

# LISTA ZADAŃ NR 11: Wstęp do teorii decyzji statystycznych

## Zadanie 1

Rozważamy partię towaru (np. procesorów), w której badamy wadliwość. Testujemy hipotezę  $H_0 : p = p_0$  (partia dobra) przeciwko  $H_1 : p = p_1$  (partia wadliwa). Zbudowano test, który odrzuca partię, jeśli w wylosowanej próbce liczba wadliwych sztuk przekroczy pewne  $k$ .

Obliczyć:

- Prawdopodobieństwo błędu I rodzaju  $\alpha$  (odrzućenie dobrej partii – ryzyko producenta).
- Prawdopodobieństwo błędu II rodzaju  $\beta$  (przyjęcie złej partii – ryzyko konsumenta).

## Zadanie 2

Dla testu z Zadania 1 wyznaczyć moc testu  $(1 - \beta)$  dla kilku alternatywnych wartości parametru  $p$ . Sporządzić wykres krzywej mocy testu (funkcji mocy). Co ten wykres mówi nam o „czułości” algorytmu decyzyjnego na odchylenia od normy?

## Zadanie 3

Dla testu średniej  $H_0 : \mu = 100$  przy znanym  $\sigma = 5$  i  $n = 25$ :

- Wyznaczyć wzór na funkcję operacyjno-charakterystyczną (OC):  $L(\mu) = P(\text{akceptacja } H_0 | \mu)$ .
- Jak zmiana liczebności próby na  $n = 100$  wpłynie na stromość tej krzywej (zdolność rozróżniania)?

## Zadanie 4

Chcemy skonstruować test dla średniej, który spełnia surowe wymagania bezpieczeństwa:

- Ryzyko odrzucenia normy, gdy jest ona spełniona ( $\alpha$ ), ma wynosić 0,01.
- Ryzyko przyjęcia normy, gdy przesunięcie średniej wynosi 2 jednostki ( $\beta$ ), ma nie przekraczać 0,05.

Ile minimalnie pomiarów należy wykonać?

## Zadanie 5

Wadliwość produkcji pewnych wyrobów wynosiła do tej pory 10% ( $p_0 = 0,1$ ). Nowa technologia ma obniżyć wadliwość do 5% ( $p_1 = 0,05$ ). Zamiast pobierać stałą próbkę, pobieramy elementy po jednym.

Skonstruować test sekwencyjny ilorazu wiarygodności (test Walda), ustalając ryzyka  $\alpha = 0,05$  i  $\beta = 0,10$ .

- Wyznaczyć proste decyzyjne (obszar akceptacji, odrzucenia i obszar kontynuacji badania).
- Przedstawić procedurę w formie algorytmu (pseudokodu).

## Zadanie 6

Dla testu z Zadania 5, przypuśćmy, że wylosowano kolejno: Dobry, Dobry, Zły, Dobry, Dobry, Dobry, Dobry...

Zaznaczyć te punkty na wykresie testu sekwencyjnego. W którym kroku (jeśli w ogóle) algorytm podejmie decyzję „Nowa technologia jest lepsza”?

## Zadanie 7

Jedną z zalet metod sekwencyjnych jest to, że średnio wymagają mniej danych niż testy klasyczne. Dla testu z Zadania 5 obliczyć oczekiwaną liczbę kroków (próbek) potrzebną do podjęcia decyzji (ASN), zakładając, że prawdziwa jest hipoteza  $H_0$ .

$$E(n) \approx \frac{(1 - \alpha) \ln A + \alpha \ln B}{E(z)}$$

gdzie  $A, B$  to progi decyzyjne.

## Zadanie 8

Automat produkuje detale o średnicy nominalnej  $\mu_0$ . Podejrzewamy, że maszyna się rozkalibrowała i średnia wzrosła do  $\mu_1$ . Odchylenie  $\sigma$  jest znane.

Skonstruować test sekwencyjny weryfikujący  $H_0 : \mu = \mu_0$  przeciwko  $H_1 : \mu = \mu_1$ . Napisać warunek „stop” dla tego algorytmu.

## Zadanie 9

Mamy dwie możliwe decyzje  $d_1$  (wdrożenie systemu) i  $d_2$  (brak wdrożenia) oraz dwa stany natury  $\theta_1$  (system działa poprawnie) i  $\theta_2$  (system ma błędy). Macierz strat (kosztów) wygląda następująco:

- Jeśli  $d_1$  i  $\theta_1$ : Koszt = 0
- Jeśli  $d_1$  i  $\theta_2$ : Koszt = 1000 (awaria u klienta)
- Jeśli  $d_2$  i  $\theta_1$ : Koszt = 100 (utraczony zysk)
- Jeśli  $d_2$  i  $\theta_2$ : Koszt = 0

Jaką decyzję należy podjąć, stosując kryterium **Minimax** (minimalizacja maksymalnej straty)?

## Zadanie 10

Dla sytuacji z Zadania 9, załóżmy, że z wcześniejszych testów wiemy, iż prawdopodobieństwo wystąpienia błędów wynosi  $P(\theta_2) = 0,05$ . Obliczyć oczekiwaną stratę (ryzyko Bayesa) dla obu decyzji. Która decyzja jest optymalna w sensie bayesowskim?