Jak przedstawić liczbę w dowolnym systemie pozycyjnym? Kompletny przewodnik.

Wszyscy jesteśmy przyzwyczajeni do systemu dziesiętnego, ale świat informatyki, matematyki i techniki często korzysta z innych podstaw, takich jak system binarny (dwójkowy), ósemkowy czy szesnastkowy. Zrozumienie, jak dowolna liczba może być reprezentowana w dowolnym systemie, jest kluczową umiejętnością. Okazuje się, że cała procedura opiera się na jednym, eleganckim twierdzeniu matematycznym.

Fundament: Twierdzenie o Dzieleniu z Resztą

Podstawą całej metody jest **Twierdzenie o Dzieleniu z Resztą**. Mówi ono, że dla dowolnej liczby całkowitej L i dowolnej dodatniej liczby całkowitej b (naszej przyszłej podstawy), istnieją **jednoznacznie określone** liczby całkowite:

- q (iloraz)
- r (reszta)

takie, że zachodzi równość:

$$L = q \cdot b + r$$

Najważniejszy jest warunek nałożony na resztę: $0 \leq r < b$. Gwarantuje on, że reszta r **zawsze będzie prawidłową cyfrą** w systemie o podstawie b (który używa cyfr od 0 do $b - 1$).

Cel: Wzór Ogólny na Liczbę

Naszym celem jest przedstawienie liczby L w systemie o podstawie b jako ciąg cyfr $(c_k c_{k-1} ... c_1 c_0)_b$. Jest to skrócony zapis **postaci wielomianowej**:

$$L = c_k \cdot b^k + c_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot b^1 + c_0 \cdot b^0$$

Cała sztuka polega na znalezieniu tych współczynników $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0$, które są właśnie cyframi naszej liczby. Zastosowanie twierdzenia o dzieleniu z resztą w pętli (iteracyjnie) pozwala nam je znaleźć jedna po drugiej.

Zastosowanie w Praktyce: Rozkład Liczby 23

Aby zobaczyć, jak to działa, przeanalizujemy jeden przykład — rozkład liczby **23** — na trzy różne sposoby, używając dwóch metod prezentacji: tabelarycznej i algebraicznej.

Podstawa b = 2 (System Binarny)

1. Metoda Tabelaryczna (Algorytmiczna) Ta metoda jest szybka i idealna do obliczeń. Dzielimy liczbę (a potem kolejne ilorazy) przez podstawę 2 i zapisujemy reszty.

Dzielenie (L / 2)	Iloraz (q)	Reszta (r)	Cyfra
23 / 2	11	**1**	c_0
11 / 2	5	**1**	c_1
5 / 2	2	**1**	c_2
2 / 2	1	**0**	c_3
1 / 2	0	**1**	c_4

Gdy iloraz osiąga 0, kończymy. Cyfry odczytujemy od dołu do góry.

Wynik: $23_{10} = 10111_2$

2. Metoda Algebraiczna (Wyprowadzenie Wzoru) Ta metoda pokazuje, jak z kolejnych dzieleń "buduje się" ostateczny wzór wielomianowy.

- **Krok 1: Zapis zagnieżdżony**

$$23 = 11 \cdot 2 + \mathbf{1}$$

$$23 = (5 \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}$$

$$23 = ((2 \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}$$

$$23 = (((1 \cdot 2 + \mathbf{0}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}$$

$$23 = (((\mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{0}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}) \cdot 2 + \mathbf{1}$$

- **Krok 2: Przejście do postaci wielomianowej**

  Otwierając nawiasy w powyższym wyrażeniu, otrzymujemy:

$$23 = \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{1} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$$

`Współczynniki przy potęgach dwójki to nasze cyfry: `10111`.`

Podstawa b = 3 (System Trójkowy)

1. Metoda Tabelaryczna

Dzielenie (L / 3)	Iloraz (q)	Reszta (r)	Cyfra
23 / 3	7	**2**	c_0
7 / 3	2	**1**	c_1
2 / 3	0	**2**	c_2

Czytając od dołu: **212**. **Wynik:** $23_{10} = 212_3$

2. Metoda Algebraiczna

- **Krok 1: Zapis zagnieżdżony**

$$23 = 7 \cdot 3 + \mathbf{2}$$

$$23 = (\mathbf{2} \cdot 3 + \mathbf{1}) \cdot 3 + \mathbf{2}$$

- **Krok 2: Postać wielomianowa**

$$23 = \mathbf{2} \cdot 3^2 + \mathbf{1} \cdot 3^1 + \mathbf{2} \cdot 3^0$$

`Współczynniki to `212`.`

Podstawa b = 4 (System Czwórkowy)

1. Metoda Tabelaryczna

Dzielenie (L / 4)	Iloraz (q)	Reszta (r)	Cyfra
23 / 4	5	**3**	c_0
5 / 4	1	**1**	c_1
1 / 4	0	**1**	c_2

Czytając od dołu: **113**. **Wynik:** $23_{10} = 113_4$

2. Metoda Algebraiczna

- **Krok 1: Zapis zagnieżdżony**

$$23 = 5 \cdot 4 + \mathbf{3}$$

$$23 = (\mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{1}) \cdot 4 + \mathbf{3}$$

- **Krok 2: Postać wielomianowa**

$$23 = \mathbf{1} \cdot 4^2 + \mathbf{1} \cdot 4^1 + \mathbf{3} \cdot 4^0$$

`Współczynniki to `113`.`

Podsumowanie

Jak widać, obie metody prowadzą do tego samego wyniku i są dwiema stronami tego samego medalu.

- **Metoda tabelaryczna** to czysty, mechaniczny algorytm, idealny do szybkich obliczeń.
- **Metoda algebraiczna** daje głębsze zrozumienie, pokazując, jak iteracyjne stosowanie twierdzenia o dzieleniu z resztą bezpośrednio prowadzi do definicji liczby w systemie pozycyjnym.

Opanowanie tego procesu pozwala na swobodne poruszanie się między różnymi systemami liczbowymi i jest fundamentalną wiedzą w wielu dziedzinach nauki.