

## Dział 3 — Rachunek Różniczkowy i Całkowy: Zadania

Poniżej znajdują się przykładowe zadania do samodzielnego rozwiązania. Dla każdego podrozdziału przygotowano 5 zadań o zróżnicowanym stopniu trudności. Niektóre zadania zawierają podpowiedzi lub sugestie metod rozwiązania.

### Funkcje

1. Rozważ funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  dla  $x \neq 1$  i  $f(1) = 2$ . Zbadaj, czy  $f$  jest dobrze określona w  $x = 1$ .
2. Zdefiniuj funkcję  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  przez  $g(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Oblicz  $g(1), g(2), g(3)$  i opisz, czy ciąg  $g(n)$  jest zbieżny.
3. Dla funkcji  $h(x) = |x^2 - 4|$  podaj dziedzinę, zbiór wartości oraz narysuj szkic kształtu funkcji (wystarczy opisać punkty charakterystyczne).
4. ★ Zbadaj, czy funkcja  $p(x) = \ln(x^2 + 1)$  jest parzysta, nieparzysta czy żadna z nich.
5. Zaproponuj przykład funkcji wielowymiarowej  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  i podaj jej interpretację (np. w kontekście pola skalarnego lub wyznacznika macierzy 2x2 jako funkcji macierzy).

### Granice

1. Oblicz granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .
2. Oblicz  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3x}{x^3-1}$ .
3. Oblicz  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ .
4. Dla ciągu  $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$  oblicz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
5. ★ Zbadaj granicę jednostronną  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x$  w zależności od parametru  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### Pochodne

1. Oblicz pochodną funkcji  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 1$  i znajdź miejsca zerowe pochodnej. Zinterpretuj je jako kandydatów na ekstrema.
2. Dla  $f(x) = \sin x \cdot e^x$  oblicz  $f'(x)$ .
3. ★ Zastosuj regułę łańcuchową do funkcji  $F(x) = \ln(\cos(x^2))$  i oblicz  $F'(x)$  (tam gdzie istnieje).
4. Znajdź pochodną funkcji  $f(x) = x^\alpha$  dla  $\alpha \in \mathbb{R}$  i omów definicję dla  $x > 0$ .
5. ★ Dla funkcji dwóch zmiennych  $F(x, y) = x^2y + \sin(xy)$  oblicz pochodne cząstkowe  $\frac{\partial F}{\partial x}$  i  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

### Całki

1. Oblicz całkę nieoznaczoną  $\int (3x^2 - 2x + 1) dx$ .
2. Oblicz całkę oznaczoną  $\int_0^1 (2x + 1) dx$ .
3. Oblicz  $\int x e^x dx$  (całkowanie przez części).
4. Oblicz  $\int \frac{1}{x^2+1} dx$  oraz wyjaśnij związek z funkcją arctan.
5. ★ Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót wykresu  $y = \sqrt{x}$  dla  $x \in [0, 1]$  wokół osi OX (metoda pierścieni).

## Równania różniczkowe

1. Rozwiąż równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu o rozdzielnych zmiennych:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+y^2}$ ,  $y(0) = 0$ .
2. Znajdź ogólne rozwiązanie równania liniowego pierwszego rzędu  $\frac{dy}{dx} + y = e^{2x}$ .
3. Rozwiąż równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach:  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .
4. Dla równania  $y'' + y = \sin x$  znajdź szczególne rozwiązanie metodą operatorów lub wariacji stałych.
5. ★ Omów warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania dla równań zwyczajnych (twierdzenie Picarda-Lindelöfa) w skrócie i podaj przykład układu, gdzie warunek Lipschitza jest istotny.

---

Plik przygotowany jako przykładowy zestaw zadań. Jeżeli chcesz, mogę dodać rozwiązania krok po kroku lub sformatować go jako arkusz egzaminacyjny (punktacja, czas).