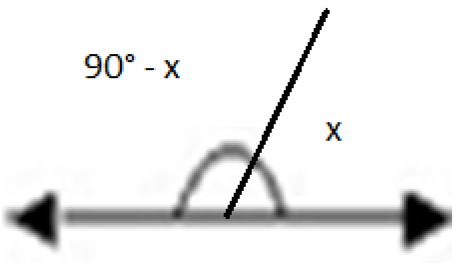


Dica para não esquecer: Considere que esse ângulo represente recém-casados. Um quer ir para cima do outro, tudo fica para cima. Eles se complementam.

Ângulos suplementares: soma igual a 180º.
São chamados de Suplementares pois ambos os lados se suportam, se suplementam.

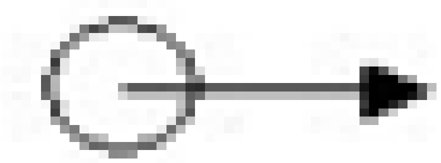


Primeiro pegamos o ângulo raso (180°);
Depois acrescentamos uma reta dividindo ele;
Na sequência chamamos um lado de X
Como o ângulo reto possui 180º, o outro lado passa a ser chamado de 180° - X.
Portando:
Ângulo Suplementar de X = 180° - X

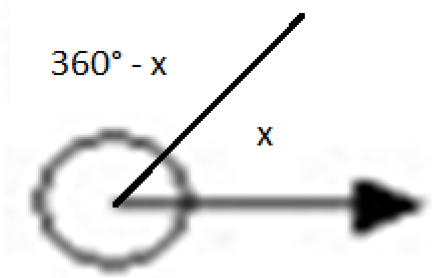


Dica para não esquecer: Considere que esse ângulo represente aquele casal na crise dos sete anos.
Eles deitam na cama e um vira para um lado e o outro vira para o outro lado. Eles se suportam.

Ângulos replementares: soma igual a 360º
São chamados de Replementares pois o ângulo da a volta completa, isto é, procura-se e não acha nada.

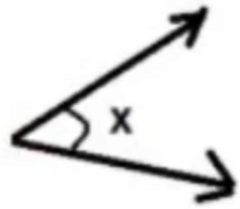


Primeiro pegamos o ângulo volta completa (360°);
Depois acrescentamos uma reta dividindo ele;
Na sequência chamamos um lado de X
Como o ângulo reto possui 360º, o outro lado passa a ser chamado de 360° - X.
Portando:
Ângulo Replementar de X = 360° - X

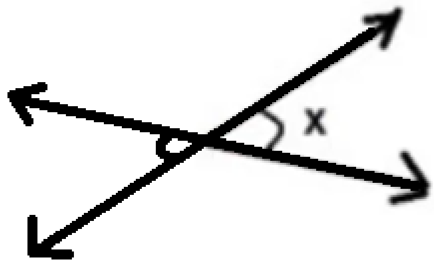


Dica para não esquecer: Considere que esse ângulo represente aquele casal que não se aguentam mais.
Um deita na cama, outro no sofá. Quando procuram não acham nada.

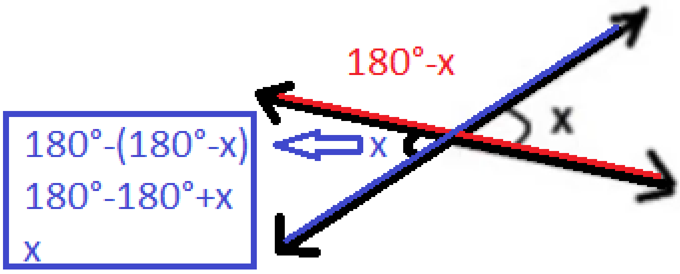
Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)
São ângulos que possuem a mesma origem mas seus lados pertencem à semi retas opostas



Nessa figura vemos duas semi-retas com o mesmo ponto de origem.



Agora transformamos as duas semi-retas em retas.
Percebe-se que agora surgiu um novo ângulo no lado oposto. Ele é chamado de ângulo oposto pelo vértice (o.p.v.)

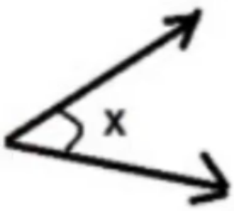


Na reta destacada em vermelho encontramos o ângulo X e seu Suplementar (180°-X)
A reta destacada em azul equivale a 180° portanto fica claro que o lado oposto, cortado pela reta vermelha, equivale a 180° - (180°-X).
Calculando conforme o quadro percebemos que o ângulo do outro lado também é X.
Portanto os Ângulos o.p.v. são CONGRUENTES (tem a mesma medida).

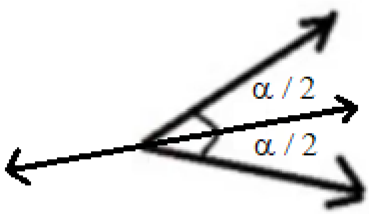
Bissetriz
A palavra vêm de:

- Bi = dois
- Setriz = Setores

Vamos considerar este ângulo:

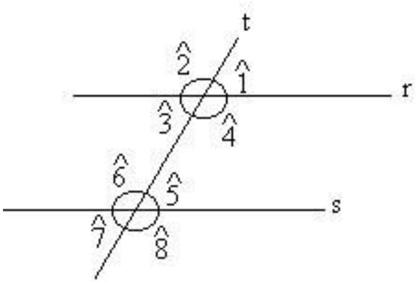


A bissetriz de um ângulo é uma semi-reta cuja origem é o vértice desse ângulo, que ela divide em dois ângulos congruentes (mesma medida).

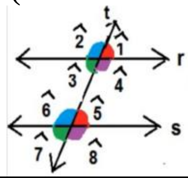
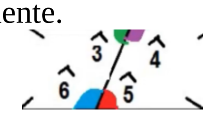
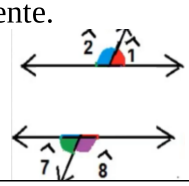
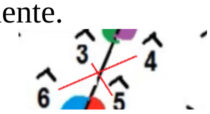
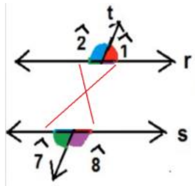


No caso aqui, dividimos como uma reta.
Cada parte do ângulo é chamado de α/2

PARALELISMOS (ÂNGULOS DE RETASPARALELAS)



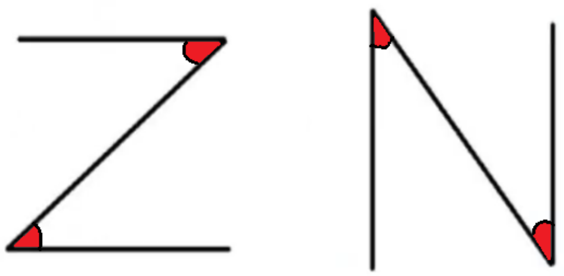
Sejam r e s duas retas paralelas e são representadas pelo símbolo r//s.
t é uma reta transversal que corta as retas paralelas.
Cada reta cortada formou 4 ângulos. Neste caso, podemos identificar oito ângulos.
Agora vamos separa em pares de ângulos onde possuem as seguintes propriedades:
O chapéu em cima dos números indicam que eles representam um ângulo.

Nomenclatura	Propriedade	Explicação
Correspondentes: 1 e 5 2 e 6 3 e 7 4 e 8	Congruentes Se trocarmos de posição entre eles não altera os valores pois possuem a mesma medida	Ocupam a mesma posição nas duas retas (vide cores no gráfico). 
Colaterais Internos: 3 e 6 4 e 5	Suplementares Como vimos no anterior, a troca por seu correspondente na outra reta não altera os valores. Nesse caso a união entre os internos faz com que os ângulos se suplementam.	Estão do mesmo lado porém internamente. 
Colaterais Externos: 1 e 8 2 e 7	Suplementares Se juntarmos veremos que um suplementa o outro,	Estão do mesmo lado porém externamente. 
Alternos Internos: 3 e 5 4 e 6	Congruentes Se trocassemos de posição com o seu correspondente na outra reta perceberiamos que são Opostos pelo Vertice (o.p.v.)	Estão do mesmo lado porém internamente. 
Alternos Externos: 1 e 7 2 e 8	Congruentes Se trocassemos de posição com o seu correspondente na outra reta perceberiamos que são Opostos pelo Vertice (o.p.v.)	Estão do mesmo lado porém externamente. 

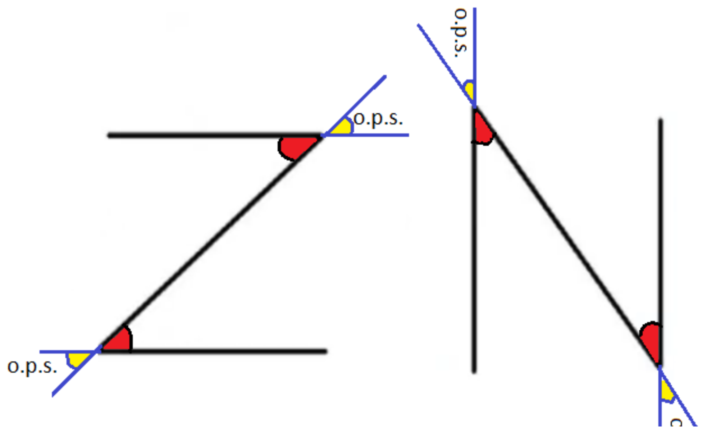
Regras do Z ou N

Se repararmos a letra Z possui duas paralelas horizontais e a lentra N pessui duas paralelas verticais.
Se inserirmos ângulos nas pontas do Z e do N perceberemos que eles são congruentes (possuem a mesma medida) pois se completassemos as retas e acrescentassemos os ângulos veriamos que eles possuem a mesma medida.

Inserindo os ângulos



Completando as retas



Exercícios de Aula

01. (Escola Técnica Federal-RJ) – As medidas do complemento, do suplemento e do replemento de um ângulo de 40º são, respectivamente, iguais a

(A) 30º, 60º e 90º
(B) 30º, 45º e 60º
(C) 320º, 50º e 140º
(D) 50º, 140º e 320º
(E) 140º, 50º e 320º

X = 40°		
Complementares	Suplementares	Replementares
90º - X	180º - X	360º - X
90° - 40°	180° - 40°	360° - 40°
50°	140°	320°

02. (MACKENZIE)- O complemento e o suplemento de um ângulo de 37º 20’ 07’’ medem, respectivamente

(A) 149º 39’ 53’’ e 52º 39’53’’
(B) 52º39’53’’ e 142º39’53’’
(C) 53º20’07’’ e 143º20’07’’
(D) 143º20’07’’ e 53º20’07’’
(E) 142º39’53’’ e 53º20’07’’

Ângulo = 37° 20’ 07”			
Complementares	Conversão	Conversão	Suplementares
	90º = 89° 60’	180º = 179° 60’	
	90º = 89° 59’ 60”	180º = 179° 59’ 60”	
	Cálculo	Cálculo	
	89° 59’ 60” -37° 20’ 07’ 52° 39’ 53”	179° 59’ 60” -37° 20’ 07” 142° 39’ 53”	

Para calcular o Suplementar também pode-se pegar o resultado do Complementar e somar 90°. Esta é a diferença entre os valores dos Ângulos Complementar e Suplementar.

52° 39’ 53”
+90°
142° 39’ 53”

03. (PUC-MG) – O dobro do complemento de um ângulo é igual à quinta parte do suplemento desse ângulo. A medida do ângulo é igual a

(A) 80º
(B) 60º
(C) 40º
(D) 30º
(E) 20º

Vamos por parte:

O dobro equivale a 2 multiplicando algo, então temos:

2

Como enunciado deixou claro, é o dobro do Complemento, então temos:

2 (90° - X)

Esse valor é igual a algo, então temos:

2 (90° - X) =

Esse valor é igual a quinta parte de algo, então temos:

2 (90° - X) = 1/5

Esse algo é o Suplemento, então temos:

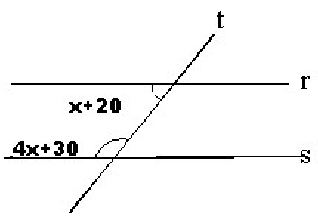
2 (90° - X) = 1/5 (180° - X)

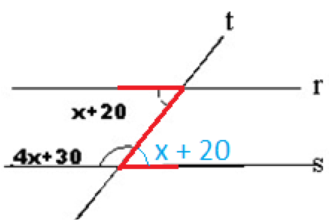
Agora é só calcular:

2 (90° - X) = 1/5 (180° - X)
10 (90° - X) = 180° - X
900° - 10X = 180º - X
900° - 180° = 10X – X
9X = 720°
X = 720°/9
X = 80°

04. As restas **r** e **s** são interceptadas pela transversal **t,** conforme a figura. O valor de **x** para que **r** e **s** sejam paralelas é:

(A) 20°
(B) 26°
(C) 28°
(D) 30°
(E) 35°

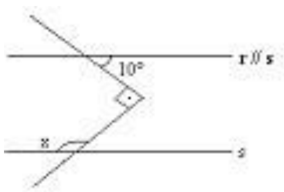


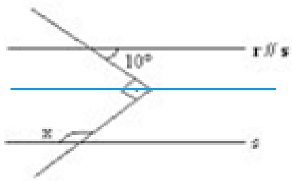


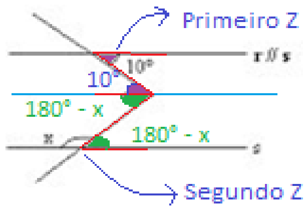
4x + 30° + x + 20° = 180°
5x + 50° = 180°
5x = 180° - 50°
5x = 130°
x = 130°/5
x = 26°

05. Na figura, **r** // **s**, então **x** vale:

(A) 90°
(B)100°
(C)110°
(D)120°
(E)130°





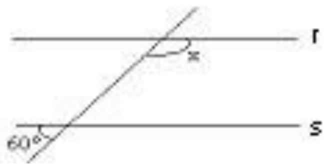


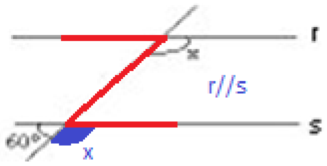
Lembrando que na figura inicial o quadrado do ângulo indicava ser um ângulo de 90° chegamos a conclusão de que a soma dos dois ângulos são iguais a 90°, portanto:

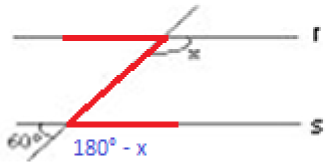
180º - x + 10° = 90°
190° - x = 90°
x = 190° - 90° = 100°

DANIEL GONÇALVES RIBEIRO – CB 301552-1
Geometria Plana –conceitos iniciais
Tarefa Básica

01. Sabendo que as retas as retas r e s são paralelas, o valor de **x** na figura é:
(A)100°
(B)110°
(C)120°
(D)130°
(E)140°



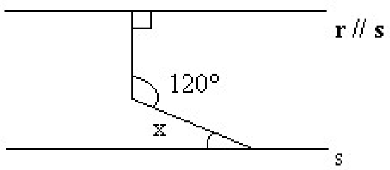


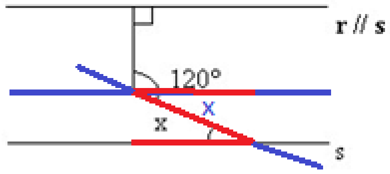


Nesse caso, por serem paralelas e utilizando a regra de Z, percebemos que as medidas de ambos são idênticas, porém, percebemos que são suplementares e na reta s temos a informação que um lado equivale a 60° e como em um ângulo suplementar o seu total equivale a 180°, portanto:

x = 180° - 60° = 120°

02. Na figura, **x** vale:
(A)20°
(B)30°
(C)35°
(D)38°
(E)40°

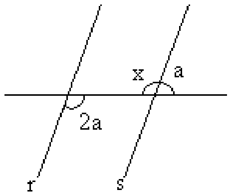


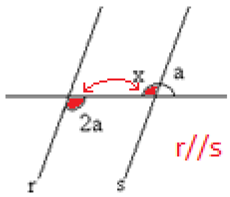


Nesse caso, por serem paralelas e utilizando a regra de Z, percebemos que as medidas de ambos são idênticas, porém, percebemos, na reta r que se trata de ângulos complementares (90°). Por paralelos, podemos alterar o posicionamento tendo em vista que são congruentes (possuem os mesmos valores), nesse caso, como Alternos Internos, fica claro que parte dos 120° que esta excedendo corresponde a x, portanto:

120º - x = 90°
x = 120º - 90º = 30°

03. Na figura, as retas **r** e **s** são paralelas. A medida do ângulo **x** é:
(A) 90°
(B) 100°
(C) 110°
(D) 120°
(E) 130°





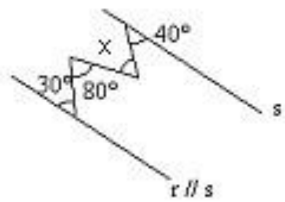
Neste caso por serem paralelas podesmo utilizar do Paralelismo trocando de posição o x pelo 2a (Alternos Internos) pois ambos tem o mesmo valor, com isso sabemos que:

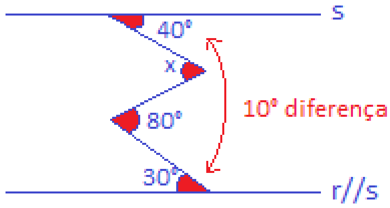
180° = 2a + a
180° = 3a
a = 180°/3 = 60°

Portanto:

x = 2ª
x = 2 x 60°
x = 120°

04. Se r // s, determine **x** na figura:





Reposicionando as retas percebemos que ao utilizar do Paralelismo trocando os Alternos Externos há uma diferença de 10º entre os elementos que deve ser compensada entre x e 80° (Alternos Internos) para manter as retas em paralelo, assim temos:

x – 80° = 40° – 30°
x = 10° + 80° = 90°

05. (U.E.Ceará) – O ângulo igual a 5/4 do seu suplemento mede:
(A)100º
(B)144º
(C)36º
(D)80º
(E)72º

Ângulo = (5/4) Suplementar
180° = Ângulo + Suplementar
180° = (5/4) Suplementar + Suplementar
180° = (9/4) Suplementar
Suplementar = 720°/9
Suplementar = 80°

Agora que descobrimos o Suplementar vamos encontrar o Ângulo:
180° = Ângulo + Suplementar
180° = Ângulo + 80°
Ângulo = 180° - 80°
Ângulo = 100°

06. (PUC-SP)- Um ângulo mede a metade do seu complemento. Entãoesse ângulo mede:

(A)30º
(B)60º
(C)45º
(D)90º
(E)75º

Ângulo = (1/2) Complementar
90° = Ângulo + Complementar
90° = (1/2) Complementar + Complementa
90° = (3/2) Complementar
Complementar = 180°/3
Complementar = 60°

Agora que descobrimos o Complementar vamos encontrar o Ângulo:
90° = Ângulo + Complementar
90° = Ângulo + 60°
Ângulo = 90° - 60°
Ângulo = 30°

07. (UFES) – O triplo do complemento de um ângulo é igual àterça parte do suplemento desse ângulo. Esse ângulo mede:

(A)45º
(B)48º30'
(C)56º15'
(D)60º
(E)78º45'

Ângulo Complementar = 90º
90° = Ângulo + Complementar
Complementar = 90° – Ângulo

Ângulo Suplementar = 180º
180° = Ângulo + Suplementar
Suplementar = 180° - Ângulo

3 Complementar = 1/3 Suplementar
3 (90° - Ângulo) = 1/3 (180° - Ângulo)
270° - 3 Ângulo = 60° - 1/3 Ângulo
270° - 60° = 3 Ângulo – 1/3 Ângulo
210° = (9 - 1)/3 Ângulo
210° = 8/3 Ângulo
210° = 8/3 Ângulo
630/8 = Ângulo
Ângulo = 78,75°

Convertendo o valor quebrado:
1 h = 60 min
0,75 = x
x = 60 x 0,75
x = 45

Portanto:
78° 45'

Respostas da Tarefa Básica

01.(C)
02.(B)
03.(D)
04.90º
05.(A)
06.(A)
07.(E)