Dział 1 — Algebra Liniowa: Ćwiczenia

Macierze i podstawowe operacje

1. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

oblicz

- $A + B$
- $A - B$
- $2A$
- A^2
- $3B - 2A$
- $A \cdot B$
- sprawdź, czy $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

sprawdź, czy

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = B \cdot A \cdot D \cdot C = D \cdot C \cdot B \cdot A.$$

3. Dana jest macierz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierz otrzymaną po przestawieniu wierszy: zamień 1. i 3. wiersz, a następnie dodaj do 2. wiersza dwukrotność nowego 1. wiersza. Zapisz wszystkie kroki dla każdej operacji.

4. Pokaż, że macierz diagonalna $D = \operatorname{diag}(2, -3, 5)$ jest przemienna z dowolną macierzą diagonalną $E = \operatorname{diag}(a, b, c)$. Dodatkowo oblicz D^3 oraz, jeśli istnieje, D^{-1}.

5. $\star$ Dla macierzy

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oblicz P^2 i P^3. Czy ciąg P^n ma zauważalny wzorzec dla $n = 1, 2, 3$?

6. ⋆⋆ Macierze Pauliego są zdefiniowane jako:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gdzie i to jednostka urojona. Sprawdź, że:

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$ (macierz jednostkowa)
- $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$, $\sigma_y \sigma_z = i\sigma_x$, $\sigma_z \sigma_x = i\sigma_y$
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} I$ (antykomutator)

Wyznaczniki

1. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

używając metody Sarrusa.

2. Wyznacz wyznaczniki używając rozwinięcia Laplace'a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Pokaż, że jeżeli w macierzy dwa wiersze są równe, to wyznacznik jest równy zero. Daj przykład macierzy 3×3 z dwoma równymi wierszami i oblicz jej wyznacznik. Uzasadnij, dlaczego tak się dzieje.

4. Dla macierzy zależnej od parametru t:

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$$

oblicz $\det(M(t))$ i znajdź wartości t, dla których macierz jest osobliwa.

5. Rozwiąż równanie

$$\det \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & x \end{pmatrix} = 0$$

6. $\star$ Rozwiąż równanie

$$\det\begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & -x \end{pmatrix} = 0$$

7. Oblicz wyznacznik macierzy

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & a \\ -a & -a & a \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & a \end{vmatrix}$$

8. Sprawdź słuszność:

$$\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Odwracanie macierzy

1. Znajdź rząd macierzy:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Znajdź macierz odwrotną używając wzoru dla macierzy 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   oblicz macierze odwrotne za pomocą metod:

   - dołączania macierzy jednostkowej i wykonywania eliminacji Gaussa-Jordana,
   - użycia wzoru z macierzami dopełnień algebraicznych

   Czyli dla każdej macierzy podaj dwie metody obliczenia macierzy odwrotnej (jeśli istnieje).

4. Sprawdź, czy macierz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest odwracalna. Uzasadnij odpowiedź (użyj wyznacznika). Czy można było zauważyć to bez obliczania wyznacznika? Co musiałoby się stać, aby macierz była odwracalna?

5. Dla macierzy A spełniającej $A^2 = I$ pokaż, że $A^{-1} = A$. Podaj przykład niebanalnej macierzy 2×2 spełniającej ten warunek (innej niż I i $-I$). Ile jest takich macierzy?

6. Oblicz macierz odwrotną macierzy diagonalnej $D = \mathrm{diag}(2, 5, -3, 1)$, jeżeli istnieje. Omów warunek istnienia odwrotności dla macierzy diagonalnej.

7. Rozwiąż równania macierzowe:

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c)

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Układy równań liniowych

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5, \\ x - 4y &= -2. \end{aligned}$$

używając metod: Cramera, eliminacji Gaussa i macierzy odwrotnej.

2. Rozwiąż układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6,\\
2x - y + 3z &= 14,\\
-x + 2y - z &= -2.
\end{aligned}
$$

używając metod: Cramera, eliminacji Gaussa i macierzy odwrotnej.

3. $\star$ Rozważ układ parametryczny zależny od λ:

$$
\begin{aligned}
x + \lambda y &= 1,\\
2x + (1+\lambda)y &= 3.
\end{aligned}
$$

Określ wartości λ, dla których układ ma jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub brak rozwiązań.

4. Dla macierzy współczynników

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}
$$

i pionowego wektora prawych stron $b = (4,1,3)^\top$ rozwiąż $Ax = b$ i sprawdź wynik przez podstawienie.

5. Rozwiąż układy równań:

a)

$$
\begin{cases}
x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1,\\
2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4,\\
x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5;
\end{cases}
$$

b)

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2,\\
x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14,\\
-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0;
\end{cases}
$$

c)

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2,\\
x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14,\\
-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2;
\end{cases}
$$

d)

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$$

e)

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 2, \\ 5x_1 - 4x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = a; \end{cases}$$

f)

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 6, \\ x_2 - 6x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_3 = 3; \end{cases}$$

g)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 5x_2 = 3; \end{cases}$$

h)

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$$

i)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$$

j)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3, \\ 4x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$$

k)

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_3 = 8, \\ x_2 - 6x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$$

l)

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -7, \\ -2x_1 + 9x_2 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 = -2; \end{cases}$$