

LISTA ZADAŃ NR 7: Estymacja punktowa i przedziałowa

Zadanie 1

Znaleźć przedział ufności dla nieznanej wartości przeciętnej μ populacji, w przypadku gdy σ jest znane, na podstawie n -elementowej próby prostej X_1, \dots, X_n .

Dane: Z populacji o odchyleniu standardowym $\sigma = 0,14$ pobrano próbkę $n = 100$ elementową (np. pomiarów napięcia na procesorze). Średnia z próby wyniosła $\bar{x} = 2,5$. Wyznaczyć 95%-owy przedział ufności dla średniej (przyjąć $1 - \alpha = 0,95$, co daje $u_\alpha = 1,96$).

Zadanie 2

Zmierzono wytrzymałość 10 losowo wybranych elementów konstrukcji (lub np. czas pracy na baterii 10 laptopów). Otrzymano wyniki: 383, 284, 339, 340, 305, 386, 378, 335, 344, 346.

Zakładając, że rozkład cechy jest normalny, wyznaczyć 95%-owy przedział ufności dla średniej wytrzymałości.

Wskazówka: Ponieważ $n = 10$ jest małe ($n < 30$) i nie znamy σ , należy obliczyć s z próby i skorzystać z rozkładu t -Studenta.

Zadanie 3

W celu wyznaczenia ładunku elektronu wykonano 26 pomiarów metodą Millikana. Otrzymano średnią $\bar{x} = 1,574 \cdot 10^{-19}$ oraz odchylenie standardowe $s = 0,043 \cdot 10^{-19}$.

Wyznaczyć przedział ufności dla średniego ładunku na poziomie ufności 0,99.

Zadanie 4

Z populacji włókien bawełny pobrano 300-elementową próbkę i zmierzono ich długości. Obliczono średnią $\bar{x} = 27,43$ mm oraz wariancję $s^2 = 51,598$.

Znaleźć 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej wartości przeciętnej długości włókna.

Wskazówka: Przy tak dużym n ($n = 300$), rozkład t -Studenta jest praktycznie tożsamy z rozkładem normalnym, więc można użyć statystyki u_α .

Zadanie 5

Wykonuje się pomiary głębokości morza (lub np. opóźnienia w sieci) w pewnym określonym miejscu.

Ilu niezależnych pomiarów należy dokonać, aby przyjąć z poziomem ufności 0,95, że błąd bezwzględny szacowania średniej nie przekroczy 10 m, jeśli rozkład błędów jest normalny o wariancji $\sigma^2 = 180 \text{ m}^2$?

Zadanie 6

Spośród 120 wylosowanych pracowników pewnego zakładu, 17 nie wykonywało normy wydajności pracy (w IT: 17 na 120 serwerów nie spełniło wymogów SLA).

Wyznaczyć 95%-ową realizację przedziału ufności dla frakcji p pracowników niewykonywujących normy w całym zakładzie.

Zadanie 7

Wykonano 15 pomiarów czasu likwidowania zrywów przędzy na krosnach. Obliczono wariancję z próby $s^2 = 134,2$. Zakładając, że czas ten ma rozkład normalny, wyznaczyć 90%-owy przedział ufności dla wariancji σ^2 oraz odchylenia standardowego σ .

Wskazówka: Należy skorzystać z tablic rozkładu chi-kwadrat (χ^2).

Zadanie 8

Dla pewnej cechy o rozkładzie normalnym wylosowano dwie próbki:

- Próbka 1: $n = 25$, średnia $\bar{x} = 15$, odchylenie $s = 5$.
- Próbka 2: $n = 100$, średnia $\bar{x} = 15$, odchylenie $s = 5$.

Obliczyć długości 95%-owych przedziałów ufności dla obu prób. Jak czterokrotne zwiększenie liczebności próby wpływa na precyzję (szerokość przedziału)?

Zadanie 9

Dana jest próbka prosta o liczebności $n = 5$: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Obliczyć wartość estymatora nieobciążonego wartości oczekiwanej (\bar{x}) oraz estymatora nieobciążonego wariancji (s^2).

Wyjaśnić, dlaczego przy wariancji dzielimy przez $n - 1$, a nie przez n .

Zadanie 10

Tabela przedstawia wyniki procentowej zawartości skrobi w 80 ziemniakach (dane pogrupowane w szereg rozdzielczy). Średnia z próby $\bar{x} = 17,525\%$, odchylenie standardowe $s = 1,84\%$.

Przyjmując poziom ufności 0,95, oszacować średnią zawartość skrobi w całej partii.