LISTA ZADAŃ NR 2: Zmienne losowe (jednowymiarowe i dwuwymiarowe)

Zadanie 1

W grupie studenckiej przeprowadzono sprawdzian. Niech X oznacza ocenę (przy czterostopniowej skali ocen) losowo wybranego studenta. Czy X jest zmienną losową?

Jeżeli przyjmiemy, że grupę stanowi 10 osób, a ich oceny to zbiór $\{5, 4, 3, 3, 4, 5, 3, 3, 4, 2\}$, to jak zdefiniować tę zmienną losową i jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania poszczególnych ocen?

Zadanie 2

Zakładając, że stosunek ocen bardzo dobrych, dobrych, dostatecznych i niedostatecznych ma się tak, jak $1 : 3 : 4 : 2$, wyznaczyć dla określonej tam zmiennej losowej X:

a) funkcję prawdopodobieństwa i jej wykres,
b) dystrybuantę i jej wykres,
c) prawdopodobieństwo $P(X < 3{,}5)$.

Zadanie 3

Miesięczny koszt u prowadzenia przykładowego laboratorium jest zależny od liczby x zatrudnionych w nim pracowników. Załóżmy, że zależność ta jest postaci:

$$u = 15000x + 10000\sqrt{x}$$

Liczbę pracowników traktujemy jako zmienną losową X o rozkładzie:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,10	0,25	0,40	0,25

Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa kosztów (zmienna losowa U).

Zadanie 4

W wielu sytuacjach (np. w informatyce i elektronice) można przyjąć, że czas X bezawaryjnej pracy badanego urządzenia jest zmienną losową ciągłą o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

(jest to tzw. rozkład wykładniczy). Niech parametr $\lambda = 10$ (np. godzin).

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie działać bezawaryjnie od 5 do 10 godzin: $P(5 \leqslant X \leqslant 10)$.
b) Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 5

Dobrać tak stałe A i B, by funkcja określona wzorem:

$$F(x) = A + B \arctan x \quad \text{dla } -\infty < x < \infty$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej ciągłej X. Następnie wyznaczyć gęstość tej zmiennej.

Zadanie 6

Pewien mechanizm składa się z dwóch kół zębatych: dużego i małego. Warunki techniczne przy montażu urządzenia zostają naruszone, jeśli w obu kołach występują dodatnie odchylenia grubości zębów („plusowe") lub w obu kołach ujemne („minusowe"). Rozważmy zero-jedynkowe zmienne losowe X i Y:

- $X = 1$, jeśli duże koło jest „plusowe", $X = 0$ jeśli „minusowe".
- $Y = 1$, jeśli małe koło jest „plusowe", $Y = 0$ jeśli „minusowe".

Prawdopodobieństwa wystąpienia tych zdarzeń są następujące: $P(X = 0, Y = 0) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4}$ (awaria/zły montaż) $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4}$ (dobry montaż)

Wyznaczyć tabelę rozkładu łącznego tej zmiennej dwuwymiarowej oraz obliczyć prawdopodobieństwo, że montaż jest prawidłowy.

Zadanie 7

Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony w tabelce:

$Y \backslash X$	1	2	3
2	0,1	0,2	0,3
4	0,1	0,1	0,2

Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu brzegowego zmiennej losowej Y.

Zadanie 8

Dwie osoby z miasta A usiłują nawiązać połączenie telefoniczne z miastem B. Niech X oznacza liczbę prób pierwszej osoby, a Y – liczbę prób drugiej osoby. Zakładamy, że każda z osób łączy się niezależnie. Wiadomo, że rozkłady prawdopodobieństwa liczby prób dla obu osób są następujące:

- Dla osoby 1 (X): $P(X = 1) = 0{,}6$, $P(X = 2) = 0{,}4$
- Dla osoby 2 (Y): $P(Y = 1) = 0{,}5$, $P(Y = 2) = 0{,}5$

Wyznaczyć rozkład łączny zmiennej dwuwymiarowej (X, Y) (tabelkę), zakładając niezależność prób obu osób.

Zadanie 9

Dobrać tak stałą c, by funkcja:

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y).

Zadanie 10

Dla funkcji gęstości z Zadania 9 (po wyznaczeniu c), wyznaczyć gęstości brzegowe $f_1(x)$ oraz $f_2(y)$. Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne (czy $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$).