Podstawy Arytmetyki i Systemów Pozycyjnych

Spis Treści

Aksjomaty Peano

Zaczniemy od samych fundamentów, czyli od tego, czym właściwie są liczby naturalne. Pod koniec XIX wieku włoski matematyk Giuseppe Peano zaproponował zestaw aksjomatów (założeń), które w precyzyjny sposób definiują zbiór liczb naturalnych. Dzięki nim możemy w sposób formalny budować całą arytmetykę.

Oto one:

Aksjomaty Peano definiują zbiór liczb naturalnych, oznaczany jako $\mathbb{N}$. Wprowadzają one pojęcie "następnika" liczby, co jest intuicyjnym odpowiednikiem dodania jedynki.

1. **Istnieje liczba naturalna, którą nazywamy 0.**
   - $0 \in \mathbb{N}$
   - To jest nasz punkt startowy. W niektórych wersjach aksjomatów zaczyna się od 1, ale my przyjmiemy wersję z 0.
2. **Każda liczba naturalna n ma swojego następcę, oznaczanego jako S(n).**
   - Następnik S(n) również jest liczbą naturalną.
   - Możemy myśleć o $S(n)$ jako o $n+1$.
3. **Liczba 0 nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.**
   - Nie istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, dla której $S(n) = 0$.
   - To gwarantuje, że 0 jest "pierwszą" liczbą.
4. **Różne liczby naturalne mają różne następniki.**
   - Jeżeli $n \neq m$, to $S(n) \neq S(m)$.
   - To zapewnia, że idąc "w górę" po liczbach, nigdy się nie zapętlimy ani nie spotkamy dwóch gałęzi prowadzących do tego samego miejsca.
5. **Aksjomat indukcji matematycznej:** Jeżeli mamy zbiór K, który zawiera 0 i dla każdej liczby naturalnej n należącej do K, jej następnik S(n) również należy do K, to zbiór K zawiera wszystkie liczby naturalne.
   - To jest najpotężniejszy z aksjomatów. Pozwala on na dowodzenie twierdzeń dla wszystkich liczb naturalnych. Jeśli potrafimy pokazać, że jakaś własność jest prawdziwa dla 0, oraz że jeśli jest prawdziwa dla n, to jest też prawdziwa dla $n+1$, to możemy być pewni, że jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych.

Te pięć prostych zasad stanowi solidny fundament, na którym zbudujemy operacje dodawania, mnożenia i potęgowania.

Definicje dodawania, mnożenia i potęgowania

Mając solidny fundament w postaci Aksjomatów Peano, możemy teraz zdefiniować podstawowe operacje arytmetyczne. Zrobimy to w sposób rekurencyjny, czyli odwołując się do poprzednich kroków. Zauważ, jak każda kolejna definicja opiera się na poprzedniej.

Dodawanie (+)

Dodawanie liczby m do liczby n (czyli $n+m$) definiujemy za pomocą dwóch reguł:

1. **Warunek bazowy (dodawanie zera):** Dodanie 0 do dowolnej liczby naturalnej n pozostawia tę liczbę bez zmian.
   - $n + 0 = n$
2. **Krok rekurencyjny (dodawanie następnika):** Dodanie następnika liczby m (czyli $S(m)$) do liczby n jest tym samym, co wzięcie następnika sumy n i m.
   - $n + S(m) = S(n + m)$

Przykład: Jak obliczyć 2 + 2?

Pamiętajmy, że $1 = S(0)$ i $2 = S(1) = S(S(0))$.

$2 + 2 = 2 + S(1)$

- Zgodnie z regułą 2: $2 + S(1) = S(2 + 1)$

Teraz musimy obliczyć $2 + 1$: $2 + 1 = 2 + S(0)$

- Zgodnie z regułą 2: $2 + S(0) = S(2 + 0)$
- Zgodnie z regułą 1: $2 + 0 = 2$
- Więc $2 + 1 = S(2) = 3$

Wracając do naszego pierwotnego problemu: $2 + 2 = S(2 + 1) = S(3) = 4$

W ten sposób, używając tylko pojęcia następnika, zdefiniowaliśmy dodawanie!

Mnożenie (·)

Mnożenie budujemy na dodawaniu. Definiujemy je również za pomocą dwóch reguł:

1. **Warunek bazowy (mnożenie przez zero):** Mnożenie dowolnej liczby naturalnej n przez 0 daje w wyniku 0.
   - $n \cdot 0 = 0$

2. **Krok rekurencyjny (mnożenie przez następnika):** Mnożenie liczby n przez następnika liczby m (czyli $S(m)$) jest równe iloczynowi n i m, powiększonemu o n.
    - $n \cdot S(m) = (n \cdot m) + n$

Przykład: Jak obliczyć $3 \cdot 2$?

$3 \cdot 2 = 3 \cdot S(1)$

- Zgodnie z regułą 2: $3 \cdot S(1) = (3 \cdot 1) + 3$

Teraz musimy obliczyć $3 \cdot 1$: $3 \cdot 1 = 3 \cdot S(0)$

- Zgodnie z regułą 2: $3 \cdot S(0) = (3 \cdot 0) + 3$
- Zgodnie z regułą 1: $3 \cdot 0 = 0$
- Więc $3 \cdot 1 = 0 + 3 = 3$

Wracając do naszego pierwotnego problemu: $3 \cdot 2 = (3 \cdot 1) + 3 = 3 + 3 = 6$ (korzystając z wcześniej zdefiniowanego dodawania).

Potęgowanie (^)

Potęgowanie budujemy na mnożeniu.

1. **Warunek bazowy (potęga zerowa):** Dowolna liczba naturalna n (z wyjątkiem 0, choć to kwestia umowy) podniesiona do potęgi 0 daje 1. Pamiętajmy, że $1 = S(0)$.
    - $n^0 = S(0)$
2. **Krok rekurencyjny (potęga następnika):** Podniesienie liczby n do potęgi $S(m)$ jest równe wynikowi n^m pomnożonemu przez n.
    - $n^{S(m)} = (n^m) \cdot n$

Przykład: Jak obliczyć 2^3?

Pamiętajmy, że $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, $3 = S(2)$.

$2^3 = 2^{S(2)}$

- Zgodnie z regułą 2: $2^{S(2)} = (2^2) \cdot 2$

Teraz musimy obliczyć 2^2: $2^2 = 2^{S(1)}$

- Zgodnie z regułą 2: $2^{S(1)} = (2^1) \cdot 2$
- Musimy obliczyć $2^1 = 2^{S(0)} = (2^0) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.
- Więc $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Wracając do naszego pierwotnego problemu:

$$2^3 = (2^2) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$$

.

W ten sposób, zaczynając od pięciu prostych aksjomatów, zdefiniowaliśmy rekurencyjnie trzy podstawowe działania arytmetyczne. To pokazuje potęgę formalizmu matematycznego!

Dwie konstrukcje zbioru liczb naturalnych

Aksjomaty Peano w genialny sposób opisują *właściwości* liczb naturalnych i jak powinny się one zachowywać. Nie mówią nam jednak, czym te liczby *są* w sensie fundamentalnym. Czy to obiekty fizyczne? Idee w naszych umysłach?

Na początku XX wieku matematycy, uzbrojeni w nowo powstałą teorię mnogości, pokazali, że liczby naturalne można *skonstruować* z najbardziej podstawowego obiektu matematycznego, jakim jest **zbiór**. Pokażemy dwie takie konstrukcje.

Konstrukcja von Neumanna (oparta na liczbach porządkowych)

John von Neumann zaproponował niezwykle elegancką i dziś powszechnie przyjmowaną konstrukcję, w której każda liczba naturalna jest zbiorem wszystkich liczb ją poprzedzających.

Zaczynamy od jedynego zbioru, którego istnienie możemy założyć bez dodatkowych elementów – **zbioru pustego** $\emptyset$.

- **0** definiujemy jako zbiór pusty: $0 := \emptyset$
- **1** definiujemy jako zbiór zawierający 0: $1 := \{0\} = \{\emptyset\}$
- **2** definiujemy jako zbiór zawierający 0 i 1: $2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- **3** definiujemy jako zbiór zawierający 0, 1 i 2: $3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Widzisz wzorzec? Każda kolejna liczba jest zbiorem liczb ją poprzedzających. Formalnie, następnik liczby n to unia (suma) zbioru n i zbioru zawierającego n:

$$S(n) := n \cup \{n\}$$

Ta konstrukcja w piękny sposób spełnia aksjomaty Peano. Co więcej, wprowadza ona naturalną relację porządku: liczba m jest mniejsza od n ($m < n$) wtedy i tylko wtedy, gdy m jest elementem zbioru n ($m \in n$). Na przykład $2 < 3$, ponieważ $2 \in \{0, 1, 2\}$.

Ta metoda jest częścią szerszej teorii liczb porządkowych i stanowi standard w aksjomatycznej teorii mnogości.

Konstrukcja Zermelo (pomysł Twojego syna!)

Druga, historycznie wcześniejsza konstrukcja, została zaproponowana przez Ernsta Zermelo. Jest ona być może jeszcze bardziej minimalistyczna i bardzo przypomina to, co zasugerowałeś!

Zasada jest prosta: każda kolejna liczba jest zbiorem jednoelementowym (singletonem) zawierającym swojego poprzednika.

- **0** definiujemy jako zbiór pusty: $0 := \emptyset$
- **1** definiujemy jako zbiór zawierający 0: $1 := \{0\} = \{\emptyset\}$
- **2** definiujemy jako zbiór zawierający 1: $2 := \{1\} = \{\{\emptyset\}\}$
- **3** definiujemy jako zbiór zawierający 2: $3 := \{2\} = \{\{\{\emptyset\}\}\}$

Ogólna zasada tworzenia następnika jest więc niezwykle prosta:

$$S(n) := \{n\}$$

Ta konstrukcja również spełnia aksjomaty Peano. Jest bardzo elegancka w swojej prostocie, jednak ma pewną wadę w porównaniu do konstrukcji von Neumanna: nie ma w niej naturalnej relacji porządku. W modelu von Neumanna $2 < 3$ oznaczało $2 \in 3$. Tutaj 2 nie jest elementem 3, więc relację mniejszości trzeba definiować osobno. Z tego powodu w nowoczesnej matematyce częściej stosuje się konstrukcję von Neumanna, ale obie są w pełni poprawne.

Systemy zapisu liczb, w tym system pozycyjny

Zdefiniowaliśmy, czym są liczby, ale jak je zapisywać? Przez tysiące lat ludzkość wymyśliła wiele sposobów na reprezentowanie liczb. Większość z nich była jednak niepraktyczna i utrudniała arytmetykę. Prawdziwą rewolucją okazał się system pozycyjny, którego używamy do dziś. Przyjrzyjmy się kilku systemom, aby docenić jego geniusz.

System jedynkowy (unarny)

Najprostszy i najbardziej intuicyjny system, używany prawdopodobnie od zarania dziejów. Każda jednostka jest reprezentowana przez jeden symbol (np. kreskę).

- **Zapis:** Liczba 5 to `|||||`, a 3 to `|||`.
- **Zalety:** Banalnie prosty do zrozumienia i użycia dla małych liczb.
- **Wady:** Skrajnie nieefektywny. Zapisanie liczby milion wymaga miliona kresek. Arytmetyka jest uciążliwa.

System sumeryjski (babiloński) - pozycyjny, baza 60

Jeden z pierwszych znanych systemów pozycyjnych, stworzony ponad 4000 lat temu! Babilończycy używali systemu o podstawie **60** (seksagesymalny).

- **Zapis:** Używali pisma klinowego. Mieli dwa podstawowe symbole: klin oznaczający 1 (▼) i klin oznaczający 10 (◀). Liczby od 1 do 59 tworzyli przez powtarzanie tych symboli. Na przykład 23 to ◀◀ ▼▼▼. Kluczowe było to, że **pozycja** grupy symboli miała znaczenie. Zapis ◀ ▼ ▼▼ (11, 2) mógł oznaczać $11 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0 = 662$.

- **Zalety:**
  - **Genialny do ułamków:** Baza 60 ma mnóstwo dzielników (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60), co niezwykle ułatwiało obliczenia na ułamkach. To dziedzictwo przetrwało do dziś w postaci 60 minut w godzinie i 360 (6 * 60) stopni w okręgu.
  - Był to system **pozycyjny**, co stanowiło gigantyczny skok koncepcyjny.
- **Wady:** Przez długi czas Babilończycy **nie mieli symbolu zera**. Aby odróżnić 2 od 120 ($2 \cdot 60$), zostawiali puste miejsce, co było źródłem niejednoznaczności. Dopiero później wprowadzono specjalny symbol-separator, który pełnił rolę zera wewnątrz liczby, ale nie na jej końcu.

System Majów - pozycyjny, baza 20 (z zerem!)

Cywilizacja Majów, niezależnie od reszty świata, stworzyła niezwykle zaawansowany system liczbowy.

- **Zapis:** Był to system o podstawie **20** (wigesimalny), zapisywany pionowo. Używali tylko trzech symboli: kropki dla 1, kreski dla 5 oraz stylizowanego symbolu muszli dla **zera**.
- **Zalety:**
  - **Wynalezienie zera:** Majowie byli jedną z niewielu cywilizacji (i pierwszą na kontynentach amerykańskich), która samodzielnie wynalazła i używała konceptu zera jako pełnoprawnej liczby i symbolu zastępczego. To absolutny przełom!
  - System był pozycyjny i bardzo spójny.
- **Wady:** W zapisie kalendarzowym Majowie wprowadzali modyfikację: trzecia pozycja od dołu nie oznaczała $20^2 = 400$, lecz $18 \times 20 = 360$, aby lepiej przybliżyć długość roku. To sprawiało, że system nie był "czysto" dwudziestkowy w każdym zastosowaniu.

System dziesiętny (hindusko-arabski) - nasz system

System, którego używamy na co dzień, jest zwieńczeniem tysięcy lat ewolucji myśli matematycznej. Jego siła leży w połączeniu trzech kluczowych idei:

1. **System jest pozycyjny:** Wartość cyfry zależy od jej miejsca w liczbie. W liczbie **121** pierwsza jedynka oznacza 100, a druga jedynka oznacza 1.
2. **Ma stałą bazę:** Bazą jest 10, co oznacza, że mamy 10 unikalnych symboli (cyfr) dla liczb od 0 do 9.
3. **Posiada symbol zera:** Zero jest kluczowe. Pełni podwójną rolę: jest liczbą samą w sobie oraz symbolem zastępczym, który "trzyma" pozycję, jak w liczbie 105, gdzie zero informuje nas o braku dziesiątek.

Dowolną liczbę w systemie o podstawie b możemy zapisać jako sumę potęg tej podstawy:

$$(c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_b = c_n \cdot b^n + c_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0$$

Na przykład:

$$253_{10} = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 200 + 50 + 3$$

- **Zalety:** Niezwykle wydajny, uniwersalny i prosty w użyciu. Umożliwia wykonywanie skomplikowanych operacji arytmetycznych za pomocą prostych, powtarzalnych algorytmów (np. pisemne dodawanie czy mnożenie).
- **Wady:** Z perspektywy historycznej – trudno o nich mówić. Jest to najbardziej zaawansowany i elastyczny system, jaki wymyślono.

Ta podróż od prostych kresek do abstrakcyjnego systemu pozycyjnego z zerem jest jedną z najważniejszych w historii ludzkiej myśli. To właśnie ten ostatni system otworzył drzwi do nowożytnej matematyki, nauki i technologii.

Intuicja systemu pozycyjnego: Drzewa i słowa

Aby zrozumieć, na czym polega siła systemu pozycyjnego, możemy przeprowadzić eksperyment myślowy, który sam zaproponowałeś. Stwórzmy własny system nazywania kolejnych liczb naturalnych przy użyciu drzewa i alfabetu składającego się z trzech liter: `{a, b, c}`.

Krok 1: Drzewo o głębokości 1

Poniższe diagramy są przedstawione w środowisku `verbatim` z LaTeX, które gwarantuje, że ich tekstowa reprezentacja zostanie poprawnie przeniesiona do pliku PDF. Istnieją bardziej zaawansowane pakiety graficzne w LaTeX (jak `tikz`), które pozwalają na generowanie diagramów, ale `verbatim` jest najbezpieczniejszym sposobem w naszym przypadku.

Zaczynamy od korzenia (Root), z którego wyrastają 3 gałęzie, a każda kończy się liściem oznaczonym inną literą z naszego alfabetu.

```
      /-- a
Root--|-- b
      \-- c
```

Przechodząc od korzenia do każdego liścia, tworzymy "słowa". Na tym etapie mamy 3 unikalne słowa: `a`, `b`, `c`. Możemy umówić się, że będą one reprezentować trzy pierwsze liczby:

- $1 \leftrightarrow$ `a`
- $2 \leftrightarrow$ `b`
- $3 \leftrightarrow$ `c`

Krok 2: Drzewo o głębokości 2

Teraz rozbudowujemy nasze drzewo. Z każdego liścia (`a`, `b`, `c`) wyprowadzamy kolejne 3 gałęzie, które znów kończą się liśćmi `a`, `b`, `c`.

```
          /-- a  (aa)
      /-- a --|-- b  (ab)
     /      \-- c  (ac)
    /
   /          /-- a  (ba)
Root --|-- b --|-- b  (bb)
   \          \-- c  (bc)
    \
     \      /-- a  (ca)
      \-- c --|-- b  (cb)
            \-- c  (cc)
```

- c (cc) \end{verbatim}

Ścieżki od korzenia do nowych liści tworzą nam teraz 9 nowych, dwuliterowych słów:

- `a` → `a` daje słowo `aa`
- `a` → `b` daje słowo `ab`
- `a` → `c` daje słowo `ac`
- `b` → `a` daje słowo `ba`
- `b` → `b` daje słowo `bb`
- `b` → `c` daje słowo `bc`
- `c` → `a` daje słowo `ca`
- `c` → `b` daje słowo `cb`
- `c` → `c` daje słowo `cc`

Mamy więc nowe, dłuższe słowa, które mogą reprezentować kolejne liczby.

Krok 3: Drzewo o głębokości 3

Gdybyśmy powtórzyli ten proces jeszcze raz, pełne drzewo stałoby się bardzo duże i nieczytelne. Możemy jednak pokazać, jak rozwija się jedna z gałęzi (np. gałąź `a`), aby zilustrować zasadę. Z każdego liścia z kroku 2 (`aa`, `ab`, `ac`, itd.) wyrastają kolejne 3 gałęzie.

```
                      /-- a  (aaa)
                  /-- a --|-- b  (aab)
                 /      \-- c  (aac)
                /
               /          /-- a  (aba)
           /-- a --|-- b --|-- b  (abb)
          /      \       \-- c  (abc)
         /        \
        /          \     /-- a  (aca)
       /            \-- c--|-- b  (acb)
      /                   \-- c  (acc)
     /
Root --|-- ... (gałąź 'b' rozwija się analogicznie, tworząc słowa od 'baa' do 'bcc')
     \
      \-- ... (gałąź 'c' rozwija się analogicznie, tworząc słowa od 'caa' do 'ccc')
```

-- ... (gałąź ‘c’ rozwija się analogicznie, tworząc słowa od ‘caa’ do ‘ccc’)
\end{verbatim}

W ten sposób, dokładając kolejną literę, tworzymy $3 \times 9 = 27$ unikalnych, trzyliterowych słów. Oto one, wypisane w systematycznej kolejności, która odpowiada przechodzeniu przez drzewo:

- `aa` → `a` daje słowo `aaa`
- `aa` → `b` daje słowo `aab`
- `aa` → `c` daje słowo `aac`
- `ab` → `a` daje słowo `aba`
- `ab` → `b` daje słowo `abb`
- `ab` → `c` daje słowo `abc`
- `ac` → `a` daje słowo `aca`
- `ac` → `b` daje słowo `acb`
- `ac` → `c` daje słowo `acc`
- `ba` → `a` daje słowo `baa`
- `ba` → `b` daje słowo `bab`
- `ba` → `c` daje słowo `bac`
- `bb` → `a` daje słowo `bba`
- `bb` → `b` daje słowo `bbb`
- `bb` → `c` daje słowo `bbc`
- `bc` → `a` daje słowo `bca`
- `bc` → `b` daje słowo `bcb`
- `bc` → `c` daje słowo `bcc`
- `ca` → `a` daje słowo `caa`
- `ca` → `b` daje słowo `cab`
- `ca` → `c` daje słowo `cac`
- `cb` → `a` daje słowo `cba`
- `cb` → `b` daje słowo `cbb`
- `cb` → `c` daje słowo `cbc`

- `cc` → `a` daje słowo `cca`
- `cc` → `b` daje słowo `ccb`
- `cc` → `c` daje słowo `ccc`

Te 27 słów może reprezentować kolejne 27 liczb. To pokazuje, jak budowanie coraz głębszych drzew daje nam dłuższe słowa, które pozwalają na reprezentację coraz większej liczby liczb.

Wniosek i połączenie z systemem pozycyjnym

W ten sposób odkryliśmy dwie fundamentalne zasady:

1. **Zasada kombinacji:** Używając skończonego zestawu symboli (nasz alfabet `{a, b, c}`), możemy tworzyć nieskończenie wiele unikalnych "słów" (reprezentacji liczb), po prostu zwiększając ich długość.
2. **Zasada pozycji (NAJWAŻNIEJSZA):** Zauważ, że litera `a` w słowie `ab` i litera `a` w słowie `ba` znajdują się na różnych pozycjach i przez to całe słowa reprezentują inne liczby. To jest właśnie **sedno systemu pozycyjnego**: znaczenie symbolu zależy od jego **pozycji** w zapisie.

Nasz standardowy system dziesiętny działa dokładnie tak samo!

- Mamy alfabet 10 cyfr: `{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}`.
- W liczbie `121`, pierwsza cyfra `1` (od lewej) oznacza `100`, a ostatnia cyfra `1` oznacza po prostu `1`. Ich wartość zależy od pozycji.

Twój system oparty na drzewie jest genialny w budowaniu intuicji. Standardowy system pozycyjny idzie o krok dalej: zamiast po prostu listować wszystkie słowa o długości 1, potem 2, potem 3, wprowadza płynne przejście (po `9` następuje `10`, a nie `00`), a wartość liczby można obliczyć ze znanego nam już wzoru:

$$(c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_b = c_n \cdot b^n + \cdots + c_0 \cdot b^0$$

Dzięki temu prostemu wzorowi arytmetyka staje się niezwykle łatwa. Ale idea tworzenia nieskończonej liczby nazw z kilku symboli i nadawania im znaczenia przez pozycję jest dokładnie tym, co odkryłeś za pomocą swojego drzewa!