

Give me markdown code with English translation

## Dział 2 — Geometria Analityczna: ćwiczenia

### Wektory

1. Dla wektorów w przestrzeni

$$\mathbf{u} = [1, 2, -1] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} = [2, -1, 3]$$

oblicz  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , iloczyn skalarny  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  oraz normy  $\|\mathbf{u}\|$  i  $\|\mathbf{v}\|$ . Sprawdź, czy wektory są ortogonalne.

2. Dla punktów  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, -1, 1)$  i  $C(2, 2, 0)$  oblicz wektory  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$  oraz wyznacz kąt między nimi.
3. Oblicz iloczyn wektorowy  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  dla wektorów z zadania 1 i sprawdź, czy jest on ortogonalny do obu wektorów.
4. Dla wektorów na płaszczyźnie:  $\mathbf{a} = [3, 4]$  i  $\mathbf{b} = [-4, 3]$  oblicz ich iloczyn skalarny i sprawdź, czy są prostopadłe. Wyznacz rzut wektora  $\mathbf{a}$  na  $\mathbf{b}$ .
5. Oblicz długość wektora  $\mathbf{c} = [1, 1]$  i znajdź wersor tego wektora.
6. Oblicz długość wektora  $\mathbf{c} = [1, 2, 3]$  i znajdź wersor tego wektora.
7. Oblicz pole trójkąta rozpiętego na wektorach  $[2, 1, 2]$  i  $[-1, 1, 1]$ .
8. Oblicz kąt w stopniach między wektorami  $[4, 2, 1]$  i  $[1, 3, 2]$ .
9. Znajdź współrzędne środka odcinka o końcach  $A(-1, 2)$  i  $B(3, -2)$ .
10. Dla trójwymiarowych wektorów:  $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]$ ,  $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]$ ,  $\mathbf{c} = [c_x, c_y, c_z]$ , udowodnij, że spełniona jest następująca tożsamość:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

11. Znajdź najbardziej ogólną postać wektora jednocześnie prostopadłego do

$$\mathbf{v} = [-1, 3, 0] \quad \text{oraz} \quad \mathbf{u} = [0, 1, 1]$$

12. Dla jakich wartości parametrów  $p$  i  $q$  wektory  $\mathbf{a} = [1 - p, 3, -1]$  i  $\mathbf{b} = [-2, 4 - q, 2]$  są równoległe?
13. Dla jakich wartości parametru  $s$  wektory  $\mathbf{p} = [s, 2, 1 - s]$  i  $\mathbf{q} = [s, 1, -2]$  są prostopadłe?
14. Udowodnij, że dwa wektory muszą mieć równe długości, jeśli ich suma jest prostopadła do ich różnicę.

15. Mamy 2 osoby (A i B) idące sobie zgodnie z wzorami:

A:  $(4, 5) + (1, -2)t$

B:  $(1, -8) + (2, 4)t$

gdzie  $t$  oznacza czas. Dla jakiego  $t$  osoby będą najbliżej siebie?

## Proste

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P(1, 2)$  i  $Q(3, -1)$  w postaci kierunkowej i ogólnej.
2. Znajdź równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostej z zadania 1 i przechodzącej przez punkt  $R(0, 1)$ .
3. Prosta przechodzi przez punkt  $A(1, 2)$  i jest równoległa do prostej  $y = 2x + 3$ .  
Znajdź równanie tej prostej.
4. Dla prostych w postaci ogólnej  $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$  oraz  $l_2 : 4x - 6y - 5 = 0$   
określ, czy są równoległe, prostopadłe czy nachodzą się w jednym punkcie.  
Jeżeli mają punkt wspólny, oblicz jego współrzędne.
5. Oblicz kąt między prostą  $y = x + 3$  a osią  $Ox$ .
6. Podaj wektor prostopadły do prostej  $x + y + 1 = 0$ .
7. ★ Znajdź odległość punktu  $S(2, 3)$  od prostej  $l : 3x - 4y + 5 = 0$ .
8. ★ Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $T(1, 1)$  i tworzącej z osią  $OX$  kąt  $\pi/6$ . Podaj też punkt przecięcia z osią  $OY$ .

## Płaszczyzny

1. Podaj równanie ogólne i normalne płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $A(1, 0, 2)$  i o normalnej wektorowej  $\mathbf{n} = [2, -1, 1]$ .
2. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  i  $C(0, 0, 1)$ .
3. Określ kąt między płaszczyznami:  $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$  i  $\pi_2 : 2x - y + z - 3 = 0$ .
4. Dla płaszczyzny  $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$  oblicz odległość punktu  $P(3, 0, 1)$  od tej płaszczyzny.
5. Znajdź wektor prostopadły do płaszczyzny  $x + y + z = 1$ .
6. Płaszczyzna przechodzi przez punkt  $A(1, 2, 3)$  i jest równoległa do płaszczyzny  $2x + 3y + 4z = 5$ . Znajdź równanie tej płaszczyzny.
7. ★ Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $D(1, 1, 1)$  i zawierającej prostą przechodzącą przez punkty  $E(0, 0, 0)$  i  $F(1, 2, 3)$ .

## Prosta i płaszczyzna w przestrzeni

1. Sprawdź, czy prosta dana parametrycznie

$$\ell : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - t$$

przecina płaszczyznę  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ . Jeżeli tak, podaj punkt przecięcia.

2. ★ Oblicz odległość punktu  $G(2, -1, 0)$  od prostej przechodzącej przez punkty  $H(0, 0, 0)$  i  $I(1, 1, 1)$ .
3. ★ Rozważ układ prostej i płaszczyzny zależny od parametru  $\lambda$ :

$$\ell(\lambda) : x = \lambda + t, y = 1 + 2t, z = 2 - t$$

oraz

$$\pi : x - (\lambda - 1)y + z - 3 = 0$$

Określ wartości  $\lambda$ , dla których prosta jest równoległa do płaszczyzny, zawarta w płaszczyźnie lub przecina ją w jednym punkcie.