Εργασία 2 - Μετασχηματισμός Fourier: Μαθηματικοί υπολογισμοί και απεικόνιση σε Matlab

Δημήτρης Χαριστές

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

ICTE234: Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Δρ. Τσίπουρας, Μάρκος

4 Ιουνίου, 2023

k=3, m=1.

Άσκηση 1

$x(t) = (1 + cos(\pi t)) \cdot \Pi_3(t-1)$.

Για Π_3(t) ισχύει ότι:

$\Pi_3(t) = \begin{cases} 1 & , -3 \le t \le 3 \\ 0, t < -3 \text{ ή } t > 3 \end{cases}$. Οπότε για $\Pi_3(t-1)$ έχουμε:

$\Pi_3(t-1) = \begin{cases} 1 & , -2 \le t \le 4 \\ 0, t < -2 \text{ ή } t > 4 \end{cases}$.

Οπότε η x(t) είναι μηδενική οπουδήποτε εκτός του $-2 \le t \le 4$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τον ΜΣ Fourier σε αυτό το διάστημα καθώς θα είναι εξίσου μηδενικός οπουδήποτε αλλού.

Οπότε έχουμε:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-2}^{4} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-2}^{4}(1 + cos(\pi t)) \cdot e^{-j\omega t}dt =$$

$$\int_{-2}^{4}\left(1 + \frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{-2}^{4} e^{-j\omega t}dt + \int_{-2}^{4} \frac{e^{-jt(\pi+\omega)}+e^{jt(\pi-\omega)}}{2}dt = \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_{-2}^{4} +$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{4} e^{-jt(\pi+\omega)} + \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} e^{jt(\pi-\omega)}dt = \frac{e^{2j\omega}-e^{-4j\omega}}{j\omega} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jt(\pi+\omega)}}{-j(\pi+\omega)}\right]_{-2}^{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{jt(\pi-\omega)}}{j(\pi-\omega)}\right]_{-2}^{4} \rightarrow$$

$$X_c{}^{1}(\omega) = \frac{e^{2j\omega}-e^{-4j\omega}}{j\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{je^{-4j(\pi+\omega)}-je^{2j(\pi+\omega)}}{\pi+\omega}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{4j(\pi-\omega)}-e^{-2j(\pi-\omega)}}{j(\pi-\omega)}\right).$$

Με εφαρμογή του τύπου του Euler: $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ στην παραπάνω λύση μπορούμε να βρούμε την λύση σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X_t{}^{2}(\omega) = j\,\frac{1}{2}\left((\cos 4\omega - \cos 2\omega)\left(\frac{1}{\pi+\omega} - \frac{1}{\pi-\omega}\right)\right) + j\,\frac{\cos 4\omega - \cos 2\omega}{\omega} +$$

$$\frac{1}{2}\left((\sin 4\omega + \sin 2\omega) \cdot \left(\frac{1}{\pi+\omega} - \frac{1}{\pi-\omega}\right)\right) + \frac{\sin 4\omega + \sin 2\omega}{\omega}.$$

---

[1] X_c : Μιγαδική μορφή της λύσης.
[2] X_t : Τριγωνομετρική μορφή της λύσης.

Άσκηση 2

Αν $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$ και $x_m(t) = x(t)\cos 3\pi t \sin \pi t + \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί $\mathcal{F}\{x_m(t)\}$.

Επίλυση:

$$x_m(t) = x(t)\cos 3\pi t \sin \pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{e^{3j\pi t}+e^{-3j\pi t}}{2}\frac{e^{j\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{-j\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)}}{2j}x(t) = \frac{1}{4j}\left(e^{4j\pi t+\frac{\pi}{3}} - e^{2j\pi t-j\frac{\pi}{3}} + e^{-2j\pi t+j\frac{\pi}{3}} - e^{-4j\pi t-j\frac{\pi}{3}}\right)x(t) = \frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}e^{4j\pi t}x(t) - e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{2j\pi t}x(t) + e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-2j\pi t}x(t) - e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-4j\pi t}x(t)\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}ourier\ Transform} \mathcal{F}\{x_m(t)\} =$$

$$\frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\mathcal{F}\left\{e^{4j\pi t}x(t)\right\} - e^{-j\frac{\pi}{3}}\mathcal{F}\left\{e^{2j\pi t}x(t)\right\} + e^{j\frac{\pi}{3}}\mathcal{F}\left\{e^{-2j\pi t}x(t)\right\} - e^{-j\frac{\pi}{3}}\mathcal{F}\left\{e^{-4j\pi t}x(t)\right\}\right) \xrightarrow{e^{j\omega_0 t}x(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}\mathrm{X}(\omega-\omega_0)}$$

Άρα: $\boxed{\mathcal{F}\{x_m(t)\} = \frac{1}{4j}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\big(X(\omega-4\pi)+X(\omega+2\pi)\big) - e^{-j\frac{\pi}{3}}\big(X(\omega+4\pi)+X(\omega-2\pi)\big)\right).}$

Άσκηση 3

$g(t) = te^{-t}\cos 3t\, u(t)$, να βρεθεί ο ΜΣ Fourier $\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{G}(\omega)$.

Είναι γνωστό ότι:

$u(t) = \begin{cases} 0 & ,t<0 \\ 1 & ,\ t>0 \end{cases}$. Οπότε εφόσον για $t<0$ η συνάρτηση g θα είναι μηδενική θα βρούμε τον ΜΣ Fourier μόνο για $t>0$.

Επίλυση:

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t}\cos 3t\, u(t)e^{-j\omega t}dt =$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\cos 3t\, e^{-j\omega t}dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}\frac{e^{3jt}+e^{-3jt}}{2}e^{-j\omega t}dt =$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-t}\frac{e^{-j(\omega-3)t}+e^{-j(\omega+3)t}}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-(j(\omega-3)+1)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} te^{-(j(\omega+3)+1)t}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t\left(\frac{e^{-(j(\omega-3)+1)t}}{-j(\omega-3)-1}\right)'dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t\left(\frac{e^{-(j(\omega+3)+1)t}}{-j(\omega+3)-1}\right)'dt = \frac{1}{2}\left(\left[t\frac{e^{-(j(\omega-3)+1)t}}{-j(\omega-3)-1}\right]_0^{\infty} -\right.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(j(\omega-3)+1)t}}{-j(\omega-3)-1} dt\Big) + \frac{1}{2}\Big(\Big[t\frac{e^{-(j(\omega+3)+1)t}}{-j(\omega+3)-1}\Big]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(j(\omega+3)+1)t}}{-j(\omega+3)-1}dt\Big) = \frac{1}{2}\Big(0 -$$

$$\frac{1}{(j(\omega-3)+1)^2}\left[e^{-(j(\omega-3)+1)t}\right]_0^{+\infty}\Big) + \frac{1}{2}\Big(0 - \frac{1}{(j(\omega+3)+1)^2}\left[e^{-(j(\omega+3)+1)t}\right]_0^{+\infty}\Big) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(j(\omega-3)+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(j(\omega+3)+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(j(\omega-3)+1)^2} + \frac{1}{(j(\omega+3)+1)^2}\right).$$

Άρα: $\boxed{\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{G}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(j(\omega-3)+1)^2} + \frac{1}{(j(\omega+3)+1)^2}\right)}$.

Άσκηση 4

Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω_0 ισχύει: $e^{-j\omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega-\omega_0)$ (ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα). Με βάση αυτή την ιδιότητα αποδείξτε ότι: $\cos\omega_0 t\, x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\big(X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\big)$.

Απόδειξη:

$$\cos\omega_0 t\, x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}x(t) = \frac{e^{j\omega_0 t}x(t) + e^{-j\omega_0 t}x(t)}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}x(t) + e^{-j\omega_0 t}x(t)\right)$$

$$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}x(t)\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}x(t)\}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\big(X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\big)}.$$

Figure 1

Σήματα x(t), g(t) και τα φάσματα πλάτους τους $X_t(\omega)$, G(ω).

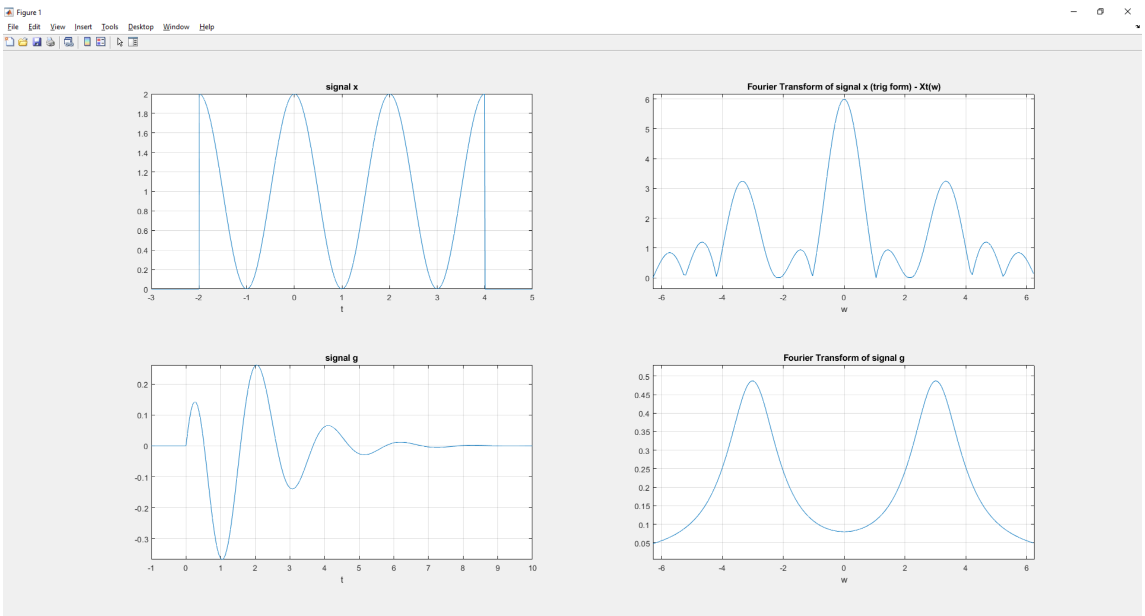

Figure 2

Σήμα x(t) και φάσμα πλάτους τους X_c (ω), G(ω).