

Dział 2 — Geometria Analityczna: Zadania

Poniżej znajdują się przykładowe zadania do samodzielnego rozwiązania. Dla każdego podrozdziału przygotowano 5 zadań o zróżnicowanym stopniu trudności. Niektóre zadania zawierają podpowiedzi lub sugestie metod rozwiązania.

Wektory

1. Dla wektorów w przestrzeni

$$\mathbf{u} = (1, 2, -1) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} = (2, -1, 3)$$

oblicz $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, iloczyn skalarny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ oraz normy $\|\mathbf{u}\|$ i $\|\mathbf{v}\|$. Sprawdź, czy wektory są ortogonalne.

2. Dla punktów $A(1, 0, 2)$, $B(3, -1, 1)$ i $C(2, 2, 0)$ oblicz wektory \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{AC} oraz wyznacz kąt między nimi.
3. Oblicz iloczyn wektorowy $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dla wektorów z zadania 1 i sprawdź, czy jest on ortogonalny do obu wektorów.
4. Dla wektorów jednorodnych w płaszczyźnie: $\mathbf{a} = (3, 4)$ i $\mathbf{b} = (-4, 3)$ oblicz ich iloczyn skalarny i sprawdź, czy są prostopadłe. Wyznacz rzut wektora \mathbf{a} na \mathbf{b} .
5. ★ Dla wektorów $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{q} = (2, 4, 6)$ oraz $\mathbf{r} = (0, 1, -1)$ określ liniową zależność/zależności między nimi oraz rangi zbioru.

Proste

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(1, 2)$ i $Q(3, -1)$ w postaci kierunkowej i ogólnej.
2. Znajdź równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostej z zadania 1 i przechodzącej przez punkt $R(0, 1)$.
3. Dla prostych w postaci ogólnej $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$ oraz $l_2 : 4x - 6y - 5 = 0$ określ, czy są równoległe, prostopadłe czy nachodzą się w jednym punkcie. Jeżeli mają punkt wspólny, oblicz jego współrzędne.
4. Znajdź odległość punktu $S(2, 3)$ od prostej $l : 3x - 4y + 5 = 0$.
5. ★ Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $T(1, 1)$ i tworzącej z osią OX kąt $\pi/6$. Podaj też punkt przecięcia z osią OY .

Płaszczyzny

1. Podaj równanie ogólne i normalne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(1, 0, 2)$ i o normalnej wektorowej $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$.
2. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ i $C(0, 0, 1)$.
3. Określ kąt między płaszczyznami: $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$ i $\pi_2 : 2x - y + z - 3 = 0$.
4. Dla płaszczyzny $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$ oblicz odległość punktu $P(3, 0, 1)$ od tej płaszczyzny.
5. ★ Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $D(1, 1, 1)$ i zawierającej prostą przechodzącą przez punkty $E(0, 0, 0)$ i $F(1, 2, 3)$.

Prosta i płaszczyzna w przestrzeni

1. Sprawdź, czy prosta dana parametrycznie

$$\ell : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - t$$

przecina płaszczyznę $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$. Jeżeli tak, podaj punkt przecięcia.

2. Znajdź rzut prostej z zadania 1 na oś OX (współrzędne punktów przecięcia z tą osią, jeżeli istnieją).
3. ★ Oblicz odległość punktu $G(2, -1, 0)$ od prostej przechodzącej przez punkty $H(0, 0, 0)$ i $I(1, 1, 1)$.
4. Dla prostej ℓ o równaniu parametrycznym $x = 2 + s, y = 3 - 2s, z = 1 + 4s$ znajdź prostopadłą do niej płaszczyznę przechodzącą przez punkt $M(1, 0, 0)$ (tzn. płaszczyznę, której normalna jest równoległa do wektora kierunkowego prostej ℓ).
5. ★ Rozważ układ prostej i płaszczyzny zależny od parametru λ :

$$\ell(\lambda) : x = \lambda + t, y = 1 + 2t, z = 2 - t$$

oraz

$$\pi : x - (\lambda - 1)y + z - 3 = 0$$

Określ wartości λ , dla których prosta jest równoległa do płaszczyzny, zawarta w płaszczyźnie lub przecina ją w jednym punkcie.