Wyznaczniki

Zad 1.

Oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

używając metody Sarrusa.

Zad 2.

Wyznacz wyznaczniki używając rozwinięcia Laplace'a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zad 3.

Pokaż, że jeżeli w macierzy dwa wiersze są równe, to wyznacznik jest równy zero. Daj przykład macierzy 3×3 z dwoma równymi wierszami i oblicz jej wyznacznik. Uzasadnij, dlaczego tak się dzieje.

Zad 4.

Oblicz wyznacznik macierzy trójkątnej T o elementach diagonalnych $(3, -2, 5, 1)$.

Zad 5.

Dla macierzy zależnej od parametru t:

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$$

oblicz $\det(M(t))$ i znajdź wartości t, dla których macierz jest singularna.

Zad 6.

Rozwiąż równanie

$$\det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix} = 0$$

Zad 7.

$\star$ Rozwiąż równanie

$$\det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = 0$$

Zad 8.

Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

Zad 9.

Wykaż, że zachodzi równość

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (z-x)(z-y)(y-x)$$

Udowodnij podobną równość dla wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & u \\ x^2 & y^2 & z^2 & u^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & u^3 \end{vmatrix}$$

Zad 10.

Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & a \\ -a & -a & a \end{vmatrix} \quad \& \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & a \end{vmatrix}$$

Zad 11.

Sprawdź słuszność następujących związków:

a)

$$\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a+bx & b \\ c+dx & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$