Dział 3 — Rachunek Różniczkowy i Całkowy: Zadania

Granice ciągów

- 1. Oblicz granicę ciągów

 - 1) $u_n = \frac{n}{n+1}$ 2) $u_n = \frac{4n-3}{6-5n}$ 3) $u_n = \frac{n^2-1}{3n-3}$ 4) $u_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}$ 5) $u_n = \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$ 6) $u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$

 - 6) $u_{n} = \frac{(2n-1)^{2}}{(4n-1)(3n+2)}$ 7) $u_{n} = \frac{(2n-1)^{3}}{(4n-1)^{2}(1-5n)}$ 8) $u_{n} = \frac{3}{n} \frac{10}{\sqrt{n}}$ 9) $u_{n} = \frac{(-1)^{n}}{2n-1}$ 10) $u_{n} = (\frac{2n-3}{3n+1})^{2}$ 11) $u_{n} = (\frac{5n-2}{3n-1})^{3}$ 12) $u_{n} = \frac{(\sqrt{n}+3)^{2}}{n+1}$ 13) $u_{n} = \frac{\sqrt{n}-2}{3n+5}$ 14) $u_{n} = \frac{n-10}{3}$ 15) $u_{n} = \frac{(-0.8)^{n}}{2n-5}$ 16) $u_{n} = \frac{2-5n-10n^{2}}{3n+15}$ 17) $u_{n} = \frac{2n+(-1)^{n}}{n}$ 18) $u_{n} = \sqrt{\frac{1+2n^{2}}{n}-\sqrt{1+4n^{2}}}}$ 19) $u_{n} = \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}$ 20) $u_{n} = \sqrt[3]{\frac{n-1}{n+10}}$

 - $20) \ u_n = \sqrt[3]{\frac{n-1}{8n+10}}$
 - 21) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$ 22) $u_n = \frac{\sqrt{n^3+4}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$

 - 23) $u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3 n} n}$
 - $24) \ u_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 7n} 2n}$
 - 25) $u_n = \sqrt{n+2} \sqrt{n}$
 - 26) $u_n = \sqrt{n^2 + n} n$

 - 20) $u_n = \sqrt{n^2 + 5n}$ 27) $u_n = n \sqrt{n^2 + 5n}$ 28) $u_n = \sqrt{3n^2 + 2n 5} n\sqrt{3}$ 29) $u_n = 3n \sqrt{9n^2 + 6n 15}$ 30) $u_n = \sqrt[3]{n^3 + 4n^2 n}$

 - 31) $u_n = \sqrt[3]{n^2(2 \sqrt[3]{2n^3 + 5n^2 7})}$ 32) $u_n = \frac{4^n 1}{2^{2n} 7}$

 - 32) $u_n = \frac{2^{2n} 7}{5 \cdot 3^{2n} 1}$ 33) $u_n = \frac{5 \cdot 3^{2n} 1}{4 \cdot 9^n + 7}$ 34) $u_n = \frac{3 \cdot 2^{2n+2} 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$ 35) $u_n = \frac{-8^n 1}{7^{n+1}}$ 36) $u_n = \frac{2^{n+1} 3^{n+2}}{3^{n+2}}$
 - 37) $u_n = (\frac{3}{2})^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$ 38) $u_n = \sqrt[n]{3^n+2^{n+1}-1}$

$$39) \ u_n = \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$$

40)
$$u_n = \sqrt[n]{10^{100} - \frac{1}{10^{100}}}$$

41) $u_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{4})^n}$
42) $u_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$
43) $u_n = \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$

41)
$$u_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{4})^n}$$

42)
$$u_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$$

43)
$$u_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

Granice funkcji

1. Oblicz granice funkcji

1)
$$\lim_{x \to 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$$

2)
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$$

3)
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$$

4)
$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^5+32}$$

5)
$$\lim_{x \to A} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 9x + 20}$$

6)
$$\lim_{x \to -5} \frac{x^3 + 125}{2x^2 - 50}$$

7)
$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{4x^2 + 9x + 2}$$

8)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$
, n - liczba naturalna

9)
$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$$

10)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$$

Oblicz granice funkcji

1)
$$\lim_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3}$$
2) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$
3) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-1}{x+1}$
4) $\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^5+32}$
5) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$
6) $\lim_{x\to -5} \frac{x^3+125}{2x^2-50}$
7) $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$
8) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, n - liczba naturalna
9) $\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(-1)^{[x]}}{x^2-9}$
10) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+mx-1}}{x}$
11) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ n - liczba naturalna.
12) $\lim_{x\to 25} \frac{\sqrt{x-5}}{x-25}$
13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

12)
$$\lim_{x \to 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$$

13)
$$\lim_{x \to 25} x - 25$$

13) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$
14) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$
15) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$
16) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{3 \sin 2x}$
17) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$
18) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

14)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$$

15)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

16)
$$\lim_{x \to 0} \frac{4x}{3 \sin 2x}$$

17)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

18)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}$$

18)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}$$
19)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

20)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x}$$

20)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\lg x}{4x}$$
21)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{8-x}{\sin x}$$
22)
$$\lim_{x \to \pi} \frac{8-x}{\sin x}$$

$$\begin{array}{ccc}
x \to 0 \\
\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}
\end{array}$$

$$24) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\begin{array}{c}
x \to \frac{\pi}{2} \\
25) \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}} \\
\frac{1}{4} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4}
\end{array}$$

26)
$$\lim_{x \to 1} \frac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$$

26)
$$\lim_{x \to 1} \frac{|\operatorname{tg}(x-1)|}{(x-1)^2}$$
27)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$$

28)
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$$

$$29) \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x}}{x}$$

30)
$$\lim_{x \to 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}$$

31)
$$\lim_{x \to 0} (1 + kx)^{\frac{n}{x}}$$

2. Dla podanych funkcji określ, czy są ciągłe w podanych punktach. Jeśli nie są, to czy można je tak zdefiniować, aby były ciągłe.

1)
$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$$
 dla $x \neq -5$ i $f(-5) = -10$.
2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$.
3) $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$.
4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
5) $f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x - 1|}$
6) $f(x) = x - [x]$
7) $f(x) = [x] + [-x]$

2)
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} dla \ x \neq 0 i \ f(0) = 1$$

3)
$$f(x) = \frac{\sin^n x}{|x|}$$
 dla $x \neq 0$ i $f(0) = 1$.

4)
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

5)
$$f(x) = \frac{x^2 - x^3}{|x - 1|}$$

6)
$$f(x) = x - [x]$$

7)
$$f(x) = [x] + [-x]$$

8)
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

9)
$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$$

10)
$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

11)
$$x\left[\frac{1}{x}\right]$$
 w punkcie $x=0$

6)
$$f(x) = x - |x|$$

7) $f(x) = [x] + [-x]$
8) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
9) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$
10) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$
11) $x \begin{bmatrix} \frac{1}{x} \end{bmatrix}$ w punkcie $x = 0$.
12) $x \frac{b}{x} \begin{bmatrix} \frac{x}{a} \end{bmatrix}$ w punkcie $x = 0$.

13)
$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$
 w punkcie $x = 0$.

14)
$$e^{\frac{1}{1-x^2}}$$
 w punkcie $x = 1$.

15)
$$xe^{\frac{1}{x}}$$
 w punkcie $x = 0$.

16)
$$\frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$$
 w punkcie $x=0$.

Pochodne funkcji

1. Oblicz pochodne funkcji

1)
$$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6$$

2)
$$y = 5x^{15} - x^2 + \frac{1}{3}x - 2$$

3)
$$y = ax^3 + \frac{b}{x} + \epsilon$$

4)
$$y = \frac{4}{x^3}$$

5)
$$y = 9x^{7} + 3x^{-5} - 3x^{-11}$$

1)
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6$$

2) $y = 5x^{15} - x^2 + \frac{1}{3}x - 2$
3) $y = ax^3 + \frac{b}{x} + c$
4) $y = \frac{4}{x^3}$
5) $y = 9x^7 + 3x^{-5} - 3x^{-11}$
6) $y = 3x^{7/3} - 4x^{13/4} + \frac{4}{7}x^{-1/2} + 7^{3/2}$

$$7) \ y = \sqrt[3]{x^2}$$

8)
$$y = 5\sqrt[3]{x^7}$$

9)
$$y = 3\sqrt[3]{x} - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^4}$$

9)
$$y = 3\sqrt[3]{x} - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^4}$$

10) $y = \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^3}$
11) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}$
12) $y = \frac{5}{7\sqrt[3]{x}} - 2x^7 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

11)
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^3}}$$

12)
$$y = \frac{5}{7\sqrt[3]{x}} - 2x^7 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

13)
$$x = t^3 \sqrt{t}$$

13)
$$x = t^3 \sqrt{t}$$
14)
$$y = \frac{2}{x^3 \sqrt{x}}$$

15)
$$y = (2\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^5} + x^2)$$

16) $y = (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + \sqrt{x})$
17) $y = \frac{3}{3x - 2}$

16)
$$y = (4x^2 - 2x\sqrt{x} + x)(2x + \sqrt{x})$$

17)
$$y = \frac{3}{3x-2}$$

18)
$$y = \frac{5}{2x^2 - 5x + 1}$$

19)
$$y = \frac{3x^2}{7x^5 - x + 2}$$

20)
$$y = \frac{8x^3}{x^3 + x - 1}$$

21)
$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

22)
$$y = \frac{5x^2 + x - 2}{x^2 + 7}$$

23)
$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

19)
$$y = \frac{3x^2}{7x^5 - x + 2}$$
20)
$$y = \frac{8x^3}{x^3 + x - 1}$$
21)
$$y = \frac{x + 1}{x - 1}$$
22)
$$y = \frac{5x^2 + x - 2}{x^2 + 7}$$
23)
$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$
24)
$$y = \frac{3}{(1 - x^2)(1 - 2x^3)}$$
25)
$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$
26)
$$z = \frac{1 + \sqrt{t}}{1 + \sqrt{2t}}$$
27)
$$s = (3t + 1)^7$$
28)
$$v = (4z^2 - 5z + 1)$$

25)
$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

26)
$$z = \frac{1+\sqrt{t}}{1+\sqrt{2t}}$$

27)
$$s = (3t+1)^7$$

27)
$$s = (3t+1)^{6}$$

28) $v = (4z^{2} - 5z + 13)^{5}$
29) $x = (\frac{1}{t} + 4)^{4}$
30) $s = (\frac{7t^{2} - \frac{t}{2} + 6}{t})^{6}$
31) $y = \sqrt{x^{2} - 4}$
32) $z = \sqrt{ax^{2} + bx + c}$

29)
$$x = (\frac{1}{t} + 4)^4$$

30)
$$s = (\frac{tt - \frac{1}{2} + 6}{t})$$

31)
$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

32)
$$z = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

33)
$$y = \frac{1}{\sqrt{2-3t}}$$

34)
$$s = \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$$

32)
$$z = \sqrt{ax^2 + 6z}$$

33) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3t}}$
34) $s = \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$
35) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$

36)
$$y = \frac{\sqrt{(2ab)^r}}{\sqrt[p]{(a+bx)^r}}$$

37)
$$y = \frac{1}{(b-x^n)^m}$$

38)
$$y = \sqrt[4]{(x-1)^3}$$

$$39) \ u = \frac{1}{v - \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$37) \ y = \frac{\sqrt[p]{(a+bx)^r}}{(b-x^n)^m}$$

$$38) \ y = \sqrt[4]{(x-1)^3}$$

$$39) \ u = \frac{1}{v-\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$40) \ y = \sqrt{\frac{a-x}{a^2-x^2}}, \ a > 0$$

$$41) \ v = \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$$

$$42) \ u = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

41)
$$v = \frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

42)
$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$$

43) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

43)
$$y = \frac{x^{-1}}{3/3}$$

44)
$$z = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12}}$$

45) $z = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

45)
$$z = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$$

46)
$$s = \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$$

46)
$$s = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}}$$

47) $u = \frac{\sqrt{1 + v} - \sqrt{1 - v}}{\sqrt{1 + v} + \sqrt{1 - v}}$

48)
$$y = u(x)v(x)w(x)$$

49)
$$v = \cos \frac{t}{a}, a \neq 0$$

$$50) \ x = a\sin bt$$

$$51) \ y = a \sin \frac{a}{x}$$

52)
$$z = 2x + \sin 2x$$

$$53) s = \sin^2 3t$$

54)
$$v = 4 \cos^5 \frac{t}{2}$$

$$55) \ s = \frac{1}{\cos^4 t}$$

$$(56) \ v = \frac{\cos_5 t}{\sin^3 2t}$$

$$57) s = \frac{\sin^{2} t}{2\sin t + \cos t}$$

$$(58)$$
 $z = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\sin \alpha}$

$$59) \ y = \frac{x \sin x}{1 + \log x}$$

$$60) \ y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

53)
$$s = \sin^2 3t$$

54) $v = 4\cos^5 \frac{t}{4}$
55) $s = \frac{1}{\cos^4 t}$
56) $v = \frac{5}{\sin^3 2t}$
57) $s = \frac{\sin t + \cos t}{2\sin 2t}$
58) $z = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\sin \alpha}$
59) $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$
60) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$
61) $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

62)
$$y = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$$

63)
$$y = tg^4 \sqrt{x}$$

$$64) y = 3\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x$$

$$65) y = e^{ax}(a\sin x - \cos x)$$

66)
$$y = x^2 e^{2x} \sin x$$

67)
$$y = \cos^2 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

68)
$$y = 2\sin^4 \frac{3}{\sqrt{x}}$$

68)
$$y = 2\sin^4 \frac{3}{\sqrt{x}}$$

69) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos^7 x} - \frac{2}{5\cos^5 x}$
70) $y = \frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$

70)
$$y = \frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x}$$

71)
$$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{x + 2\sqrt{x}}}$$

72) $y = \sqrt{1 + \lg(x + \frac{1}{x})}$
73) $z = \frac{3\lg u - \lg^3 u}{1 - 3\lg^2 u}$

72)
$$y = \sqrt{1 + \lg(x + \frac{1}{x})}$$

73)
$$z = \frac{3 \operatorname{tg} u - \operatorname{tg}^3 u}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 u}$$

74)
$$z = \operatorname{tg} u - \operatorname{ctg} u - 2u$$

75)
$$y = (4\sin x - 8\sin^3 x)\cos x$$

76)
$$y = \operatorname{arctg} 3x$$

77)
$$y = 7 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

78)
$$x = \arcsin(1-t)$$

79)
$$x = \arccos\sqrt{1-t^2}$$

80)
$$x = \arcsin \sqrt{t^3}$$

81)
$$x = \arcsin \frac{1}{t}$$

82)
$$y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, \ 0 < x < 1$$

83)
$$x = \arcsin(2t\sqrt{1-t^2})$$

84)
$$y = \arctan(x - \sqrt{x^2 + 1})$$

85)
$$y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

86)
$$y = x \arctan (x^2 + 1)$$

86)
$$y = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

87) $y = \frac{1}{6} x^5 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{12} \ln(1 + x^2)$
88) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

88)
$$y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

89)
$$y = \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

90)
$$y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

90)
$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

91) $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, x \neq 1$
92) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$
93) $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

92)
$$y = \arctan \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$$

93)
$$y = \arctan \frac{\sqrt{1+x^2} - x^2}{x^2}$$

94)
$$y = x^3 \operatorname{arctg}^3 x$$

$$95) \ z = \frac{\arcsin 4y}{1 - 4y}$$

96)
$$y = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right) \right] - x$$

97) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsin} \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}$
98) $y = e^{3x}$

97)
$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x}$$

98)
$$y = e^{3x}$$

99)
$$y = 5e^{4x}$$

100)
$$y = e^{x^2} f(x)$$

100)
$$y = e^{-f(x)}$$

101) $y = 3e^{-2x}g(x)$

102)
$$y = e^{\sin x}$$

103)
$$y = 5e^{\cos x}$$

104)
$$y = e^{\cos^2 x}$$

105)
$$y = 3e^{2\sin^3 x}$$

106)
$$z = (v^3 - 3v^2 + 6v - 6)e^v$$

$$107$$
) $z = (10x^2 - 1)e^{3x}$

108)
$$z = \frac{(2x-1)e^x}{2\sqrt{x}}$$

109)
$$y = (x + k\sqrt{1 - x^2})e^{k \arcsin x}$$

110)
$$y = 5^x + 2^x$$

111)
$$y = 3^x x^3$$

112)
$$y = 2^x \cdot 7^x - 1$$

113)
$$y = 5 \cdot 10^{3x}$$

114)
$$y = a^{2x}x^n, a > 0$$

115)
$$y = \ln 3x$$

116)
$$y = 7 \cdot 5^{10x}$$

117)
$$z = \ln \frac{30}{x+3}$$

118)
$$y = 5 \ln 10x$$

119)
$$s = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$$

120)
$$z = 3 \ln \frac{5}{x-2}$$

121)
$$s = \ln \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

122)
$$y = 2 \ln \frac{3}{t + \sqrt{t^2 - 4}}$$

123)
$$y = \ln|\ln|x||$$

124)
$$y = \ln \frac{a+b \operatorname{tg} x}{a-b \operatorname{tg} x}$$

125)
$$y = \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}), \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

126) $y = (\ln \cos \frac{x}{2})^2$

126)
$$y = (\ln \cos \frac{x}{2})^2$$

$$127) \ y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

128)
$$y = 15 \ln \lg \frac{x}{2} + \frac{\cos x}{\sin^4 x} (8\cos^4 x - 25\cos^2 x + 15)$$

129)
$$y = \ln \sin x$$

130)
$$y = \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \ 0 \le x < 1$$

131)
$$y = \ln(1 + \frac{a}{x})$$

131)
$$y = \ln(1 + \frac{a}{x})$$

132) $y = \ln(e^{mx} + e^{-mx})$

133)
$$y = \log_x \ln x$$
.

134)
$$y = \log_x a$$
.

135)
$$y = x^{5x}, x > 0$$

136)
$$y = 10x^{-3x}, x > 0$$

137)
$$y = x^{\sin x}, x > 0$$

138)
$$y = 3x^{\cos x}, x > 0$$

139)
$$y = (\frac{a}{x})^x, a > 0, x > 0$$

140)
$$y = x^{1/x}, x > 0$$

141)
$$y = a^{\ln x}, a > 0, x > 0$$

141)
$$y = a$$
, $a > 0, x$
142) $y = 5^{\sin 2x}, x > 0$

143)
$$y = x^{\ln x}, x > 0$$
; wyjaśnić wynik.

144)
$$y = (\sin x)^{\cos x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

145)
$$y = (\text{arctg } x)^x, x > 0$$

145)
$$y = (\operatorname{arctg} x)^x, x > 0$$

146) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

147)
$$y = (\operatorname{tg} x)^{1/\cos x}, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

148)
$$y = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

149)
$$y = e^{e^x}$$

150)
$$y = x^{e^x}, x > 0$$

150)
$$y = x^{e^x}, x > 0$$

151) $y = x^{x^x}, x > 0$

152)
$$y = (1 + \frac{1}{x})^x$$

$$153) \ y = x^{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

Badanie przebiegu funkcji

- 1. Zbadaj przebieg funkcji
 - 1) $y = x^2 \ln x$
 - 2) $y = (\ln x)^3 3\ln x$

 - 2) $y = (\ln x)^3 3 \ln x$ 3) $y = \frac{1}{\ln x}$ 4) $y = \ln x + \frac{1}{\ln x}$ 5) $y = \frac{1}{2}x^2 \ln \frac{1}{2}x$ 6) $y = x 2 \ln x$ 7) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ 8) $y = \ln(x^2 1) + \frac{1}{x^2 1}$ 9) $y = \ln \sqrt{x^2 + 1} 1$ 10) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

 - 11) $y = \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ 12) $y = \ln(1 + e^{-x})$

 - 13) $y = \ln \sin x$
 - 14) $y = \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} \frac{1}{2}x)$
 - 15) $y = \frac{e^{-x}}{x^2 1}$ 16) $y = \frac{x}{e^x 1}$

 - 17) $y = e^{\frac{1}{x^2 1}}$
 - 18) $y = e^{\frac{1}{x}}(x+1)$
 - 19) $y = e^{\frac{x^2}{x^2 1}}$
 - 20) $y = e^{-x^2}$
 - 21) $y = e^{-x^2 + 8x 14}$
 - 22) $y = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

 - 23) $y = x^{2}e^{1/x}$ 24) $y = x^{3}e^{-4x}$
 - $25) \ y = \left(a + \frac{x^2}{a}\right) e^{x/a}$
 - 26) $y = \sqrt{e^{x^2} 1}$
 - 27) $y = e^{\text{tg } x}$
 - 28) $y = e^{\arctan x}$
 - 29) $y = e^{\arcsin\sqrt{x}}$
 - 30) $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$

Całki

- 1. Oblicz całki
 1) $\int \frac{x\sqrt{x}-x\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$
 - 2) $\int (3+2\sqrt[4]{x})^3 dx$
 - 3) $\int \frac{\sqrt{x} 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[6]{x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx$ 4) $\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} dx$

 - 6) $\int \sqrt{a+bx}dx$

 - 7) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x^2 1}}$ 8) $\int x\sqrt{1 + x^2} dx$ 9) $\int \frac{x}{\sqrt{3 5x^2}} dx$ 10) $\int \frac{x 1}{\sqrt[3]{x + 1}} dx$

- 11) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 6}} dx$ 12) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

- 13) $\int e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$ 14) $\int xe^{-x^2} dx$
- 15) $\int \frac{dx}{2\cos^2 3x}$ 16) $\int x \sin(2x^2 + 1) dx$
- 17) $\int \sin^3 x \cos x dx$
- 17) $\int \sin x \cos x dx$ 18) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$ 19) $\int \frac{\sin x}{a + b \cos x} dx, b \neq 0$
- $20) \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$

- 20) $\int \cos x \cdot e^{xx}$ 21) $\int \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}$ 22) $\int \frac{\log x}{\cos^2 x} dx$ 23) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 (x^3 + 1)}$ 24) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ 25) $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$ 26) $\int \frac{e^x dx}{2e^x + 1}$ 27) $\int x \ln(1 + x)^2$

- 27) $\int x \ln(1+x^2) dx$
- 28) $\int \sqrt{2 + \ln|x|} \frac{dx}{x}$
- 29) $\int 6^{1-x} dx$
- $30) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}}$
- 31) $\int \frac{\ln |\arctan x|}{1+x^2} dx$ 32) $\int xe^{x^2} (x^2+1) dx$
- 33) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$
- 34) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctan x}$

- 35) $\int \frac{(\pi \arcsin x) dx}{\sqrt{1 x^2}}$ 36) $\int \frac{x dx}{x^4 + 1}$ 37) $\int x^4 (1 + x^5)^3 dx$
- 38) $\int x^2 e^x dx$
- 39) $\int x^3 e^x dx$
- 40) $\int x^4 e^{2x} dx$
- 41) $\int x \cos x dx$
- 42) $\int x^2 \cos x dx$
- 43) $\int x^2 \sin 5x dx$
- 44) $\int e^x \cos x dx$
- $45) \int_{0}^{\infty} e^{-2x} \sin 3x dx$
- 46) $\int e^x \cos^2 x dx$
- 47) $\int \sqrt{x} \ln x dx$ 48) $\int (\ln|x|)^3 dx$
- 49) $\int \frac{(\ln|x|)^2}{x^5} dx$ 50) $\int \sqrt{x} (\ln|x|)^3 dx$
- $51) \int \frac{\ln|x|}{x^4} dx$
- $52) \int \frac{x^4}{(\ln x)^2} dx$ $53) \int x^3 (\ln x)^2 dx$
- 54) $\int x^n \ln x dx, n \neq -1$
- 55) $\int \frac{2x-13}{(x-5)^2} dx$ 56) $\int \frac{3x+1}{(x+2)^2} dx$

57)
$$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5}$$

58) $\int \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1}$
59) $\int \frac{dx}{13 - 6x + x^2}$

58)
$$\int \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1}$$

59)
$$\int \frac{dx}{13-6x+x^2}$$

60)
$$\int \frac{3dx}{9x^2-6x+2}$$

61)
$$\int \frac{3x-6x+2}{x^2-x+1} dx$$

62)
$$\int \frac{4x-1}{2x^2-2x+1} dx$$

63)
$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+5} dx$$

64)
$$\int \frac{2x-10}{x^2-2x+10} dx$$

65)
$$\int \frac{2x-20}{x^2-8x+25} dx$$

66)
$$\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8} dx$$

67)
$$\int \frac{x^2+4x+8}{x^2-3} dx$$

68)
$$\int \frac{x+6}{x^2+3} dx$$

69)
$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+13} dx$$

$$\begin{array}{l} 59) \int \frac{dx}{13-6x+x^2} \\ 60) \int \frac{3dx}{9x^2-6x+2} \\ 61) \int \frac{3dx}{x^2-6x+1} dx \\ 62) \int \frac{4x-1}{2x^2-2x+1} dx \\ 63) \int \frac{2x-1}{x^2-2x+5} dx \\ 64) \int \frac{2x-10}{x^2-2x+10} dx \\ 65) \int \frac{2x-20}{x^2-8x+25} dx \\ 66) \int \frac{3x+4}{x^2+4x+8} dx \\ 67) \int \frac{x+6}{x^2-3} dx \\ 68) \int \frac{x+6}{x^2+3} dx \\ 69) \int \frac{6x}{x^2+4x+13} dx \\ 70) \int \frac{10x-44}{x^2-4x+20} dx \\ 71) \int \frac{4x-5}{x^2-6x+10} dx \\ 72) \int \frac{5x}{2+3x} dx \end{array}$$

71)
$$\int \frac{4x-5}{x^2-6x+10} dx$$

$$72) \int \frac{5x}{2+3x} dx$$

73)
$$\int \frac{x^2}{5x^2+12} dx$$

74)
$$\int \frac{2x^2+7x+20}{x^2+6x+25} dx$$

73)
$$\int \frac{x^2}{5x^2+12} dx$$
74)
$$\int \frac{x^2}{5x^2+12} dx$$
75)
$$\int \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56} dx$$
76)
$$\int \frac{x^3-4x^2+1}{(x-2)^4} dx$$
77)
$$\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6} dx$$
78)
$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} dx$$

76)
$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 1}{(x - 2)^4} dx$$

77)
$$\int \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} dx$$

78)
$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} dx$$

79)
$$\int \frac{x^3 + 2x - 6}{x^2 - x - 2} dx$$

$$80) \int \frac{2x^3 - 19x^2 + 58x - 42}{x^2 - 8x + 16} dx$$

81)
$$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$$

82)
$$\int \frac{72x^6}{3x^2+2} dx$$

79)
$$\int \frac{(x^{2}+1)^{2}}{x^{2}+2x-6} dx$$
80)
$$\int \frac{2x^{3}-19x^{2}+58x-42}{x^{2}-8x+16} dx$$
81)
$$\int \frac{x^{4}}{x^{2}+1} dx$$
82)
$$\int \frac{72x^{6}}{3x^{2}+2} dx$$
83)
$$\int \frac{2x^{4}-10x^{3}+21x^{2}-20x+5}{x^{2}-3x+2} dx$$
84)
$$\int \sqrt{2x+1} dx$$

84)
$$\int_{0}^{2} \sqrt{2x+1} dx$$

$$85) \int \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$$

86)
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-4}}$$

85)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x}}$$

86) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-4}}$
87) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(2x+1)^3}}$

88)
$$\int x \sqrt[3]{x - 4} dx$$

89)
$$\int x \sqrt[3]{3x - 1} dx$$

90)
$$\int_{0}^{\infty} x\sqrt{2+3x}dx$$

91)
$$\int_{0}^{\infty} x\sqrt{1-5x}dx$$

92)
$$\int x \sqrt[3]{x - 4} dx$$

93)
$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{2x+3}}$$

94)
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x+2}}$$

94)
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x+2}}$$
95)
$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

96)
$$\int x^2 \sqrt[4]{2x+3} dx$$
97)
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}}$$
98)
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}$$

97)
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}}$$

98)
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-a}}$$

$$99) \int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx$$

- 100) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ 101) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$ 102) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}}$
- $103) \int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$
- $\begin{array}{ccc}
 104) & \int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{x + \sqrt[6]{x^5}} \\
 105) & \int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}
 \end{array}$
- 106) $\int \cos 5x \cos 7x dx$
- 107) $\int \sin 3x \cos 2x dx$
- 108) $\int \cos 2x \cos 3x dx$
- 109) $\int \sin x \cos 3x dx$
- 110) $\int \cos 2x \sin 4x dx$
- 111) $\int \sin 2x \sin 5x dx$
- 112) $\int \cos x \cos 3x dx$
- 113) $\int \sin 3x \sin x dx$
- 114) $\int \sin 5x \sin 2x dx$
- 115) $\int \sin^3 x dx$
- 116) $\int \sin^4 x dx$
- 117) $\int \cos^4 x dx$
- 118) $\int \cos^5 x dx$
- 119) $\int \sin^5 x dx$
- 120) $\int tg^5 x dx$
- 121) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$
- 122) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$
- 123) $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$
- 124) $\int \sin^7 x \cos^6 x dx$
- 125) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ 126) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
- $127) \int \sin^3 x \cos^3 x dx$
- 128) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$
- 129) $\int_{-\sin^8 x}^{\cos x dx}$ 130) $\int_{-\sin x}^{\sin^8 x} \tan x dx$

- 130) $\int \sin x \operatorname{tg} x dx$ 131) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$ 132) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}$ 133) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$ 134) $\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin^2 x} dx$ 135) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$

- 136) $\int \frac{dx}{e^{2x} 1}$ 137) $\int \frac{dx}{e^{x} + e^{-x}}$ 138) $\int \sqrt{e^x + 1} dx$
- 139) $\int \frac{e^x 1}{e^x + 1} dx$ 140) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2e^x}}$
- $141) \int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$
- 142) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2} dx$
- $\begin{array}{ll}
 143) & \int (e^x 1)^2 dx \\
 143) & \int (e^x + e^{-x})^2 dx \\
 144) & \int \frac{e^x}{e^{2x} + 5} dx \\
 145) & \int \frac{4e^x + 6e^{-x}}{9e^x 4e^{-x}} dx \\
 146) & \int \frac{dx}{e^x + e^{2x}}
 \end{array}$

- 147) $\int \frac{e^{x}}{(e^{x}+a)^{2}} dx$ 148) $\int \frac{e^{x} dx}{\sqrt{3-5e^{2x}}}$ 149) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^{x}+1}}$ 150) $\int x^{3}e^{-x} dx$ 151) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ 152) $\int \ln(x^{2}+1) dx$ 153) $\int (\ln|x|)^{2} dx$ 154) $\int \ln(x+x)^{2} dx$

- 153) $\int (\ln |x|)^2 dx$ 154) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$ 155) $\int \ln |2 5x| dx$ 156) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 |x|)}$ 157) $\int x^2 \ln |x| dx$ 158) $\int (4 + 3x^2) \ln |x| dx$ 159) $\int x^3 \ln(x^2 + 3) dx$ 160) $\int xa^x dx, a > 1$