Dział 1 — Algebra Liniowa: Zadania

Macierze i podstawowe operacje

1. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   oblicz

   - $A + B$
   - $A - B$
   - $2A$
   - $3B - 2A$
   - $A \cdot B$
   - sprawdź, czy $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

   sprawdź, czy

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = B \cdot A \cdot D \cdot C = D \cdot C \cdot B \cdot A.$$

3. Dana jest macierz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Wyznacz macierz otrzymaną po przestawieniu wierszy: zamień 1. i 3. wiersz, a następnie dodaj do 2. wiersza dwukrotność nowego 1. wiersza. Zapisz wszystkie kroki dla każdej operacji.

4. Dla wektorów kolumnowych $u = (1, -2, 3)^\top$ oraz $v = (2, 0, -1)^\top$ zapisz je jako macierze i oblicz $u + v$, $u - v$ oraz iloczyny macierzowe $u\,v^\top$ i $v\,u^\top$. Jaka jest rząd macierzy $u\,v^\top$?

5. Pokaż, że macierz diagonalna $D = \operatorname{diag}(2, -3, 5)$ jest przemienna z dowolną macierzą diagonalną $E = \operatorname{diag}(a, b, c)$. Dodatkowo oblicz D^3 oraz, jeśli istnieje, D^{-1}.

6. $\star$ Dla macierzy

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   oblicz P^2 i P^3. Czy ciąg P^n ma zauważalny wzorzec dla $n = 1, 2, 3$?

7. $\star$ Przykład kodowania rotacji

   Policz iloczyn macierzy rotacji o kącie θ w przestrzeni 2D:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Sprawdź, że $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$.

8. $\star$ Wiedząc, że

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\cos(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

pokaż, że macierz rotacji $R(\theta)$ może być zapisana jako

$$R(\theta) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

9. $\star\star$ Macierze Pauliego są zdefiniowane jako:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gdzie i to jednostka urojona. Sprawdź, że:

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$ (macierz jednostkowa)
- $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I$ (antykomutator)

Wyznaczniki

1. Oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

używając metody Sarrusa.

2. $\star$ Wyznacz wyznaczniki używając rozwinięcia Laplace'a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Pokaż, że jeżeli w macierzy dwa wiersze są równe, to wyznacznik jest równy zero. Daj przykład macierzy 3×3 z dwoma równymi wierszami i oblicz jej wyznacznik. Uzasadnij, dlaczego tak się dzieje.
4. Oblicz wyznacznik macierzy trójkątnej T o elementach diagonalnych $(3, -2, 5, 1)$.
5. Dla macierzy zależnej od parametru t:

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$$

oblicz $\det(M(t))$ i znajdź wartości t, dla których macierz jest singularna.

6. Rozwiąż równanie

$$\det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix} = 0$$

7. $\star$ Rozwiąż równanie

$$\det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = 0$$

Odwracanie macierzy

1. Znajdź macierz odwrotną używając wzoru dla macierzy 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

oblicz macierze odwrotne za pomocą metod:

- dołączania macierzy jednostkowej i wykonywania eliminacji Gaussa-Jordana,
- użycia wzoru z macierzami dopełnień algebraicznych

Czyli dla każdej macierzy podaj dwie metody obliczenia macierzy odwrotnej (jeśli istnieje).

3. Sprawdź, czy macierz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest odwracalna. Uzasadnij odpowiedź (użyj wyznacznika). Czy można było zauważyć to bez obliczania wyznacznika? Co musiałoby się stać, aby macierz była odwracalna?

4. Dla macierzy A spełniającej $A^2 = I$ (tzw. involucja) pokaż, że $A^{-1} = A$. Podaj przykład niebanalnej macierzy 2×2 spełniającej ten warunek (innej niż I i $-I$). Ile jest takich macierzy?

5. Oblicz macierz odwrotną macierzy diagonalnej $D = \operatorname{diag}(2, 5, -3, 1)$, jeżeli istnieje. Omów warunek istnienia odwrotności dla macierzy diagonalnej.

Układy równań liniowych

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5, \\ x - 4y &= -2. \end{aligned}$$

używając metod: Cramera, eliminacji Gaussa i macierzy odwrotnej.

2. Rozwiąż układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ 2x - y + 3z &= 14, \\ -x + 2y - z &= -2. \end{aligned}$$

Użyj metody macierzy odwrotnej (jeżeli macierz współczynników jest odwracalna).

3. Zastosuj regułę Cramera, aby rozwiązać układ:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3, \\ 3x - y &= 5. \end{aligned}$$

Pokaż kroki i obliczenia macierzy wyznacznikowych.

4. $\star$ Rozważ układ parametryczny zależny od λ:

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= 1, \\ 2x + (1 + \lambda)y &= 3. \end{aligned}$$

Określ wartości λ, dla których układ ma jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub brak rozwiązań.

5. Dla macierzy współczynników

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

i wektora prawych stron $b = (4, 1, 3)^\top$ rozwiąż $Ax = b$ i sprawdź wynik przez podstawienie.