

## Macierze i podstawowe operacje

### Zad 1.

Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

oblicz

- $A + B$
- $A - B$
- $2A$
- $3B - 2A$
- $A \cdot B$
- sprawdź, czy  $A \cdot B = B \cdot A$ .

### Zad 2.

Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

sprawdź, czy

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = B \cdot A \cdot D \cdot C = D \cdot C \cdot B \cdot A.$$

### Zad 3.

Dana jest macierz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierz otrzymaną po przestawieniu wierszy: zamień 1. i 3. wiersz, a następnie dodaj do 2. wiersza dwukrotność nowego 1. wiersza. Zapisz wszystkie kroki dla każdej operacji.

### Zad 4.

Dla wektorów kolumnowych  $u = (1, -2, 3)^\top$  oraz  $v = (2, 0, -1)^\top$  zapisz je jako macierze i oblicz  $u + v$ ,  $u - v$  oraz iloczyny macierzowe  $uv^\top$  i  $vu^\top$ . Jaka jest rząd macierzy  $uv^\top$ ?

### Zad 5.

Pokaż, że macierz diagonalna  $D = \text{diag}(2, -3, 5)$  jest przemienna z dowolną macierzą diagonalną  $E = \text{diag}(a, b, c)$ . Dodatkowo oblicz  $D^3$  oraz, jeśli istnieje,  $D^{-1}$ .

### Zad 6.

★ Dla macierzy

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oblicz  $P^2$  i  $P^3$ . Czy ciąg  $P^n$  ma zauważalny wzorzec dla  $n = 1, 2, 3$ ?

**Zad 7.**

★ Przykład kodowania rotacji

Policz iloczyn macierzy rotacji o kącie  $\theta$  w przestrzeni 2D:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sprawdź, że  $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$ .

**Zad 8.**

★ Wiedząc, że

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \cos(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

pokaż, że macierz rotacji  $R(\theta)$  może być zapisana jako

$$R(\theta) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

**Zad 9.**

★★ Macierze Pauliego są zdefiniowane jako:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gdzie  $i$  to jednostka urojona. Sprawdź, że:

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$  (macierz jednostkowa)
- $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ ,  $\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$ ,  $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I$  (antykomutator)