

## Dział 2 — Geometria Analityczna: Zadania

Poniżej znajdują się przykładowe zadania do samodzielnego rozwiązania. Dla każdego podrozdziału przygotowano 5 zadań o zróżnicowanym stopniu trudności. Niektóre zadania zawierają podpowiedzi lub sugestie metod rozwiązania.

### Wektory

1. Dla wektorów w przestrzeni

$$\mathbf{u} = (1, 2, -1) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} = (2, -1, 3)$$

oblicz  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ , iloczyn skalarny  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  oraz normy  $\|\mathbf{u}\|$  i  $\|\mathbf{v}\|$ . Sprawdź, czy wektory są ortogonalne.

2. Dla punktów  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(3, -1, 1)$  i  $C(2, 2, 0)$  oblicz wektory  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  oraz wyznacz kąt między nimi.
3. Oblicz iloczyn wektorowy  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  dla wektorów z zadania 1 i sprawdź, czy jest on ortogonalny do obu wektorów.
4. Dla wektorów jednorodnych w płaszczyźnie:  $\mathbf{a} = (3, 4)$  i  $\mathbf{b} = (-4, 3)$  oblicz ich iloczyn skalarny i sprawdź, czy są prostopadłe. Wyznacz rzut wektora  $\mathbf{a}$  na  $\mathbf{b}$ .
5. ★ Dla wektorów  $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{q} = (2, 4, 6)$  oraz  $\mathbf{r} = (0, 1, -1)$  określ liniową zależność/zależności między nimi oraz rangi zbioru.

### Proste

1. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P(1, 2)$  i  $Q(3, -1)$  w postaci kierunkowej i ogólnej.
2. Znajdź równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostej z zadania 1 i przechodzącej przez punkt  $R(0, 1)$ .
3. Dla prostych w postaci ogólnej  $l_1 : 2x - 3y + 1 = 0$  oraz  $l_2 : 4x - 6y - 5 = 0$  określ, czy są równoległe, prostopadłe czy nachodzą się w jednym punkcie. Jeżeli mają punkt wspólny, oblicz jego współrzędne.
4. Znajdź odległość punktu  $S(2, 3)$  od prostej  $l : 3x - 4y + 5 = 0$ .
5. ★ Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $T(1, 1)$  i tworzącej z osią  $OX$  kąt  $\pi/6$ . Podaj też punkt przecięcia z osią  $OY$ .

### Płaszczyzny

1. Podaj równanie ogólne i normalne płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $A(1, 0, 2)$  i o normalnej wektorowej  $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ .
2. Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  i  $C(0, 0, 1)$ .
3. Określ kąt między płaszczyznami:  $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$  i  $\pi_2 : 2x - y + z - 3 = 0$ .
4. Dla płaszczyzny  $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$  oblicz odległość punktu  $P(3, 0, 1)$  od tej płaszczyzny.
5. ★ Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $D(1, 1, 1)$  i zawierającej prostą przechodzącą przez punkty  $E(0, 0, 0)$  i  $F(1, 2, 3)$ .

## Prosta i płaszczyzna w przestrzeni

1. Sprawdź, czy prosta dana parametrycznie

$$\ell : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 3 - t$$

przecina płaszczyznę  $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ . Jeżeli tak, podaj punkt przecięcia.

2. Znajdź rzut prostej z zadania 1 na oś OX (współrzędne punktów przecięcia z tą osią, jeżeli istnieją).
3. ★ Oblicz odległość punktu  $G(2, -1, 0)$  od prostej przechodzącej przez punkty  $H(0, 0, 0)$  i  $I(1, 1, 1)$ .
4. Dla prostej  $\ell$  o równaniu parametrycznym  $x = 2 + s, y = 3 - 2s, z = 1 + 4s$  znajdź prostopadłą do niej płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $M(1, 0, 0)$  (tzn. płaszczyznę, której normalna jest równoległa do wektora kierunkowego prostej  $\ell$ ).
5. ★ Rozważ układ prostej i płaszczyzny zależny od parametru  $\lambda$ :

$$\ell(\lambda) : x = \lambda + t, y = 1 + 2t, z = 2 - t$$

oraz

$$\pi : x - (\lambda - 1)y + z - 3 = 0$$

Określ wartości  $\lambda$ , dla których prosta jest równoległa do płaszczyzny, zawarta w płaszczyźnie lub przecina ją w jednym punkcie.