

**Εργασία 1 - Συνέλιξη και Σειρές Fourier: Μαθηματικοί υπολογισμοί και απεικόνιση
σε Matlab**

Δημήτρης Χαριστές

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Δυτικής

Μακεδονίας

ICTE234: Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Δρ. Τσίπουρας, Μάρκος

21 Μαΐου, 2023

1. Συνέλιξη

$$k = \frac{3}{4}, m = \frac{1}{4}.$$

$$\text{A)} x(t) = \frac{3}{4}u(t + \frac{1}{4}), h(t) = e^{-\frac{1}{4}t}u(t - \frac{3}{4})$$

$$\text{Εύρεση } c(t) = x(t) * h(t).$$

Αρχικά:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}, & t \geq -\frac{1}{4} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 0, & t < \frac{3}{4} \\ e^{-\frac{1}{4}t}, & t \geq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Μετασχηματίζουμε τις $x(t)$ και $h(t)$ στην παρακάτω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ . Οπότε:

$$x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}, & \tau \geq -\frac{1}{4} \end{cases},$$

$$h(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t - \tau < \frac{3}{4} \\ e^{-\frac{1}{4}(t - \tau)}, & t - \tau \geq \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}(t - \tau)}, & \tau < t - \frac{3}{4} \\ 0, & \tau \geq t - \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Διερεύνηση:

- Για $t - \frac{3}{4} < -\frac{1}{4} \rightarrow t < \frac{1}{2}$. Τότε η x στο διάστημα $\Delta = [-10, t - \frac{3}{4}]$, είναι 0, καθώς $\tau < -\frac{1}{4}$ ενώ για $\Delta = [t - \frac{3}{4}, 10]$ η h είναι 0 καθώς $\tau > t - \frac{3}{4}$, άρα για $t < \frac{1}{2}$, η συνέλιξη $c(t) = 0$.

- Για $t - \frac{3}{4} \geq -\frac{1}{4} \rightarrow t \geq \frac{1}{2}$. Τότε έχουμε συνέλιξη στο διάστημα $-\frac{1}{4} < \tau < t - \frac{3}{4}$. Άρα:

$$c(t) = \int_{-\frac{1}{4}}^{t - \frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{4}}^{t - \frac{3}{4}} \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}(t - \tau)} d\tau = \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \int_{-\frac{1}{4}}^{t - \frac{3}{4}} e^{\frac{1}{4}\tau} d\tau =$$

$$\frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \left[4e^{\frac{1}{4}\tau} \right]_{-\frac{1}{4}}^{t - \frac{3}{4}} = 3 \left(e^{-\frac{3}{16}} - e^{-\frac{4t+1}{16}} \right).$$

$$\text{Οποτε η συνέλιξη στο } t \in [-10, 10] \text{ είναι: } c(t) = \begin{cases} 0, & -10 < t < \frac{1}{2} \\ 3 \left(e^{-\frac{3}{16}} - e^{-\frac{4t+1}{16}} \right), & \frac{1}{2} \leq t \leq 10 \end{cases}.$$

$$\text{B)} x(t) = u\left(t + \frac{1}{4}\right) - u(t-1), h(t) = e^{-\frac{t^2}{3}}$$

Αρχικά:

$$\text{Εύρεση } c(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

- Η h αποτελεί άλυτο ολοκλήρωμα, οπότε επιλέγουμε να λύσουμε την συνελιξη με

$$\text{μετασχηματισμό Fourier: } c(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{ΜΣ Fourier}} C(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega).$$

- Αφου βρούμε τους ΜΣ Fourier: $x(t) \rightarrow X(\omega)$ και $h(t) \rightarrow H(\omega)$, λύνουμε αλγεβρικά την εξίσωση ως προς $C(\omega)$, δηλαδή υπολογίζουμε το γινόμενο $C(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$.
- Οπότε $c(t)$ είναι ο αντίστροφος ΜΣ Fourier του $C(\omega) \rightarrow c(t) = F^{-1}\{C(\omega)\}$.

Επίλυση:

- Βρίσκουμε τον ΜΣ Fourier του $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{4}}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt + \int_1^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{4}}^{\infty} e^{-j\omega t} dt + \int_1^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{\frac{1}{4}j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega}.$$

- Βρίσκουμε τον ΜΣ Fourier της $h(t)$:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}t^2} e^{-j\omega t} dt = \dots = \sqrt{3\pi} e^{-\frac{3\omega^2}{4}}.$$

Οπότε η $C(\omega)$ είναι:

$$C(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{e^{\frac{1}{4}j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} \cdot \sqrt{3\pi} e^{-\frac{3\omega^2}{4}}.$$

$$\text{Άρα: } c(t) = F^{-1}\{C(\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{e^{\frac{1}{4}j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} \cdot \sqrt{3\pi} e^{-\frac{3\omega^2}{4}}\right\}.$$

$$\text{Γ)} x(t) = e^{-\frac{3}{4}t} \left[u(t+2) - u(t-\frac{3}{4}) \right], h(t) = \frac{3}{4}u(t) - \frac{1}{4}$$

Αρχικά:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , t < -2 \\ e^{-\frac{3}{4}t} & , -2 \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0 & , t > \frac{3}{4} \end{cases}, h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & , t < 0 \\ \frac{1}{2} & , t \geq 0 \end{cases}.$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Μετασχηματίζουμε τις $x(t)$ και $h(t)$ στην παρακάτω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ . Οπότε:

$$x(\tau) = \begin{cases} 0 & , \tau < -2 \\ e^{-\frac{3}{4}\tau}, & -2 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & , \tau > \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$h(t - \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & , t - \tau < 0 \\ \frac{1}{2} & , t - \tau \geq 0 \end{cases} \rightarrow h(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \tau < t \\ -\frac{1}{4} & , \tau \geq t \end{cases}.$$

Διερεύνηση:

- Για $t \leq -2$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = [-10, -2]$ και $\left[\frac{3}{4}, 10\right]$ η x είναι 0 οπότε η συνέλιξη

είναι $c(t)=0$. Στο διαστημα $\Delta(\tau) = \left[-2, \frac{3}{4}\right]$ η συνελιξη είναι μη μηδενική:

$$c(t) = \int_{-10}^{-2} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{\frac{3}{4}}^{10} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau =$$

$$\int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau} \left(-\frac{1}{4}\right) d\tau = -\frac{1}{4} \int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau = -\frac{1}{4} \left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{-2}^{\frac{3}{4}} =$$

$$\frac{1}{3} \left(e^{-\frac{9}{16}} - e^{\frac{3}{2}} \right), \text{ για } t \leq -2.$$

- Για $-2 \leq t \leq \frac{3}{4}$. Ομοίως εχουμε συνελιξη μονο στο διαστημα $\Delta(\tau) = \left[-2, \frac{3}{4}\right]$. Η h

αλλαζει τιμη στο $\tau = t$. Οπότε θα ολοκληρώσουμε στο $[-2, t]$ και $\left[t, \frac{3}{4}\right]$:

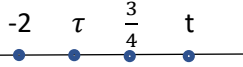
$$c(t) = \int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-2}^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_t^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^t e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau - \frac{1}{4} \int_t^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau = \frac{1}{2} \left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{-2}^t - \frac{1}{4} \left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_t^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \left(2e^{\frac{3}{2}} + e^{-\frac{9}{16}} \right) - e^{-\frac{3}{4}t}, \text{ για}$$

$$-2 \leq t \leq \frac{3}{4}.$$

- Για $t \geq \frac{3}{4}$, εχουμε πάλι συνελιξη μόνο στο διαστημα $\Delta(\tau) = \left[-2, \frac{3}{4}\right]$ οπου η $h(t - \tau) = \frac{1}{2}$

αφού $\tau \leq t$. Από συναλυθεση ισχυει:



$$c(t) = \int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau = \frac{1}{2} \left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{-2}^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{9}{16}} \right), \text{ για } t \geq \frac{3}{4}.$$

Οποτε η συνέλιξη στο $t \in [-10, 10]$ είναι: $c(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(e^{-\frac{9}{16}} - e^{\frac{3}{2}} \right), & -10 \leq t < -2 \\ \frac{1}{3} \left(2e^{\frac{3}{2}} + e^{-\frac{9}{16}} \right) - e^{-\frac{3}{4}t}, & -2 \leq t < \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{9}{16}} \right), & t \geq \frac{3}{4} \end{cases}$.

$\Delta) x(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, h(t) = \cos\left(\frac{1}{4}t\right)$

Συνέλιξη: $c(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$.

Μετασχηματίζουμε τις $x(t)$ και $h(t)$ όπως στην παραπάνω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ :

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & -\frac{\pi}{4} \leq \tau \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$h(t - \tau) = \cos\left(\frac{1}{4}(t - \tau)\right)$$

Διερεύνηση:

- Εφόσον η περιοδική το διάστημα εξαρτάται μόνο από το πεδίο ορισμού της x . Οπότε

έχουμε συνέλιξη στο $\Delta(\tau) = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ καθώς μόνο εκεί η x είναι μη μηδενική. Άρα:

$$c(t) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{4} \cos(t - \tau) d\tau = \frac{3}{4} \left[-4 \sin\left(\frac{1}{4}(t - \tau)\right) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$-3 \left[\sin\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{16}\right) - \sin\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{16}\right) \right], \text{ για } -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

Οπότε η συνέλιξη στο $t \in [-10, 10]$ είναι:

$$c(t) = \begin{cases} -3 \left[\sin\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{16}\right) - \sin\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{16}\right) \right], & -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\mathbf{E) } x(t) = u(t + 1) - u(t - 2), h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Αρχικά:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 \leq t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}, h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Μετασχηματίζουμε τις $x(t)$ και $h(t)$ όπως στην παραπάνω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ :

$$x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -1 \\ 1, & -1 \leq \tau \leq 2, \\ 0, & \tau > 2 \end{cases}$$

$$h(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -\frac{3}{4} \leq t - \tau \leq \frac{3}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \rightarrow h(t - \tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & t - \frac{3}{4} \leq \tau \leq t + \frac{3}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Διερεύνηση:

- Για $t + \frac{3}{4} < -1$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t - \frac{3}{4}, t + \frac{3}{4} \right]$ η x είναι 0, και οπουδήποτε αλλού η

h είναι 0 αρά και η συνέλιξη για $t < -\frac{7}{4}$, $c(t) = 0$.

- Για $t - \frac{3}{4} < -1 \cup -1 < t + \frac{3}{4} < 2 \rightarrow -\frac{7}{4} < t < -\frac{1}{4}$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t - \frac{3}{4}, -1 \right]$

η $x(\tau)$ είναι 0 ενώ στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t + \frac{3}{4}, 2 \right]$ η h είναι 0. Στο μόνο διάστημα που έχουμε

συνέλιξη είναι το $\Delta(\tau) = \left[-1, t + \frac{3}{4} \right]$. Οπότε:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{t - \frac{3}{4}}^{-1} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{-1}^{t + \frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau +$$

$$\int_{t + \frac{3}{4}}^2 x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-1}^{t + \frac{3}{4}} 1 \cdot \frac{1}{4} d\tau = \frac{1}{4} \left(t + \frac{7}{4} \right), \text{ για } -\frac{7}{4} < t < -\frac{1}{4}.$$

- Για $t - \frac{3}{4} > -1 \cup t + \frac{3}{4} < 2 \rightarrow -\frac{1}{4} < t < \frac{5}{4}$. Έχουμε συνέλιξη μόνο στο διάστημα

$\Delta(\tau) = \left[t - \frac{3}{4}, t + \frac{3}{4} \right] \subseteq [-1, 2]$ καθώς η h είναι 0 οπουδήποτε αλλού αρά και η c . Οπότε:

$$c(t) = \int_{t - \frac{3}{4}}^{t + \frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{t - \frac{3}{4}}^{t + \frac{3}{4}} 1 \cdot \frac{1}{4} d\tau = \frac{3}{8}, \text{ για } -\frac{1}{4} < t < \frac{5}{4}.$$

- Για $-1 < t - \frac{3}{4} < 2 \cup 2 < t + \frac{3}{4} < 10 \rightarrow -\frac{1}{4} < t < \frac{11}{4} \cup t > \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{Συναλήθρευση}} \frac{5}{4} < t < \frac{11}{4}$.

Άρα έχουμε συνέλιξη στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t - \frac{3}{4}, 2 \right]$, διότι: Η $x(\tau)$ είναι 0 για $\tau > 2$ οπότε η

συνέλιξη στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[2, t + \frac{3}{4} \right]$ είναι 0, ενώ η h είναι 0 οπουδήποτε εκτός του $\Delta(\tau) =$

$\left[t - \frac{3}{4}, t + \frac{3}{4} \right]$. Οπότε το μόνο διάστημα συνέλιξης είναι το $\Delta(\tau) = \left[t - \frac{3}{4}, 2 \right]$. Άρα:

$$c(t) = \int_{t - \frac{3}{4}}^2 x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{t - \frac{3}{4}}^2 1 \cdot \frac{1}{4} d\tau = -\frac{1}{4}t + \frac{11}{16}, \text{ για } \frac{5}{4} < t < \frac{11}{4}.$$

- Για $t - \frac{3}{4} > 2 \rightarrow t > \frac{11}{4}$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t - \frac{3}{4}, t + \frac{3}{4} \right]$ η x είναι 0, και οπουδήποτε

αλλού η h είναι 0. Αρά η συνέλιξη για $t < \frac{11}{4}$, είναι $c(t) = 0$.

Οπότε η συνέλιξη στο $t \in [-10, 10]$ είναι:

$$c(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{4}\left(t + \frac{7}{4}\right), & -\frac{7}{4} \leq t < -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8}, & -\frac{1}{4} \leq t < \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4}t + \frac{11}{16}, & \frac{5}{4} \leq t < \frac{11}{4} \\ 0, & t \geq \frac{11}{4} \end{cases}.$$

2. Σειρά Fourier

A) Εύρεση σειράς Fourier της παρακάτω συνάρτησης $x(t)$, για $n=1,2,3,5,10$.

$$x(t) = \pi^2 - t^2, t \in [-\pi, \pi]$$

Για την σειρά Fourier της $x(t)$ ισχύει: $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$

Γνωρίζουμε ότι:

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x(t) dt, A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt.$$

Επίλυση:

Ισχύει ότι $L = \pi$ σύμφωνα με το διάστημα ορισμού της $x(t)$. Βρίσκουμε λοιπόν τους συντελεστές

A_0, A_n, B_n .

- Εύρεση A_0 :

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\pi^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\pi^3 - \frac{1}{3} \pi^3 + \pi^3 - \frac{1}{3} \pi^3 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi^3 - \frac{2}{3} \pi^3 \right) = \frac{1}{2} \left(2\pi^2 - \frac{2}{3} \pi^2 \right) = \frac{2}{3} \pi^2.$$

- Εύρεση A_n :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \cos\left(\frac{n\pi}{\pi} t\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[(\pi^2 - t^2) \left(\frac{\sin(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 + \frac{2}{n} \left(\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \right) \right) = \frac{2}{\pi n} \left(\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \right) \dots$$

Διερεύνηση για το $\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi}$:

○ Για $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = -1$. Άρα:

$$\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) - (-\pi) \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) = \pi \left(-\frac{(-1)}{n} \right) - (-\pi) \left(-\frac{(-1)}{n} \right) = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} = 2 \frac{\pi}{n}.$$

○ Για $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = 1$. Άρα:

$$\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) - (-\pi) \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) = \pi \left(-\frac{1}{n} \right) - (-\pi) \left(-\frac{1}{n} \right) = -\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} = -2 \frac{\pi}{n}.$$

$$\text{Οπότε προκύπτει ότι: } \left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = -2 \frac{\pi}{n} (-1)^n.$$

...επομένως αντικαθιστούμε το $-2 \frac{\pi}{n} (-1)^n$ στο $\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi}$ και βρίσκουμε ότι:

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \left(-2 \frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt \right) = \frac{2}{\pi n} \left(-2 \frac{\pi}{n} (-1)^n + 0 \right) = -\frac{4}{n^2} (-1)^n.$$

• Εύρεση B_n :

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \sin\left(\frac{n\pi}{\pi} t\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left(\left[(\pi^2 - t^2) \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{2}{n} \left(\left[t \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt \right) \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{2}{n} \left(0 - \frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \right) = \frac{2}{\pi n^2} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \dots$$

Διερεύνηση για το $\left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}$:

○ Για $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = -1$. Άρα:

$$\left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) - \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) = \left(-\frac{(-1)}{n} \right) - \left(-\frac{(-1)}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 .$$

○ Για $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = 1$. Άρα:

$$\left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) - \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} \right) = \left(-\frac{1}{n} \right) - \left(-\frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 0 .$$

Οπότε προκύπτει ότι: $\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 .$

...επομένως αντικαθιστούμε $\left[t \left(-\frac{\cos(nt)}{n} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ και βρίσκουμε ότι:

$$B_n = \frac{2}{\pi n^2} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν στην αρχική σχέση για την σειρά Fourier τα A_0, A_n, B_n και βρίσκουμε την σειρά Fourier της $x(t)$:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nt) + 0 \cdot \right.$$

$$\left. \sin(nt) \right) \rightarrow \boxed{x(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nt)} .$$