Odwracanie macierzy

Zad 1.

Znajdź macierz odwrotną używając wzoru dla macierzy 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Zad 2.

Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

oblicz macierze odwrotne za pomocą metod:

- dołączania macierzy jednostkowej i wykonywania eliminacji Gaussa-Jordana,
- użycia wzoru z macierzami dopełnień algebraicznych

Czyli dla każdej macierzy podaj dwie metody obliczenia macierzy odwrotnej (jeśli istnieje).

Zad 3.

Sprawdź, czy macierz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest odwracalna. Uzasadnij odpowiedź (użyj wyznacznika). Czy można było zauważyć to bez obliczania wyznacznika? Co musiałoby się stać, aby macierz była odwracalna?

Zad 4.

Dla macierzy A spełniającej $A^2 = I$ (tzw. involucja) pokaż, że $A^{-1} = A$. Podaj przykład niebanalnej macierzy 2×2 spełniającej ten warunek (innej niż I i $-I$). Ile jest takich macierzy?

Zad 5.

Oblicz macierz odwrotną macierzy diagonalnej $D = \text{diag}(2{,}5, -3{,}1)$, jeżeli istnieje. Omów warunek istnienia odwrotności dla macierzy diagonalnej.

Zad 6.

Rozwiąż równania macierzowe:

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c)

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$