

## Dział 2 — Geometria Analityczna: Zadania / *Chapter 2 — Analytic Geometry: Problems*

Poniżej znajdują się przykładowe zadania do samodzielnego rozwiązania. Dla każdego podrozdziału przygotowano 5 zadań o zróżnicowanym stopniu trudności. Niektóre zadania zawierają podpowiedzi lub sugestie metod rozwiązania. / *Below are sample problems for self-solving. For each subsection, 5 problems of varying difficulty have been prepared. Some problems include hints or suggestions for solution methods.*

### Wektory / *Vectors*

1. Dla wektorów w przestrzeni / *For vectors in space*

$$\mathbf{u} = (1, 2, -1) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} = (2, -1, 3)$$

- oblicz  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , iloczyn skalarny  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  oraz normy  $\|\mathbf{u}\|$  i  $\|\mathbf{v}\|$ . Sprawdź, czy wektory są ortogonalne. / *calculate  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , the dot product  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  and the norms  $\|\mathbf{u}\|$  and  $\|\mathbf{v}\|$ . Check if the vectors are orthogonal.*
2. Dla punktów  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, -1, 1)$  i  $C(2, 2, 0)$  oblicz wektory  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$  oraz wyznacz kąt między nimi. / *For points  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, -1, 1)$  and  $C(2, 2, 0)$  calculate the vectors  $\overrightarrow{AB}$  and  $\overrightarrow{AC}$  and determine the angle between them.*
  3. Oblicz iloczyn wektorowy  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  dla wektorów z zadania 1 i sprawdź, czy jest on ortogonalny do obu wektorów. / *Calculate the cross product  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  for the vectors from problem 1 and check if it is orthogonal to both vectors.*
  4. Dla wektorów jednorodnych w płaszczyźnie:  $\mathbf{a} = (3, 4)$  i  $\mathbf{b} = (-4, 3)$  oblicz ich iloczyn skalarny i sprawdź, czy są prostopadłe. Wyznacz rzut wektora  $\mathbf{a}$  na  $\mathbf{b}$ . / *For homogeneous vectors in the plane:  $\mathbf{a} = (3, 4)$  and  $\mathbf{b} = (-4, 3)$  calculate their dot product and check if they are perpendicular. Determine the projection of vector  $\mathbf{a}$  onto  $\mathbf{b}$ .*
  5. ★ Dla wektorów  $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{q} = (2, 4, 6)$  oraz  $\mathbf{r} = (0, 1, -1)$  określ liniową zależność/zależności między nimi oraz rangi zbioru. / *For vectors  $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{q} = (2, 4, 6)$  and  $\mathbf{r} = (0, 1, -1)$  determine the linear dependence(s) between them and the rank of the set.*

### Proste / *Lines*

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P(1, 2)$  i  $Q(3, -1)$  w postaci kierunkowej i ogólnej. / *Write the equation of the line passing through points  $P(1, 2)$  and  $Q(3, -1)$  in slope-intercept and general form.*
2. Znajdź równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostej z zadania 1 i przechodzącej przez punkt  $R(0, 1)$ . / *Find the parametric equation of the line perpendicular to the line from problem 1 and passing through point  $R(0, 1)$ .*
3. Dla prostych w postaci ogólnej  $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$  oraz  $l_2 : 4x - 6y - 5 = 0$  określ, czy są równoległe, prostopadłe czy nachodzą się w jednym punkcie. Jeżeli mają punkt wspólny, oblicz jego współrzędne. / *For lines in general form  $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$  and  $l_2 : 4x - 6y - 5 = 0$  determine if they are parallel, perpendicular or intersect at one point. If they have a common point, calculate its coordinates.*
4. Znajdź odległość punktu  $S(2, 3)$  od prostej  $l : 3x - 4y + 5 = 0$ . / *Find the distance from point  $S(2, 3)$  to the line  $l : 3x - 4y + 5 = 0$ .*

5. ★ Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $T(1, 1)$  i tworzącej z osią  $OX$  kąt  $\pi/6$ . Podaj też punkt przecięcia z osią  $OY$ . / *Write the equation of the line passing through point  $T(1, 1)$  and forming an angle of  $\pi/6$  with the  $OX$  axis. Also provide the intersection point with the  $OY$  axis.*

## Płaszczyzny / *Planes*

1. Podaj równanie ogólne i normalne płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $A(1, 0, 2)$  i o normalnej wektorowej  $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ . / *Give the general and normal equation of the plane passing through point  $A(1, 0, 2)$  with normal vector  $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ .*
2. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  i  $C(0, 0, 1)$ . / *Find the equation of the plane passing through points  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  and  $C(0, 0, 1)$ .*
3. Określ kąt między płaszczyznami:  $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$  i  $\pi_2 : 2x - y + z - 3 = 0$ . / *Determine the angle between the planes:  $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$  and  $\pi_2 : 2x - y + z - 3 = 0$ .*
4. Dla płaszczyzny  $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$  oblicz odległość punktu  $P(3, 0, 1)$  od tej płaszczyzny. / *For the plane  $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$  calculate the distance of point  $P(3, 0, 1)$  from this plane.*
5. ★ Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $D(1, 1, 1)$  i zawierającej prostą przechodzącą przez punkty  $E(0, 0, 0)$  i  $F(1, 2, 3)$ . / *Find the equation of the plane passing through point  $D(1, 1, 1)$  and containing the line passing through points  $E(0, 0, 0)$  and  $F(1, 2, 3)$ .*

## Prosta i płaszczyzna w przestrzeni / *Line and plane in space*

1. Sprawdź, czy prosta dana parametrycznie / *Check if the line given parametrically*

$$\ell : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - t$$

przecina płaszczyznę  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ . Jeżeli tak, podaj punkt przecięcia. / *intersects the plane  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ . If so, provide the intersection point.*

2. Znajdź rzut prostej z zadania 1 na oś  $OX$  (współrzędne punktów przecięcia z tą osią, jeżeli istnieją). / *Find the projection of the line from problem 1 onto the  $OX$  axis (coordinates of the intersection points with this axis, if they exist).*
3. ★ Oblicz odległość punktu  $G(2, -1, 0)$  od prostej przechodzącej przez punkty  $H(0, 0, 0)$  i  $I(1, 1, 1)$ . / *Calculate the distance of point  $G(2, -1, 0)$  from the line passing through points  $H(0, 0, 0)$  and  $I(1, 1, 1)$ .*
4. Dla prostej  $\ell$  o równaniu parametrycznym  $x = 2 + s$ ,  $y = 3 - 2s$ ,  $z = 1 + 4s$  znajdź prostopadłą do niej płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $M(1, 0, 0)$  (tzn. płaszczyznę, której normalna jest równoległa do wektora kierunkowego prostej  $\ell$ ). / *For the line  $\ell$  with parametric equation  $x = 2 + s$ ,  $y = 3 - 2s$ ,  $z = 1 + 4s$  find a plane perpendicular to it passing through the point  $M(1, 0, 0)$  (i.e. a plane whose normal is parallel to the direction vector of the line  $\ell$ ).*
5. ★ Rozważ układ prostej i płaszczyzny zależny od parametru  $\lambda$ : / *Consider a system of a line and a plane dependent on the parameter  $\lambda$ :*

$$\ell(\lambda) : x = \lambda + t, y = 1 + 2t, z = 2 - t$$

oraz / *and*

$$\pi : x - (\lambda - 1)y + z - 3 = 0$$

Określ wartości  $\lambda$ , dla których prosta jest równoległa do płaszczyzny, zawarta w płaszczyźnie lub przecina ją w jednym punkcie. / *Determine the values of  $\lambda$  for which the line is parallel to the plane, contained in the plane or intersects it at one point.*