

# LISTA ZADAŃ NR 2: Zmienne losowe (jednowymiarowe i dwuwymiarowe)

## Zadanie 1

W grupie studenckiej przeprowadzono sprawdzian. Niech  $X$  oznacza ocenę (przy czterostopniowej skali ocen) losowo wybranego studenta. Czy  $X$  jest zmienną losową?

Jeżeli przyjmiemy, że grupę stanowi 10 osób, a ich oceny to zbiór  $\{5, 4, 3, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 2\}$ , to jak zdefiniować tę zmienną losową i jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania poszczególnych ocen?

## Zadanie 2

Zakładając, że stosunek ocen bardzo dobrych, dobrych, dostatecznych i niedostatecznych ma się tak, jak  $1 : 3 : 4 : 2$ , wyznaczyć dla określonej tam zmiennej losowej  $X$ :

- funkcję prawdopodobieństwa i jej wykres,
- dystrybuantę i jej wykres,
- prawdopodobieństwo  $P(X < 3,5)$ .

## Zadanie 3

Miesięczny koszt  $u$  prowadzenia przykładowego laboratorium jest zależny od liczby  $x$  zatrudnionych w nim pracowników. Załóżmy, że zależność ta jest postaci:

$$u = 15000x + 10000\sqrt{x}$$

Liczbę pracowników traktujemy jako zmienną losową  $X$  o rozkładzie:

$x_i$	2	3	4	5
$p_i$	0,10	0,25	0,40	0,25

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa kosztów (zmienna losowa  $U$ ).

## Zadanie 4

W wielu sytuacjach (np. w informatyce i elektronice) można przyjąć, że czas  $X$  bezawaryjnej pracy badanego urządzenia jest zmienną losową ciągłą o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

(jest to tzw. rozkład wykładniczy). Niech parametr  $\lambda = 10$  (np. godzin).

- Obliczyć prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie działać bezawaryjnie od 5 do 10 godzin:  $P(5 \leq X \leq 10)$ .
- Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej.

## Zadanie 5

Dobrać tak stałe  $A$  i  $B$ , by funkcja określona wzorem:

$$F(x) = A + B \arctan x \quad \text{dla } -\infty < x < \infty$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej ciągłej  $X$ . Następnie wyznaczyć gęstość tej zmiennej.

## Zadanie 6

Pewien mechanizm składa się z dwóch kół zębatach: dużego i małego. Warunki techniczne przy montażu urządzenia zostają naruszone, jeśli w obu kołach występują dodatnie odchylenia grubości zębów („plusowe”) lub w obu kołach ujemne („minusowe”). Rozważmy zero-jedynkowe zmienne losowe  $X$  i  $Y$ :

- $X = 1$ , jeśli duże koło jest „plusowe”,  $X = 0$  jeśli „minusowe”.
- $Y = 1$ , jeśli małe koło jest „plusowe”,  $Y = 0$  jeśli „minusowe”.

Prawdopodobieństwa wystąpienia tych zdarzeń są następujące:  $P(X = 0, Y = 0) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4}$  (awaria/zły montaż)  $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4}$  (dobry montaż)

Wyznaczyć tabelę rozkładu łącznego tej zmiennej dwuwymiarowej oraz obliczyć prawdopodobieństwo, że montaż jest prawidłowy.

## Zadanie 7

Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład określony w tabelce:

$Y \backslash X$	1	2	3
2	0,1	0,2	0,3
4	0,1	0,1	0,2

Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu brzegowego zmiennej losowej  $Y$ .

## Zadanie 8

Dwie osoby z miasta A usiłują nawiązać połączenie telefoniczne z miastem B. Niech  $X$  oznacza liczbę prób pierwszej osoby, a  $Y$  – liczbę prób drugiej osoby. Zakładamy, że każda z osób łączy się niezależnie. Wiadomo, że rozkłady prawdopodobieństwa liczby prób dla obu osób są następujące:

- Dla osoby 1 ( $X$ ):  $P(X = 1) = 0,6$ ,  $P(X = 2) = 0,4$
- Dla osoby 2 ( $Y$ ):  $P(Y = 1) = 0,5$ ,  $P(Y = 2) = 0,5$

Wyznaczyć rozkład łączny zmiennej dwuwymiarowej  $(X, Y)$  (tabelkę), zakładając niezależność prób obu osób.

## Zadanie 9

Dobrać tak stałą  $c$ , by funkcja:

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$ .

## Zadanie 10

Dla funkcji gęstości z Zadania 9 (po wyznaczeniu  $c$ ), wyznaczyć gęstości brzegowe  $f_1(x)$  oraz  $f_2(y)$ . Sprawdzić, czy zmienne  $X$  i  $Y$  są niezależne (czy  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ ).