LISTA ZADAŃ NR 11: Wstęp do teorii decyzji statystycznych

Zadanie 1

Rozważamy partię towaru (np. procesorów), w której badamy wadliwość. Testujemy hipotezę $H_0 : p = p_0$ (partia dobra) przeciwko $H_1 : p = p_1$ (partia wadliwa). Zbudowano test, który odrzuca partię, jeśli w wylosowanej próbce liczba wadliwych sztuk przekroczy pewne k.

Obliczyć:

a) Prawdopodobieństwo błędu I rodzaju α (odrzucenie dobrej partii – ryzyko producenta).
b) Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju β (przyjęcie złej partii – ryzyko konsumenta).

Zadanie 2

Dla testu z Zadania 1 wyznaczyć moc testu $(1-\beta)$ dla kilku alternatywnych wartości parametru p. Sporządzić wykres krzywej mocy testu (funkcji mocy). Co ten wykres mówi nam o „czułości" algorytmu decyzyjnego na odchylenia od normy?

Zadanie 3

Dla testu średniej $H_0 : \mu = 100$ przy znanym $\sigma = 5$ i $n = 25$:

a) Wyznaczyć wzór na funkcję operacyjno-charakterystyczną (OC): $L(\mu) = P(\text{akceptacja } H_0|\mu)$.
b) Jak zmiana liczebności próby na $n = 100$ wpłynie na stromość tej krzywej (zdolność rozróżniania)?

Zadanie 4

Chcemy skonstruować test dla średniej, który spełnia surowe wymogi bezpieczeństwa:

- Ryzyko odrzucenia normy, gdy jest ona spełniona (α), ma wynosić 0,01.
- Ryzyko przyjęcia normy, gdy przesunięcie średniej wynosi 2 jednostki (β), ma nie przekraczać 0,05.

Ile minimalnie pomiarów należy wykonać?

Zadanie 5

Wadliwość produkcji pewnych wyrobów wynosiła do tej pory 10% ($p_0 = 0{,}1$). Nowa technologia ma obniżyć wadliwość do 5% ($p_1 = 0{,}05$). Zamiast pobierać stałą próbkę, pobieramy elementy po jednym.

Skonstruować test sekwencyjny ilorazu wiarogodności (test Walda), ustalając ryzyka $\alpha = 0{,}05$ i $\beta = 0{,}10$.

a) Wyznaczyć proste decyzyjne (obszar akceptacji, odrzucenia i obszar kontynuacji badania).
b) Przedstawić procedurę w formie algorytmu (pseudokodu).

Zadanie 6

Dla testu z Zadania 5, przypuśćmy, że wylosowano kolejno: Dobry, Dobry, Zły, Dobry, Dobry, Dobry, Dobry...

Zaznaczyć te punkty na wykresie testu sekwencyjnego. W którym kroku (jeśli w ogóle) algorytm podejmie decyzję „Nowa technologia jest lepsza"?

Zadanie 7

Jedną z zalet metod sekwencyjnych jest to, że średnio wymagają mniej danych niż testy klasyczne. Dla testu z Zadania 5 obliczyć oczekiwaną liczbę kroków (próbek) potrzebną do podjęcia decyzji (ASN), zakładając, że prawdziwa jest hipoteza H_0.

$$E(n) \approx \frac{(1-\alpha)\ln A + \alpha \ln B}{E(z)}$$

gdzie A, B to progi decyzyjne.

Zadanie 8

Automat produkuje detale o średnicy nominalnej μ_0. Podejrzewamy, że maszyna się rozkalibrowała i średnia wzrosła do μ_1. Odchylenie σ jest znane.

Skonstruować test sekwencyjny weryfikujący $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciwko $H_1 : \mu = \mu_1$. Napisać warunek „stop" dla tego algorytmu.

Zadanie 9

Mamy dwie możliwe decyzje d_1 (wdrożenie systemu) i d_2 (brak wdrożenia) oraz dwa stany natury θ_1 (system działa poprawnie) i θ_2 (system ma błędy). Macierz strat (kosztów) wygląda następująco:

- Jeśli d_1 i θ_1: Koszt = 0
- Jeśli d_1 i θ_2: Koszt = 1000 (awaria u klienta)
- Jeśli d_2 i θ_1: Koszt = 100 (utracony zysk)
- Jeśli d_2 i θ_2: Koszt = 0

Jaką decyzję należy podjąć, stosując kryterium **Minimax** (minimalizacja maksymalnej straty)?

Zadanie 10

Dla sytuacji z Zadania 9, załóżmy, że z wcześniejszych testów wiemy, iż prawdopodobieństwo wystąpienia błędów wynosi $P(\theta_2) = 0{,}05$. Obliczyć oczekiwaną stratę (ryzyko Bayesa) dla obu decyzji. Która decyzja jest optymalna w sensie bayesowskim?