LISTA ZADAŃ NR 5: Twierdzenia graniczne i aproksymacje

Zadanie 1

Twierdzenie Poissona – rzadkie błędy

Prawdopodobieństwo, że produkt poddawany próbie nie wytrzyma tej próby wynosi $p = 0{,}01$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 200 takich produktów (niezależnie poddanych próbie) co najwyżej 2 nie wytrzymają próby

Cel zadania: Pokazanie, jak rozkład dwumianowy (dla dużego n i małego p) zbiega do rozkładu Poissona. Jest to klasyczne zastosowanie twierdzenia granicznego dla rzadkich zdarzeń (np. błędy w kodzie, awarie serwerów).

Zadanie 2

Aproksymacja Poissona – kontrola jakości

Prawdopodobieństwo wyprodukowania sztuki wadliwej wynosi $p = 0{,}02$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w partii towaru liczącej 300 sztuk znajdzie się:

a) zero sztuk wadliwych,
b) jedna sztuka wadliwa,
c) dwie sztuki wadliwe,
d) co najmniej trzy sztuki wadliwe.

Wskazówka: Zastosować przybliżenie rozkładem Poissona z parametrem $\lambda = np$.

Zadanie 3

Aproksymacja Poissona – niezawodność systemów

Urządzenie składa się między innymi z 750 lamp. Prawdopodobieństwo awarii każdej lampy w ciągu jednej doby pracy urządzenia jest jednakowe i wynosi $p = 0{,}004$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu jednej doby pracy urządzenia ulegnie awarii:

a) 0 lamp,
b) 1 lampa,
c) 2 lampy,
d) co najmniej 3 lampy.

Komentarz: Zadanie to obrazuje stabilność dużych systemów składających się z wielu zawodnych elementów.

Zadanie 4

Centralne Twierdzenie Graniczne – sumowanie błędów

Pewien przyrząd pomiarowy robi błąd systematyczny 1 m w stronę zawyżenia pomiaru i błąd losowy o rozkładzie $N(0; 0{,}5)$.

a) Obliczyć wartość przeciętną błędu pomiaru.
b) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że błąd, z jakim mierzone są badane przedmioty, nie przekracza 2 m.

Cel zadania: Ilustracja, jak błędy (zmienne losowe) sumują się, dając wynikowy rozkład normalny, co jest fundamentem CTG.

Zadanie 5

Rozkład Normalny jako granica – produkcja masowa

Wytrzymałość stalowych lin pochodzących z produkcji masowej jest zmienną losową o rozkładzie $N(1000\ \text{kg/cm}^2, 50\ \text{kg/cm}^2)$. Obliczyć jaki procent lin ma wytrzymałość mniejszą od 900 kg/cm^2.

Komentarz: W produkcji masowej (duże n) cechy fizyczne produktów naturalnie układają się w rozkład normalny (krzywą Gaussa) dzięki działaniu Centralnego Twierdzenia Granicznego.

Zadanie 6

Zasada 3σ – odchylenia graniczne

Automat produkuje nity. Średnice główek nitów są wartościami zmiennej losowej o rozkładzie $N(2; 0{,}1)$ (w mm). Jakie rozmiary średnicy z przedziału $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ można gwarantować z prawdopodobieństwem 0,95?

Cel zadania: Zrozumienie przedziałów ufności, które wynikają bezpośrednio z własności granicznych rozkładu normalnego.

Zadanie 7

Stabilność częstości – Prawo Wielkich Liczb

Zmienna losowa K ma rozkład dwumianowy z parametrami $n = 5$ i $p = 0{,}8$ (interpretacja: 5 dni pracy, szansa na brak awarii 0,8). Obliczyć prawdopodobieństwo $P(K = k)$ dla $k = 0, 1, ..., 5$.

Cel zadania: Choć n jest małe, zadanie to służy jako punkt wyjścia do dyskusji: co by się stało, gdybyśmy obserwowali system przez 1000 dni? (Wtedy rozkład dążyłby do normalnego – Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a).

Zadanie 8

Sumowanie zmiennych niezależnych

Mamy dwie niezależne zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym (np. czasy obsługi dwóch procesów). Zmienna X_1 ma parametr λ, zmienna X_2 też ma parametr λ. Pokazać (lub obliczyć dla konkretnych danych), że ich suma ma rozkład Erlanga.

Komentarz: Jest to wstęp do twierdzenia, że suma wielu takich zmiennych dążyłaby do rozkładu normalnego. Dla informatyków ważne w modelowaniu kolejek.

Zadanie 9

Zastosowanie rozkładu normalnego w IT

Czas (w minutach) między kolejnymi zgłoszeniami abonentów w centrali telefonicznej jest zmienną losową. Przy dużej liczbie abonentów, łączny czas oczekiwania na n zgłoszeń można aproksymować.

Zadanie (uproszczone): Czas między zgłoszeniami ma rozkład wykładniczy ($\lambda = 2$). Obliczyć prawdopodobieństwo, że przed upływem 3 minut nastąpi zgłoszenie.

*Cel: Zrozumienie procesu, który w granicy (dla wielu zgłoszeń) jest modelowany procesami Poissona/wykładniczymi.

Zadanie 10

Interpretacja histogramu - wizualizacja zbieżności

Dla danych z zadania o czasie pracy sporządzić histogram prawdopodobieństwa.

Cel: Zadanie graficzne. Pozwala zobaczyć, jak rozkład prawdopodobieństwa "wygląda" i intuicyjnie zrozumieć, że przy zwiększaniu liczby prób kształt ten będzie przypominał dzwon (rozkład normalny).