

# Przewodnik Studenta: Nauka Rachunku Różniczkowego z Twoim Asystentem AI

Witaj w interaktywnym przewodniku po świecie analizy matematycznej! Zaczynamy od absolutnych podstaw, na których zbudowany jest cały rachunek różniczkowy i całkowy – od pojęcia funkcji.

## Klucz do sukcesu: Twoja aktywność i ciekawość

### To Ty kierujesz nauką!

- Nie rozumiesz terminu? Poproś AI: “Wyjaśnij mi, czym jest ‘dziedzina’ funkcji, używając prostej analogii.”
- Przykład jest niejasny? Poproś o inny: “Czy możesz podać mi przykład relacji, która nie jest funkcją?”
- Chcesz się upewnić? Sprawdź swoje myślenie: “Jeśli dobrze rozumiem, każdy ciąg to funkcja, ale nie każda funkcja to ciąg, tak?”

### Weź odpowiedzialność za swoją naukę

Podejdź do tego zadania rzetelnie. Celem jest zrozumienie. Twoja porażka w opanowaniu materiału będzie wyłącznie Twoją porażką. Wykorzystaj tę szansę mądrze.

---

## Temat 1: Relacje i Funkcje – Podstawowe definicje

**Pojęcia kluczowe:** W tej sekcji poznasz: relację, funkcję, dziedzinę, przeciwdziedzinę, zbiór wartości, argument, wartość funkcji.

- **Krok 1: Budowanie intuicji**
    - **Prompt 1.1:** “Wyjaśnij mi, czym jest relacja między dwoma zbiorami. Następnie wyjaśnij, jakim specjalnym rodzajem relacji jest funkcja. Użyj analogii ‘maszyny’, która dla każdego argumentu wejściowego produkuje dokładnie jeden wynik.”
    - **Prompt 1.2:** “Zdefiniuj pojęcia: dziedzina, przeciwdziedzina i zbiór wartości funkcji. Pokaż różnicę między przeciwdziedziną a zbiorem wartości na prostym przykładzie, np.  $f(x) = x^2$  dla  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .”
  - **Krok 2: Praktyka i interaktywne zadania**
    - **Prompt 1.3:** “Podaj mi 3 przykłady relacji. Poproś mnie, abym dla każdej z nich określił/a, czy jest funkcją, i uzasadnił/a swoją odpowiedź. Sprawdź moje rozumowanie.”
  - **Krok 3: Mini-sprawdzian**
    - **Prompt 1.4:** “Zadaaj mi 3 pytania typu prawda/fałsz dotyczące podstawowych definicji funkcji, dziedziny i zbioru wartości. Sprawdź moje odpowiedzi.”
- 

## Temat 2: Funkcje rzeczywiste i ich wykresy

**Pojęcia kluczowe:** W tej sekcji nauczysz się: funkcji rzeczywistej, wykresu funkcji, miejsca zerowego, monotoniczności.

- **Krok 1: Budowanie intuicji**
  - **Prompt 2.1:** “Co to jest funkcja rzeczywista jednej zmiennej rzeczywistej ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )? Jak jej działanie reprezentujemy wizualnie za pomocą wykresu w układzie współrzędnych?”

- **Prompt 2.2:** “Co to jest miejsce zerowe funkcji? Co to znaczy, że funkcja jest rosnąca, malejąca, stała, niemalejąca lub nierosnąca na pewnym przedziale? Pokaż mi przykłady wykresów ilustrujących te pojęcia.”
  - **Krok 2: Praktyka i interaktywne zadania**
    - **Prompt 2.3:** “Narysuj (lub opisz) dla mnie wykres prostej funkcji, np.  $f(x) = x - 2$ . Poproś mnie o odczytanie z wykresu jej miejsca zerowego, dziedziny, zbioru wartości oraz przedziałów monotoniczności. Sprawdź moje odpowiedzi.”
  - **Krok 3: Mini-sprawdzian**
    - **Prompt 2.4:** “Pokaż mi wykres pewnej funkcji (może być złożony z kilku odcinków). Zadaż mi 3 pytania dotyczące jej własności (np. ‘Jaka jest wartość funkcji dla  $x = \dots$ ’, ‘Gdzie funkcja jest malejąca?’, ‘Jakie są miejsca zerowe?’).”
- 

## Temat 3: Ciągi jako szczególny rodzaj funkcji

**Pojęcia kluczowe:** W tej sekcji nauczysz się: definicji ciągu jako funkcji, wyrazu ciągu, wzoru ogólnego ciągu.

- **Krok 1: Budowanie intuicji**
    - **Prompt 3.1:** “Wyjaśnij mi, dlaczego ciąg (np. arytmetyczny lub geometryczny) jest specjalnym rodzajem funkcji. Jaka jest jego dziedzina i typowy zbiór wartości?”
    - **Prompt 3.2:** “Czym jest wzór ogólny ciągu  $a_n$ ? Pokaż mi, jak za jego pomocą obliczyć kilka pierwszych wyrazów dla ciągu o wzorze  $a_n = 2n + 1$ .”
  - **Krok 2: Praktyka i interaktywne zadania**
    - **Prompt 3.3:** “Podaj mi wzór ogólny pewnego ciągu, np.  $a_n = n^2 - 1$ . Poproś mnie o obliczenie pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu. Sprawdź moje wyniki.”
  - **Krok 3: Mini-sprawdzian**
    - **Prompt 3.4:** “Daj mi 2 proste wzory ogólne ciągów i poproś o obliczenie konkretnych wyrazów (np.  $a_7$ ). Sprawdź moje odpowiedzi.”
- 

## Finał: Sprawdź swoją wiedzę i przygotuj się na kolejny krok

### Krok 1: Ostateczny sprawdzian

- **Prompt 4.1:** “Przygotuj dla mnie zbiorczy test z podstaw funkcji. Chcę, żeby zawierał 3 zadania: 1. Pytanie o to, czy dana relacja jest funkcją. 2. Pytanie o odczytanie własności funkcji z wykresu. 3. Zadanie na obliczenie kilku wyrazów ciągu.”

### Krok 2: Po co się tego uczyć? Funkcje wokół nas

- **Prompt 5.1 (Modelowanie):** “Podaj mi 3 przykłady z życia codziennego lub z fizyki, które można opisać za pomocą funkcji. Np. droga jako funkcja czasu, temperatura jako funkcja pory dnia, zysk firmy jako funkcja liczby sprzedanych produktów.”

### Krok 3: Co dalej? Zapowiedź kolejnego modułu

- **Prompt 6.1 (Zapowiedź):** “Opanowałem/am podstawy funkcji. Co jest następnym krokiem w analizie matematycznej? Daj mi krótką, jednozdaniową zapowiedź tego, czym jest ‘granica funkcji’ i dlaczego jest to jedno z najważniejszych pojęć w matematyce.”

Powodzenia w Twojej podróży po świecie analizy matematycznej!