Zastosowania rachunku różniczkowego i całkowego

Zad 1.

Pole koła. Korzystając z całki oznaczonej, wyprowadź wzór na pole koła o promieniu R. Wskazówka: Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

oraz osią Ox w przedziale $[-R, R]$, a wynik pomnóż przez 2.

Zad 2.

Optymalizacja ogrodzenia. Rolnik chce ogrodzić prostokątne pastwisko przylegające jednym bokiem do rzeki (nie trzeba grodzić brzegu). Dysponuje siatką o długości L metrów. Jakie wymiary powinno mieć pastwisko, aby jego powierzchnia była największa?

Zad 3.

Kinematyka punktu. Położenie punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi Ox opisane jest równaniem:

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$$

gdzie $t \geq 0$. Wyznacz prędkość $v(t)$ oraz przyspieszenie $a(t)$ tego punktu. W jakich chwilach czasu punkt się zatrzymuje? Kiedy przyspiesza, a kiedy zwalnia?

Zad 4.

Pudełko z kartonu. Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 30 cm $\times$ 48 cm należy wyciąć w narożnikach jednakowe kwadraty, a następnie zagiąć brzegi, aby otrzymać otwarte pudełko. Jaki bok powinien mieć wycinany kwadrat, aby objętość pudełka była maksymalna?

Zad 5.

Ruch harmoniczny. Ciało o masie m zawieszone na sprężynie wykonuje drgania opisane równaniem wychylenia:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Oblicz prędkość i przyspieszenie tego ciała. Wykaż, że siła działająca na ciało ($F = ma$) jest proporcjonalna do wychylenia i skierowana przeciwnie do niego.

Zad 6.

Wytrzymałość belki. Wytrzymałość prostopadłościennej belki drewnianej jest wprost proporcjonalna do szerokości jej przekroju i kwadratu jego wysokości:

$$S = k \cdot w \cdot h^2$$

Jakie wymiary należy nadać belce wyciętej z cylindrycznego pnia o średnicy d, aby jej wytrzymałość była największa?

Zad 7.

Stężenie leku. Stężenie leku we krwi pacjenta po czasie t (w godzinach) od podania opisuje funkcja:

$$C(t) = \frac{4t}{t^2 + 4}$$

Po jakim czasie stężenie leku jest maksymalne i ile wynosi? Kiedy stężenie zaczyna spadać najszybciej (punkt przegięcia)?

Zad 8.

Koszt instalacji kabla. Należy połączyć kablem stację energetyczną A znajdującą się na brzegu prostoliniowej rzeki o szerokości 100 m z fabryką B położoną po drugiej stronie rzeki, 500 m w dół nurtu od punktu naprzeciwko stacji. Koszt ułożenia kabla pod wodą jest dwukrotnie wyższy niż na lądzie. W którym punkcie na przeciwległym brzegu kabel powinien wyjść z wody, aby zminimalizować koszt inwestycji?

Zad 9.

Rzut pionowy. Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością początkową v_0 z wysokości h_0. Wiedząc, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi g (czyli $a(t) = -g$), wyznacz wzory na prędkość $v(t)$ i położenie $h(t)$ poprzez całkowanie. Oblicz maksymalną wysokość, jaką osiągnie ciało.

Zad 10.

Pole pod parabolą (Architektura). Zaprojektowano wejście do tunelu w kształcie paraboli o równaniu:

$$y = 4 - x^2$$

Oblicz pole powierzchni przekroju tego wejścia (obszar nad osią Ox).

Zad 11.

Praca siły zmiennej. Siła potrzebna do rozciągnięcia sprężyny jest proporcjonalna do jej wydłużenia ($F(x) = kx$, prawo Hooke'a). Oblicz pracę, jaką trzeba wykonać, aby rozciągnąć sprężynę od stanu swobodnego ($x = 0$) do wydłużenia $x = L$, całkując siłę po przesunięciu.

Zad 12.

Wartość średnia napięcia. Napięcie prądu zmiennego w gniazdku opisuje funkcja $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$. Oblicz wartość średnią kwadratową napięcia (tzw. napięcie skuteczne U_{RMS}) w jednym okresie $T = \frac{2\pi}{\omega}$, korzystając ze wzoru:

$$U_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U(t)]^2 dt}$$

Zad 13.

Okno normandzkie. Okno ma kształt prostokąta zwieńczonego półkolem. Obwód całego okna jest ustalony i wynosi P. Jakie powinny być wymiary części prostokątnej, aby przez okno wpadało jak najwięcej światła (maksymalizacja pola powierzchni)?

Zad 14.

Droga hamowania. Samochód jadący z prędkością $v_0 = 30$ m/s zaczyna hamować. Opóźnienie jest stałe i wynosi $a = -5$ m/s^2. Oblicz, jaką drogę przebędzie samochód do momentu całkowitego zatrzymania. Użyj całek, wychodząc od $a(t)$.

Zad 15.

Wzrost kolonii bakterii. Liczebność kolonii bakterii $N(t)$ rośnie w tempie proporcjonalnym do aktualnej liczebności (prawo Malthusa), czyli:

$$N'(t) = k \cdot N(t)$$

Rozwiąż to równanie różniczkowe, wiedząc, że na początku było N_0 bakterii. Po jakim czasie populacja się podwoi?

Zad 16.

Puszka napoju. Producent napojów chce zaprojektować puszkę w kształcie walca o ustalonej objętości $V = 330$ ml. Jakie powinny być promień podstawy i wysokość puszki, aby zużyć jak najmniej materiału (zminimalizować pole powierzchni całkowitej)?

Zad 17.

Opróżnianie zbiornika. Woda wypływa ze zbiornika z prędkością chwilową $v(t) = 2t - 10$ litrów na minutę (dla $t \in [0, 5]$). Ile wody wypłynęło ze zbiornika w ciągu pierwszych 3 minut? Zinterpretuj to jako pole pod wykresem funkcji prędkości wypływu.

Zad 18.

Długość liny. Lina wisząca swobodnie między dwoma słupami przyjmuje kształt krzywej zwanej łańcuchową, którą w przybliżeniu można opisać parabolą $y = \frac{1}{10}x^2$ dla $x \in [-10, 10]$. Oblicz długość tej liny, korzystając ze wzoru na długość łuku krzywej:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Zad 19.

Optymalny kąt widzenia. Obraz o wysokości h wisi na ścianie tak, że jego dolna krawędź znajduje się na wysokości d powyżej poziomu oczu obserwatora. W jakiej odległości od ściany powinien stanąć obserwator, aby kąt widzenia obrazu (kąt pionowy) był największy?

Zad 20.

Objętość bryły obrotowej. Naczynie ma kształt powstały przez obrót krzywej $y = \sqrt{x}$ wokół osi Ox dla $x \in [0, 4]$. Oblicz objętość tego naczynia, korzystając z całki:

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$