Εργασία 1 - Συνέλιξη και Σειρές Fourier: Μαθηματικοί υπολογισμοί και απεικόνιση σε Matlab

Δημήτρης Χαριστές

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ICTE234: Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Δρ. Τσίπουρας, Μάρκος

21 Μαΐου, 2023

1. Συνέλιξη

$k = \frac{3}{4}\ , m = \frac{1}{4}\ .$

A) $x(t) = \frac{3}{4}u(t + \frac{1}{4})\ , h(t) = e^{-\frac{1}{4}t}u(t - \frac{3}{4})$

Εύρεση $c(t) = x(t) * h(t)$.

Αρχικά:

$$x(t) = \begin{cases} 0 \ \ , \ t < -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \ \ , \ t \geq -\frac{1}{4} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 \ \ , \ t < \frac{3}{4} \\ e^{-\frac{1}{4}t}, \ t \geq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau)\, d\tau$$

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) στην παρακάτω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ. Οπότε:

$$x(\tau) = \begin{cases} 0 \ \ , \tau < -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \ \ , \tau \geq -\frac{1}{4} \end{cases},$$

$$h(t - \tau) = \begin{cases} 0 \ \ , t - \tau < \frac{3}{4} \\ e^{-\frac{1}{4}(t-\tau)}, t - \tau \geq \frac{3}{4} \end{cases} \rightarrow h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}(t-\tau)}\ , \tau < t - \frac{3}{4} \\ 0 \quad , \tau \geq t - \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Διερεύνηση:

- Για $t - \frac{3}{4} < -\frac{1}{4} \rightarrow t < \frac{1}{2}$. Τότε η x στο διάστημα $\Delta = \left[-10, t - \frac{3}{4}\right]$, είναι 0, καθως $\tau < -\frac{1}{4}$ ενώ για $\Delta = \left[t - \frac{3}{4}, 10\right]$ η h είναι 0 καθώς $\tau > t - \frac{3}{4}$, άρα για $t < \frac{1}{2}$, η συνέλιξη $c(t) = 0$.

- Για $t - \frac{3}{4} \geq -\frac{1}{4} \rightarrow t \geq \frac{1}{2}$. Τότε έχουμε συνέλιξη στο διάστημα $-\frac{1}{4} < \tau < t - \frac{3}{4}$. Άρα:

$$c(t) = \int_{-\frac{1}{4}}^{t-\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{4}}^{t-\frac{3}{4}} \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}(t-\tau)}\, d\tau = \frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \int_{-\frac{1}{4}}^{t-\frac{3}{4}} e^{\frac{1}{4}\tau} d\tau =$$

$$\frac{3}{4} e^{-\frac{1}{4}t} \left[4e^{\frac{1}{4}\tau}\right]_{-\frac{1}{4}}^{t-\frac{3}{4}} = 3\left(e^{-\frac{3}{16}} - e^{-\frac{4t+1}{16}}\right).$$

Οποτε η συνέλιξη στο $t \in [-10\ , 10]$ είναι: $c(t) = \begin{cases} 0 \quad , -10 < \ t < \frac{1}{2} \\ 3\left(e^{-\frac{3}{16}} - e^{-\frac{4t+1}{16}}\right), \frac{1}{2} \leq \ t \leq 10 \end{cases}.$

B) $x(t) = \mathrm{u}\left(\mathrm{t}+\frac{1}{4}\right)$ - u(t-1), $h(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}^2}{3}}$

Αρχικά:

Εύρεση $c(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$.

- Η h αποτελεί άλυτο ολοκλήρωμα, οπότε επιλέγουμε να λυσουμε την συνελιξη με μετασχηματισμό Fourier: $c(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\text{ΜΣ Fourier}} \mathrm{C}(\omega) = \mathrm{X}(\omega) \cdot \mathrm{H}(\omega)$.
- Αφου βρούμε τους ΜΣ Fourier: $\mathrm{x(t)} \to \mathrm{X}(\omega)$ και $\mathrm{h(t)} \to \mathrm{H}(\omega)$, λύνουμε αλγεβρικά την εξίσωση ως προς C(ω), δηλαδή υπολογίζουμε το γινόμενο $\mathrm{C}(\omega) = \mathrm{X}(\omega) \cdot \mathrm{H}(\omega)$.
- Οπότε c(t) είναι ο αντίστροφος ΜΣ Fourier του $\mathrm{C}(\omega) \;\to \mathrm{c(t)} = \mathrm{F}^{-1}\{\mathrm{C}(\omega)\}$.

Επίλυση:

- Βρίσκουμε τον ΜΣ Fourier του x(t):

$$\mathrm{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)e^{-j\omega t}dt} = \int_{-\frac{1}{4}}^{\infty} \mathrm{x(t)e^{-j\omega t}dt} + \int_{1}^{\infty} \mathrm{x(t)e^{-j\omega t}dt} = \int_{-\frac{1}{4}}^{\infty} \mathrm{e^{-j\omega t}dt} + \int_{1}^{\infty} \mathrm{e^{-j\omega t}dt} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}.$$

- Βρίσκουμε τον ΜΣ Fourier της h(t):

$$\mathrm{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h(t)e^{-j\omega t}dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\mathrm{t}^2}\mathrm{e^{-j\omega t}dt} = \ldots = \sqrt{3\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{3\omega^2}{4}}.$$

Οπότε η C(ω) είναι:

$$\mathrm{C}(\omega) = \mathrm{X}(\omega) \cdot \mathrm{H}(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega} \cdot \sqrt{3\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{3\omega^2}{4}}.$$

Άρα: $\mathrm{c(t)} = \mathrm{F}^{-1}\{\mathrm{C}(\omega)\} = \mathrm{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega} \cdot \sqrt{3\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{3\omega^2}{4}}\right\}$.

Γ) $x(t) = e^{-\frac{3}{4}t}\left[u(t+2) \;-\; u(t-\frac{3}{4})\right]$, $h(t) = \frac{3}{4}u(t) - \frac{1}{4}$

Αρχικά:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ,t < -2 \\ e^{-\frac{3}{4}t}, & -2 \le t \le \frac{3}{4}, \\ 0 & ,t > \frac{3}{4} \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & ,\ t < 0 \\ \frac{1}{2} & ,\ t \ge 0 \end{cases}.$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) στην παρακάτω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ. Οπότε:

$$x(\tau) = \begin{cases} 0 & ,\tau < -2 \\ e^{-\frac{3}{4}\tau} & ,-2 \le \tau \le \frac{3}{4} \\ 0 & ,\tau > \frac{3}{4} \end{cases},$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & ,\ t-\tau < 0 \\ \frac{1}{2} & ,\ t-\tau \ge 0 \end{cases} \rightarrow\ h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,\ \tau < t \\ -\frac{1}{4} & ,\ \tau \ge t \end{cases}.$$

Διερεύνηση:

- Για $t \le -2$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = [-10,-2]$ και $\left[\frac{3}{4}, 10\right]$ η x είναι 0 οπότε η συνέλιξη είναι c(t)=0. Στο διαστημα $\Delta(\tau) = \left[-2,\ \frac{3}{4}\right]$ η συνελιξη είναι μη μηδενική:

$$c(t) = \int_{-10}^{-2} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau + \int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau + \int_{\frac{3}{4}}^{10} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau =$$

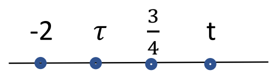
$$\int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau} (-\frac{1}{4})\, d\tau = -\frac{1}{4}\int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau}\, d\tau = -\frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{-2}^{\frac{3}{4}} =$$

$\frac{1}{3}\left(e^{-\frac{9}{16}} - e^{\frac{3}{2}}\right)$, για $t \le -2$.

- Για $-2 \le t \le \frac{3}{4}$. Ομοίως εχουμε συνελιξη μονο στο διαστημα $\Delta(\tau) = \left[-2, \frac{3}{4}\right]$. Η h αλλαζει τιμη στο $\tau = t$. Οπότε θα ολοκληρώσουμε στο $[-2, t]\ και\ \left[t, \frac{3}{4}\right]$:

$$c(t) = \int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-2}^{t} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau + \int_{t}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau =$$

$\frac{1}{2}\int_{-2}^{t} e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau - \frac{1}{4}\int_{t}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau} d\tau = \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{-2}^{t} - \frac{1}{4}\left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{t}^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\left(2e^{\frac{3}{2}} + e^{-\frac{9}{16}}\right) - e^{-\frac{3}{4}t}$, για $-2 \le t \le \frac{3}{4}$.

- Για $t \ge \frac{3}{4}$, εχουμε πάλι συνελιξη μόνο στο διαστημα $\Delta(\tau) = \left[-2, \frac{3}{4}\right]$ οπου η $h(t-\tau) = \frac{1}{2}$ αφού $\tau \le t$. Από συναλυθευση ισχυει: 

$c(t) = \int_{-2}^{\frac{3}{4}} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2}\int_{-2}^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{3}{4}\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{3} e^{-\frac{3}{4}\tau}\right]_{-2}^{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{9}{16}}\right)$, για $t \ge \frac{3}{4}$.

Οποτε η συνέλιξη στο $t \in [-10\,,10]$ είναι: $c(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(e^{-\frac{9}{16}} - e^{\frac{3}{2}}\right),-10 \le t < -2 \\ \frac{1}{3}\left(2e^{\frac{3}{2}} + e^{-\frac{9}{16}}\right) - e^{-\frac{3}{4}t},-2 \le t < \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{9}{16}}\right),t \ge \frac{3}{4} \end{cases}$.

Δ) $x(t) = \begin{cases} \frac{3}{4},-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4} \\ 0, \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$, $h(t) = \cos\left(\frac{1}{4}t\right)$

Συνέλιξη: $c(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$.

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) όπως στην παραπάνω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ :

$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{3}{4},-\frac{\pi}{4} \le \tau \le \frac{\pi}{4} \\ 0, \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$h(t-\tau) = \cos\left(\frac{1}{4}(t-\tau)\right)$$

Διερεύνηση:

- Εφόσον h περιοδική το διάστημα εξαρτάται μόνο από το πεδίο ορισμού της x. Οπότε έχουμε συνέλιξη στο $\Delta(\tau) = \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ καθώς μόνο εκεί η x είναι μη μηδενική. Άρα:

$$c(t) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{4}\cos(t-\tau)\, d\tau = \frac{3}{4}\left[-4\sin\left(\frac{1}{4}(t-\tau)\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$-3\left[\sin\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{16}\right) - \sin\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{16}\right)\right]$$, για $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$.

Οπότε η συνέλιξη στο $t \in [-10\,,10]$ είναι:

$$c(t) = \begin{cases} -3\left[\sin\left(\frac{1}{4}t - \frac{\pi}{16}\right) - \sin\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{16}\right)\right], \ -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4} \\ 0, \ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}.$$

Ε) $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$, $h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \ -\frac{3}{4} \le t \le \frac{3}{4} \\ 0, \ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Αρχικά:

$$x(t) = \begin{cases} 0, \ t < -1 \\ 1, \ -1 \le t \le 2 \\ 0, \ t > 2 \end{cases}, \ h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \ -\frac{3}{4} \le t \le \frac{3}{4} \\ 0, \ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}.$$

Μετασχηματίζουμε τις x(t) και h(t) όπως στην παραπάνω μορφή με άγνωστη μεταβλητή το τ :

$$x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -1 \\ 1, & -1 \le \tau \le 2 \\ 0, & \tau > 2 \end{cases},$$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -\frac{3}{4} \le t-\tau \le \frac{3}{4} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow \ h(t-\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & t-\frac{3}{4} \le \tau \le t+\frac{3}{4} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}.$$

Διερεύνηση:

- Για $t+\frac{3}{4} < -1$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t-\frac{3}{4}, t+\frac{3}{4}\right]$ η x είναι 0, και οπουδήποτε αλλού η h είναι 0 αρά και η συνέλιξη για $t < -\frac{7}{4}$, $c(t) = 0$.

- Για $t-\frac{3}{4} < -1 \ \cup\ -1 < t+\frac{3}{4} < 2 \ \rightarrow -\frac{7}{4} < t < -\frac{1}{4}$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t-\frac{3}{4}, -1\right]$ η x(τ) είναι 0 ενώ στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t+\frac{3}{4}, 2\right]$ η h είναι 0. Στο μόνο διάστημα που έχουμε συνέλιξη είναι το $\Delta(\tau) = \left[-1, t+\frac{3}{4}\right]$. Οπότε:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{t-\frac{3}{4}}^{-1} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau + \int_{-1}^{t+\frac{3}{4}} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau +$$

$$\int_{t+\frac{3}{4}}^{2} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{-1}^{t+\frac{3}{4}} 1\cdot\frac{1}{4}d\tau = \frac{1}{4}\left(t+\frac{7}{4}\right), \text{ για } -\frac{7}{4} < t < -\frac{1}{4}.$$

- Για $t-\frac{3}{4} > -1 \ \cup\ t+\frac{3}{4} < 2 \ \rightarrow -\frac{1}{4} < t < \frac{5}{4}$. Έχουμε συνέλιξη μόνο στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t-\frac{3}{4}, t+\frac{3}{4}\right] \subseteq [-1\,, 2]$ καθώς η h είναι 0 οπουδήποτε αλλού αρά και η c. Οπότε:

$$c(t) = \int_{t-\frac{3}{4}}^{t+\frac{3}{4}} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{t-\frac{3}{4}}^{t+\frac{3}{4}} 1\cdot\frac{1}{4}d\tau = \frac{3}{8}, \text{ για } -\frac{1}{4} < t < \frac{5}{4}.$$

- Για $-1 < t-\frac{3}{4} < 2 \ \cup\ 2 < t+\frac{3}{4} < 10 \rightarrow -\frac{1}{4} < t < \frac{11}{4} \cup t > \frac{5}{4} \xrightarrow{\Sigma\upsilon\nu\alpha\lambda\acute{\eta}\theta\varepsilon\upsilon\sigma\eta} \frac{5}{4} < t < \frac{11}{4}$.

Άρα έχουμε συνέλιξη στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t-\frac{3}{4}, 2\right]$, διότι: Η x(τ) είναι 0 για $\tau > 2$ οπότε η συνέλιξη στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[2, t+\frac{3}{4}\right]$ είναι 0, ενώ η h είναι 0 οπουδήποτε εκτός του $\Delta(\tau) = \left[t-\frac{3}{4}, t+\frac{3}{4}\right]$. Οπότε το μόνο διάστημα συνέλιξης είναι το $\Delta(\tau) = \left[t-\frac{3}{4}, 2\right]$. Άρα:

$$c(t) = \int_{t-\frac{3}{4}}^{2} x(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau = \int_{t-\frac{3}{4}}^{2} 1\cdot\frac{1}{4}d\tau = -\frac{1}{4}t + \frac{11}{16}, \text{ για } \frac{5}{4} < t < \frac{11}{4}.$$

- Για $t - \frac{3}{4} > 2 \to t > \frac{11}{4}$. Στο διάστημα $\Delta(\tau) = \left[t\ - \frac{3}{4}, t + \frac{3}{4}\right]$ η x είναι 0, και οπουδήποτε αλλού η h είναι 0. Αρά η συνέλιξη για $t < \frac{11}{4}$, είναι $c(t) = 0$.

Οπότε η συνέλιξη στο $t \in [-10\ , 10]$ είναι:

$$c(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{4}\left(t + \frac{7}{4}\right), & -\frac{7}{4} \leq t < -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{8}, & -\frac{1}{4} \leq t < \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4}t + \frac{11}{16}, & \frac{5}{4} \leq t < \frac{11}{4} \\ 0, & t \geq \frac{11}{4} \end{cases} .$$

2. Σειρά Fourier

A) Εύρεση σειράς Fourier της παρακάτω συνάρτησης x(t), για n=1,2,3,5,10.

$x(t) = \pi^2\ -\ t^2, t \in [-\pi, \pi]$

Για την σειρά Fourier της x(t) ισχύει: $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$

Γνωρίζουμε ότι:

$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} x(t)\, dt\ , A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt\ , B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt\ .$

Επίλυση:

Ισχύει ότι $L = \pi$ σύμφωνα με το διάστημα ορισμού της x(t). Βρίσκουμε λοιπόν τους συντελεστές A_0, A_n, B_n.

- Εύρεση A_0:

  $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2)\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3 + \pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3\right) = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi^3 - \frac{2}{3}\pi^3\right) = \frac{1}{2}\left(2\pi^2 - \frac{2}{3}\pi^2\right) = \frac{2}{3}\pi^2\ .$

- Εύρεση A_n:

$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2)\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[(\pi^2 -$

$t^2)\left(\frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt\Big) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{2}{n}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right)\right) =$

$\frac{2}{\pi n}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) \ldots$

Διερεύνηση για το $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$:

- Για $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \to \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = -1$. Άρα:

  $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) - (-\pi)\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) = \pi\left(-\frac{(-1)}{n}\right) -$

  $(-\pi)\left(-\frac{(-1)}{n}\right) = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} = 2\frac{\pi}{n}$.

- Για $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \to \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = 1$. Άρα:

  $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) - (-\pi)\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) = \pi\left(-\frac{1}{n}\right) - (-\pi)\left(-\frac{1}{n}\right) =$

  $-\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} = -2\frac{\pi}{n}$.

Οπότε προκύπτει ότι: $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = -2\frac{\pi}{n}(-1)^n$.

…επομένως αντικαθιστούμε το $-2\frac{\pi}{n}(-1)^n$ στο $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$ και βρίσκουμε ότι:

$A_n = \frac{2}{\pi n}\left(-2\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) = \frac{2}{\pi n}\left(-2\frac{\pi}{n}(-1)^n + 0\right) = -\frac{4}{n^2}(-1)^n$.

- Εύρεση B_n:

$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2)\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - t^2)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\Big(\Big[(\pi^2 -$

$t^2)\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt\Big) = \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{2}{n}\left(\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\,dt\right)\right) =$

$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{n}\left(0 - \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} \ldots$

Διερεύνηση για το $\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}$:

- Για $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \to \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = -1$. Άρα:

$$\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) - \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) = \left(-\frac{(-1)}{n}\right) - \left(-\frac{(-1)}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \ .$$

- Για $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \to \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = 1$. Άρα:

$$\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) - \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n}\right) = \left(-\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 0 \ .$$

Οπότε προκύπτει ότι: $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

…επομένως αντικαθιστούμε $\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ και βρίσκουμε ότι:

$$B_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν στην αρχική σχέση για την σειρά Fourier τα A_0, A_n, B_n και βρίσκουμε την σειρά Fourier της x(t):

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nt) + 0 \cdot \sin(nt)\right) \to \boxed{x(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nt)}$$