Dział 2 — Geometria Analityczna: ćwiczenia

Wektory

1. Dla wektorów w przestrzeni

$$\mathbf{u} = [1, 2, -1] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} = [2, -1, 3]$$

oblicz $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, iloczyn skalarny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ oraz normy $\|\mathbf{u}\|$ i $\|\mathbf{v}\|$. Sprawdź, czy wektory są ortogonalne.

2. Dla punktów $A(1, 0, 2)$, $B(3, -1, 1)$ i $C(2, 2, 0)$ oblicz wektory AB i AC oraz wyznacz kąt między nimi.

3. Oblicz iloczyn wektorowy $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dla wektorów z zadania 1 i sprawdź, czy jest on ortogonalny do obu wektorów.

4. Dla wektorów na płaszczyźnie: $\mathbf{a} = [3, 4]$ i $\mathbf{b} = [-4, 3]$ oblicz ich iloczyn skalarny i sprawdź, czy są prostopadłe. Wyznacz rzut wektora $\mathbf{a}$ na $\mathbf{b}$.

5. Oblicz długość wektora $\mathbf{c} = [1, 1]$ i znajdź wersor tego wektora.

6. Oblicz długość wektora $\mathbf{c} = [1, 2, 3]$ i znajdź wersor tego wektora.

7. Oblicz pole trójkąta rozpiętego na wektorach $[2, 1, 2]$ i $[-1, 1, 1]$.

8. Oblicz kąt w stopniach między wektorami $[4, 2, 1]$ i $[1, 3, 2]$.

9. Znajdź współrzędne środka odcinka o końcach $A(-1, 2)$ i $B(3, -2)$.

10. Dla trójwymiarowych wektorów: $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$, $\mathbf{c} = [c_x, c_y, c_z]$, udowodnij, że spełniona jest następująca tożsamość:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

11. Znajdź najbardziej ogólną postać wektora jednocześnie prostopadłego do

$$\mathbf{v} = [-1, 3, 0] \qquad oraz \qquad \mathbf{u} = [0, 1, 1]$$

12. Dla jakich wartości parametrów p i q wektory $\mathbf{a} = [1 - p, 3, -1]$ i $\mathbf{b} = [-2, 4 - q, 2]$ są równoległe?

13. Dla jakich wartości parametru s wektory $\mathbf{p} = [s, 2, 1 - s]$ i $\mathbf{q} = [s, 1, -2]$ są prostopadłe?

14. Udowodnij, że dwa wektory muszą mieć równe długości, jeśli ich suma jest prostopadła do ich różnicy.

15. $\star$ Mamy 2 osoby (A i B) idące sobie zgodnie z wzorami:

    A: $(4, 5) + (1, -2)t$

    B: $(1, -8) + (2, 4)t$

gdzie t oznacza czas. Dla jakiego t osoby będą najbliżej siebie?

Proste

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(1,2)$ i $Q(3,-1)$ w postaci kierunkowej i ogólnej.
2. Znajdź równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostej z zadania 1 i przechodzącej przez punkt $R(0,1)$.
3. Prosta przechodzi przez punkt $A(1,2)$ i jest równoległa do prostej $y=2x+3$. Znajdź równanie tej prostej.
4. Dla prostych w postaci ogólnej $l_1 : 2x-3y+1=0$ oraz $l_2 : 4x-6y-5=0$ określ, czy są równoległe, prostopadłe czy nachodzą się w jednym punkcie. Jeżeli mają punkt wspólny, oblicz jego współrzędne.
5. Oblicz kąt między prostą $y=x+3$ a osią Ox.
6. Podaj wektor prostopadły do prostej $x+y+1=0$.
7. $\star$ Znajdź odległość punktu $S(2,3)$ od prostej $l : 3x-4y+5=0$.
8. $\star$ Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $T(1,1)$ i tworzącej z osią OX kąt $\pi/6$. Podaj też punkt przecięcia z osią OY.

Płaszczyzny

1. Podaj równanie ogólne i normalne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(1,0,2)$ i o normalnej wektorowej $\mathbf{n}=[2,-1,1]$.
2. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$.
3. Określ kąt między płaszczyznami: $\pi_1 : x+2y-2z+1=0$ i $\pi_2 : 2x-y+z-3=0$.
4. Dla płaszczyzny $\pi : x-2y+2z-4=0$ oblicz odległość punktu $P(3,0,1)$ od tej płaszczyzny.
5. Znajdź wektor prostopadły do płaszczyzny $x+y+z=1$.
6. Płaszczyzna przechodzi przez punkt $A(1,2,3)$ i jest równoległa do płaszczyzny $2x+3y+4z=5$. Znajdź równanie tej płaszczyzny.
7. $\star$ Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $D(1,1,1)$ i zawierającej prostą przechodzącą przez punkty $E(0,0,0)$ i $F(1,2,3)$.

Prosta i płaszczyzna w przestrzeni

1. Sprawdź, czy prosta dana parametrycznie

$$\ell: \ x = 1 + 2t, \ y = -1 + t, \ z = 3 - t$$

przecina płaszczyznę $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$. Jeżeli tak, podaj punkt przecięcia.

2. $\star$ Oblicz odległość punktu $G(2, -1, 0)$ od prostej przechodzącej przez punkty $H(0, 0, 0)$ i $I(1, 1, 1)$.

3. $\star$ Rozważ układ prostej i płaszczyzny zależny od parametru λ:

$$\ell(\lambda) : x = \lambda + t, \ y = 1 + 2t, \ z = 2 - t$$

oraz

$$\pi : x - (\lambda - 1)y + z - 3 = 0$$

Określ wartości λ, dla których prosta jest równoległa do płaszczyzny, zawarta w płaszczyźnie lub przecina ją w jednym punkcie.

Krzywe Drugiego Rodzaju w 2D

Powierzchnie Drugiego Rodzaju w 3D