

LISTA ZADAŃ NR 1: Zdarzenia losowe i prawdopodobieństwo

Zadanie 1

Niech przestrzeń Ω zdarzeń elementarnych doświadczenia składa się z pięciu zdarzeń elementarnych ω_i : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$. Określamy zdarzenia: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Znaleźć zdarzenia:

- a) $A \cup B$ (suma zdarzeń)
- b) $A \cap B$ (iloczyn zdarzeń)
- c) $B \setminus A$ (różnica zdarzeń)
- d) $A \setminus B$

Zadanie 2

Rozważamy układ elektryczny, w którym element a_1 połączony jest szeregowo z blokiem składającym się z dwóch elementów a_2 i a_3 połączonych równolegle. Niech $A_i, i = 1, 2, 3$, oznacza zdarzenie „element a_i będzie sprawny w czasie t ”.

Za pomocą działań na zdarzeniach A_i oraz symboli sumy (\cup) i iloczynu (\cap) opisać zdarzenie A : „w odcinku czasu t przepływ prądu przez układ nie ulegnie przerwaniu”.

Zadanie 3

Osoba X wykonuje pewną pracę w ciągu 4, 5 albo 6 godzin i może popełnić przy tym 0, 1 albo 2 błędy. Zakładając jednakowe prawdopodobieństwo dla każdego z 9 możliwych zdarzeń elementarnych (par: czas, liczba błędów), znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

- a) Praca zostanie wykonana w ciągu 4 godzin.
- b) Praca zostanie wykonana bezbłędnie w czasie 6 godzin.
- c) Praca zostanie wykonana w czasie co najwyżej 5 godzin.
- d) Praca zostanie wykonana w czasie co najwyżej 5 godzin i najwyżej z jednym błędem.

Zadanie 4

Rysunek (schemat blokowy) przedstawia fragment sieci elektrycznej składający się z dwóch elementów połączonych równolegle: a_1 i a_2 . Niech $A_i, i = 1, 2$, oznacza zdarzenie, że element a_i będzie sprawny co najmniej przez czas t .

Obliczyć prawdopodobieństwo ciągłego przepływu prądu przez ten układ co najmniej przez czas t , jeżeli wiadomo, że $P(A_1) = P(A_2) = p$ oraz prawdopodobieństwo jednoczesnej sprawności obu elementów wynosi $P(A_1 \cap A_2) = p^2$.

Zadanie 5

Rozpatrujemy ilość (w dm^3) wody, jaką może mieć do przeprowadzenia w ciągu sekundy betonowy przepust. Dotychczasowe obserwacje pozwalają przyjąć, że:

- Prawdopodobieństwo, że ilość wody przyjmie wartość z przedziału $\langle 125, 250 \rangle$ wynosi $P(A) = 0,6$.
- Prawdopodobieństwo, że ilość wody przyjmie wartość z przedziału $\langle 200, 300 \rangle$ wynosi $P(B) = 0,7$.
- Prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń wynosi $P(A \cup B) = 0,8$.

Obliczyć prawdopodobieństwo:

- a) $P(A')$ (zdarzenie przeciwne do A)
- b) $P(A \cap B)$ (wspólna część przedziałów)
- c) $P(A' \cap B')$ (ilość wody nie mieści się w żadnym z tych przedziałów)

Zadanie 6

Na przenośnik taśmowy trafiają jednakowe produkty wytwarzane przez 2 automaty. Stosunek ilościowy produkcji pierwszego automatu do produkcji drugiego wynosi 3 : 2. Pierwszy automat wytwarza średnio 65% produktów w pierwszym gatunku, drugi zaś – 85%.

- a) Spośród produktów na przenośniku pobieramy losowo jeden produkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie to produkt pierwszego gatunku (zastosować wzór na prawdopodobieństwo całkowite).
- b) Losowo pobrany produkt okazał się pierwszej jakości. Obliczyć prawdopodobieństwo, że został wyprodukowany przez pierwszy automat (zastosować wzór Bayesa).

Zadanie 7

Na linii łączności nadaje się dwa rodzaje sygnałów w postaci kodowych kombinacji 111 albo 000 z prawdopodobieństwami a priori odpowiednio 0,65 i 0,35. Sygnały podlegają losowym zakłóceniom, w rezultacie czego symbol 1 może być odebrany jako 0 z prawdopodobieństwem 0,2 i z takim samym prawdopodobieństwem symbol 0 może być odebrany jako 1. Zakładamy, że symbole 1 i 0 ulegają zakłóceniom niezależnie jeden od drugiego.

Obliczyć prawdopodobieństwo odebrania sygnału:

- a) 111
- b) 000
- c) 010

Zadanie 8

Kodowa informacja składa się z siedmiu impulsów postaci A, B, C w ilościach: cztery impulsy A , dwa impulsy B i jeden impuls C . Zakładając losowy układ impulsów, znaleźć prawdopodobieństwo tego, że:

- a) pierwszym odebrany impuls będzie A ,
- b) pierwszym odebrany impuls będzie A albo C ,
- c) dwoma pierwszymi impulsami będą kolejno A i C .

Zadanie 9

Pewien towar produkują 3 zakłady. Prawdopodobieństwo wyprodukowania przez te zakłady towaru pierwszej jakości wynosi odpowiednio 0,97; 0,90; 0,86.

Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że losowo wzięta sztuka towaru — spośród trzech sztuk pochodzących (po jednej) z różnych zakładów — jest pierwszej jakości.

Zadanie 10

Kanałem łączności nadaje się tylko 3 rodzaje ciągów liter: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$ odpowiednio z prawdopodobieństwami 0,4; 0,3; 0,3. Litery te (sygnały) podlegają niezależnie losowym zakłóceniom (przekłamaniom), w rezultacie czego np. litera A może być odebrana jako B albo C . Prawdopodobieństwa poprawnego przesłania albo przekłamania pojedynczej litery podaje tablica:

Nadany \ Odebrany	A	B	C
A	0,8	0,1	0,1
B	0,1	0,8	0,1
C	0,1	0,1	0,8

Znaleźć prawdopodobieństwo odebrania na wyjściu sygnału:

- a) $AAAA$
- b) $ACAA$