LISTA ZADAŃ NR 3: Parametry rozkładu zmiennych losowych

(Wartość oczekiwana, wariancja, momenty, korelacja)

Zadanie 1

Dla zmiennej losowej X o funkcji prawdopodobieństwa danej tabelką:

x_i	-2	2	4
p_i	0,5	0,3	0,2

Wyznaczyć:

a) Wartość oczekiwaną $E(X)$ (średnią).
b) Wariancję $D^2(X)$ (korzystając ze wzoru $D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$).
c) Odchylenie standardowe σ.
d) Medianę $x_{0,5}$ (wartość środkową).

Zadanie 2

Miesięczny koszt U prowadzenia pewnego systemu zależy od liczby X aktywnych użytkowników (pracowników) według wzoru:

$$U = 15000X + 10000\sqrt{X}$$

Liczba pracowników X jest zmienną losową o rozkładzie:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,10	0,25	0,40	0,25

Obliczyć przewidywany średni miesięczny koszt, czyli wartość oczekiwaną zmiennej U.

Wskazówka: Oblicz u_i dla każdego x_i, a następnie zastosuj wzór na wartość oczekiwaną.

Zadanie 3

Zmienna losowa X (np. błąd pomiarowy) ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Obliczyć wartość przeciętną (oczekiwaną) oraz wariancję tej zmiennej. Następnie obliczyć wariancję zmiennej liniowo zależnej $Y = 2X - 1$ (skorzystać z własności wariancji: $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$).

Zadanie 4

Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$

Wyznaczyć modę (wartość, dla której gęstość jest największa) oraz medianę (wartość, która dzieli pole pod wykresem gęstości na dwie równe połowy).

Zadanie 5

Wzrost ludzi w pewnej grupie jest zmienną losową X o średniej $EX = 170$ cm i odchyleniu $\sigma_X = 5$ cm. Masa tych ludzi to zmienna Y o średniej $EY = 65$ kg i odchyleniu $\sigma_Y = 5$ kg.

Która cecha (wzrost czy waga) jest bardziej "stabilna" (ma mniejszy rozrzut względny)?

Wskazówka: Oblicz współczynnik zmienności $v = \frac{\sigma}{EX}$ dla obu zmiennych.

Zadanie 6

Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia w ciągu doby limitu zużycia energii elektrycznej przez pewien zakład wynosi $p = 0{,}8$. Obserwujemy ten zakład przez $n = 5$ dni. Niech X oznacza liczbę dni, w których nie przekroczono limitu.

a) Jaki to typ rozkładu? Podać wzór na prawdopodobieństwo $P(X = k)$.
b) Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X, korzystając z gotowych wzorów dla tego rozkładu ($EX = np$, $D^2X = npq$).

Zadanie 7

Czas (w minutach) między kolejnymi zgłoszeniami abonentów w centrali telefonicznej jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 2$.

a) Obliczyć średni czas oczekiwania na zgłoszenie (EX).
b) Obliczyć prawdopodobieństwo, że czas między zgłoszeniami będzie krótszy niż 3 minuty ($P(X < 3)$).

Zadanie 8

Automat produkuje odważniki. Błędy pomiarów masy mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu = 0$ g i odchyleniu standardowym $\sigma = 0{,}01$ g. Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd pomiaru (co do modułu) nie przekroczy 0,02 g.

Wskazówka: Skorzystać z dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego $\Phi(u)$. Zauważ, że $P(|X| < a) = P(-a < X < a)$.

Zadanie 9

Dana jest dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) o rozkładzie podanym w tabeli (reprezentująca np. wyniki testów w dwóch różnych momentach czasu):

$y_k \backslash x_i$	8	9	10	11
1,2	0,10	0,04	0	0
1,3	0,05	0,11	0,20	0
1,4	0	0,10	0,15	0,10
1,5	0	0	0,05	0,10

Obliczyć współczynnik korelacji liniowej ρ między zmiennymi X i Y.

Wskazówka: Należy obliczyć kolejno: średnie EX, EY, wariancje D^2X, D^2Y oraz moment mieszany $E(XY) = \sum x_i y_k p_{ik}$. Kowariancja to $cov(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$.

Zadanie 10

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o zerowych wartościach przeciętnych ($EX = 0, EY = 0$). Wykazać, że dla dowolnego $n \in N$ zmienne X i X^n oraz Y i $E(X^3)EY$ spełniają równość: $E(X^3Y) = E(X^3)E(Y)$.

Czy zmienna $Z = X^3Y$ ma wartość oczekiwaną równą 0? Co to oznacza w kontekście sygnałów losowych (szum)?