Macierze i podstawowe operacje

Zad 1.

Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

oblicz

- $A + B$
- $A - B$
- $2A$
- $3B - 2A$
- $A \cdot B$
- sprawdź, czy $A \cdot B = B \cdot A$.

Zad 2.

Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

sprawdź, czy

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = B \cdot A \cdot D \cdot C = D \cdot C \cdot B \cdot A.$$

Zad 3.

Dana jest macierz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierz otrzymaną po przestawieniu wierszy: zamień 1. i 3. wiersz, a następnie dodaj do 2. wiersza dwukrotność nowego 1. wiersza. Zapisz wszystkie kroki dla każdej operacji.

Zad 4.

Dla wektorów kolumnowych $u = (1, -2, 3)^\top$ oraz $v = (2, 0, -1)^\top$ zapisz je jako macierze i oblicz $u + v$, $u - v$ oraz iloczyny macierzowe $u\,v^\top$ i $v\,u^\top$. Jaka jest rząd macierzy $u\,v^\top$?

Zad 5.

Pokaż, że macierz diagonalna $D = \mathrm{diag}(2, -3, 5)$ jest przemienna z dowolną macierzą diagonalną $E = \mathrm{diag}(a, b, c)$. Dodatkowo oblicz D^3 oraz, jeśli istnieje, D^{-1}.

Zad 6.

$\star$ Dla macierzy

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oblicz P^2 i P^3. Czy ciąg P^n ma zauważalny wzorzec dla $n = 1, 2, 3$?

Zad 7.

$\star$ Przykład kodowania rotacji

Policz iloczyn macierzy rotacji o kącie θ w przestrzeni 2D:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Sprawdź, że $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$.

Zad 8.

$\star$ Wiedząc, że

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\cos(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

pokaż, że macierz rotacji $R(\theta)$ może być zapisana jako

$$R(\theta) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Zad 9.

$\star\star$ Macierze Pauliego są zdefiniowane jako:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gdzie i to jednostka urojona. Sprawdź, że:

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$ (macierz jednostkowa)
- $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I$ (antykomutator)