

ADAM MACHOWSKI



TEORIA OBWODÓW OBWODY PRĄDU STAŁEGO

Wydanie czwarte poprawione

SKRYPT 2019

ADAM MACURA

TEORIA OBWODÓW

OBWODY PRĄDU STAŁEGO

Wydanie czwarte poprawione

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
GLIWICE 1997**

OPINIODAWCA

Prof. dr hab. inż. Michał Tadeusiewicz

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski
REDAKTOR DZIAŁU — Doc. dr inż. Zdzisław Pogoda
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka



Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

S.48034

Skrypt przeznaczony dla studentów
Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki

PL ISSN 0434-0825

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 500+55 egz., Ark. wyd. 13,5, Ark. druk. 11, Papier offset, k1. III 70x100, 80g
Oddano i podpisano do druku 10.01.1997 r. Druk ukończono w styczniu 1997 r.
Zam. 1/97

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, Gliwice, ul. Pszczyńska 44

Spis treści

Przedmowa	7
1. POJĘCIA PODSTAWOWE	9
2. PODSTAWOWE PRAWA OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH	14
2.1. Obwód elektryczny i jego elementy	14
2.2. Strzałkowanie w obwodach elektrycznych	16
2.3. Idealne źródła energii elektrycznej	18
2.4. Przyrządy pomiarowe	18
2.5. Struktura obwodu, schemat elektryczny i graf obwodu	19
2.6. Prawa Kirchhoffa	21
2.7. Praca i moc	24
3. LINIOWE OBWODY ELEKTRYCZNE PRĄDU STAŁEGO	28
3.1. Obwody liniowe	28
3.2. Liniowe obwody elektryczne	30
3.3. Układy zastępcze rzeczywistych źródeł energii elektrycznej	30
3.4. Opór zastępczy szeregowego połączenia oporów	32
3.5. Opór zastępczy równoległego połączenia oporów	33
4. LINIOWE OBWODY ZŁOŻONE	35
4.1. Zadania analizy i syntezy obwodów	35
4.2. Zastosowanie praw Kirchhoffa do analizy obwodów	36
4.3. Zasada zachowania mocy i zasada Tellegena	43
4.4. Metoda prądów oczkowych (metoda Maxwella)	45
4.5. Metoda potencjałów węzłowych (metoda Coltri)	51
4.6. Obwody z jedną siłą wymuszającą	55
4.7. Zasada superpozycji	57
4.8. Dwójniki, zasady Thevenina i Nortona	60
4.9. Zasada wzajemności	65
4.10. Zasada wyodrębniania	66
4.11. Wielobiegunki pasywne	68
4.12. Wielobiegunki aktywne z autonomicznymi źródłami	73
4.13. Obwody z wielobiegunkami	75

5. OBLCZANIE OBWODÓW LINIOWYCH PRĄDU STAŁEGO NA KOMPUTERACH	82
5.1. Przygotowanie danych o obwodzie	82
5.2. Układanie równań obwodu	84
5.3. Rozwiązywanie równań	85
5.4. Przykład analizy obwodu programem ALIOS1	87
6. OBWODY NIELINIOWE PRĄDU STAŁEGO	88
6.1. Elementy nieliniowe	88
6.2. Podstawowe prawa obwodów nieliniowych	90
6.3. Metoda liniaryzacji	91
6.4. Metody graficzne, obwody z jednym elementem nieliniowym	96
6.5. Nieliniowe elementy zastępcze	99
6.6. Obwody z dwoma elementami nieliniowymi	102
6.7. Metody iteracyjne	104
6.7.1. Metoda iteracji prostej	104
6.7.2. Metoda Newtona-Raphsona	109
6.8. Obwody nieliniowe posiadające wiele rozwiązań	113
7. OBWODY ZE STEROWANYMI ELEMENTAMI I WIELOBIEGUNNIKAMI	115
7.1. Elementy sterowane	115
7.2. Idealne napięciowe i prądowe źródła sterowane	117
7.3. Liniowe układy zastępcze rzeczywistych dwójników sterowanych	119
7.4. Trójkąt aktywny sterowany	122
7.5. Liniowy układ zastępczy trójkąta aktywnego	126
7.6. Liniowy układ zastępczy trójkąta aktywnego dla składowych zmiennych napięć i prądów	129
7.7. Obwody ze sterowanymi źródłami napięciowymi i prądowymi	130
8. OBWODY MAGNETYCZNE	132
8.1. Podstawowe prawa obwodów magnetycznych	132
8.2. Obliczanie obwodów magnetycznych	139
8.3. Obwód szeregowy	139
8.4. Obwód dwuozkowy	143
8.5. Obwód z magnesem trwałym	145
8.6. Obwód magnetyczny prądnicy z magnesem trwałym	146
9. ANALIZA WRAZLIGOŚCIOWA	149
9.1. Zależność funkcji układowych od parametrów obwodu	149
9.2. Obszary tolerancji i rozrzutu	150
9.3. Warunki sprawności układu	151
9.4. Projektowanie układów zapewniające spełnienie warunków sprawności	154
9.5. Metoda wrażliwościowa	155

9.6. Metoda wrażliwościowa oparta na obwodzie dołączonym	157
9.7. Metoda wrażliwościowa oparta na obwodzie przyrostowym	160
9.8. Metoda funkcji biliniowej	162
DODATEK I. PROGRAM ALIOS1	165
1. Charakter i możliwości programu	165
2. Opis programu	165
PROCEDURA RENUM	166
PROCEDURA READDATA	166
PROCEDURA GMATRIX	166
PROCEDURA GAUSS	166
PROCEDURA BRANCHUIP	166
3. Wprowadzanie danych o obwodzie	166
4. Wyniki obliczeń	168
5. Program źródłowy	169
LITERATURA	175

Przedmowa

Niniejszy skrypt ma charakter podręcznika dla studentów pierwszego roku studiów kierunków elektronika i informatyka w zakresie przedmiotów teoria obwodów oraz podstawa elektrotechniki.

Warunkiem wstępny do zrozumienia przedstawionych w nim zagadnień jest znajomość fizyki w zakresie szkoły średniej oraz matematyki w zakresie wykładanym w szkołach wyższych, chociaż dla podstawowych zagadnień wystarczy znajomość matematyki w zakresie szkoły średniej.

Celem jest przedstawienie teoretycznych podstaw nauki o liniowych i nieliniowych obwodach prądu stałego. Rozpoczynanie wykładu z teorii obwodów od obwodów prądu stałego umotywowane jest względami dydaktycznymi. Po pierwsze, jest to na ogół naturalna kolejność przy analizie obwodów, rozpoczyna się ją zazwyczaj od analizy obwodu dla prądu stałego, która jest podstawą do dalszej analizy obwodu dla prądu zmiennego (ze względu na konieczność uwzględnienia w nich tzw. warunków początkowych). Po drugie, wyprowadzanie podstawowych metod analizy obwodów oraz twierdzeń jest formalnie prostsze niż dla obwodów prądu zmiennego, a wyprowadzone metody i twierdzenia można, bez ponownego wyprowadzania, na podstawie formalnej analogii między podstawowymi równaniami obwodów prądu stałego (równaniami Kirchhoffa i prawem Ohma) zastosować dla obwodów prądu zmiennego rozpatrywanych za pomocą rachunku operatorowego.

W rozdziale 1 wprowadzone są podstawowe pojęcia napięcia, potencjału i natężenia prądu elektrycznego.

W rozdziale 2 przedstawiono podstawowe prawa obwodów prądu stałego: są nimi obydwa prawa Kirchhoffa oraz tzw. charakterystyka prądowo - napięciowa elementu, wraz z niezbędnymi konwencjami w zakresie strzałkowania i oznaczeń.

W rozdziale 3 wprowadzono prawo Ohma, pojęcie liniowego obwodu prądu stałego oraz pojęcie układów zastępczych.

W rozdziale 4 przedstawiono w zarysie macierzowy zapis praw Kirchhoffa, zasadę Tellegena, metody analizy liniowych obwodów prądu stałego: metodę obydwu praw Kirchhoffa, metodę potencjałów węzłowych oraz metodę prądów oczkowych. Na ich podstawie wyprowadzono najważniejsze ogólne zasady dotyczące liniowych obwodów: zasady Thevenina i Nortona, zasady wzajemności i wyodrębnienia. Wprowadzono również pojęcia wielobiegunków i przedstawiono metodę analizy obwodów z wielobiegunkami.

W rozdziale 5 przedstawiono podstawy analizy obwodów liniowych za pomocą komputerów.

W rozdziale 6 przedstawiono metody analizy obwodów nieliniowych, w tym metody linearyzacji, metody graficzne oraz metody iteracyjne.

W rozdziale 7 omówiono elementy sterowane, źródła sterowane oraz metody analizy obwodów ze źródłami sterowanymi, w tym układy zastępcze trójkątów dla składowych zmiennych.

W rozdziale 8 omówiono podstawy analizy obwodów magnetycznych opierając się na analogii między obwodami prądu stałego a obwodami magnetycznymi.

W rozdziale 9 przedstawiono zasadnicze pojęcia dotyczące analizy obwodów, których elementy posiadają określone tolerancje, są nimi pojęcie obszarów tolerancji i rozrzutu, warunki sprawności układu oraz obszar sprawności. Wprowadzono pojęcia wrażliwości i przedstawiono metody wrażliwościowe oparte na obwodzie dolaczonym oraz obwodzie przyrostowym.

W rozdziale 10 przedstawiono kompletny program komputerowy analizy liniowych obwodów ALIOS1. Program ma charakter dydaktyczno-demonstracyjny, może jednak z powodzeniem być zastosowany do analizy konkretnych obwodów liniowych prądu stałego.

Autor pragnie podziękować prof. dr hab. Michałowi Tadeusiewiczowi za cenne uwagi, dzięki którym usunięto wiele usterek, kolegom z Zakładu Teorii Obwodów i Sygnałów Instytutu Elektroniki, a w szczególności prof. dr hab. Janowi Chojcanowi za szereg cennych uwag, które przyczyniły się do powstania tego skryptu. Doc. dr inż. Zdzisławowi Pogodzie dziękuję za pomoc przy redakcji skryptu, mgr inż. Halinie Delewicz za wykonanie rysunków a pani Marii Knapik za wykonanie maszynopisu tego skryptu.

Autor

Rozdział 1

POJĘCIA PODSTAWOWE

Pojęcie ładunku (naboju) elektrycznego wprowadza się przy wyjaśnianiu zjawisk zachodzących przy elektryzacji. Aczkolwiek nie znamy natury samego ładunku elektrycznego, możemy jednak poznać jego działanie.

Przyjęcie koncepcji ładunków elektrycznych dodatnich i ujemnych, mogących się swobodnie przemieszczać w swoim środowisku (ładunki swobodne) bądź związkanych ściśle z ośrodkiem i mogących się przemieszczać jedynie w bardzo niewielkich granicach (ładunki związane) pozwala na łatwe zrozumienie i wytłumaczenie zjawisk elektrostatyki - nauki o działaniach ładunków elektrycznych nieruchomych względem siebie.

Celem wyjaśnienia zjawisk dynamicznych, tj. sił działających na ładunki elektryczne, wprowadza się pojęcie pola elektrycznego.

Przestrzeń, w której ujawniają się działania dynamiczne (siły) na wprowadzone ładunki elektryczne, nazywa się **polem elektrycznym**.

W najprostszym przypadku źródłem pola elektrycznego są nieruchome ładunki elektryczne (pole elektrostatyczne).

Celem ilościowego określenia pola, a zarazem sił działających na znajdujące się w nim ładunki, wprowadza się nową wielkość fizyczną zwaną **natężeniem pola elektrycznego**.

Natężeniem pola elektrycznego nazywamy wielkość wektorową, będącą granicą stosunku wektora siły F , działającej na dodatni ładunek q , do wielkości tegoż ładunku, gdy $q \rightarrow 0$:

$$K = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}$$

(1.1)

Wektor natężenia pola ma ten sam kierunek i zwrot, co siła działająca w tym punkcie pola na dodatni nabój próbny. Celem uproszczenia zapisu opuścimy znak granicy, pamiętając jednak, że zgodnie z definicją, nabój q musi być bardzo mały

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad k = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (1.2)$$

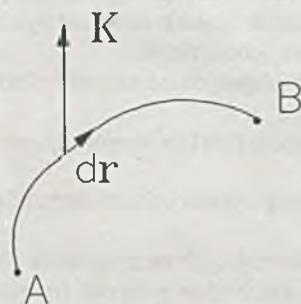
Pole elektryczne jest określone przez powyższe równanie, to znaczy, że znajomość wektora natężenia pola w każdym jego punkcie jednoznacznie określa to pole.

Przy przesuwaniu ładunków elektrycznych w polu elektrycznym wykonana musi być pewna praca, którą łatwo obliczyć. Przy przesunięciu np. ładunku próbnego q wzdłuż elementarnej drogi dr , elementarna praca dA wykonana przez siły pola określona jest iloczynem skalarnym:

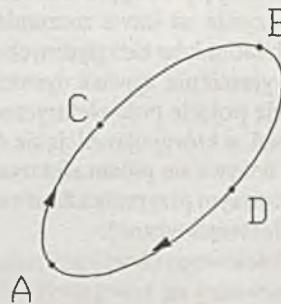
$$dA = \mathbf{F} dr = q \mathbf{K} dr \quad (1.3)$$

Natomiast przy przesunięciu ładunku próbnego od punktu A do punktu B (rys.1.1) praca ta wyniesie

$$A_{AB} = q \int_A^B \mathbf{K} dr \quad (1.4)$$



Rys. 1.1



Rys. 1.2

Obliczmy pracę konieczną do przesunięcia naboju wzdłuż drogi zamkniętej ACBDA (rys.1.2.)

$$A_{ACBDA} = \int_{ACBDA} dA = q \int_{ACBDA} \mathbf{K} dr$$

W myśl zasad zachowania energii praca ta musi być równa zeru; w przeciwnym razie przenosząc nabój po tej drodze w odpowiednim kierunku moglibyśmy za każdym razem otrzymać pewną pracę kosztem energii pola, a to wymagałoby nieskończenie wielkiej energii pola, aby nie uległo ono zmianie, tymczasem energia ta jest skończonej wielkości. Zatem

$$A_{ACBDA} = q \int_{ACBDA} \mathbf{K} d\mathbf{r} = 0$$

skąd

$$\int_{ACBDA} \mathbf{K} d\mathbf{r} = \oint_{ACBDA} \mathbf{K} d\mathbf{r} = 0 \quad (1.5)$$

W polu elektrostatycznym całka okrężna wektora natężenia pola jest równa zeru. Warto zauważyć, że własność ta dotyczy każdej zamkniętej drogi.

Z powyższej własności wynika bezpośrednio, że praca przeniesienia ładunku elektrycznego z jednego punktu pola do drugiego jest niezależna od drogi, a zależy jedynie od pola (wektor \mathbf{K}) oraz współrzędnych obu punktów. Jest bowiem:

$$q \int_{ACBDA} \mathbf{K} d\mathbf{r} = q \int_{ACB} \mathbf{K} d\mathbf{r} + q \int_{BDA} \mathbf{K} d\mathbf{r} = 0$$

skąd

$$\int_{ACB} \mathbf{K} d\mathbf{r} = \int_{ADB} \mathbf{K} d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{K} d\mathbf{r} = \frac{A_{AB}}{q}$$

Całka ta równa jest stosunkowi pracy A_{AB} do naboju q . Wielkość ta, również charakterystyczna dla pola elektrostatycznego, nosi nazwę **napięcia elektrycznego**.

Napięcie elektryczne między dwoma punktami jest to stosunek pracy wykonyanej przez siły pola przy przeniesieniu naboju q z jednego punktu pola do drugiego, do tego naboju

$$U_{AB} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{A_{AB}}{q} = \int_A^B \mathbf{K} d\mathbf{r} \quad (1.6)$$

Napięcie jest równe całce liniowej natężenia pola.

Przyjmijmy dowolny punkt P za punkt odniesienia; wtedy wielkość

$$V_A = \int_A^P \mathbf{K} dr = \frac{A_{AP}}{q} \quad (1.7)$$

jest funkcją jedynie współrzędnych punktu A oraz samego pola. Wielkość tę, charakterystyczną dla danego punktu pola, nazwiemy potencjałem elektrycznym.

Potencjał elektryczny danego punktu jest to stosunek pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu naboju próbnego z danego punktu do punktu odniesienia do tegoż naboju.

Punktem odniesienia może być dowolny punkt pola. Często dobiera się jako punkt odniesienia punkt leżący w nieskończoności.

Z definicji potencjału i napięcia wynika prosty związek między tymi wielkościami

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{K} dr = \int_A^P \mathbf{K} dr + \int_P^B \mathbf{K} dr = \int_A^P \mathbf{K} dr - \int_B^P \mathbf{K} dr = \\ = V_A - V_B$$

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (1.8)$$

Napięcie elektryczne między dwoma punktami jest równe różnicy ich potencjałów

Obydwie wielkości, napięcie i potencjał, charakteryzują zdolność pola do wykonania pracy.

Z punktu widzenia matematycznej teorii pola, pole elektrostatyczne można rozpatrywać jako pole wektorowe \mathbf{K} . Pole to jest polem bezwirowym (potencjalnym), zatem

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = 0 \quad (1.9)$$

(odpowiada to w postaci całkowej $\int \mathbf{K} dr = 0$); dla takiego pola wektorowego można zawsze znaleźć pole skalarnej wielkości V (potencjału), przy czym

$$\mathbf{K} = - \operatorname{grad} V \quad (1.10)$$

Z założenia bezwirowości pola wynika bezpośrednio niezależność całki liniowej wektora natężenia pola (a więc napięcia) od drogi.

Możemy z kolei przejść do rozpatrywania zjawisk ruchu ładunków elektrycznych.

Ruch ładunków elektrycznych dodatnich lub ujemnych nazywa się prądem elektrycznym.

Prąd elektryczny ilościowo określany jest przez natężenie prądu elektrycznego.

Natężenie prądu elektrycznego I jest to stosunek ładunku elektrycznego dq przepływającego przez określoną powierzchnię w czasie dt do tegoż czasu dt :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (1.11)$$

W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy jedynie przypadki, w których natężenie prądu jest stałe, niezależne od czasu. Takie prądy nazwiemy prądami stałymi:

$$I = \text{const}$$

Prądy stałe wywołują stacjonarny rozkład ładunków elektrycznych, to jest rozkład niezależny od czasu. W związku z tym pole elektryczne wywołane przez prądy stałe jest na zewnątrz przewodów identyczne z polem elektrostatycznym wywołanym przez nieruchome ładunki elektryczne rozmieszczone w przestrzeni w taki sam sposób i w takiej samej ilości w każdym jej punkcie, jak przepływające ładunki. Na pole elektryczne nie wpływa bowiem fakt, że jedne ładunki w danym miejscu pola zastępowane są w wyniku ruchu ładunków przez drugie, o ile tylko ilość ładunków w tym miejscu nie ulega zmianom w czasie.

Powysze fakty umożliwiają nam utrzymanie i stosowanie zasadniczych pojęć - natężenia pola, napięcia elektrycznego i potencjału elektrycznego - wprowadzonych w elektrostatyce również w teorii obwodów prądu stałego.

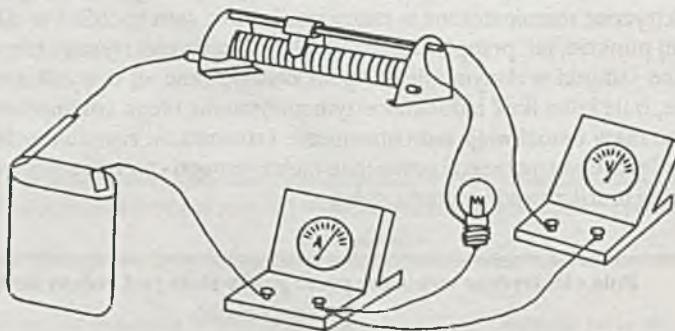
Pole elektryczne wywołane przez prądy stałe jest polem bezwirowym (potencjalnym).

Rozdział 2

PODSTAWOWE PRAWA OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

2.1. Obwód elektryczny i jego elementy

Na rys. 2.1.1 przedstawiony jest prosty obwód elektryczny, w którym wyróżnić można źródło energii elektrycznej (baterię), odbiorniki energii elektrycznej (opornica suwakowa, żarówka), przyrządy pomiarowe (woltomierz i amperomierz) oraz przewody łączące. W takim obwodzie można zaobserwować m.in. przepływ prądu oraz napięcie elektryczne między różnymi punktami obwodu. Ograniczmy się tu do takich obwodów elektrycznych, w których istnieją prądy i napięcia nie zmieniające się w czasie *). Obwody takie nazwiemy obwodami



Rys. 2.1.1

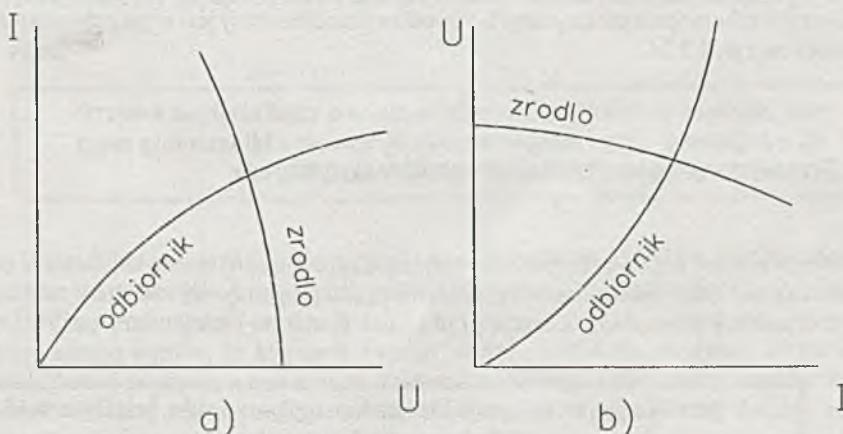
żarówka), przyrządy pomiarowe (woltomierz i amperomierz) oraz przewody łączące. W takim obwodzie można zaobserwować m.in. przepływ prądu oraz napięcie elektryczne między różnymi punktami obwodu. Ograniczmy się tu do takich obwodów elektrycznych, w których istnieją prądy i napięcia nie zmieniające się w czasie *). Obwody takie nazwiemy obwodami

*) Założymy przy tym, że rozpatrujemy te obwody po dostatecznie długim czasie od chwili złączenia w nich źródeł energii elektrycznej, by uniknąć konieczności uwzględnienia tzw. stanów nieustalonych, których rozpatrzenie nastąpi później.

prądu stałego. Zwróciśmy uwagę na jeden z elementów obwodu - np. na żarówkę. Zmieniając nastawienie opornicy suwakowej, można tym samym zmieniać natężenie prądu płynącego przez żarówkę. Równocześnie zmienia się napięcie na żarówce. Przeprowadzając pomiary natężenia prądu i napięcia na danym elemencie, można otrzymać wykres zależności prądu od napięcia. W wyniku tego doświadczenia można więc dojść do wniosku o współzależności prądu i napięcia każdego z elementów obwodu.

Zależność taka jest charakterystyczną cechą każdego z elementów obwodu i nosi nazwę charakterystyki prądowo-napięciowej lub napięciowo prądowej, w dalszym ciągu krótko "charakterystyki" elementu.

Charakterystyka prądowo-napięciowa jest to zależność funkcyjna między prądem i napięciem elementu, wyrażona graficznie lub analitycznie.



Rys. 2.1.2

Na rys. 2.1.2 przedstawione są przykładowe charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 2.1.2a) i napięciowo-prądowe (rys. 2.1.2b) dwóch zasadniczych rodzajów elementów: źródła i odbiornika energii elektrycznej. Charakterystykę można więc wyrazić w postaci analitycznej:

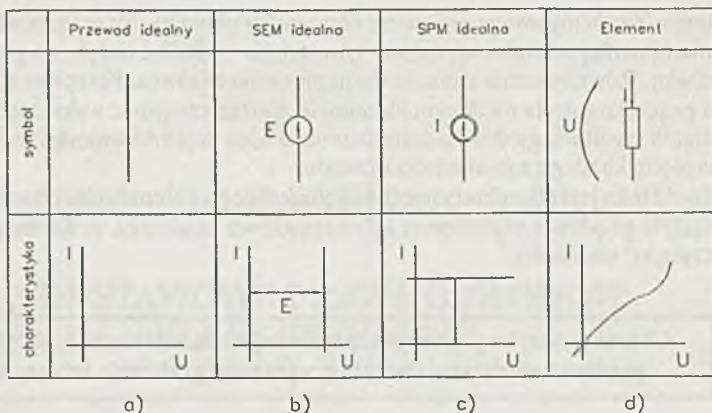
$$U = U(I) \quad (2.1.1)$$

albo

$$I = I(U) \quad (2.1.2)$$

względnie przedstawić w postaci graficznej (rys. 2.1.2).

Kształt charakterystyki zależy od rodzaju danego elementu (źródło, odbiornik), materiału, z którego jest wykonany i jego technologii (metal, półprzewodnik, elektrolit itp.) oraz od różnych czynników zewnętrznych (np. temperatura). Symbol graficzny elementu



Rys. 2.1.3

stosowany w schematach elektrycznych obwodów przedstawiony jest wraz z charakterystyką elementu na rys. 2.1.3d.

2.2. Strzałkowanie w obwodach elektrycznych

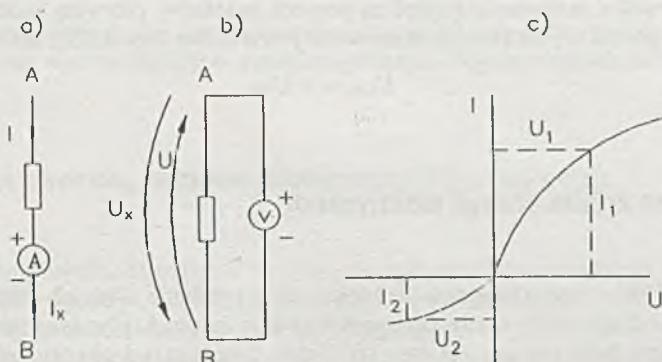
Wprowadzimy tu pewne konwencje dotyczące sposobu oznaczania kierunku przepływu prądu oraz napięcia. Jako kierunek przepływu prądu przyjmuje się kierunek ruchu ładunków dodatnich. Wprowadźmy strzałkę prądu z następującym określeniem:

Strzałka prądu wskazuje kierunek przepływu prądu, jeżeli wartość liczbową prądu I jest dodatnia.

Jeżeli wartość liczbową jest ujemna, prąd ma kierunek przeciwny do strzałki. Przy takim założeniu prąd $I = I_1$ (rys. 2.2.1c) ma kierunek zgodny ze strzałką, a prąd $I = I_2$ przeciwny. W metalach prąd elektryczny jest ruchem ładunków ujemnych (elektronów), wobec czego rzeczywisty kierunek ruchu elektronów jest przeciwny do kierunku wyznaczonego przez powyższą konwencję. Między dwoma prądami przeciwnie zastrzałkowanymi I i I_x (rys. 2.2.1a) musi zatem zachodzić zależność

$$I = -I_x$$

Strzałka prądu jest ściśle związana ze sposobemłączenia przyrządu pomiarowego - amperomierza - do obwodu. Przy pokazanym na rys. 2.2.1a sposobiełączenia, strzałka prądu jest skierowana do zacisku amperomierza oznaczonego "+" . Przy dodatniej wartości prądu przyrząd wychyli się w kierunku dodatnim, przy ujemnej wartości prądu, gdy prąd w rzeczywistości popłynie w kierunku przeciwnym do strzałki prądu, przyrząd wychyli się



Rys. 2.2.1

kierunku ujemnym. W takim przypadku należy zamienić zaciski amperomierza, a otrzymane wskazania odczytać jako ujemne.

Przyporządkujemy napięciu elektrycznemu między dwoma punktami strzałkę z następującym określeniem:

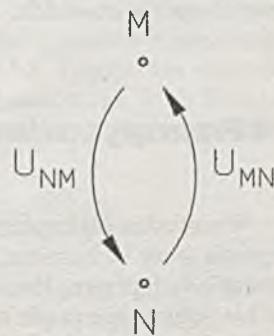
Strzałka napięcia łączy punkty, między którymi istnieje napięcie, przy czym grot strzałki wskazuje punkt posiadający wyższy potencjał, o ile wartość liczbowa napięcia jest dodatnia.

Przy takim założeniu grot strzałki napięcia wskazuje dla wartości $U = U_1$ (dodatniej) - punkt o wyższym potencjałe A (względem punktu B), natomiast dla wartości $U = U_2$, punkt A posiada niższy potencjał od punktu B.

Z powyższego wynika, że kierunek strzałki napięcia jest ściśle związany ze znakiem wartości liczbowej napięcia, a tym samym również z wykresem. Odwrócenie strzałki napięcia spowodować musi zmianę znaku wartości liczbowych napięcia. Między dwoma napięciami przeciwnie zastrzałkowanymi U i U_x (rys. 2.2.1b) musi zatem zachodzić zależność

$$U = -U_x$$

Strzałka napięcia jest również ściśle związana ze sposobem włączenia przyrządu pomiarowego - woltomierza - do obwodu. Przy pokazanym na rys. 2.2.1b sposobie włączenia grot strzałki wskazuje punkt, do którego włączony jest zacisk "+" woltomierza. Przy dodatniej wartości napięcia przyrząd wychyli się w kierunku dodatnim, przy ujemnej wartości napięcia (gdy punkt A będzie miał niższy potencjał od punktu B) przyrząd wychyli się w kierunku ujemnym. W takim przypadku należy zamienić zaciski woltomierza, a otrzymane wskazanie odczytać jako ujemne.



Rys. 2.2.2

W przypadku oznaczania napięć za pomocą indeksów, pierwszy indeks przyporządkowany jest punktowi, do którego skierowana jest strzałka (rys. 2.2.2), zatem również

$$U_{MN} = -U_{NM}$$

2.3. Idealne źródła energii elektrycznej

Badając bliżej charakterystyki źródeł, można wyróżnić dwa ich rodzaje: W źródle pierwszego rodzaju napięcie stosunkowo mało zależy od prądu płynącego ze źródła - źródła takie nazwiemy **źródłami napięciowymi**. W źródle drugiego rodzaju prąd płynący ze źródła stosunkowo mało zależy od napięcia istniejącego na źródle - źródła takie nazwiemy **źródłami prądowymi**. Należy podkreślić, że taki podział wynika głównie z kształtu charakterystyki źródła oraz zakresu napięć i prądów, w którym się źródło wykorzystuje. Tym niemniej podział taki jest bardzo wygodny, gdyż umożliwia idealizację źródła.

W celu uproszczenia dalszych rozważań wprowadzimy pojęcie źródeł idealnych. Idealnym źródłem napięciowym jest **siła elektromotoryczna** (idealna SEM), dla której napięcie nie zależy od przepływającego przez nią prądu. Wielkością charakterystyczną SEM jest wielkość E , równa napięciu istniejącemu na niej. Symbol graficzny SEM idealnej wraz z jej charakterystyką przedstawiony jest na rys. 2.1.3b. Wartość prądu płynącego przez SEM zależy od zewnętrzniego obwodu.

Idealnym źródłem prądowym jest **siła prądomotoryczna** (idealna SPM), dla której prąd nie zależy od napięcia istniejącego na niej. Wielkością charakterystyczną SPM jest wielkość J prądu płynącego przez nią. Symbol graficzny idealnej SPM wraz z jej charakterystyką przedstawiony jest na rys. 2.1.3c. Wartość napięcia na SPM zależy od zewnętrzniego obwodu.

Rzeczywiste źródła energii elektrycznej rozpatrywane będą dalej. Okaże się przy tym, że wprowadzone tu SEM i SPM będą częściami składowymi schematów zastępczych rzeczywistych źródeł.

Znajomość charakterystyk wszystkich elementów obwodu oraz warunków zewnętrznych, dla których zostały one sporzązone, jest konieczna dla celów jakościowego i ilościowego określenia zachowania się obwodu, a w szczególności do określenia napięć i prądów powstających w obwodzie.

2.4. Przyrządy pomiarowe

W obwodzie elektrycznym zachodzi potrzeba mierzenia napięć i prądów. Do pomiaru napięcia służy woltomierz, do pomiaru prądu amperomierz. Nie wchodząc w szczegóły działania tych przyrządów, możemy na początku wprowadzić przyrządy idealne: woltomierze nie pobierające prądu oraz amperomierze, na których napięcie jest równe zeru. Wprowadzenie przyrządów idealnych nie zmienia warunków pracy obwodu, gdyż idealny amperomierz zachowuje się jak idealny przewód, a idealny woltomierz jak przerwa w obwodzie (przez woltomierz idealny nie płynie prąd).

Dotychczasowe rozważania dotyczyły jedynie samych elementów obwodu, a w szczególności zależności między napięciem a prądem jednego i tego samego elementu.

2.5. Struktura obwodu, schemat elektryczny i graf obwodu

Nie ulega wątpliwości, że napięcia i prądy powstające w poszczególnych elementach obwodu zależą od sposobu połączenia elementów między sobą, a więc od struktury obwodu. Można zauważać, że w obwodach na ogół nie zmieniają się napięcia i prądy przy zmianie wzajemnego położenia jego elementów, o ile tylko nie zmieni się sposób ich połączenia. Strukturę obwodu cechuje więc własność niezależności obwodu od przestrzennego rozmieszczenia jego elementów i odkształcenia przewodów łączących - jest ona więc własnością topologiczną. Stwierdzenie to upoważnia nas do abstrahowania w dalszym ciągu naszych rozważań od przestrzennego rozmieszczenia elementów.

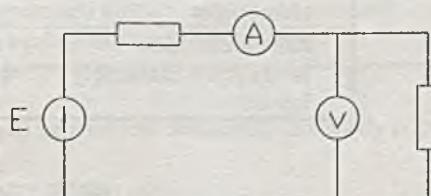
Celem dalszego uproszczenia należy założyć, że same przewody łączące nie wpływają na napięcia i prądy obwodu - przewody łączące są przewodami idealnymi. W tym celu należy doprowadzić do tego, by posiadały one idealną izolację (aby prąd płynął jedynie wzdłuż przewodów i nie następowały upływy prądu) oraz by posiadały one zerowy opór (aby nie występowały napięcia między końcami tego samego przewodu). Innymi słowy, idealny przewód posiada charakterystykę prądowo-napięciową, dla której niezależnie od płynącego prądu napięcie jest stale równe zeru. Uwzględnienie oporu przewodów łączących nie przedstawia trudności. Symbol graficzny przewodu idealnego i jego charakterystyka przedstawione są na rys. 2.1.3a.

Spełnienie dwóch ostatnich założeń o niezależności prądów i napięć od wzajemnego położenia i o przewodach idealnych pozwala na wprowadzenie pojęcia schematu elektrycznego obwodu - pewnej abstrakcji obwodu rzeczywistego.

Schemat elektryczny obwodu jest to graficzne przedstawienie sposobu połączenia elementów obwodu elektrycznego.

Schemat obwodu składa się z elementów schematu, którymi są symbole rzeczywistych elementów obwodu. Symbole te przedstawione są na rys. 2.1.3. Przykładem schematu elektrycznego obwodu przedstawionego na rys. 2.1.1 jest schemat z rys. 2.5.1. Schemat elektryczny obwodu jest więc topologicznie identyczny z geometryczną strukturą rzeczywistego obwodu.

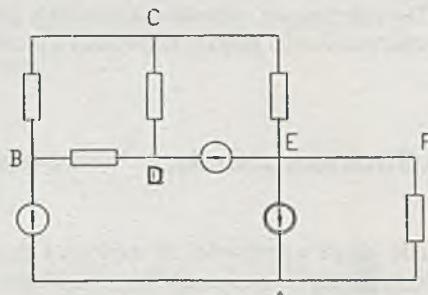
W dalszym ciągu posługiwać się będziemy pojęciem schematu elektrycznego obwodu, utożsamiając go w potocznym języku z obwodem elektrycznym. Należy jednak pamiętać o tym, że schemat elektryczny obwodu powstaje w wyniku pewnych założeń upraszczających, w związku z czym wyprowadzone na jego podstawie wnioski o zachowaniu się rzeczywistego obwodu oraz obliczone na jego podstawie prądy i napięcia będą słuszne i prawdziwe jedynie wtedy, gdy



Rys. 2.5.1

założenia powyższe są spełnione. Nawet najbardziej dokładne i poprawne obliczenia prądów i napięć na podstawie schematu mogą być niezgodne z wynikami pomiarów, jeżeli nie spełnione są założenia o idealności przyrządów pomiarowych, źródeł napięcia, przewodów i nie zachowane są warunki zewnętrzne, dla których wyznaczono charakterystyki elementów obwodu.

Rozpatrzmy bardziej złożony obwód elektryczny, którego schemat przedstawiony jest na rys. 2.5.2. Strukturę tego obwodu można przedstawić w jeszcze prostszy sposób za pomocą tak zwanego grafu. Dla obwodu z rys. 2.5.2 graf przedstawiony jest na rys. 2.5.3.



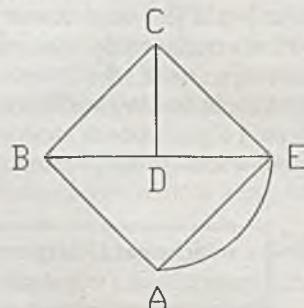
Rys. 2.5.2

Graf obwodu jest to twór geometryczny składający się z odcinków zwanych gałęziami *) (np. AB, BD, DE itd.), połączonych ze sobą w punktach zwanych węzłami (A, B itd.).

Kilka gałęzi grafu tworzących zamkniętą drogę tworzy cykl (oczko) - np. gałązie AB, BD, DE, EA albo AB, BD, DC, CE, EA itd.

Graf obwodu można uznać za dalszą abstrakcję obwodu elektrycznego, w której uwzględniona jest jedynie struktura, a więc sposób połączenia poszczególnych węzłów między sobą. Graf obwodu jest więc również topologicznie identyczny z geometryczną strukturą rzeczywistego obwodu.

Pojęcie gałęzi, węzła i oczka można stosować również w odniesieniu do schematu elektrycznego obwodu i przez analogię również do samego obwodu. W ten sposób otrzymamy odpowiedniość:



Rys. 2.5.3

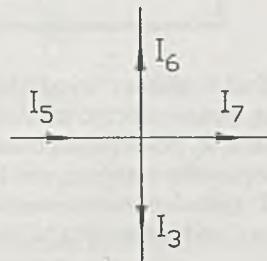
element obwodu	= element schematu	= gałąź grafu
miejsce połączenia dwóch lub więcej elementów	= węzeł schematu	= węzeł grafu
kilka elementów tworzących zamknięty kontur	= oczko schematu	= cykl (oczko) grafu

*) W teorii grafów nazywanych też krawędziami lub łukami.

2.6. Prawa Kirchhoffa

Z dotychczasowych rozważań wynika, że dla każdego z elementów obwodu (źródeł i odbiorników) istnieje zależność między jego napięciem i prądem. Natomiast sposób połączenia poszczególnych elementów w obwód, a więc struktura obwodu, określa wspólną zależność między napięciami i prądami różnych elementów. Współzależności te podane są przez dwa prawa Kirchhoffa. Pierwsze z nich dotyczy związku między prądami a drugie związku między napięciami.

Rozważmy dowolny węzeł obwodu (rys. 2.6.1). Nietrudno zauważyć, że ilość ładunków dopływających do węzła w każdym przedziale czasu musi być równa ilości ładunków odpływających z węzła. Gdyby tak nie było, musiałyby się ładunki w węźle stale gromadzić albo musiałyby one stale odpływać. Stan taki nie mógłby być stanem ustalonym i jest wykluczony przy rozpatrywaniu obwodów. Przyporządkowując ładunkom odpływającym znak "-" i traktując je jako ujemne ładunki dopływające, można więc dla węzła napisać:



Rys. 2.6.1

$$\sum_{\bullet} dq = 0$$

gdzie kropka pod znakiem sumy oznacza sumowanie po wszystkich gałęziach danego węzła. Stąd wynika, że również

$$\sum_{\bullet} \frac{dq}{dt} = 0$$

a ponieważ z definicji $\frac{dq}{dt} = I$, zatem

$$\boxed{\sum_{\bullet} I = 0}$$

(2.6.1)

Jest to tak zwane pierwsze prawo Kirchhoffa :

Dla każdego węzła obwodu elektrycznego algebraiczna suma natężen prądów dopływających do węzła jest zawsze równa zeru.

Prądy dopływające do węzła liczymy przy tym ze znakiem dodatnim, zaś prądy odpływające z węzła ze znakiem ujemnym.

Dla węzła przedstawionego na rys. 2.6.1 mamy zatem

$$I_5 - I_6 - I_7 - I_3 = 0$$

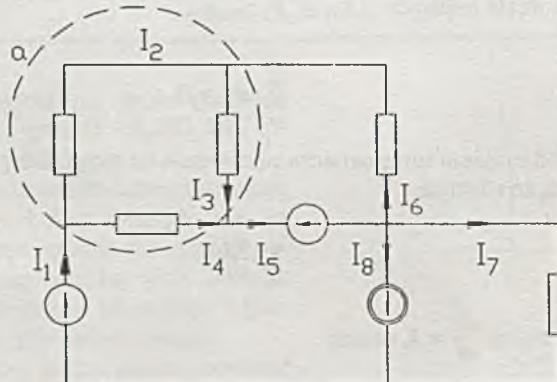
Pierwsze prawo Kirchhoffa dotyczy zatem związków między prądami elementów stykających się w jednym węźle. Pierwsze prawo Kirchhoffa łatwo uogólnić na dowolną wyodrębnioną część obwodu, tzw. odcięcie :

Dla wyodrębnionej części (odcięcia) obwodu algebraiczna suma natężen prądów dopływających do tej części (odcięcia) obwodu jest zawsze równa零.

Pod terminem "wyodrębniona część obwodu" (odcięcie) rozumiemy tu część obwodu, którą można otoczyć zamkniętą powierzchnią. Istotnie, suma prądów dopływających do zamkniętej powierzchni musi być równa zero, w przeciwnym razie wewnątrz powierzchni następowałby stały przyrost lub ubytek ładunków.

Przykładem zastosowania tego prawa może być część obwodu z rys. 2.6.2 wyodrębniona przez linię kreskowaną "a", a znajdująca się wewnątrz linii. Dla tej części obwodu:

$$I_1 + I_6 - I_3 - I_4 = 0$$

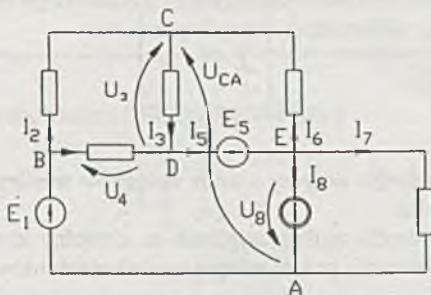


Rys. 2.6.2

Rozważmy teraz dowolne oczko obwodu, np. oczko ABDEA (rys. 2.6.3). Przyjmijmy kierunek obiegu oczka (np. zgodny z kierunkiem wskazówek zegara) i sumujmy wszystkie napięcia w oczku licząc napięcia, których strzałki są zgodne z kierunkiem obiegu jako dodatnie, zaś napięcia, których strzałki są przeciwe do kierunku obiegu, jako ujemne. Zauważmy przy tym, że napięcia na siłach elektromotorycznych są równe co do wartości siłom elektromotorycznym, a ich strzałki są zgodne ze strzałkami sił elektromotorycznych oraz że na sile prądomotorycznej również istnieje napięcie. Otrzymamy

$$\sum_o U = E_1 - U_5 + U_8$$

gdzie kółko pod znakiem sumy oznacza sumowanie wzdłuż zamkniętego konturu.



Rys. 2.6.3

Wykażemy, że algebraiczna suma napięć w oczku jest zawsze równa零. Istotnie, praca wykonana przy przesunięciu naboju wzdłuż zamkniętej drogi, jaką przedstawia oczko, musi być równa零, stąd wynika również, że wzdłuż oczka

$$\oint \mathbf{K} d\mathbf{r} = 0$$

Całkę okrężną można rozłożyć na sumę całek, np. dla konturu ABDEA (rys.2.6.3):

$$\oint \mathbf{K} d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{K} d\mathbf{r} + \int_B^D \mathbf{K} d\mathbf{r} + \int_D^E \mathbf{K} d\mathbf{r} + \int_E^A \mathbf{K} d\mathbf{r} = 0$$

poszczególne całki równe są napięciom między odpowiednimi punktami i tak

$$\int_A^B \mathbf{K} d\mathbf{r} = U_{AB} = -E_1$$

(grot strzałki napięcia U_{AB} jest w punkcie A, dlatego znak minus przy E_1) podobnie

$$\int_B^D \mathbf{K} d\mathbf{r} = U_{BD} = U_4$$

$$\int_D^E \mathbf{K} d\mathbf{r} = U_{DE} = E_5$$

$$\int_E^A \mathbf{K} d\mathbf{r} = U_{EA} = -U_8$$

a więc

$$-E_1 + U_4 + E_5 - U_8 = 0$$

II Prawo Kirchhoffa można zatem sformułować w następujący sposób:

Dla każdego oczka obwodu elektrycznego algebraiczna suma napięć jest zawsze równa零.

$$\sum_{\text{o}} U = 0$$

(2.6.2)

Drugie prawo Kirchhoffa dotyczy zatem związków między napięciami na różnych elementach jednego oczka.

Drugie prawo Kirchhoffa można uogólnić na dowolny kontur, to znaczy dowolną zamkniętą drogę, niekoniecznie przechodzącą wzdłuż elementów obwodu:

Dla każdego zamkniętego konturu algebraiczna suma napięć jest równa零.

Na przykład dla konturu ABDCA (rys. 2.6.3) można napisać:

$$E_1 - U_4 + U_3 - U_{CA} = 0$$

Przy układaniu równań według II prawa Kirchhoffa należy traktować wszystkie SEM tak, jak napięcia i liczyć wszystkie napięcia, których strzałki są zgodne z kierunkiem obiegu konturu, jako dodatnie, zaś napięcia, których strzałki są przeciwe do kierunku obiegu, jako ujemne.

Warto zwrócić uwagę na to, że tak sformułowane prawa Kirchhoffa nie wymagają żadnych założeń co do kształtu funkcji opisujących zależność napięcia od prądu - są one zupełnie niezależne od nich - zależą jedynie od struktury obwodu elektrycznego.

Nie wyjaśniona dotychczas sprawa, ile niezależnych równań wg pierwszego i drugiego prawa można dla danego obwodu napisać, będzie rozpatrywana w rozdziale o obwodach złożonych.

2.7. Praca i moc

Przy przepływie prądu elektrycznego w obwodzie źródła energii elektrycznej dostarczają energii elektrycznej, która w odbiornikach ulega zamianie na inne rodzaje energii: cieplną, mechaniczną, promieniowania itp. W myśl zasad zachowania energii suma energii wydawanych przez poszczególne źródła W_{zk} musi być równa sumie energii pobranych przez poszczególne odbiorniki W_{ok}

$$\sum W_{zk} = \sum W_{ok} \quad (2.7.1)$$

Stąd wynika, że również i dla mocy obowiązuje zasada zachowania mocy w obwodzie elektrycznym, wystarczy bowiem powyższe równanie podzielić obustronnie przez czas t , w którym energia była wydawana i pobierana:

$$\sum P_{zk} = \sum P_{ok} \quad (2.7.2)$$

Suma mocy wydawanych przez źródła musi być równa sumie mocy pobieranych przez odbiorniki.

Zasadę zachowania mocy można również wyrazić jako

$$\sum_{i=0}^g P_i = 0 \quad (2.7.3)$$

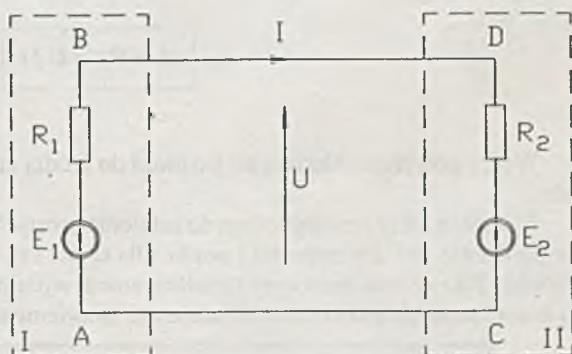
traktując moce dostarczane jako ujemne moce pobierane:

Suma mocy pobieranych przez poszczególne elementy obwodu musi być równa zeru.

Zasada zachowania mocy wynika bezpośrednio z obu praw Kirchhoffa (patrz R. 4.3), nie musi ona być osobno postulowana.

Na rys. 2.7.1 przedstawiony jest prosty obwód elektryczny składający się z dwóch części I i II. Jedna z nich jest źródłem energii, druga odbiornikiem. Przy zastrzałkowaniu napięć i prądów tak, jak to przedstawiono na rysunku, założono, że część I przedstawia źródło, a część II odbiornik. Czy rzeczywiście część I jest źródłem, a część II jest odbiornikiem, można stwierdzić dopiero po uzyskaniu z obliczeń lub pomiarów informacji o znakach liczbowych wartości napięcia i prądu (+ czy -). Jeżeli oba znaki są dodatnie, to rzeczywiście część I przedstawia źródło energii, a część II odbiornik.

W części I płynie bowiem wtedy prąd z punktu o niższym potencjale A do punktu o potencjale wyższym B, ażeby zaś przenosić ładunki dodatnie z miejsca o niższym potencjale do miejsca o potencjale wyższym, trzeba dostarczyć im energii z zewnątrz, co zachodzi jedynie w źródłach. Energii tej dostarcza wtedy SEM E, w której następuje zamiana energii niewielkiej, np. chemicznej na elektryczną dostarczaną ładunkom przepływającym przez źródło. W części II płynie prąd od miejsca z wyższym potencjałem D do miejsca o potencjale niższym C. Energia elektryczna będzie tu zamieniana na inny rodzaj energii, np. cieplną, chemiczną, mechaniczną itp. Jeżeli oba znaki są ujemne, to zarówno prąd zmieni swój rzeczywisty



Rys. 2.7.1

kierunek, jak i miejscami o potencjale wyższym będą A i C - nie zmieni to faktu, że część I jest źródłem, a część II odbiornikiem energii elektrycznej.

Łatwo wyrazić moc P przez napięcie i prąd: Jeżeli ładunek dq dostarczony jest z punktu A do punktu B, między którymi istnieje napięcie U , to praca wykonana przy tym wynosi:

$$dA = U dq$$

Jeżeli praca ta wykonana została w czasie dt , to moc

$$P = \frac{dA}{dt} = U \frac{dq}{dt} = UI$$

Moc prądu stałego w danym elemencie obwodu jest równa iloczynowi napięcia i prądu tegoż elementu

$$P = UI$$

(2.7.4)

Pracę wykonaną przez prąd stały oblicza się według definicji mocy z poprzedniego wzoru jako

$$A = Pt = UIt$$

(2.7.5)

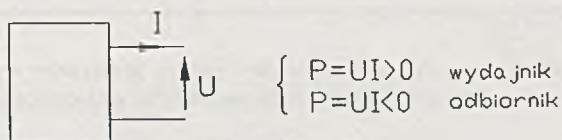
Wzory powyższe odnoszą się zarówno do źródła energii elektrycznej, jak i do odbiornika.

Powyższe fakty posłużą do ustalenia prostych reguł: Zwróćmy uwagę na wzajemne położenie strzałek napięcia i prądu. Dla części I są one zgodne (skierowane w tą samą stronę). Taki system nazwiemy strzałkowaniem wydajnikowym (źródłowym). Dla części II są one przeciwnie skierowane. Taki system nazwiemy strzałkowaniem odbiornikowym.

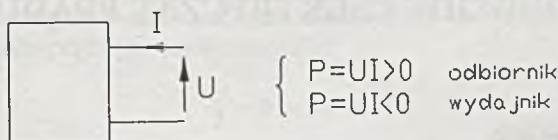
Jeżeli przy strzałkowaniu wydajnikowym obliczona wartość liczbowa mocy jest dodatnia, to dany element jest wydajnikiem energii. Jeżeli wartość liczbowa mocy jest ujemna, to dany element jest odbiornikiem energii. Jeżeli przy strzałkowaniu odbiornikowym obliczona wartość liczbowa mocy jest dodatnia, to dany element jest odbiornikiem. Jeżeli wartość liczbowa mocy jest ujemna, to dany element jest wydajnikiem energii.

System strzałkowania odbiornikowego i wydajnikowego przedstawiony jest na rys. 2.7.2.

System wydajnikowy



System odbiornikowy



Rys. 2.7.2

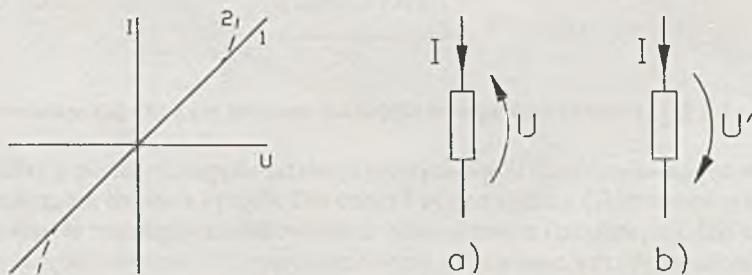
Rozdział 3

LINIOWE OBWODY ELEKTRYCZNE PRĄDU STAŁEGO

3.1. Obwody liniowe

Badając bliżej różnego rodzaju elementy obwodu, można wyróżnić dosyć szeroką klasę elementów posiadających liniowe charakterystyki prądowo-napięciowe (rys. 3.1.1). Do klasy tej zaliczyć możemy zarówno te elementy, dla których nie można stwierdzić odstępstwa od zależności liniowej (1 na rys. 3.1.1) jak i takie elementy, których charakterystyki w zakresie, w którym elementy te są stosowane, można przybliżyć linią prostą (2 na rys. 3.1.1).

Analitycznie można dla takich elementów wyrazić charakterystyki prądowo-napięciowe



Rys. 3.1.1

Rys. 3.1.2

równaniem noszącym nazwę prawa Ohma

$$U = RI$$

(3.1.1)

lub

$$I = G U$$

(3.1.2)

Elementem liniowym nazywamy element o liniowej zależności prądu od napięcia.

Prawo Ohma w powyższej postaci jest ściśle związane ze sposobem strzałkowania (rys. 3.1.2a). Jeżeli odwróciemy strzałkę napięcia (rys. 3.1.2b), trzeba konsekwentnie napisać prawo Ohma jako

$$U' = - R I$$

ponieważ $U = - U'$.

Z prawa Ohma wynika ważny wniosek: dla elementu liniowego stosunek napięcia panującego na nim do prądu jest wielkością stałą:

$$\frac{U}{I} = R = \text{const}$$

Wielkość ta jest więc wielkością charakterystyczną dla elementu liniowego.

Opór elektryczny R jest wielkością charakteryzującą zależność napięcia od prądu dla elementu liniowego. Jest on równy stosunkowi napięcia na elemencie do prądu płynącego przez element.

Często używana jest również wielkość równa odwrotności oporu - przewodność elektryczna G

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.1.3)$$

W dalszym ciągu używać będziemy również określenia "opór" lub "opór liniowy" dla określenia elementu liniowego.

Dla oporów liniowych można, korzystając z prawa Ohma, wyrazić moc elektryczną wzorami

$$P = UI = G U^2 = R I^2 \quad (3.1.4)$$

Wartość oporu elektrycznego (lub przewodności) zależy od kształtów geometrycznych przewodnika, materiału, z którego został wykonany i technologii wykonania oraz od warunków zewnętrznych (np. temperatury itp.).

3.2. Liniowe obwody elektryczne

Określmy najpierw pojęcie liniowego obwodu elektrycznego:

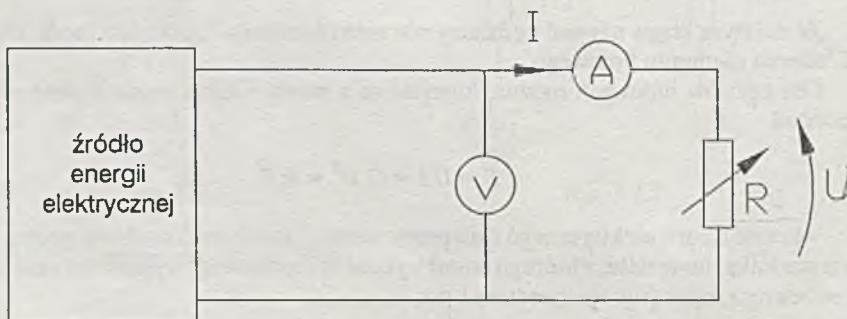
Liniowy obwód elektryczny jest to obwód składający się wyłącznie ze źródeł idealnych i elementów (oporów) liniowych.

W myśl powyższej definicji możemy traktować rzeczywisty obwód elektryczny jako obwód liniowy, jeżeli prądy i napięcia wszystkich elementów obwodu będą leżały w zakresie liniowości elementów (będą spełniały prawo Ohma) oraz jeżeli źródła energii elektrycznej można zastąpić układami zastępczymi składającymi się wyłącznie z źródeł idealnych i oporów liniowych.

Ponieważ założenie o liniowości obwodu robi się przed analizą danego obwodu, to w przypadkach, gdy nie można z góry przewidzieć, że wszystkie prądy i napięcia elementów będą leżały w zakresie liniowości, konieczne jest sprawdzenie tego po dokonaniu analizy.

3.3. Układy zastępcze rzeczywistych źródeł energii elektrycznej

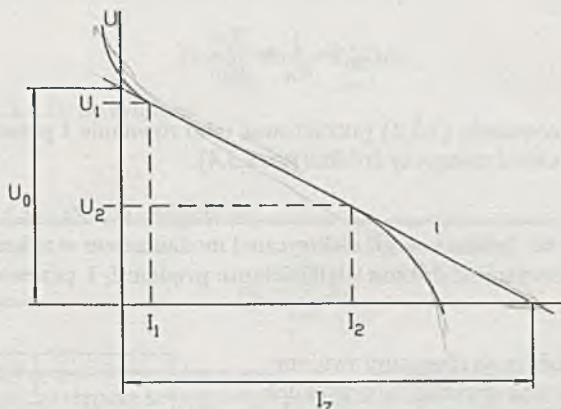
Charakterystyka prądowo-napięciowa rzeczywistego źródła energii elektrycznej może być zmierzona w układzie przedstawionym na rys. 3.3.1. Przez zmianę oporu obciążenia źródła można uzyskać różne pary wartości prądu i napięcia odpowiadające sobie i wykreślić na ich podstawie charakterystykę (rys. 3.3.2).



Rys. 3.3.1

Z charakterystyki powyższej wynika, że w zakresie prądów od I_1 do I_2 (lub napięć od U_1 do U_2) można ją aproksymować przez linię prostą "l" przechodzącą przez dwa punkty o współrzędnych $(0, U_0)$ oraz $(I_2, 0)$, posiadającą więc równanie:

$$U = U_0 - IR_w \quad (3.3.1)$$



Rys. 3.3.2

przy czym

$$R_w = \frac{U_0}{I_z} \quad (3.3.2)$$

Jeżeli powyższe równanie (3.3.1) potraktować jako równanie II prawa Kirchhoffa, to można narysować I układ zastępczy źródła (rys. 3.3.3).

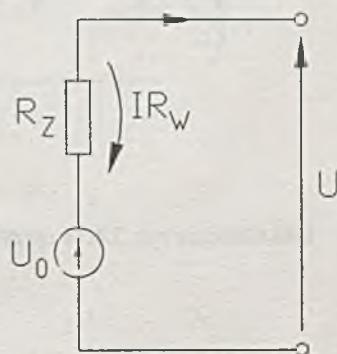
Rzeczywiste źródło energii elektrycznej można w zakresie liniowości zastąpić przez szeregowego połączenie siły elektromotorycznej U_0 i oporu R_w

Z powyższego wynika, że do scharakteryzowania rzeczywistego źródła energii elektrycznej w zakresie jego liniowości potrzebna jest znajomość dwóch wielkości: napięcia U_0 oraz tzw. oporu wewnętrznego R_w . Wyznaczenie obu wielkości na podstawie charakterystyki napięciowo-prądowej źródła wynika z rys. 3.3.2 oraz wzoru (3.3.2).

Warto zwrócić uwagę, że w praktyce najczęściej $R_w > 0$, zatem im większy prąd płynie ze źródła, tym mniejsze jest napięcie na nim. Potocznie mówi się wtedy o spadku napięcia na oporze wewnętrznym źródła.

Nietrudno zauważyć, że równanie (3.3.1) można napisać również i w innej postaci, traktując napięcie U jako zmienną niezależną, a prąd I jako zmienną zależną. W tym samym zakresie liniowości mamy wtedy:

$$I = I_z - U G_w \quad (3.3.3)$$



Rys. 3.3.3

przy czym

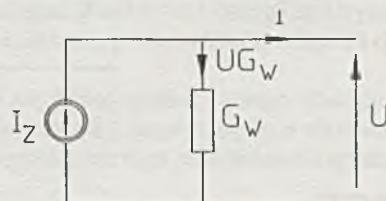
$$G_w = \frac{1}{R_w} = \frac{I_z}{U_o} \quad (3.3.4)$$

Jeżeli powyższe równanie (3.3.3) potraktować jako równanie I prawa Kirchhoffa, to można narysować II układ zastępczy źródła (rys. 3.3.4).

Rzeczywiste źródło energii elektrycznej można zatem w zakresie liniowości scharakteryzować dwoma wielkościami: prądem I_z i przewodnością G_w .

Oba układy zastępcze są równouprawnione.

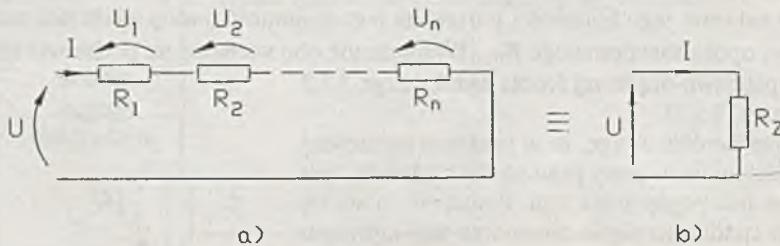
Idealną SEM można uważać za przypadek szczególny źródła, w którym opór wewnętrzny jest równy zeru, a idealną SPM jako szczególny przypadek źródła z zerową przewodnością zewnętrzną.



Rys. 3.3.4

3.4. Opór zastępczy szeregowego połączenia oporów

Wykażemy, że n szeregowo połączonych oporów R_i można zastąpić jednym oporem zastępczym R_z (rys. 3.4.1), to znaczy, że przy jednakowym prądzie I na układach z rys. 3.4.1a i 3.4.1b powstanie to samo napięcie U . Układy są nieroróżnialne za pomocą pomiaru prądu i napięcia.



Rys. 3.4.1

Dla układu z rys. 3.4.1a otrzymamy z II prawa Kirchhoffa:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i$$

Ponieważ dla każdego z oporów

$$U_i = R_i I$$

a ten sam prąd płynie przez wszystkie opory, zatem

$$U = \sum_{i=1}^n R_i I = I \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.4.1)$$

Dla układu z rys. 3.4.1b otrzymamy

$$U = I R_i \quad (3.4.2)$$

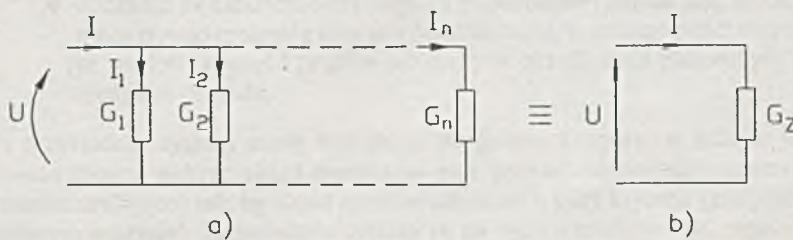
z porównania (3.4.1) i (3.4.2) otrzyma się

$$R_z = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.4.3)$$

Opór zastępczy szeregowego połączenia oporów jest równy sumie tych oporów.

3.5. Opór zastępczy równoleglego połączenia oporów

Przy równoległym połączeniu oporów wygodniej jest posługiwać się przewodnościami. Wykażemy, że równoległe połączenie n przewodności G_i można zastąpić jedną przewodnością zastępczą G_z (rys. 3.5.1a i b).



Rys. 3.5.1

Dla układu z rys. 3.5.1a otrzymamy z I prawa Kirchhoffa:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i$$

Ponieważ dla każdej z przewodności

$$I_i = G_i U$$

To samo napięcie U istnieje na wszystkich przewodnoścach, zatem

$$I = \sum_{i=1}^n G_i U = U \sum_{i=1}^n G_i \quad (3.5.1)$$

Dla układu z rys. 3.4.2b otrzymamy

$$I = U G_i \quad (3.5.2)$$

zatem z porównania (3.5.1) z (3.5.2) otrzyma się

$$G_z = \sum_{i=1}^n G_i \quad (3.5.3)$$

Przewodność zastępcza równoległego połączenia przewodności jest równa sumie przewodności.

Jeżeli np. mamy dwa opory połączone równolegle, to opór zastępczy obliczony na podstawie wzoru (3.5.3) wyniesie:

$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.5.4)$$

Wzór ten używany jest bardzo często.

Stosowanie układów zastępczych źródeł, połączeń szeregowych i równoległych oporów może znacznie uprościć obliczanie obwodów elektrycznych. Dalsze układy zastępcze podane będą w następnych rozdziałach.

Rozdział 4

LINIOWE OBWODY ZŁOŻONE

4.1. Zadania analizy i syntezy obwodów

Zagadnienia analizy obwodów elektrycznych sprowadzają się do wyznaczenia prądów i napięć w elementach lub częściach obwodu, na podstawie znanej jego struktury, znanej wartości oporów jego elementów oraz znanych wymuszających sił elektromotorycznych i prądomotorycznych. Dalszym celem analizy może być obliczenie mocy, sprawności i innych wielkości charakteryzujących obwód elektryczny, a zależnych od prądów i napięć w obwodzie.

Zagadnienia syntezy obwodów elektrycznych mogą polegać na:

- dobraniu struktury obwodu,
- dobraniu elementów obwodu,
- dobraniu sił elektromotorycznych i prądomotorycznych tak, by otrzymany obwód spełniał z góry założone kryteria, w szczególności dotyczące wartości napięć i prądów lub mocy w określonych elementach lub częściach obwodu.

Typowym przykładem syntezy może być układ do pomiaru oporu, w którym jako strukturę obwodu można wybrać układ mostka, w nim dobrać odpowiednio elementy (opory oraz źródła zasilające) tak, by układ spełniał założone z góry kryteria (np. pomiar oporów w zadanym zakresie). Zagadnienia syntezy są na ogół trudniejsze od zagadnień analizy i nie zawsze rozwiązalne w jednoznaczny sposób.

Najczęściej do syntezy obwodu dochodzi się drogą analizy kolejnych wariantów obwodu coraz lepiej spełniających zadane warunki. Z tego też powodu omówimy bardziej szczegółowo metody analizy obwodów złożonych.

4.2. Zastosowanie praw Kirchhoffa do analizy obwodów

Rozpatrzmy obwód elektryczny składający się z g gałęzi oraz z w węzłów. Przyjmując, że w każdej gałęzi obwodu może znaleźć się bądź opór, bądź siła elektromotoryczna idealna, bądź siła prądomotoryczna, problem polega na obliczeniu prądów lub napięć w gałęziach obwodu.

Znajomość rozpływów prądów lub rozkładu napięć w obwodzie wystarcza dla innych obliczeń (np. mocy).

Do analizy obwodów wystarcza w zasadzie stosowanie obu praw Kirchhoffa oraz równań łączących napięcia i prądy poszczególnych elementów (w obwodach liniowych tzw. Prawo Ohma). Celem wyznaczenia g niewiadomych prądów I_i potrzebny będzie układ g równań o g niewiadomych.

Pokażemy dalej, że można napisać

$$n = w - 1 \quad (4.2.1)$$

liniowo niezależnych równań według pierwszego prawa Kirchhoffa oraz

$$l = g - w + 1 \quad (4.2.2)$$

liniowo niezależnych równań według drugiego prawa Kirchhoffa, przy czym założono tu, że w równaniach drugiego prawa Kirchhoffa wszystkie napięcia na oporach zastąpiono przez iloczyny ich prądów i oporów. Łącznie otrzymamy więc:

$$n + l = w - 1 + g - w + 1 = g$$

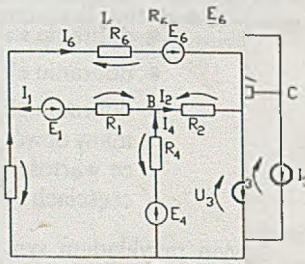
równań o g niewiadomych prądach lub napięciach.

Pokażemy na przykładzie zastosowanie obu praw Kirchhoffa.

Na rys. 4.2.1 przedstawiony jest obwód składający się z $g = 6$ gałęzi, $w = 4$ węzłów. Dla tego obwodu można więc napisać

$$n = w - 1 = 4 - 1 = 3$$

równania wg pierwszego prawa Kirchhoffa:



Rys. 4.2.1

$$\text{węzeł A} \quad I_1 + I_5 - I_6 = 0$$

$$\text{węzeł B} \quad -I_1 + I_4 - I_3 = 0$$

$$\text{węzeł C} \quad I_1 + I_6 - I_3 = 0$$

Łatwo zauważyć, że równanie dla węzła D jest sumą powyższych trzech równań, nie jest więc równaniem liniowo niezależnym.

Według drugiego prawa Kirchhoffa można napisać:

$$l = g - w + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

równania:

$$\begin{array}{lll}
 \text{oczko } I & -I_5 R_5 + I_1 R_1 + I_4 R_4 + E_1 - E_4 = 0 \\
 \text{oczko } II & -I_4 R_4 - I_2 R_2 - U_3 + E_4 = 0 \\
 \text{oczko } III & -I_6 R_6 + I_2 R_2 - I_4 R_1 + E_6 - E_1 = 0
 \end{array}$$

Łatwo zauważyc, że każde następne równanie oczkowe będzie już zależne od powyższych równań.

Łącznie mamy więc $g = 6$ równań o sześciu niewiadomych

$$I_1, I_2, I_4, I_5, I_6, U_3$$

prąd I_3 jest znany i wymuszany przez siłę prądomotoryczną, natomiast napięcie na niej U_3 jest nieznane.

Z powyższych równań można obliczyć dowolną z niewiadomych wielkości. Z punktu widzenia analizy zadanie jest więc rozwiązane.

Jak widać, stosunkowo prosty obwód prowadzi już do układu sześciu równań o sześciu niewiadomych. Z tego powodu, metoda oparta na stosowaniu obydwu praw Kirchhoffa jest w przypadku bardziej złożonych obwodów praktycznie rzadko stosowana.

Celem uzasadnienia liczby równań niezależnych, jakie można napisać dla pierwszego prawa Kirchhoffa, należy odpowiedzieć na pytanie: ile i jakie spośród g prądów można by wybrać niezależnie od siebie. W tym celu rozpatrzmy graf obwodu (np. obwodu z rys. 4.2.1) przedstawiony na rys. 4.2.2a.

Aby w obwodzie nie płynął żaden prąd, należy przerwać pewną liczbę gałęzi, np. AD, AC i CD tak, by zlikwidować wszystkie oczka grafu. Podgraf uzyskany w ten sposób przedstawiony jest na rys. 4.2.2b. Tego rodzaju podgraf nazywany jest drzewem grafu.

Drzewem grafu nazywamy podgraf powstały z grafu przez usunięcie takiej minimalnej liczby gałęzi, by znikły wszystkie oczka grafu. Gałęzie uzupełniające dane drzewo do pełnego grafu nazywamy gałęziami łączącymi.

Drzewo grafu łączy ze sobą wszystkie węzły grafu. Stąd wynika, że liczba gałęzi drzewa

$$n = w - 1 \quad (4.2.5)$$

a liczba gałęzi łączących

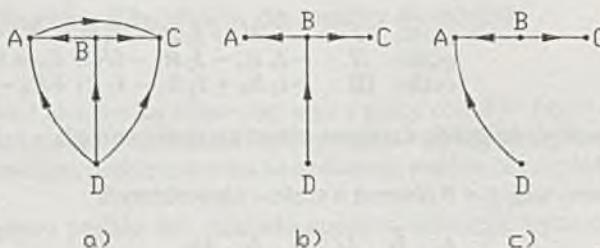
$$l = g - n = g - w + 1 \quad (4.2.6)$$

Nietrudno zauważyc, że dany graf może mieć wiele drzew (np. rys. 4.2.2b,c i inne).

Usunięcie z grafu gałęzi łączących uniemożliwia przepływ prądu w obwodzie; inaczej mówiąc, przyrównanie do zera prądów gałęzi łączących sprowadza wszystkie prądy obwodu do zera. Stąd można stwierdzić, że właśnie prądy gałęzi łączących w liczbie l można ustalić wzajemnie niezależnie od siebie, a pozostałe prądy (prądy gałęzi drzewa w liczbie n) są zależne od nich poprzez n równań pierwszego prawa Kirchhoffa. Udowodnimy to w dalszej części tego rozdziału. Zatem według pierwszego prawa Kirchhoffa można napisać tyle równań, ile jest gałęzi drzewa:

$$n = w - 1,$$

a więc dla każdego węzła z wyjątkiem jednego.



Rys. 4.2.2

Drugim wnioskiem, jaki można wysnuć z powyższych rozważań, jest możliwość wyrażenia prądów poszczególnych gałęzi drzewa przez prądy gałęzi łączących. Matematycznie oznacza to, że możemy wyrazić g prądów gałęzi obwodu przez $g - w + 1$ prądów gałęzi łączących; związki te wyprowadzimy poniżej.

Podobnie można stwierdzić, że spośród g napięć na gałęziach obwodu można przyjąć jako wzajemnie niezależne od siebie napięcia gałęzi drzewa w liczbie $n = w - 1$. Pozostałe napięcia (napięcia gałęzi łączących) w liczbie równej liczbie gałęzi łączących

$$l = g - n = g - w + 1 \quad (4.2.7)$$

można wyrazić poprzez napięcia gałęzi drzewa za pomocą l równań na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa.

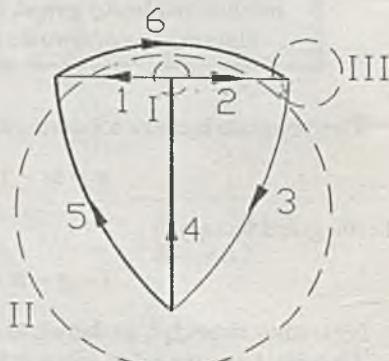
W istocie np. napięcie U_{AD} (rys. 4.2.2b) można wyrazić przez napięcie gałęzi drzewa U_{AB} i U_{BD} ; U_{DC} przez U_{BD} i U_{BC} itd.

Rozpatrzmy bliżej związki między prądem gałęzi łączących, a prądem gałęzi drzewa oraz związki między napięciami gałęzi drzewa, a napięciami gałęzi łączących.

Wybieramy w tym celu dowolne drzewo dla grafu obwodu (rys. 4.2.3) i oznaczmy gałęzie łączące kolejno numerami od 1 do $l = g - w + 1$ (na rys. 4.2.3 od 1 do 3), a gałęzie drzewa od $l + 1$ do g (na rys. 4.2.3 od 4 do 6). Przymijmy dowolne kierunki prądu w każdej gałęzi, a na ich podstawie odpowiednie strzałki napięcia.

Wyodrębnijmy z obwodu $w - 1$ części, które można otoczyć linią zamkniętą tak, by każda z linii wyodrębniających poszczególne części, przecinała tylko jedną gałąź drzewa.

Otrzymanym w ten sposób częściami, tzw. odcięciom obwodu, przyporządkujemy numer odpowiedniej gałęzi drzewa. Jeżeli dla tak otrzymanych odcięć obwodu napiszemy równania według I prawa Kirchhoffa, to otrzymamy układ $w - 1$ niezależnych równań, ponieważ prąd każdej z gałęzi drzewa występuje tylko w jednym równaniu, a gałęzi drzewa jest $w - 1$. Jako kierunek dodatni dla prądów przyjmiemy kierunek prądu w gałęzi drzewa.



Rys. 4.2.3

W ten sposób udowodniono, że

Dla każdego obwodu zawierającego w węzłów można napisać
 $n = w - 1$ niezależnych równań według I prawa Kirchhoffa.

Ścisłe rzecz biorąc, powyższe twierdzenie dotyczy takiego przypadku, w którym równania I prawa Kirchhoffa napisano dla wyodrębnionych w szczególny sposób części obwodu (odcięć). Można jednak udowodnić, że również układ równań I prawa Kirchhoffa napisany dla $w - 1$ węzłów jest układem równań liniowo niezależnych.

Na rys. 4.2.3 pokazane są linie wyodrębniające poszczególne części (odcięcia) obwodu. Dla tego układu można napisać równania

$$\begin{array}{lllll} \text{część } I & -I_1 - I_2 & +I_4 & = 0 \\ \text{część } II & +I_1 + I_2 - I_3 & +I_5 & = 0 \\ \text{część } III & & +I_2 - I_3 & +I_6 & = 0 \end{array} \quad (4.2.8)$$

w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.2.9)$$

albo

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.2.9a)$$

Macierz prostokątna \mathbf{A} , występująca w powyższym równaniu, nazywana bywa fundamentalną macierzą rozcięć. Macierz tę można podzielić na dwie:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}' & \mathbf{1} \end{array} \right]$$

gdzie

$$\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad \mathbf{1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (4.2.10)$$

zaś macierz kolumnową prądów na macierz kolumnową prądów gałęzi łączących I_1, I_2, I_3 , oznaczonych dalej jako

$$\mathbf{I}_L = \left[\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \right]$$

oraz macierz kolumnową prądów gałęzi drzewa

$$\mathbf{I}_T = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

zatem równanie przybierze postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L \\ \mathbf{I}_T \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.2.11)$$

skąd

$$\mathbf{A}' \mathbf{I}_L + \mathbf{I}_T = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{I}_T = -\mathbf{A}' \mathbf{I}_L \quad (4.2.12)$$

albo w postaci rozpisanej:

$$\begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

ogólnie zaś

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_L$$

albo oznaczając

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

$$\boxed{\mathbf{I} = \mathbf{C} \mathbf{I}_L} \quad (4.2.14)$$

gdzie macierz \mathbf{C} jest tzw. macierzą łączącą prądową i może być również napisana bezpośrednio na podstawie schematu (grafu) obwodu. Udowodniliśmy zatem, że:

Prądy poszczególnych gałęzi obwodu można wyrazić przez prądy gałęzi łączących, to znaczy znajomość prądów gałęzi łączących wystarcza do wyznaczenia wszystkich prądów obwodu.

Równocześnie można uważać równanie (4.2.14) za inną postać pierwszego prawa Kirchhoffa.

Możliwość wyrażenia g prądów gałęzi przez mniejszą liczbę $g - w + 1$ prądów pozwala na zmniejszenie liczby równań przy analizie obwodów elektrycznych. Z faktu tego korzysta się przy tzw. metodzie prądów oczkowych (metoda Maxwella).

Korzystając z przyjętego drzewa grafu, można łatwo zestawić zbiór niezależnych oczek, stosując następującą regułę: i -te oczko składa się z i -tej gałęzi łączącej oraz gałęzi drzewa. W taki sposób jednoznacznie określone są wszystkie $l = g - w + 1$ niezależne oczka, gdyż każda z gałęzi łączących reprezentowana jest tylko w jednym oczku. Dla układu z rys. 4.2.4 otrzymamy w ten sposób równania II prawa Kirchhoffa:

$$U_1 + U_4 - U_5 = 0$$

$$U_2 + U_4 - U_5 - U_6 = 0$$

$$U_3 + U_5 + U_6 = 0$$

Równania te można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

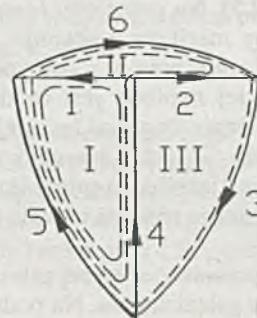
Można udowodnić, że macierz prostokątna występująca w tym równaniu jest transponowaną macierzą **C**:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.2.15)$$

Macierz **C** nazywana jest też fundamentalną macierzą cykli. Ostatnie równanie macierzowe przedstawia nam II prawo Kirchhoffa.

W ten sposób wykazano, że:

Dla każdego obwodu elektrycznego, zawierającego g gałęzi oraz w węzłów, można napisać $g - w + 1$ równań niezależnych według II prawa Kirchhoffa.



Rys. 4.2.4

Powyższe twierdzenie zostało udowodnione dla specyficznego sposobu układania równań na podstawie drzewa.

Macierz **C** można łatwo otrzymać bezpośrednio z grafu obwodu: przyporządkujemy poszczególne wiersze macierzy gałęziom grafu, zaś kolumny oczkom zdefiniowanym jak poprzednio (rys. 4.2.5). Na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny macierzy występuje +1, jeżeli dana gałąź i występuje w j -tym oczku, a kierunek strzałki jej napięcia jest zgodny z kierunkiem strzałki napięcia gałęzi łączącej należącej do tego oczka, -1, jeżeli kierunek strzałki jest niezgodny, a 0 jeżeli dana gałąź nie występuje w j -tym oczku. Można również użyć do tego celu strzałek prądu.

Wprowadzone wyżej zależności pozwalają również na wyrażenie napięć gałęzi przez napięcia gałęzi drzewa. Na podstawie (4.2.13) otrzymamy

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{A}'^T \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

Dzieląc macierz kolumnową napięć przez macierz napięć gałęzi łączących

$$\mathbf{U}_L = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

oraz macierz kolumnową napięć gałęzi drzewa

$$\mathbf{U}_T = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

można równanie (4.2.15) przepisać w postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{A}'^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_L \\ \mathbf{U}_T \end{bmatrix} = 0$$

skąd

$$\mathbf{U}_L - \mathbf{A}'^T \mathbf{U}_T = 0$$

oraz

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{A}'^T \mathbf{U}_T \quad (4.2.17)$$

i

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_T$$

Numer gałęzi	Numer oczek			... g-w+1
	1	2	3	
1	1	0	0	
2	0	1	0	
3	0	0	1	
4	1	+1	0	
5	-1	-1	1	
6	0	-1	1	
.				
9				

Rys. 4.2.5

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \mathbf{U}_T$$

(4.2.18)

Równanie powyższe można uznać za inną postać II prawa Kirchhoffa.

W obwodzie elektrycznym można wyrazić napięcia wszystkich gałęzi przez napięcia gałęzi drzewa.

Na podstawie powyższych rozważań można podać inną interpretację prądów gałęzi łączących, utożsamiając je z tzw. prądami oczkowymi. Można bowiem przyjąć, że każdy prąd oczkowy płynie w danym oczku tak, jak gdyby pozostałych oczek nie było, przy czym jego kierunek określony jest przez gałąź łączącą danego oczka. W obwodzie, którego graf przedstawiony jest na rys. 4.2.4, przez gałąź 4 płyną prądy oczkowe I_1 i I_2 , przy czym uwzględniając ich kierunki otrzymamy:

$$I_4 = I_1 + I_2$$

i podobnie

$$I_5 = -I_1 - I_2 + I_3$$

$$I_6 = -I_2 + I_3$$

co, jak łatwo sprawdzić, jest zgodne z poprzednimi równaniami.

Pojęcie drzewa grafu pozwala więc na napisanie układu równań niezależnych według obu praw Kirchhoffa. Należy tu zwrócić uwagę, że istnieją również i inne sposoby wyznaczenia układów niezależnych, nie oparte na pojęciu drzewa.

4.3. Zasada zachowania mocy i zasada Tellegena

Obliczmy sumę mocy wszystkich gałęzi obwodu. Wykażemy że suma ta musi być równa 0:

$$\sum_{k=1}^g U_k I_k = 0 \quad (4.3.1)$$

Wyrażenie powyższe można przedstawić w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} = 0$$

bo

$$[U_1 \ U_2 \dots \ U_g] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_g \end{bmatrix} = U_1 I_1 + U_2 I_2 + \dots + U_g I_g$$

Napięcia można wyrazić przez napięcie gałęzi drzewa:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathbf{U}_T$$

Transponując, otrzymamy

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}_T^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Prądy możemy wyrazić przez prądy gałęzi łączących

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_L$$

zatem

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} = \mathbf{U}_T^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_L$$

ale

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

stąd

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.3.2)$$

Powyższe równanie wyraża zasadę zachowania mocy.

Suma mocy wszystkich gałęzi obwodu jest równa zeru.

Zasada zachowania mocy nie musi więc być specjalnie postulowana, jest ona wynikiem istnienia obu praw Kirchhoffa.

Zasada zachowania mocy może być uogólniona i przedstawiona w postaci tzw. twierdzenia Tellegena. Założymy, że rozpatrywać będziemy dwa obwody a i b o identycznej strukturze, to znaczy posiadające takie same grafy. Charakter i wartości elementów tych obwodów mogą być zupełnie różne. Jeżeli posiadają one te same grafy, to również ich macierze \mathbf{A}' muszą być takie same.

Dla obwodu a zatem

$$\mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_{T_a} \quad \mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_{L_a}$$

Dla obwodu b również

$$\mathbf{U}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_{T_b} \quad \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_{L_b}$$

Łatwo wykazać, że

$$\mathbf{U}_a^T \mathbf{I}_b = \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{U}_b^T \mathbf{I}_a = \mathbf{0} \quad (4.3.3)$$

Powyższe dwa równania znane są jako twierdzenie Tellegena. Zwróćmy uwagę, że mnożymy tu transponowaną macierz napięć jednego obwodu przez macierz prądów drugiego obwodu. Dowód jest taki, jak przy zasadzie zachowania mocy:

$$\mathbf{U}^T = \mathbf{U}_T^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_{L_b}$$

stąd

$$\mathbf{U}_a^T \mathbf{I}_b = \mathbf{U}_T^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}' \end{bmatrix} \mathbf{I}_{T_b} = \mathbf{0}$$

Twierdzenie Tellegena znajduje zastosowanie między innymi przy analizie wrażliwości obwodu na zmiany jego parametrów.

4.4. Metoda prądów oczkowych (metoda Maxwella)

Rozpatrzmy gałąź obwodu przedstawioną na rys. 4.4.1. Można ją uważać za uniwersalną; z niej bowiem wynikają jako szczególne przypadki następujące rodzaje gałęzi:

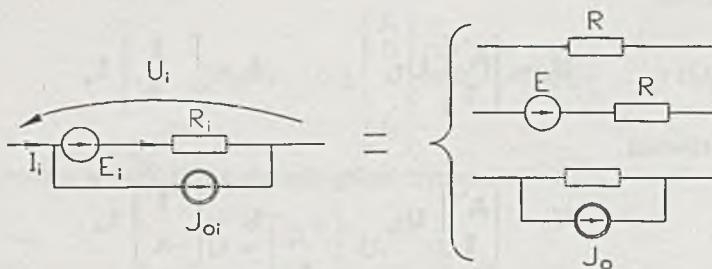
- gałąź oporowa, gdy $E_i = 0$ i $J_{oi} = 0$,
- gałąź ze źródłem rzeczywistym napięciowym, gdy $J_{oi} = 0$,
- gałąź ze źródłem rzeczywistym prądowym, gdy $E_i = 0$.

Dla gałęzi tej możemy napisać związek między napięciem U_i a prądem I_i :

$$U_i + E_i - (I_i - J_{oi}) R_i = 0. \quad (4.4.1)$$

Nazwijmy przez E_{zi} zastępczą SEM: $E_{zi} = E_i + J_{oi} R_i$, czyli

$$U_i = -E_{zi} + R_i I_i. \quad (4.4.2)$$



Rys. 4.4.1

Przedstawimy obecnie podstawy metody prądów oczkowych.

Rozpatrzmy dowolny obwód o g gałęziach. Pierwsze prawo Kirchhoffa dla danego obwodu można zapisać w postaci:

$$\mathbf{I} = \mathbf{C} \mathbf{I}_L$$

Natomiast równania drugiego prawa Kirchhoffa będą miały postać:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

zaś równania gałęzi:

$$U_i = -E_{zi} + R_i I_i$$

zapisać można macierzowo w postaci:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{E} + \mathbf{R}_d \mathbf{I} \quad (4.4.2a)$$

gdzie \mathbf{R}_d - macierz diagonalna oporów gałęzi

$$\mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & R_g \end{bmatrix}$$

zaś

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{z_1} \\ E_{z_2} \\ \vdots \\ E_{z_g} \end{bmatrix}$$

Podstawiając równania I prawa Kirchhoffa do równań gałęzi, otrzymamy:

$$\mathbf{U} = -\mathbf{E} + \mathbf{R}_d \mathbf{C} \mathbf{I}_L \quad (4.4.3)$$

a podstawiając z kolejni powyższe równanie do równań II prawa Kirchhoffa otrzymamy:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} = -\mathbf{C}^T \mathbf{E} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}_d \mathbf{C} \mathbf{I}_L = 0$$

Oznaczając

$$\mathbf{C}^T \mathbf{R}_d \mathbf{C} = \mathbf{R}$$

oraz

$$\mathbf{C}^T \mathbf{E} = \mathbf{U}_z,$$

otrzymamy

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_L = \mathbf{U}_z \quad (4.4.4)$$

Równanie powyższe przedstawia tzw. metodę prądów oczkowych (metodę Maxwella).

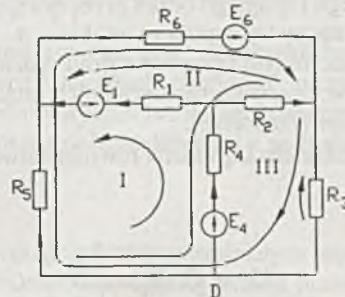
Aby wyjaśnić bliżej znaczenie oraz sposób tworzenia macierzy \mathbf{R} , rozpatrzymy obwód z rys. 4.4.2. Dla niego macierz \mathbf{C} , przy przyjęciu drzewa z rys. 4.2.3, ma postać:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

jej wiersze przypisujemy poszczególnym gałęziom, zaś jej kolumny oczkom.

Macierz \mathbf{R} jest iloczynem trzech macierzy

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}_d \mathbf{C} \quad (4.4.5)$$



Rys. 4.4.2

Iloczyn $\mathbf{C}^T \mathbf{R}_d$ ma postać

$$\mathbf{C}^T \mathbf{R}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & -R_5 & -R_6 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & R_6 \end{bmatrix}$$

Wiersze tej macierzy odpowiadają teraz poszczególnym oczkom, jej elementami są wartości oporów gałęzi wchodzących w skład danego oczka ze znakiem +, jeżeli kierunek prądu płynącego przez dany opór jest zgodny z kierunkiem prądu gałęzi łączącej wyznaczającej dane oczko. Jeżeli dana gałąź nie występuje w danym oczku, to na przecięciu kolumny odpowiadającej tej gałęzi i wiersza odpowiadającego oczku występuje 0.

Dalsze mnożenie $\mathbf{C}^T \mathbf{R}_d \mathbf{C}$ daje

$$R = C^T R_d C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & R_4 - R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 - R_5 - R_6 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_5 & R_4 + R_5 & -R_5 \\ R_4 + R_5 & R_2 + R_4 + R_5 + R_6 & -R_5 - R_6 \\ -R_5 & -R_5 - R_6 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix}$$

Łatwo stąd wyznaczyć budowę macierzy R . Pierwszy wiersz tej macierzy odpowiada pierwszemu oczku. Pierwszy wyraz pierwszego wiersza przedstawia sumę oporów gałęzi pierwszego oczka. Drugi wyraz to suma oporów gałęzi wspólnych dla pierwszego i drugiego oczka. Przyjmując koncepcje prądów oczkowych (rozdz. 4.2) stwierdzamy, że prądy pierwszego i drugiego oczka przepływają przez opory R_4 i R_5 w tym samym kierunku, dlatego oba opory występują ze znakiem +. Trzeci wyraz, to opór wspólny pierwszego i trzeciego oczka. W tym przypadku prąd pierwszego i prąd trzeciego oczka przepływają przez opór R_5 w przeciwnych kierunkach, stąd znak -. Podobnie można zinterpretować następne elementy macierzy.

Macierz \mathbf{U}_z można również łatwo zinterpretować

$$\mathbf{U}_Z = \mathbf{C}^T \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E_1 \\ 0 \\ 0 \\ E_4 \\ 0 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 + E_4 \\ E_4 - E_6 \\ E_6 \end{bmatrix}$$

Każdy wiersz macierzy U_z przedstawia sumę sił elektromotorycznych danego oczka, przy czym siły elektromotoryczne, których kierunek zgodny jest z kierunkiem danego prądu oczkowego występują ze znakiem +, pozostałe ze znakiem -.

Uogólniając powyższe stwierdzenia na dowolne obwody możemy układ równań dla metody prądów oczkowych przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}
 R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + R_{13} I_3 + \dots + R_{1l} I_l &= U_{1k} \\
 R_{21} I_1 + R_{22} I_2 + R_{23} I_3 + \dots + R_{2l} I_l &= U_{2k} \\
 \vdots & \\
 R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + R_{13} I_3 + \dots + R_{1l} I_l &= U_{lk}
 \end{aligned}$$

albo macierzowo

$$R I_1 = U_7$$

gdzie

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1l} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1} & R_{l2} & \dots & R_{ll} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_Z = \begin{bmatrix} U_{1k} \\ U_{2k} \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{lk} \end{bmatrix}$$

Macierz oporów \mathbf{R} można napisać bezpośrednio na podstawie schematu obwodu. Po przyjęciu drzewa obwodu, układu niezależnych oczek i związanych z nim prądów oczkowych otrzymamy poszczególne elementy macierzy według prostej reguły:

- R_{ii} jest sumą oporów i -tego oczka
- $R_{ij} = R_{ji}$ jest równe sumie oporów wspólnych dla oczka i oraz j *),

przy czym, jeżeli kierunki obu prądów oczkowych są takie same, przy odpowiednim oporze występuje znak +, jeżeli zaś przeciwe - znak -.

Łatwo zauważyc, że macierz \mathbf{R} jest symetryczna względem przekątnej głównej tzn. $R_{ij} = R_{ji}$.

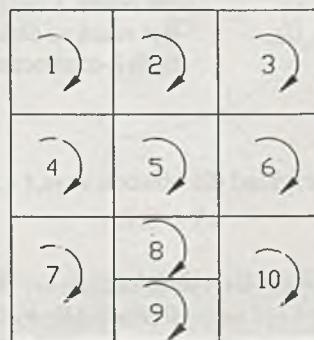
Również macierz napięć wymuszających \mathbf{U} można łatwo napisać: poszczególne jej wiersze są sumami sił elektromotorycznych oraz napięć na siłach prądomotorycznych działających w danym oczku, przy czym dane siły elektromotoryczne lub napięcia występują ze znakiem +, jeżeli ich kierunek jest zgodny z kierunkiem prądu oczkowego, a ze znakiem -, gdy kierunek ten jest przeciwny.

Zalety metody prądów oczkowych są następujące:

- Liczba równań i niewiadomych równa jest liczbie niezależnych oczek $l = g - w + 1$, a więc mniejsza niż przy metodzie opartej na obu prawach Kirchhoffa;
- Sposób układania równań jest w dużym stopniu sformalizowany, ułatwiając tym samym rozpatrywanie nawet bardzo złożonych obwodów.

Metodę prądów oczkowych można stosować nie tylko opierając się na zbiorze oczek niezależnych otrzymanych na podstawie drzewa. W przypadku obwodów planarnych, tj. takich, które można narysować na płaszczyźnie tak, by poszczególne gałęzie nie przecinały się, można przyjąć, że zbiór niezależnych oczek, to zbiór oczek najprostszych - oczek sieci (1-10 na rys. 4.4.3). Każdemu oczku przyporządkujemy przód oczkowy, przy czym przyjmujemy kierunki wszystkich prądów oczkowych zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara.

W takim przypadku każdy przód gałęziowy można wyrazić przez dwa prądy oczkowe płynące przez daną gałąź. Na przykład na rys. 4.4.4

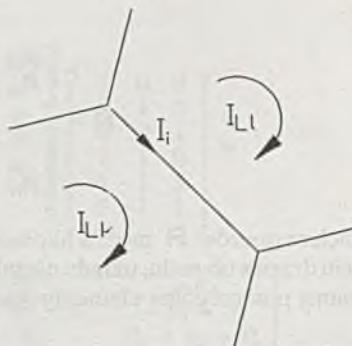


Rys. 4.4.3

*) Z obu sum należy wyłączyć opory równoległe do sił prądomotorycznych.

$$I_i = I_{l=Lk} - I_{Ll}$$

Postępując podobnie jak poprzednio, zastąpimy w równaniach II prawa Kirchhoffa dla poszczególnych oczek prądy gałęziowe przez prądy oczkowe; otrzymamy wtedy układ $l = g - w + 1$ równań o takiej samej liczbie niewiadomych prądów oczkowych. Z uwagi na ten sam kierunek wszystkich prądów oczkowych, w otrzymanych równaniach wszystkie R_{ij} ($i \neq j$) będą posiadały znaki ujemne, można zatem napisać:



Rys. 4.4.4

$$\begin{aligned} +R_{11}I_{L1} - R_{12}I_{L2} - R_{13}I_{L3} - \dots - R_{1l}I_{Ll} &= U_{11} \\ -R_{21}I_{L1} + R_{22}I_{L2} - R_{23}I_{L3} - \dots - R_{2l}I_{Ll} &= U_{22} \\ \vdots & \vdots \\ -R_{11}I_{L1} - R_{12}I_{L2} - R_{13}I_{L3} - \dots + R_{1l}I_{Ll} &= U_{1l} \end{aligned}$$

albo

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_L = \mathbf{U}_Z$$

gdzie

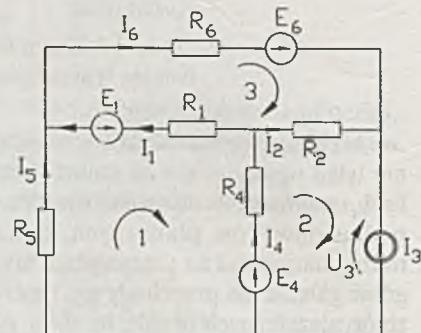
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} +R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1l} \\ -R_{21} & +R_{22} & \dots & -R_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{11} & -R_{12} & \dots & +R_{1l} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_Z = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{22} \\ \vdots \\ U_{1l} \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

gdzie

R_{ii} jest sumą oporów i -tego oczka,
 $R_{ij} = R_{ji}$ jest sumą oporów wspólnych dla oczek i oraz j .

U_{ii} jest sumą sił elektromotorycznych i -tego oczka.

Na przykład dla obwodu z rys. 4.4.5 otrzymamy:



Rys. 4.4.5

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_5)I_{L1} - R_4I_{L2} &= -R_4I_{L3} = E_1 - E_4 \\ -R_4I_{L1} + (R_2 + R_4)I_{L2} &= -R_2I_{L3} = E_4 - U_3 \\ -R_1I_{L1} - R_2I_{L2} + (R_2 + R_1 + R_6)I_{L3} &= -E_1 + E_6 \end{aligned}$$

Jeżeli w powyższym przykładzie dane były wartości oporów, siły elektromotoryczne E_1, E_4, E_6 i siła prądomotoryczna I , to niewiadomymi są: prądy oczkowe I_{L1} i I_{L2} oraz napięcie na sile prądomotorycznej U_3 . Prąd oczkowy I_{L2} jest wtedy znany i równy I_3 .

Po obliczeniu prądów oczkowych z powyższego układu równań łatwo wyznaczyć prądy gałęzi:

$$I_1 = -I_{L1} + I_{L3}$$

$$I_2 = I_{L2} + I_{L3}$$

$$I_3 = I_{L2}$$

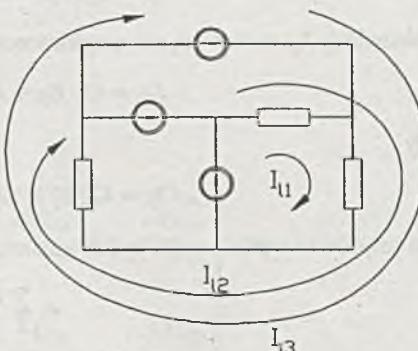
$$I_4 = -I_{L1} + I_{L2}$$

$$I_5 = I_{L1}$$

$$I_6 = I_{L3}$$

Jeżeli w obwodzie podlegającym analizie oprócz sił elektromotorycznych występują siły prądomotoryczne, to w miarę możliwości należy tak dobrać układ niezależnych oczek (drzewo grafu), by siły prądomotoryczne były równe odpowiednim prądom oczkowym.

Rys. 4.4.6 przedstawia przykład doboru niezależnych oczek.



Rys. 4.4.6

4.5. Metoda potencjałów węzłowych (metoda Coltri)

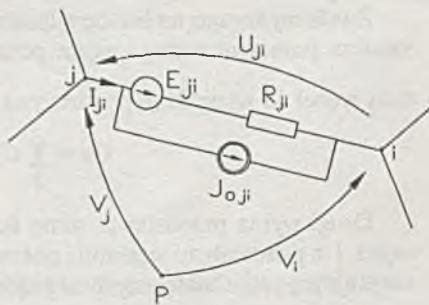
Rozważmy dowolny obwód posiadający w węzłów. W obwodzie takim można przyjąć dowolny węzeł jako węzeł odniesienia (p na rys. 4.5.1) i jemu przyporządkować potencjał równy零. Łatwo zauważać, że znajomość potencjałów pozostałych $w-1$ węzłów pozwala na jednoznaczne określenie napięć na gałęziach obwodu, a tym samym na obliczenie wszystkich prądów.

Metoda potencjałów węzłowych polega właściwie na obliczeniu potencjałów tych $w-1$ węzłów. W swej istocie polega ona na napisaniu równania pierwszego prawa Kirchhoff'a dla każdego węzła, wyrażając przy tym prądy gałęzi przez potencjały początków i końców gałęzi.

Na rys. 4.5.1 pokazano wycinek sieci z oznaczonymi potencjałami węzłów. Napięcie gałęzi łączącej węzeł i z węzłem j można wyrazić przez potencjały obu węzłów V_i i V_j :

$$U_{ji} = V_j - V_i \quad (4.5.1)$$

Prąd tejże gałęzi I_{ji} możemy wyrazić przez napięcie na gałęzi i elementy gałęzi. Z drugiego prawa Kirchhoffa otrzymamy bowiem:



Rys. 4.5.1

$$U_{ji} + E_{ji} - (I_{ji} - J_{oji}) R_{ji} = 0 \quad (4.5.2)$$

a stąd

$$I_{ji} = G_{ji} U_{ji} + G_{ji} E_{ji} + J_{oji}$$

Nazwijmy J_{zji} zastępczą siłą prądomotoryczną gałęzi:

$$J_{zji} = G_{ji} E_{ji} + J_{oji}$$

wtedy

$$I_{ji} = G_{ji} V_j - G_{ji} V_i + J_{zji}$$

Suma prądów w węźle i musi być równa zero:

$$\sum_j I_{ji} = 0$$

$$\sum_j G_{ji} V_j - \sum_j G_{ji} V_i + \sum_j J_{zji} = 0$$

gdzie sumowanie przeprowadzono dla węzła i , tzn. sumować należy w węźle i według wskaźnika j . Porządkując otrzymane dla węzła i równanie potencjałów węzłowych otrzymamy:

$$V_i \sum_j G_{ji} - \sum_j G_{ji} V_j = \sum_j J_{zji} \quad (4.5.3)$$

Podobne równanie można napisać dla $i = 1, \dots, n = w - 1$ węzłów, wszystkich z wyjątkiem węzła odniesienia, otrzymując w ten sposób układ n równań o n niewiadomych potencjałach węzłowych.

Zwróćmy uwagę na budowę tych równań. W równaniach dla węzła i pierwszy wyraz oznacza potencjał danego węzła pomnożony przez sumę przewodności $\sum_j G_{ji}$ łączących dany węzeł i z wszystkimi pozostałymi węzłami. Oznaczmy tę sumę przez:

$$G_{ii} = \sum_j G_{ji}$$

Drugi wyraz przedstawia sumę iloczynów przewodności gałęzi G_{ji} łączących dany węzeł i z pozostałymi węzłami i potencjałów tych węzłów V_j . Po prawej stronie równania znajduje się suma zastępczych sił prądomotorycznych

$$I_{zi} = \sum_j J_{zji}$$

występujących w gałęziach dochodzących do danego węzła i . Jeżeli w danej gałęzi znajduje się siła elektromotoryczna, to po prawej stronie równania wystąpi ona pomnożona przez przewodność gałęzi: $G_{ji} E_{ji}$; jeżeli znajduje się tam siła prądomotoryczna, to wystąpi ona jako J_{oji} . W obu przypadkach znak + obowiązuje wtedy, gdy siły skierowane są do węzła i .

Łatwo zauważyc, że równania potencjałów węzłowych można napisać bezpośrednio na podstawie schematu obwodu, ich ogólna postać ma wygląd:

$$\begin{aligned}
 & G_{11} V_1 - G_{12} V_2 - G_{13} V_3 - \dots - G_{1n} V_n = I_{z1} \\
 & - G_{21} V_1 + G_{22} V_2 - G_{23} V_3 - \dots - G_{2n} V_n = I_{z2} \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & - G_{n1} V_1 - G_{n2} V_2 - G_{n3} V_3 - \dots + G_{nn} V_n = I_{zn}
 \end{aligned}$$

albo w postaci macierzowej

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{I}_z$$

gdzie macierz \mathbf{G} jest macierzą przewodności:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & +G_{22} & -G_{23} & \dots & -G_{2n} \\ -G_{31} & -G_{32} & +G_{33} & \dots & -G_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & -G_{n3} & \dots & +G_{nn} \end{bmatrix}$$

której elementy zostały już poprzednio określone. Macierz ta jest symetryczna względem przekątnej głównej $G_{ij} = G_{ji}$. Wszystkie jej elementy są niedodatnie, z wyjątkiem elementów przekątnej głównej.

Macierz \mathbf{V} jest kolumnową macierzą potencjałów węzłowych

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Macierz \mathbf{I}_z jest kolumnową macierzą zastępczych sił prądomotorycznych węzłów:

$$\mathbf{I}_z = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ \vdots \\ I_{zn} \end{bmatrix}$$

Jej elementy zostały również poprzednio określone.

Obliczenie potencjałów węzłowych pozwala z kolei na obliczenie prądów gałęzi z równań:

$$I_{ji} = G_{ji} V_j - G_{ji} V_i + J_{zji}$$

Należy tu jeszcze raz wyraźnie podkreślić, że każde równanie potencjałów węzłowych jest w istocie równaniem pierwszego prawa Kirchhoffa dla danego węzła, w którym prądy wyrażono przez potencjały węzłów.

Pokażemy na przykładzie zastosowanie metody. Na rys. 4.5.2 przedstawiony jest schemat obwodu uprzednio rozpatrywanego metodą prądów oczkowych (rys. 4.4.4). Przyjmijmy np. węzeł 4 jako węzeł odniesienia. Otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
 (G_4 + G_5)V_1 & -G_5V_2 & -G_4V_3 = -G_4E_4 + J_3 \\
 -G_5V_1 + (G_1 + G_5 + G_6)V_2 & & -G_1V_3 = -G_1E_1 - G_6E_6 \\
 -G_4V_1 & -G_1V_2 + (G_1 + G_2 + G_4)V_3 = +G_1E_1 + G_4E_4
 \end{aligned}$$

Z powyższego układu równań łatwo wyznaczyć potencjały węzłów, a na ich podstawie prądy gałęzi. Dla prądu I_1 otrzymamy np. (patrz rys. 4.5.2) :

$$I_1 = (V_3 - V_2 - E_1)G_1$$

Pewne trudności mogą wynikać, jeżeli w obwodzie występują idealne źródła napięciowe. Jeżeli np. w obwodzie z rys. 4.5.2 $R_6 = 0$ oraz $R_4 = 0$ (rys. 4.5.3), to bezpośrednie napisanie równań jest niemożliwe ze względu na to, że wtedy przewodności tych gałęzi są nieskończonościowo duże.

Uwzględnijmy gałęzie 4 i 6 nie przez ich przewodności i potencjały węzłów, ale przez ich prądy I_4 i I_6 , co jest dozwolone, ponieważ równania potencjałów węzlowych są równaniami I prawa Kirchhoffa. Można otrzymać wtedy układ równań

$$\begin{aligned}
 G_5V_1 & -G_5V_2 & = J_3 - I_4 \\
 -G_5V_1 + (G_1 + G_5)V_2 & -G_1V_3 = -G_1E_1 - I_6 \\
 -G_1V_2 + (G_1 + G_2)V_3 & = I_4 + G_1E_1
 \end{aligned}$$

Równania powyższe można napisać tak, jak gdyby gałęzie 4 i 6 nie istniały, a następnie dodać po prawej stronie równań odpowiednio prądy I_4 i I_6 . Uwzględniając dodatkowe zależności, jakie w tym przypadku istnieją między potencjałami węzłów

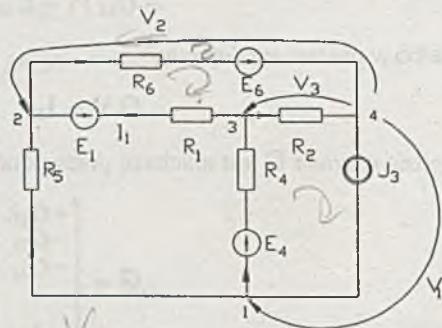
$$\begin{aligned}
 V_3 - V_1 & = E_4 \\
 V_2 & = -E_6
 \end{aligned}$$

otrzymamy układ równań:

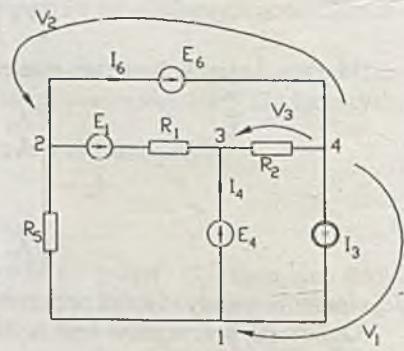
$$\begin{aligned}
 G_5V_1 + I_4 & = J_3 - G_5E_6 \\
 -(G_1 + G_5)V_1 + I_6 & = -G_1E_1 + G_1E_4 + (G_1 + G_5)E_6 \\
 (G_1 + G_2)V_1 - I_4 & = G_1E_1 - (G_1 + G_2)E_4 - G_1E_6
 \end{aligned}$$

w którym niewiadomymi są V_1 , I_4 i I_6 .

Równania potencjałów węzlowych mają te same zalety, co równania prądów oczkowych - zmniejszają liczbę równań i umożliwiają formalizację układania równań. W porównaniu z metodą prądów oczkowych są one korzystniejsze przy obwodach o małej liczbie węzłów.



Rys. 4.5.2



Rys. 4.5.3

a dużej liczbie oczek oraz w przypadku obwodów nieplanarnych, gdyż nie wymagają one wtedy wybierania zbioru niezależnych oczek.

Sposób powyższy można uogólnić i algorytmizować, otrzymując tzw. zmodyfikowaną metodę potencjałów węzłowych, która pozwala na uwzględnienie gałęzi z bezporowymi siłami elektromotorycznymi.

Oprócz przedstawionych tu metod prądów oczkowych i metody potencjałów węzłowych istnieją również inne, np. metoda *hybrydowa* i metoda *tablicowa* (metoda tableau), np. [1], posiadające w niektórych przypadkach pewne dodatkowe zalety.

Jak z powyższego wynika, każda z tych metod prowadzi do układu algebraicznych równań liniowych. Z teorii tych równań wynikają pewne własności, które pozwalają na wyprowadzenie ogólnych zasad dotyczących liniowych obwodów prądu stałego, których znajomość pozwala często na znaczne uproszczenie analizy takich obwodów oraz na uniknięcie niepotrzebnych dodatkowych obliczeń. Zasady te przedstawimy w następnych rozdziałach.

4.6. Obwody z jedną siłą wymuszającą

Rozpatrzmy obecnie obwody z jedną siłą wymuszającą (rys. 4.6.1). Zadaniem naszym będzie określenie zależności dowolnego z prądów lub napięć od tej siły wymuszającej. Nie ograniczymy ogólności rozważań, jeżeli przyjmiemy, że gałąź z siłą wymuszającą J_1 umieszczona jest między węzłem w , przyjętym jako węzeł odniesienia, a węzłem pierwszym. Równania potencjałów węzłowych przyjmą wtedy postać

$$\left. \begin{array}{l} +G_{11}V_1 - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 - \dots - G_{1n}V_n = J_1 \\ -G_{21}V_1 + G_{22}V_2 - G_{23}V_3 - \dots - G_{2n}V_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -G_{n1}V_1 - G_{n2}V_2 - G_{n3}V_3 - \dots + G_{nn}V_n = 0 \end{array} \right\} \quad (4.6.1)$$

Rozwiązywanie równań potencjałów węzłowych dla dowolnego potencjału V_i można przedstawić następująco:

$$V_i = \frac{\begin{vmatrix} +G_{11} & -G_{12} & \dots & J_1 & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & +G_{22} & \dots & 0 & \dots & -G_{2n} \\ -G_{31} & -G_{32} & \dots & 0 & \dots & -G_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & 0 & \dots & +G_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}$$

gdzie $\Delta = \det \mathbf{G} \neq 0$ (macierz \mathbf{G} musi być nieosobliwa), w liczniku wyrażenia na V_i zastąpiono i -tą kolumnę wyznacznika Δ przez kolumnę zastępczych sił prądomotorycznych. Oznaczając dalej przez Δ_{1i} dopełnienie algebraiczne elementu G_{1i} wyznacznika, uzyskane z wyznacznika Δ przez skreślenie pierwszego wiersza i i -tej kolumny, otrzymamy po rozwinięciu wyznacznika w liczniku względem i -tej kolumny

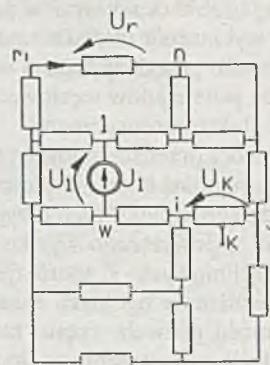
$$V_i = \frac{\Delta_{\text{li}}}{\Delta} J_i \quad (4.6.2)$$

Dla węzła j otrzymamy

$$V_j = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} J_i \quad (4.6.3)$$

Zatem dla napięcia na k -tej gałęzi między i -tym a j -tym węzłem

$$U_k = V_i - V_j = \frac{\Delta_{1i} - \Delta_{1j}}{\Delta} J_1 \quad (4.6.4)$$



Rys. 4.6. I

Wszystkie wyznaczniki Δ oraz Δ_{1i} są zależne jedynie od struktury obwodu oraz od wartości jego oporników dla danego obwodu wielkością stałą.

$$\frac{\Delta 1i - \Delta 1j}{\Delta} = K_{J_1, U_k} \quad (4.6.5)$$

zatem

$$U_k = K_{J_1, U_k} J_1 \quad (4.6.6)$$

Związek ten świadczy o liniowej zależności między dowolnym napięciem obwodu a wymuszającym je prądem. Wielkość K_{J_1, U_k} nazwiemy transmitancją obwodu od prądu J_1 do napięcia U_k . Ponieważ prąd w gałęzi k można wyrazić

$$I_k = G_k U_k$$

to otrzymamy

$$I_k = G_k K_{J_1 J_k J_1}$$

albo

$$I_k = K_{J_1 J_k J_1} \quad (4.6.7)$$

Wielkość K_{J_1, J_k} nazwiemy transmitancją obwodu od prądu J_1 do prądu J_k . Podobne wyrażenia można uzyskać przy zasilaniu obwodu źródłem napięciowym U_1 , wtedy

$$U_k = K_{U_1, U_k} U_1 \quad (4.6.8)$$

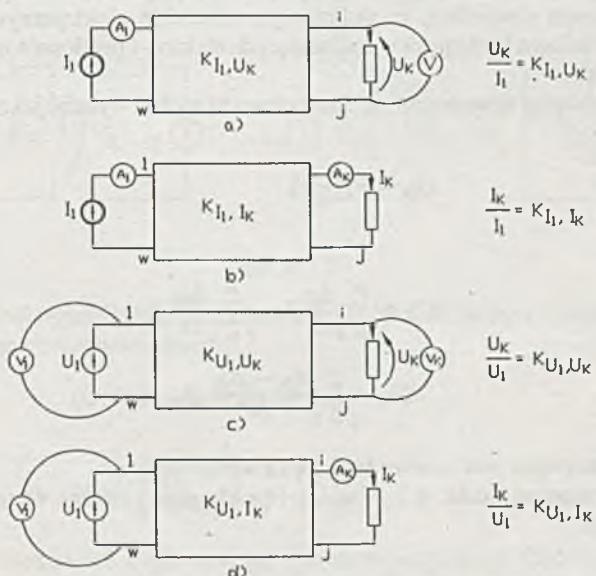
oraz

$$I_k = K_{U_1, I_k} U_1$$

Z powyższych rozważań wynika, że:

W liniowych obwodach prądu stałego z jedną siłą wymuszającą napięcia i prądy są proporcjonalne do siły wymuszającej.

Schematycznie powyższe cztery przypadki przedstawiono na rys. 4.6.2 a- d. W każdym z tych przypadków transmitancję można obliczyć na podstawie wyżej podanych wzorów; można ją również zmierzyć, dokonując za każdym razem pomiaru dwóch wielkości, jak to przedstawiono na rys. 4.6.2 a-d.



Rys. 4.6.2

4.7. Zasada superpozycji

Dla obwodu z dowolną liczbą sił elektro- i prądomotorycznych rozwiązanie równań potencjałów węzłowych dla dowolnego potencjału V_i można przedstawić następująco:

$$V_i = \frac{\begin{vmatrix} +G_{11} & -G_{12} & \dots & I_{z1} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & +G_{22} & \dots & I_{z2} & \dots & -G_{2n} \\ -G_{31} & -G_{32} & \dots & I_{z3} & \dots & -G_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & I_{zn} & \dots & +G_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (4.7.1)$$

gdzie $\Delta = \det \mathbf{G} \neq 0$ (macierz \mathbf{G} musi być nieosobliwa), w liczniku wyrażenia na V_i zastąpiono i -tą kolumnę przez kolumnę zastępczych sił prądomotorycznych. Oznaczając

dalej przez Δ_{ji} dopełnienie algebraiczne otrzymane z Δ przez skreślenie wiersza j i kolumny i (z uwzględnieniem znaku), można napisać:

$$V_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} I_{zj} \quad (4.7.2)$$

W powyższym równaniu wyrażenia Δ_{ji} oraz Δ są zależne jedynie od przewodności obwodu, nie zależą natomiast od wymuszających sił elektromotorycznych i prądomotorycznych; są zatem dla danego obwodu wielkościami stałymi. I_{zj} - zastępcze siły prądomotoryczne węzłów są, jak to wykazano w rozdz. 4.5, liniowo zależne od sił elektromotorycznych i prądomotorycznych działających w gałęziach stykających się w danym węźle.

Można zatem stwierdzić, że w liniowym obwodzie elektrycznym potencjał każdego z węzłów jest liniową funkcją sił wymuszających elektro- i prądomotorycznych działających w tym obwodzie.

Napięcie między dowolnymi węzłami obwodu można wyrazić jako różnicę potencjałów tych węzłów

$$U_{ik} = V_i - V_k$$

Zatem

$$\begin{aligned} U_{ik} &= \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} I_{zj} - \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} I_{zj} \\ U_{ik} &= \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji} - \Delta_{kj}}{\Delta} I_{zj} \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

tym samym i napięcie jest liniową funkcją sił wymuszających.

Jak wykazano w rozdz. 4.3, również i prądy gałęzi można wyrazić przez potencjały węzłów, zatem:

W liniowych obwodach elektrycznych napięcia między dowolnymi punktami obwodu oraz prądy w dowolnych elementach obwodu są liniowymi funkcjami sił wymuszających.

Równanie 4.7.3 można również zinterpretować inaczej. Jeżeli obwód zawiera siły elektromotoryczne od E_1 do E_r oraz siły prądomotoryczne od J_{r+1} do J_s , to można powyższy wzór wyrazić w następujący sposób:

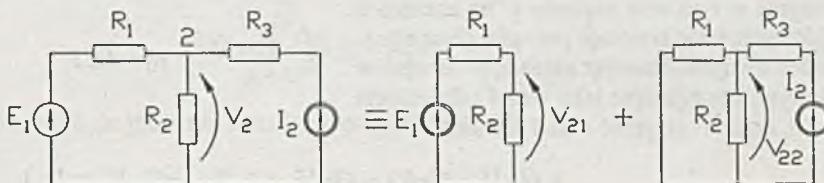
$$\begin{aligned} U_{ik} &= K_1 E_1 + K_2 E_2 + \dots + K_r E_r + K_{r+1} J_{r+1} + K_{r+2} J_{r+2} + \\ &\quad \dots + K_s J_s \end{aligned}$$

Każde napięcie (i każdy prąd) można wyrazić w postaci sumy składowych, z których każda wywołana jest przez jedną z sił wymuszających, bowiem np.

$K_r E_r$ jest składową napięcia U_{ik} wywołaną przez SEM E_r , jeżeli pozostałe siły wymuszające są równe zero. Własność ta, właściwa układom równań liniowych, może nam posłużyć do sformułowania zasady superpozycji, wyrażającej tę własność w innej postaci:

W obwodzie liniowym, w którym działają siły wymuszające (elektromotoryczne i prądomotoryczne), można obliczyć dowolne napięcie lub prąd jako sumę składowych wywołanych przez każdą z tych sił działających z osobna.

Każda ze składowych obliczana jest więc przy założeniu, że wszystkie siły wymuszające, z wyjątkiem jednej są równe zero. Należy tu zwrócić uwagę, że przyrównanie do zera siły elektromotorycznej jest równoważne ze zwarciem jej, zaś przyrównanie do zera siły prądomotorycznej równoważne jest odłączeniu z obwodu gałęzi, w której ona działa.



Rys. 4.7.1

Zasadę superpozycji wyjaśnimy na przykładzie z rys. 4.7.1. Stosując równanie potencjałów węzłowych do tego obwodu otrzymamy:

$$(G_1 + G_2) V_2 = E_1 G_1 + J_2$$

stąd

$$V_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E_1 + \frac{1}{G_1 + G_2} J_2$$

Do tego wyniku można też dojść stosując zasadę superpozycji: Obliczmy składową napięcia V_2 pochodząą od SEM E_1 (w obwodzie odłączamy gałąź z SPM J_2):

$$V_{21} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E_1$$

Obliczamy składową napięcia V_2 pochodzącą od SPM J_2 (w obwodzie zwieramy SEM E_1):

$$V_{22} = \frac{1}{G_1 + G_2} J_2$$

Otrzymujemy łącznie

$$V_2 = V_{21} + V_{22} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E_1 + \frac{1}{G_1 + G_2} J_2$$

Zasada superpozycji może ułatwić w znaczny sposób analizę układów.

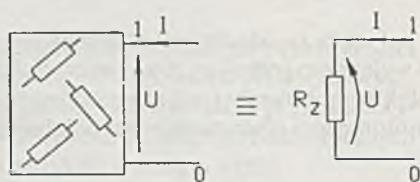
Należy zwrócić uwagę na to, że według zasady superpozycji, można obliczać jedynie napięcia i prądy. Nie można natomiast obliczyć mocy danego elementu, jako sumy mocy dostarczonych przez poszczególne siły wymuszające, gdyż moc danego elementu zależy od iloczynu napięcia i prądu danego elementu:

$$P = UI = (U_{21} + U_{22})(I_{21} + I_{22}) \neq U_{21}I_{21} + U_{22}I_{22}$$

4.8. Dwójniki, zasady Thevenina i Norton'a

Dwójnikiem nazywamy obwód elektryczny posiadający dwa zaciski. Dwójnik nie zawierający źródeł energii elektrycznej nazywa się **dwójnikiem pasywnym**, natomiast zawierający źródła energii nosi nazwę **dwójnika aktywnego**.

Rozpatrzmy najpierw dwójnik pasywny (rys. 4.8.1). Wykażemy, że każdy dwójnik pasywny można zastąpić jednym oporem zastępczym R_z . Obliczymy w tym celu napięcie U na zaciskach wejściowych, jakie powstaje przy przepływie prądu przez dwójnik. Stosując metodę potencjałów węzłowych i przyjmując jako węzeł odniesienia węzeł 0, można otrzymać układ równań



Rys. 4.8.1

$$\left. \begin{array}{l} +G_{11}U - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 - \dots - G_{1n}V_n = I \\ -G_{21}U + G_{22}V_2 - G_{23}V_3 - \dots - G_{2n}V_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ -G_{n1}U - G_{n2}V_2 - G_{n3}V_3 - \dots + G_{nn}V_n = 0 \end{array} \right\}$$

stąd po rozwiązaniu

$$U = \frac{\Delta_{1j}}{\Delta} I \quad (4.8.1)$$

Wyznaczniki Δ_{ji} i Δ zależą jedynie od elementów (oporów) układu i jego struktury. Oznaczając

$$R_w = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \quad (4.8.2)$$

otrzymamy dla dwójnika pasywnego

$$U = R_w I$$

R_w jest tzw. oporem zastępczym dwójnika.

Wielkość ta zależy jedynie od wartości oporów składowych dwójnika oraz jego struktury, jest więc wielkością charakteryzującą w zupełności dwójnik. Opór zastępczy dwójnika można wyznaczyć analitycznie (wzór 4.8.2) lub pomiarowo, dokonując pomiaru napięcia i prądu na wejściu dwójnika

$$R_w = \frac{U}{I} \quad (4.8.3)$$

albo korzystając z dowolnej metody pomiaru oporów elektrycznych.

Wykażemy teraz, że każdy dwójnik aktywny można przedstawić w postaci układu zastępczego I lub II (rys. 4.8.2 b i c). Pierwszy układ zastępczy składa się z siły elektromotorycznej i oporu, drugi z siły prądomotorycznej i oporu.

Stosując znowu metodę potencjałów węzłowych i przyjmując jako węzeł odniesienia węzeł 0, otrzymamy

gdzie $I_{z1} \dots I_{zn}$ - zastępcze siły prądomotoryczne poszczególnych węzłów wewnątrz dwójnika aktywnego, a prąd I odpływa z dwójnika.

Obliczając napięcie U na podstawie powyższego układu równań otrzymamy

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{i1}}{\Delta} I_{2j} - \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I \quad (4.8.4)$$

Łatwo zauważyć, że pierwsze wyrażenie po prawej stronie:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{\Delta} I_{zj} = U_o$$

to napięcie biegu jałowego dwójnika aktywnego, tj. napięcie istniejące na zaciskach dwójnika aktywnego, jeżeli jego prąd $I = 0$.

W drugim wyrażeniu można zidentyfikować $\frac{\Delta ii}{\Delta}$ jako opór dwójnika aktywnego przy sprowadzeniu wszystkich zastępczych sił prądomotorycznych do zera. W istocie, przy $I_{Zj} = 0$

$$U = -\frac{\Delta_{11}}{A} I$$

co po uwzględnieniu strzałkowania (wydajnikowe !) daje

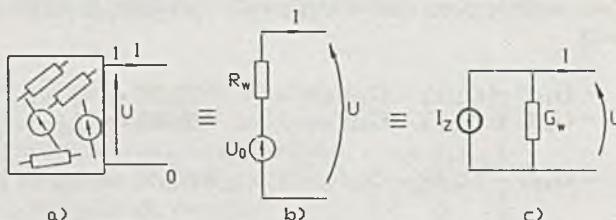
$$R_w = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \quad (4.8.5)$$

Można zatem napisać dla każdego dwójnika aktywnego:

$$U = U_0 - R_w I \quad (4.8.6)$$

Równanie takie odpowiada układowi zastępczemu I pokazanemu na rys.4.8.2b, tzn. przy przyłożeniu tego samego napięcia U na dwójnik aktywny (rys.4.8.2a) i jego układ zastępczy (rys.4.8.2 b) w obu układach popłynie ten sam prąd I , oba układy są więc nierozróżnialne przy pomiarach prądu i napięcia na ich wejściu. Wyniki powyższe można wyrazić w postaci tzw. **zasady Thevenina**:

Każdy liniowy dwójnik aktywny można zastąpić układem składającym się z szeregowego połączenia siły elektromotorycznej U_o oraz oporu R_w . Siła elektromotoryczna U_o równa jest napięciu biegu jałowego dwójnika, a opór R_w - jego oporowi wewnętrzny mierzonyemu przy włączonych źródłach.



Rys. 4.8.2

TH. THEVENINA

Przy wyznaczaniu oporu wewnętrznego należy, zgodnie z wymaganiem założyć $I_{zj} = 0$, tzn. zastąpić wszystkie siły elektromotoryczne dwójnika aktywnego zwarciem, a wszystkie siły prądomotoryczne przerwa.

Na rys. 4.8.3a przedstawiony jest dwójnik aktywny, dla którego należy znaleźć układ zastępczy (rys. 4.8.3 b).

TH. NORTONA Napięcie biegu jałowego dwójnika obliczamy przy założeniu $I = 0$, otrzymamy wtedy

$$U_0 = E_1 + I_2 R_{1,1}$$

Opór wewnętrzny dwójnika obliczymy przy wyłączonych siłach elektromotorycznych (rys. 4.8.3c)

$$R_w = R_3 + R_4$$

W ten sposób obliczono parametry U_0 i R_w układu zastępczego Thevenina.

Przedstawimy obecnie drugi układ zastępczy dwójnika aktywnego. Równanie (4.8.4) można również przekształcić, obliczając z niego prąd I

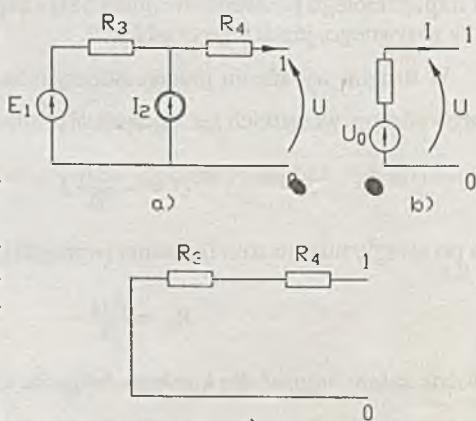
$$I = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta j 1}{\Delta_{11}} I_{zj} - \frac{\Delta}{\Delta_{11}} U \quad (4.8.7)$$

Łatwo zauważyc, że ponieważ pierwsze wyrażenie po prawej stronie jest równe:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\Delta j 1}{\Delta_{11}} I_{zj} = I_z$$

to jest to prąd zwarcia dwójnika aktywnego, tj. prąd płynący przez zaciski wejściowe dwójnika po ich bezoporowym zwarciu, a więc przy napięciu $U_0 = 0$.

W drugim wyrażeniu $\frac{\Delta}{\Delta_{11}}$ jest odwrotnością zdefiniowanego już uprzednio oporu wewnętrznego dwójnika, a więc można napisać



Rys. 4.8.3

$$\frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{1}{R_w} = G_w \quad (4.8.8)$$

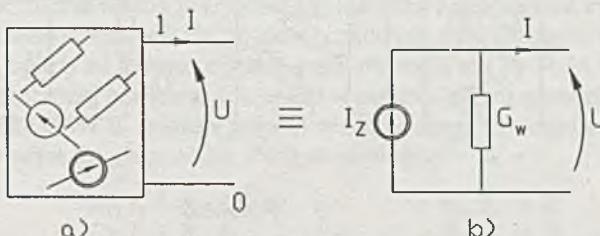
Równanie dwójnika aktywnego przyjmie zatem postać

$$I = I_z - U G_w \quad (4.8.9)$$

co odpowiada układowi zastępczemu II dwójnika aktywnego przedstawionemu na rys. 4.8.4b.

Powysze wyniki można ująć w postaci tzw. zasady Norton'a:

Każdy liniowy dwójnik aktywny można zastąpić układem składającym się z równoległego połączenia siły prądomotorycznej I_z oraz przewodności G_w . Siła prądomotoryczna I_z jest równa prądowi zwarcia dwójnika a przewodność G_w jego przewodności wewnętrznej mierzonej przy wyłączonych źródłach.



Rys. 4.8.4

Dla przykładu przedstawionego na rys. 4.8.5a otrzymamy

$$I_z = \frac{E}{R_3 + R_4} + I_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

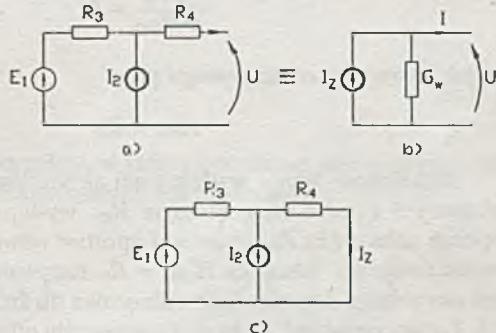
oraz

$$G_w = \frac{1}{R_3 + R_4}.$$

Każdy dwójnik aktywny można zatem scharakteryzować przez dwie wielkości:

- opór wewnętrzny lub przewodność wewnętrzna,
- napięcie biegu jałowego lub prąd zwarcia.

Stosowanie obu układów zastępczych może znacznie ułatwić analizę złożonych obwodów elektrycznych. Jako przykład zastosowania tych układów zastępczych przedstawimy



Rys. 4.8.5

tzw. zagadnienie dopasowania odbiornika do źródła. Przy przekazywaniu energii elektrycznej z jednej części obwodu do drugiej, np. z części A do części B na rys. 4.8.6a, może wyniknąć zagadnienie wyznaczenia warunków, jakie spełnić musi część B, aby część A mogła oddać do części B maksymalną energię. Rozważmy przypadek, w którym część B nie posiada źródła energii. W myśl przedstawionych poprzednio zasad można wtedy część A traktować jako dwójnik aktywny i zastąpić ją według zasady Thevenina układem zastępczym, zaś część B jako dwójnik pasywny można zastąpić jej oporem zastępczym R_{wo} . Dochodzimy w ten sposób do układu zastępczego przedstawionego na rys. 4.8.6b.

Zagadnienie obecnie brzmi: Dwójnik aktywny o napięciu biegu jałowego U_o i oporze wewnętrzny R_w obciążony jest oporem R_{wo} . Przy jakiej wartości oporu obciążenia R_{wo} moc wydzielona na nim będzie największa?

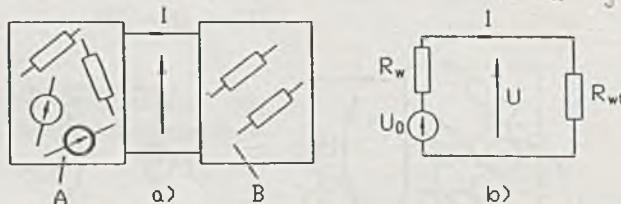
Moc wydzielona na odbiorniku R_{wo}

zakreślającą na max energię?

$$P_o = I^2 R_{wo} = \left(\frac{U_o}{R_w + R_{wo}} \right)^2 R_{wo}$$

to napięcie, które pochodzi od dwójnika aktywnego, gdy nie do niego nie podłączano

$$R_H = \frac{U_o}{I}$$



Rys. 4.8.6

Maksimum* P_o ze względu na R_{wo} otrzymamy dla R_{wo} spełniającego warunek

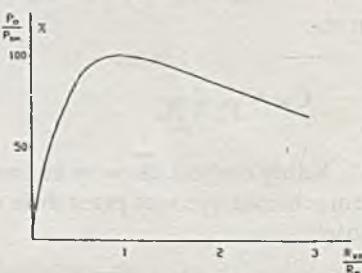
$$\frac{d P_o}{d R_{wo}} = 0$$

co jak łatwo sprawdzić, wystąpi przy

$$R_{wo} = R_o$$

Maksimum mocy wydzielonej przez dwójnik aktywny o oporze wewnętrzny R_w wystąpi przy oporze odbiornika R_{wo} równym oporowi wewnętrzny dwójnika. Warunek $R_{wo} = R_w$ nazywany jest też warunkiem dopasowania odbiornika do źródła.

Łatwo zauważać, że przy dopasowaniu odbiornika do źródła moc wydzielona na oporze wewnętrzny dwójnika aktywnego (moc strat) jest równa mocy wydzielonej w odbiorniku i dlatego sprawność przy dopasowaniu wynosi 50%. Warunek dopasowania realny jest więc tylko w takich przypadkach, gdy sprawność jest rzeczą drugorzędną.



Rys. 4.8.7

*) Łatwo sprawdzić, że $d^2 P_o / d R_{wo}^2 < 0$

Na rys. 4.8.7 przedstawiona jest w znormalizowanej postaci zależność mocy wydzielonej na odbiorniku od oporu odbiornika. Stosunek mocy do mocy maksymalnej możliwej do uzyskania, jako funkcje stosunku oporu odbiornika do oporu wewnętrznego dwójnika, można wyrazić jako

$$\frac{P_O}{P_{om}} = f \left(\frac{R_{wo}}{R_w} \right)$$

Jak widać z wykresu, zależność ta ma maksimum płaskie tak, że np. niedopasowanie w granicach 20% oporu R_w powoduje zmniejszenie mocy w stosunku do maksymalnej o około 1%.

4.9. Zasada wzajemności

Na rys. 4.9.1 przedstawiony jest obwód elektryczny, w którym działa tylko jedna siła elektromotoryczna E . Siła ta wywołuje w jednej z gałęzi prąd o natężeniu I . Prąd ten można obliczyć np. przez zastosowanie metody prądów oczkowych. Przyjmijmy w tym celu zbiór niezależnych oczek, oparty na jednym z drzew grafu obwodu, tak by SEM E znalazła się w gałęzi łączącej, oznaczonej numerem 1, a prąd I w gałęzi łączącej oznaczonej numerem 2. W takim przypadku SEM E wystąpi jedynie w równaniu pierwszego oczka, a prąd I będzie prądem oczkowym drugiego oczka. Otrzymamy wtedy:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + R_{13} I_3 + \dots + R_{1n} I_n &= E \\ R_{21} I_1 + R_{22} I_2 + R_{23} I_3 + \dots + R_{2n} I_n &= 0 \\ \dots & \\ R_{n1} I_1 + R_{n2} I_2 + R_{n3} I_3 + \dots + R_{nn} I_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

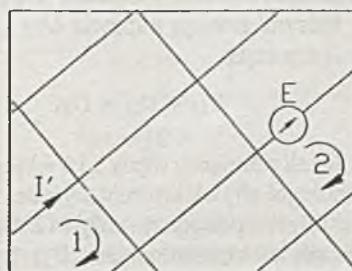
Po rozwiązaniu otrzymamy

$$I_2 = I = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \quad (4.9.1)$$

Wykażemy, że SEM E przeniesiona do gałęzi, w której uprzednio płynął prąd I (rys. 4.9.2), wywoła w gałęzi, w której ona uprzednio działała, ten sam prąd I .



Rys. 4.9.1



Rys. 4.9.2

Rozpatrzmy w tym celu obwód z rys. 4.9.2; popłyną w nim oczywiście, na ogół inne prądy niż w obwodzie z rys. 4.9.1, oznaczmy je kreskami:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} I'_1 + R_{12} I'_2 + R_{13} I'_3 + \dots + R_{1n} I'_n &= 0 \\ R_{21} I'_1 + R_{22} I'_2 + R_{23} I'_3 + \dots + R_{2n} I'_n &= E \\ \dots & \\ R_{n1} I'_1 + R_{n2} I'_2 + R_{n3} I'_3 + \dots + R_{nn} I'_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Po rozwiązaniu otrzymamy

$$I'_1 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} E \quad (4.9.2)$$

ale z warunków symetrii macierzy R : $R_{ij} = R_{ji}$ wynika, że również

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \quad (4.9.3)$$

a zatem

$$I'_1 = I_2 = I.$$

Powyższe rozważania prowadzą do tzw. zasady wzajemności.

Jeżeli siła elektromotoryczna E umieszczona w gałęzi a pasywnego obwodu liniowego wywołuje w gałęzi b prąd I , to ta sama siła elektromotoryczna umieszczona w gałęzi b tegoż obwodu wywoła w gałęzi a taki sam prąd.

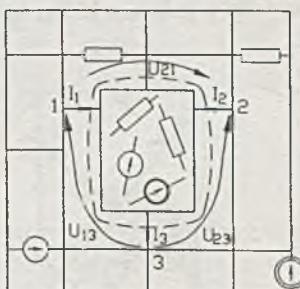
Analogiczne twierdzenie można udowodnić dla sił prądomotorycznych i napięć między dwoma węzłami. Celowe jest przy tym skorzystanie z metody potencjałów węzłowych.

4.10. Zasada wyodrębniania

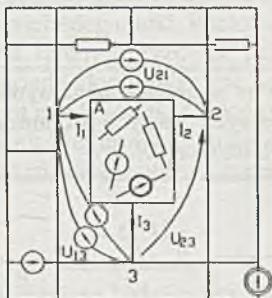
Rozważmy dowolny obwód elektryczny, w którym za pomocą zamkniętej linii wyodrębniono część A (rys. 4.10.1). Część A połączona jest z resztą obwodu w węzłach 1, 2 i 3, pomieści się w niej którymi istnieją napięcia U_{13} , U_{23} oraz U_{21} , przy czym

$$U_{13} + U_{21} = U_{23}$$

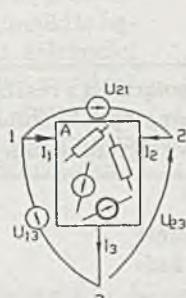
Jeżeli pomiędzy węzły 1 i 3łączymy dwie równoległe siły elektromotoryczne równe napięciu U_{13} , a pomiędzy węzły 1 i 2 dwie równoległe siły elektromotoryczne U_{21} (rys. 4.10.2), to nie zmieni to rozkładu prądów ani rozkładu



Rys. 4.10.1



Rys. 4.10.2



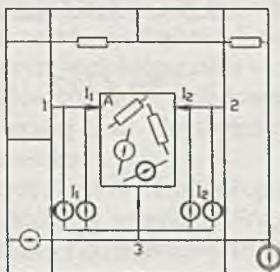
Rys. 4.10.3

napięć żadnej z części obwodu; nie zmieniły się bowiem napięcia i prądy dla obu części obwodu.

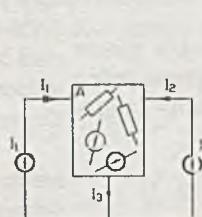
Rozłączenie obu części obwodu z pozostawieniem po jednej z dwu równolegle połączonych SEM dla części A i reszty obwodu (rys. 4.10.3) również nie zmienia rozkładu napięć i rozkładu prądów z tych samych, co uprzednio powodów.

Dowolną część obwodu, połączoną z resztą w m węzłach można wyodrębnić przezłączenie $m - 1$ par sił elektromotorycznych równych napięciom między poszczególnymi węzłami.

Wyodrębnienia obwodu można dokonać również stosując siły prądomotoryczne. Do każdego węzła, za wyjątkiem jednego, przyjętego jako węzeł odniesienia, należy w tym celu dołączyć dwie równolegle połączone, ale przeciwnie skierowane siły prądomotoryczne



Rys. 4.10.4



Rys. 4.10.5

równe prądom płynącym do wyodrębnionej części obwodu. Drugie końce tych sił dołączamy do węzła odniesienia; może nim być dowolny z węzłów (rys. 4.10.4), nie zmieni to rozkładu prądów w obu częściach obwodu.

Rozłączenie obu części obwodu (rys. 4.10.5) również nie zmieni warunków zasilania obu części.

Dowolną część obwodu połączoną z resztą w węzłach można wyodrębnić przez włączenie $m - 1$ par sił prądomotorycznych równych prądom płynącym w gałęziach łączących obie części.

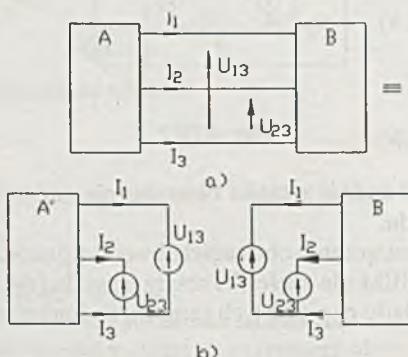
Warto zwrócić uwagę, że stosowanie zasady wyodrębnienia nie wymaga żadnych dodatkowych założeń. W szczególności nie wymaga się liniowości żadnej z części obwodu tak, że zasada ta ważna jest również i dla obwodów **nieliniiowych**.

Za pomocą zasady wyodrębnienia można łatwo uzasadnić sposób pomiaru mocy dostarczonej przez jeden układ do drugiego za pośrednictwem n przewodów. Dla przykładu rozpatrzmy $n = 3$ (rys. 4.10.6a). Zastosowanie zasady wyodrębnienia prowadzi tu do układu z rys. 4.10.6b, w którym oczywiste jest, że moc pobrana przez układ B równa jest:

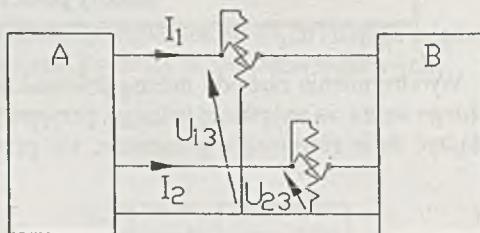
$$P_B = U_{13} I_1 + U_{23} I_2$$

gdyż moc pobrana przez układ B na rys. 4.10.6b dostarczona jest przez siły elektromotoryczne U_{13} i U_{23} . Moc tę można zatem zmierzyć za pomocą dwóch watomierzy (rys. 4.10.7) - jako sumę ich wskazań.

Przy n przewodach można zatem zmierzyć moc oddawaną przez jeden układ do drugiego za pomocą $n - 1$ watomierzy.



Rys. 4.10.6



Rys. 4.10.7

4.11. Wielobiegunki pasywne

Obwód posiadający więcej niż dwa zaciski nazywamy **wielobiegunkiem**. Wielobiegunek można uważać za uogólnienie pojęcia dwójnika. Na rys. 4.11.1 przedstawiony jest m -biegunnik, tj. wielobiegunek posiadający m zacisków do których dopływają prądy od I_1 do I_m . Wewnętrzna struktura wielobiegunka może być dowolnie złożona. Rozpatrzymy najpierw wielobiegunki pasywne, tj. nie zawierające źródeł wewnętrznych.

Wprowadzenie pojęcia wielobiegunników umożliwia podział złożonych obwodów na prostsze ich części - wielobiegunniki. Wielobiegunniki te będzie można scharakteryzować przez zależności między prądami dopływającymi do ich zacisków a napięciami między tymi zaciskami w postaci tzw. równań wielobiegunnika, które będzie można przedstawić również w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} \mathbf{U},$$

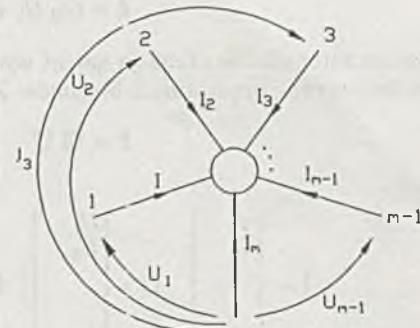
przy czym macierz kolumnowa \mathbf{I} zawiera $m - 1$ prądów dopływających do wielobiegunnika, a macierz kolumnowa \mathbf{U} , $m - 1$ napięć między jednym z węzłów a pozostałymi $m - 1$ węzłami. Macierz \mathbf{G} będzie zatem posiadała wymiar $(m-1) \times (m-1)$ i będzie w zupełności charakteryzowała wielobiegunnik, tak jak np. dwójnik pasywny, który jest całkowicie scharakteryzowany przez jego przewodność zastępczą G . Elementy tej macierzy będzie można wyznaczyć znając strukturę wielobiegunnika oraz wartości jego elementów; będzie je można również wyznaczyć na drodze pomiarowej bez znajomości struktury wewnętrznej. W ten sposób wielobiegunnik będzie niejako opisany z "zewnętrzną", bez znajomości jego struktury wewnętrznej. Na rys. 4.11.2a,b,c przedstawione są najprostsze wielobiegunniki: dwójnik, trójnik i czterobiegunnik.

Na rys. 4.11.3 przedstawiony jest wielobiegunnik wyodrębniony z reszty obwodu za pomocą przyłączenia $m - 1$ sił elektromotorycznych pomiędzy biegun (węzeł) odniesienia m a poszczególne biegury. Siły te równe są napięciom, które istniały tam przed wyodrębnieniem (patrz zasada wyodrębniania rozdz. 4.10). Korzystając z zasady superpozycji można w wyodrębnionym wielobiegunniku wyrazić każdy z jego prądów jako sumę składowych pochodzących od każdej z sił elektromotorycznych działających z osobna.

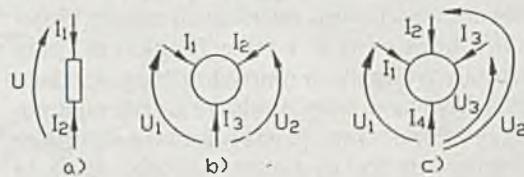
Każda z tych składowych jest proporcjonalna do napięcia, które ją wywołuje. Współczynnik proporcjonalności G_{ij} nazwiemy transmitancją. Składowa prądu I_{ij} dopływającej do i -tego bieguna pochodząca od j -tego napięcia (rys. 4.11.4) może więc być wyrażona jako

$$I_{ij} = G_{ij} U_j \quad (4.11.1)$$

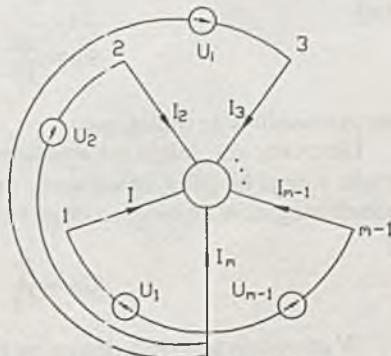
zaś cały prąd dopływający do i -tego bieguna



Rys. 4.11.1



Rys. 4.11.2



Rys. 4.11.3

$$I_i = G_{i1} U_1 + G_{i2} U_2 + \dots + G_{i,m-1} U_{m-1};$$

jest on zatem liniową funkcją napięć wymuszających jego przepływ (rozdz. 4.6). Podobnie można wyrazić prądy innych biegunków. Zależności te można wyrazić macierzowo jako

$$I = \mathbf{G} U \quad (4.11.3)$$

gdzie

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_{m-1} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{m-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1,m-1} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-1} \end{bmatrix}$$

Równanie dla m -tego prądu jest tu w zasadzie zbędne. Prąd I_m jest bowiem w myśl uogólnionego I prawa Kirchhoffa równy ujemnej sumie wszystkich pozostałych prądów; równanie jego jest więc równaniem liniowo zależnym od pozostałych $m-1$ równań. Poszczególne elementy macierzy przewodności \mathbf{G} mają konkretne fizyczne znaczenie.

Elementy przekątnej głównej G_{ii} są przewodnościami wejściowymi mierzonymi między biegunem odniesienia a i -tym biegunem, przy pozostałych biegunkach zwartych do bieguna odniesienia. Wynika to bezpośrednio z zasady superpozycji: jeżeli założymy, że wszystkie biegunki oprócz i -tego zatrzymane zostały z biegunem odniesienia, to wszystkie napięcia z wyjątkiem U_i równe są zero (rys. 4.11.4); wielobiegunki w takim połączeniu zamienia się w dwójnik, dla którego z równania (4.11.2) otrzymamy prąd I_{ii} wywołany istnieniem i -tego napięcia

$$I_{ii} = G_{ii} U_i$$

skąd

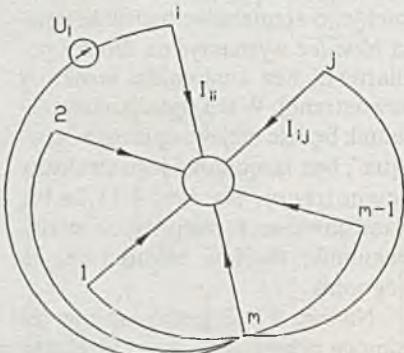
$$G_{ii} = \frac{I_{ii}}{U_i} \quad (4.11.4)$$

jest przewodnością wejściową.

Elementy G_{ij} , jak to już wyjaśniono, są transmitancjami, a więc stosunkiem składowej prądu i -tego bieguna, wywołanej j -tym napięciem, do tego napięcia, przy zwarzciu pozostałych biegunków do bieguna odniesienia (rys. 4.11.5)

$$G_{ij} = \frac{I_{ij}}{U_j} \quad (4.11.5)$$

W obwodzie przedstawionym na rys. 4.11.5 istnieje tylko jedna siła elektromotoryczna; obowiązuje więc dla niego zasada wzajemności. Wynika z niej, że dla transmitancji G_{ji} obowiązuje zależność



Rys. 4.11.4

$$G_{ji} = G_{ij}$$

W ten sposób transmitancje i przewodności wejściowe mogą być wyznaczone z pomiarów.

Równanie (4.11.3) charakteryzuje wielobiegunnik w sposób jednoznaczny. Wielkością charakterystyczną dla wielobiegunnika jest zatem jego macierz przewodności zawierająca $(m-1)^2$ wyrazów, z tego $\frac{m(m-1)}{2}$ niezależnych od siebie*. Wielobiegunnik jest zatem scharakteryzowany przez $\frac{m(m-1)}{2}$ parametrów, które można nazwać stałymi wielobiegunnika i które mają określone wyżej znaczenie fizyczne.

Jako przykład rozpatrzymy trójkąt przedstawiony na rys. 4.11.6a. Jest to równocześnie przykład połączenia oporów w gwiazdę. Elementy macierzy przewodnościowej można obliczyć wyrażając dla tego obwodu prądy I_1 i I_2 przez napięcia U_1 i U_2 lub wychodząc z fizycznej interpretacji tych elementów. I tak: G_{11} jest przewodnością wejściową trójkąta między biegunami 1 i 3 przy biegunie 2 zwartym do bieguna 3 (rys. 4.11.6 b), stąd:

$$G = \frac{g_1(g_2 + g_3)}{g_1 + g_2 + g_3}$$

podobnie z drugiej strony:

$$G_{22} = \frac{g_2(g_1 + g_3)}{g_1 + g_2 + g_3}$$

G_{12} jest transmitancją od napięcia U_2 do prądu I_1 przy zwartym wejściu (patrz rys. 4.11.6 c), zatem

$$I_{12} = -g_1 U_{32} = -g_1 \frac{I_{22}}{g_1 + g_3}$$

(uwaga na znak -, bo dla przewodności g_1 zastosowano strzałkowanie wydajnikowe), stąd

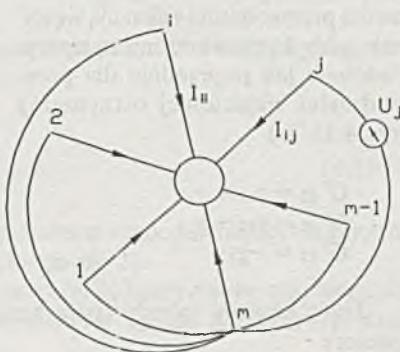
$$G_{12} = -\frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Z zasady wzajemności wynika tu, że

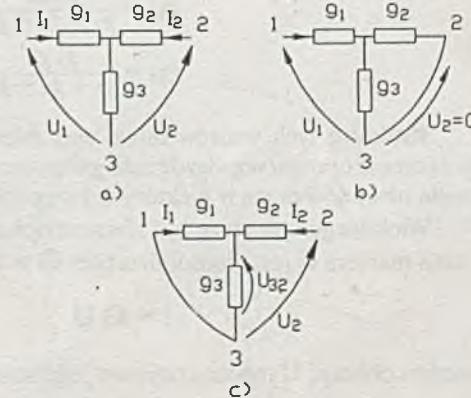
$$G_{12} = G_{21}$$

W ten sposób wyznaczono wszystkie elementy macierzy \mathbf{G} .

*) Jeżeli wielobiegunnik nie zawiera sił sterowanych.



Rys. 4.11.5



Rys. 4.11.6

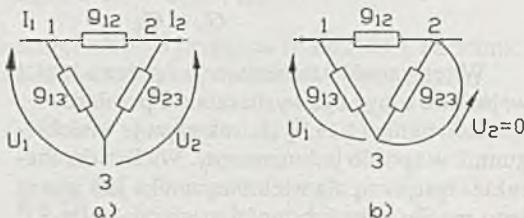
Jako drugi przykład rozpatrzymy trójkąt z rys. 4.11.7. Jest to przykład połączenia oporów w trójkąt. Oznaczenia przewodności wskazują węzły, pomiędzy które włączone są opory. Podobnie jak poprzednio dla przewodności wejściowej otrzymamy (rys. 4.11.7b)

$$G'_{11} = g_{13} + g_{12}$$

$$G'_{22} = g_{12} + g_{23}$$

$$G'_{12} = -g_{12}$$

Rys. 4.11.7



Jeżeli obydwa trójkątki (połączenie w gwiazdę i połączenie w trójkąt) mają tę samą macierz

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}'$$

to znaczy

$$G_{11} = G'_{11}$$

$$G_{22} = G'_{22}$$

oraz

$$G_{12} = G'_{12}$$

to trójkątki te są równoważne (zastępcze) i nie można ich odróżnić przez pomiary z zewnątrz.

Warunkiem równoważności będą następujące związki między ich przewodnościami:

$$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}$$

$$g_{13} = \frac{g_1 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

$$g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

Strukturę tych wzorów łatwo zapamiętać. Z powyższego wynika, że można każde połączenie oporów w gwiazdę zastąpić połączeniem w trójkąt i odwrotnie. Takie przekształcenia obwodów mogą w niektórych przypadkach uprościć ich analizę.

Wielobiegunnik może być również opisany przez jego macierz oporową \mathbf{R} . W istocie, jeżeli macierz \mathbf{G} jest nieosobliwa ($\det \mathbf{G} \neq 0$), to z równania

$$\mathbf{I} = \mathbf{G} \mathbf{U}$$

można obliczyć \mathbf{U} mnożąc obydwie jego strony przez macierz odwrotną \mathbf{G}^{-1}

$$\mathbf{G}^{-1} \mathbf{I} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{U}$$

Zatem oznaczając

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$$

(4.11.6)

otrzymamy

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} \mathbf{I} \quad (4.11.7)$$

Również elementy macierzy \mathbf{R} posiadają określone znaczenie fizyczne i mogą być wyznaczone na podstawie pomiarów.

Dla trójkąta otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ U_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{array} \right\} \quad (4.11.8)$$

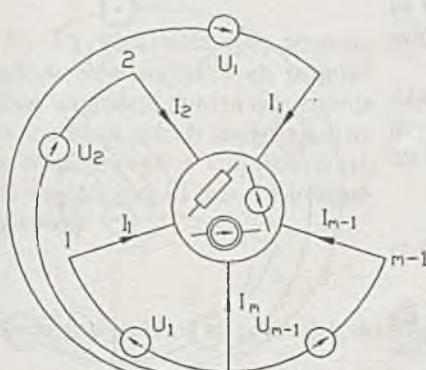
Stąd łatwo zauważać, że R_{11} jest oporem wejściowym trójkąta mierzonym między biegunami 1 i 3 (biegunem odniesienia) przy $I_2 = 0$ (rozwartym biegu- nie 2).

Podobnie R_{22} jest oporem mierzonym między biegunami 2 i 3 przy rozwartym biegu 1. $R_{12} = R_{21}$ jest transmitancją od siły prądomotorycznej I_2 do napięcia U_1 przy rozwartym biegu 1.

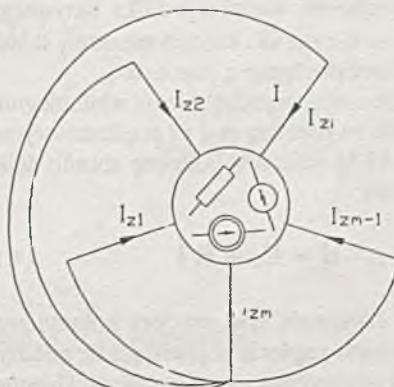
Istnieją również inne postacie równań trójkątów. W zasadzie można dowolne dwie wielkości z czterech: U_1, U_2, I_1, I_2 wyrazić przez pozostałe dwie. Łatwo to uogólnić dla wielobiegunników. Należy jednak stwierdzić, że w niektórych przypadkach wielobiegunników nie wszystkie postacie równań istnieją. Dotyczy to w szczególności tzw. wielobiegunników zdegenerowanych.

4.12. Wielobiegunniki aktywne z autonomicznymi źródłami

Jeżeli wewnętrz wielobiegunnika oprócz oporów znajdują się również autonomiczne źródła energii elektrycznej, to wielobiegunnik taki nazywa się wielobiegunnikiem **aktywnym**. Do równań wielobiegunnika aktywnego można dojść również rozpatrując wielobiegunnik wyodrębniony (rys. 4.12.1).



Rys. 4.12.1



Rys. 4.12.2

Również i tu można skorzystać z zasady superpozycji, wyrażając prądy dopływające do poszczególnych biegunów wielobiegunka jako sumę składowych pochodzących od poszczególnych sił elektromotorycznych $U_1 \dots U_{m-1}$ oraz od wewnętrznych sił wielobiegunka. Te ostatnie można obliczyć lub zmierzyć w układzie z rys. 4.12.2, w którym wszystkie bieguny wielobiegunka zostały zwarte do węzła (bieguna) odniesienia. Prądy te, $I_{z1} \dots I_{zm}$, są wywołane wyłącznie przez wewnętrzne źródła wielobiegunka aktywnego. Składowe prądów, pochodzące od poszczególnych sił elektromotorycznych $U_1 \dots U_{m-1}$, można obliczyć lub zmierzyć tak, jak to podano dla wielobiegunka pasywnego (rys. 4.11.4), (rys. 4.11.5), przy założeniu, że przy ich obliczaniu wszystkie wewnętrzne siły elektro- i prądomotoryczne były równe zeru (tzn. siły elektromotoryczne zwarte, zaś prądomotoryczne rozwarste). Dla prądu dopływającego do i -tego bieguna otrzymamy wtedy

$$I_i = I_{zi} + G_{i1} U_1 + G_{i2} U_2 + \dots G_{i,m-1} U_{m-1} \quad (4.12.1)$$

Dla wielobiegunka można zatem napisać macierzowo

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_z + \mathbf{G} \mathbf{U} \quad (4.12.2)$$

W równaniu tym

$$\mathbf{I}_z = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{z,m-1} \end{bmatrix}$$

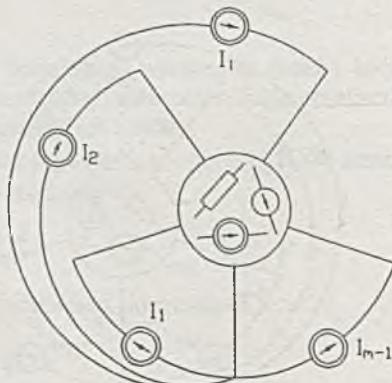
jest macierzą kolumnową reprezentującą składowe prądu \mathbf{I} wywołane istnieniem wewnętrznych sił wymuszających.

Równanie wielobiegunka aktywnego można uważać za uogólnienie zasady Norton'a dla dwójników aktywnych na wielobiegunki aktywne. Znak + jest tu związany z "odbiornikowym" strzałkowaniem wielobiegunka. (Przy takiej konwencji dla dwójnika aktywnego mielibyśmy również $I = I_z + GU$). Tak jak dla dwójnika aktywnego wielkościami charakterystycznymi były prąd zwarcia I_z oraz przewodność wewnętrzna G (wielkości te dostępne były z pomiarów), tak i tu wielkościami charakterystycznymi wielobiegunka aktywnego są macierze \mathbf{I}_z oraz \mathbf{G} , których elementy składowe są również dostępne z pomiaru.

Dokonując wyodrębnienia wielobiegunka z układu za pomocą $m-1$ sił prądomotorycznych (rys. 4.12.3) można w podobny sposób dojść do równania:

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}_z + \mathbf{R} \mathbf{I} \quad (4.12.3)$$

W równaniu tym macierz kolumnowa \mathbf{E}_z przedstawia napięcie pojawiające się między biegunem odniesienia a poszczególnymi biegunami przy odłączonym obwodzie zewnętrznym (gdy $\mathbf{I} = \mathbf{0}$). Poszczególne elementy macierzy \mathbf{R} mają



Rys. 4.12.3

również określone znaczenie fizyczne, ich związek z elementami macierzy \mathbf{G} można łatwo otrzymać, mnożąc równanie (4.12.3) przez \mathbf{R}^{-1} (gdy macierz \mathbf{R} nie jest osobliwa)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_z + \mathbf{I} \\ \mathbf{I} &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_z + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U}\end{aligned}$$

oznaczając

$$-\mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_z = \mathbf{J}_z \quad (4.12.4)$$

oraz

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{G} \quad (4.12.5)$$

otrzymamy równanie (4.12.2).

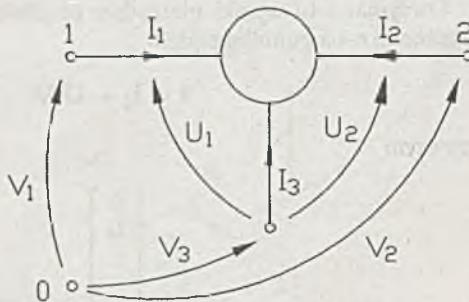
4.13. Obwody z wielobiegunnikami

W dalszym ciągu, w analizie obwodów zawierających liniowe wielobiegunniki, zajdzie konieczność wyrażenia równań wielobiegunnika jako zależności między prądami wielobiegunnika i potencjałami jego węzłów. Równanie takie łatwo otrzymać z równań wielobiegunnika. Zauważmy, że dla trójkąta (rys. 4.13.1):

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= V_1 - V_3 \\ U_2 &= V_2 + V_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.13.1)$$

gdzie V_1, V_2, V_3 to potencjały poszczególnych węzłów wejściowych trójkąta mierzone względem punktu odniesienia 0. Równocześnie prąd I_3 dopływający do węzła wejściowego 3 trójkąta musi, w myśl uogólnionego I prawa Kirchhoffa, być równy

$$I_3 = -I_1 - I_2 \quad (4.13.2)$$



Rys. 4.13.1

Podstawiając wyrażenia na potencjały do równań (4.12.2) otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_{z1} + G_{11} V_1 + G_{12} V_2 - (G_{11} + G_{12}) V_3 \\
 I_2 &= I_{z2} + G_{21} V_1 + G_{22} V_2 - (G_{21} + G_{22}) V_3 \\
 I_3 &= - (I_{z1} + I_{z2}) - (G_{11} + G_{22}) V_1 - (G_{12} + G_{21}) V_2 + \\
 &\quad + (G_{11} + G_{12} + G_{21} + G_{22}) V_3
 \end{aligned}$$

co można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_Z + \mathbf{G} \mathbf{V}$$

gdzie

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_Z = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ I_{z3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_{z3} &= - (I_{z1} + I_{z2}) \\
 G_{31} &= - (G_{11} + G_{21}) \\
 G_{32} &= - (G_{12} + G_{22}) \\
 G_{33} &= + (G_{11} + G_{12} + G_{21} + G_{22})
 \end{aligned} \right\} \quad (4.13.4)$$

Macierz \mathbf{G} ma tu specyficzne własności: suma elementów każdego wiersza i każdej kolumny jest równa zeru, więc można ją łatwo uzyskać z macierzy trójkątnika napisanej dla równania wiążącego \mathbf{I} i \mathbf{U} (4.12.2).

Otrzymane tu wyniki nietrudno uogólnić na dowolne wielobiegunniki liniowe. Dla dowolnego n -biegunnika będzie

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_Z + \mathbf{G} \mathbf{V} \quad (4.13.5)$$

przy czym

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_Z = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \\ \vdots \\ I_{zn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}$$

Suma składników każdego wiersza tej macierzy jest równa 0:

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} = 0;$$

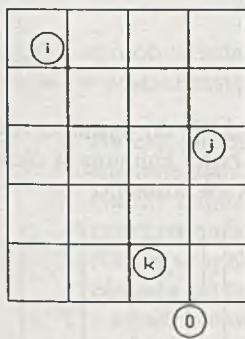
również suma elementów każdej kolumny jest równa 0:

$$\sum_{i=1}^n G_{ij} = 0$$

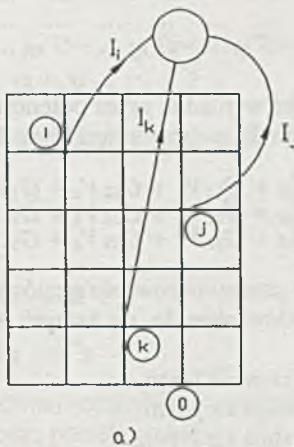
Rozpatrzymy obecnie obwody liniowe zawierające wielobiegunniki liniowe. Dla prostoty przedstawimy tu połączenie trójkąta z obwodem liniowym (rys. 4.13.2 a). Wyniki łatwo będzie uogólnić na dowolne obwody zawierające dowolną liczbę wielobiegunników.

Trójkąt połączony jest z obwodem w węzłach i, j, k .

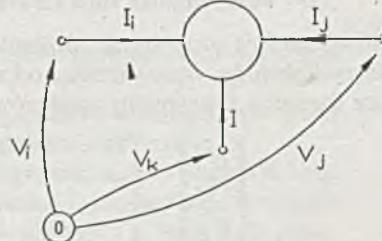
Rozpatrzmy najpierw obwód bez wielobiegunnika (rys. 4.13.2 b). Stosując metodę



b)



a)



Rys. 4.13.2

potencjałów węzłowych, możemy dla tego obwodu napisać równanie w postaci macierzowej:

$$\mathbf{G}' \mathbf{V}' = \mathbf{I}'_z \quad (4.13.6)$$

albo w postaci rozpisanej

$$\begin{bmatrix}
 +G'_{11} \dots -G'_{1i} \dots -G'_{1j} \dots -G'_{1k} \dots -G'_{1n} \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 -G'_{i1} \dots +G'_{ii} \dots -G'_{ij} \dots -G'_{ik} \dots -G'_{in} \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 -G'_{j1} \dots -G'_{ji} \dots +G'_{jj} \dots -G'_{jk} \dots -G'_{jn} \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 -G'_{k1} \dots -G'_{ki} \dots -G'_{kj} \dots +G'_{kk} \dots -G'_{kn} \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 -G'_{n1} \dots -G'_{ni} \dots -G'_{nj} \dots -G'_{nk} \dots +G'_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V'_1 \\
 \vdots \\
 V'_i \\
 \vdots \\
 V'_j \\
 \vdots \\
 V'_k \\
 \vdots \\
 V'_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 I'_{z1} \\
 \vdots \\
 I'_{zi} \\
 \vdots \\
 I'_{j1} \\
 \vdots \\
 I'_{k1} \\
 \vdots \\
 I'_{n1}
 \end{bmatrix}$$

Równania wielobiegunnika wyrażone przez potencjały jego biegunów względem tego samego punktu odniesienia, co dla poprzedniego obwodu, mają postać

$$\begin{cases}
 I_{z1} + G_{11} V_1 + G_{12} V_2 + G_{13} V_3 = I_1 \\
 I_{z2} + G_{21} V_1 + G_{22} V_2 + G_{23} V_3 = I_2 \\
 I_{z3} + G_{31} V_1 + G_{32} V_2 + G_{33} V_3 = I_3
 \end{cases} \quad (4.13.7)$$

Przeprowadzimy obecnie przenumerowanie węzłów wielobiegunnika tak, by ich numerы były równe numerom węzłów obwodu, do których wielobiegunnik będzie dołączony; zatem

- 1 - węzeł trójkąta staje się i -tym,
- 2 - węzeł trójkąta staje się j -tym,
- 3 - węzeł trójkąta staje się k -tym.

Równocześnie uzupełnimy równania wielobiegunnika (4.13.7) do wymiaru równego wymiarowi obwodu, wprowadzając odpowiednio zerowe wiersze i kolumny w określone miejsce macierzy. Otrzymamy wtedy równania wielobiegunnika w postaci:

$$\begin{bmatrix}
 0 \\
 \vdots \\
 I'_{zi} \\
 \vdots \\
 I'_{zj} \\
 \vdots \\
 I'_{zk} \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 0 \dots G''_{ii} \dots G''_{ij} \dots G''_{ik} \dots 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 0 \dots G''_{ji} \dots G''_{jj} \dots G''_{jk} \dots 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 0 \dots G''_{ki} \dots G''_{kj} \dots G''_{kk} \dots 0 \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V''_1 \\
 \vdots \\
 V''_i \\
 \vdots \\
 V''_j \\
 \vdots \\
 V''_k \\
 \vdots \\
 V''_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 I''_{z1} \\
 \vdots \\
 I''_{zi} \\
 \vdots \\
 I''_{j1} \\
 \vdots \\
 I''_{k1} \\
 \vdots \\
 I''_{n1}
 \end{bmatrix}$$

albo

$$I''_z + \mathbf{G}'' \mathbf{V}'' = \mathbf{I}'' \quad (4.13.8)$$

Połączenie wielobiegunnika z obwodem węzłach i, j, k powoduje zrównanie się potencjałów obwodu i wielobiegunnika

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}'' = \mathbf{V}$$

oraz konieczność uwzględnienia prądów odpływających z tych węzłów do wielobiegunnika. Równania potencjałów węzłowych są równaniami I prawa Kirchhoffa, prądy wielobiegunnika należy zatem odjąć od prawej strony równania otrzymując równanie dla obwodu z wielobiegunnikiem

$$\mathbf{G}' \mathbf{V} = \mathbf{I}_{z'} - \mathbf{I}'' \quad (4.13.9)$$

po podstawieniu równania (4.13.8)

$$\mathbf{G}' \mathbf{V} = \mathbf{I}_{z'} - \mathbf{G}'' \mathbf{V} - \mathbf{I}''_{z'}$$

co ostatecznie daje

$$(\mathbf{G}' + \mathbf{G}'') \mathbf{V} = \mathbf{I}'_{z'} - \mathbf{I}''_{z'} \quad (4.13.10)$$

Równania obwodów z wielobiegunnikami można zatem zapisać również w postaci

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{I}_z \quad (4.13.11)$$

Przy czym

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}'' \quad (4.13.12)$$

$$\mathbf{I}_z = \mathbf{I}'_{z'} - \mathbf{I}''_{z'} \quad (4.13.13)$$

Powyzszy sposób układania równań obwodów z wielobiegunnikami można uogólnić i przedstawić w postaci następującego postępowania:

1. Należy napisać równania potencjałów węzłowych obwodu bez wielobiegunników.
2. Należy napisać równania wielobiegunników wyrażając ich prądy przez potencjały względem węzła odniesienia obwodu.
3. Należy uzupełnić równania wielobiegunników do wymiaru równań obwodu (n) oraz przenumerać węzły wielobiegunników zgodnie z numerami węzłów obwodu, do których węzły te będą dołączone.
4. Należy dodać macierze przewodnościowe obwodu \mathbf{G}' oraz macierze wielobiegunników \mathbf{G}'' . W tym celu wystarczy do odpowiednich elementów macierzy obwodu \mathbf{G}' leżących na przecięciu wiersza i,j,k i kolumny i,j,k dodać odpowiednie elementy macierzy wielobiegunników.

We wspomnianym przykładzie np. do G'_{ij} należy dodać G''_{ij} , do G'_{ii} dodać G''_{ii} itd. Równocześnie od zastępczych sił prądomotorycznych węzłów obwodu należy odjąć zastępcze siły prądomotoryczne wielobiegunników, np. od I'_{zi} odjąć I''_{zi} itd.

Otrzymany w ten sposób układ równań

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{I}_z \quad (4.13.14)$$

można rozwiązać tak, jak w przypadku obwodów składających się wyłącznie z dwójników.

Powyzsza metoda może być łatwo przystosowana do maszynowej analizy obwodów elektrycznych zawierających oprócz dwójników również i wielobiegunniki.

Dla przykładu rozpatrzmy obwód elektryczny zawierający jeden trójkąt przedstawiony na rys. 4.13.3a. Do takiego obwodu sprowadza się w zasadzie jednostopniowy wzmacniacz tranzystorowy. Zgodnie z przedstawionym na poprzednich stronach schematem, wyznaczamy najpierw równania potencjałów węzłowych obwodu z odłączonym trójkątem (rys. 4.13.3b) równanie (4.13.6)

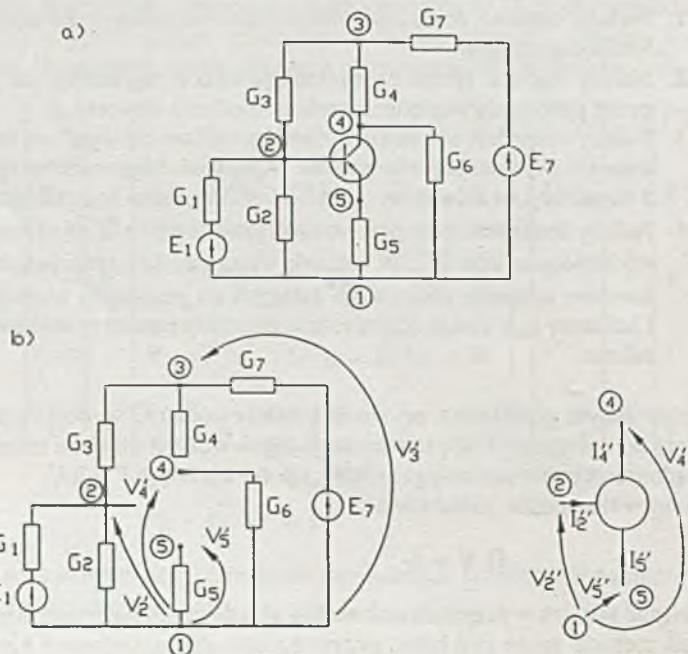
$$\mathbf{G}' \mathbf{V}' = \mathbf{I}'_z$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_3 + G_4 + G_7 & -G_4 & 0 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 E_1 \\ G_7 E_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równania trójkąta napiszemy uwzględniając już przenumerowanie węzłów oraz uzupełnienie jego macierzy do wymiarów macierzy obwodu (4.13.8) i wyrażając je przez potencjały węzłowe patrz (4.13.3):

$$\mathbf{I}''_z + \mathbf{G}'' \mathbf{V}'' = \mathbf{I}''$$

$$\begin{bmatrix} I''_{z1} \\ 0 \\ I''_{z2} \\ I''_{z3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G''_{11} & 0 & G''_{12} & G''_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ G''_{21} & 0 & G''_{22} & G''_{23} \\ G''_{31} & 0 & G''_{32} & G''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V''_2 \\ V''_3 \\ V''_4 \\ V''_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I''_2 \\ I''_3 \\ I''_4 \\ I''_5 \end{bmatrix}$$



Rys. 4.13.3

Celem uzyskania równań obwodu z trójkątem (rys. 4.13.3 a) należy dodać do siebie otrzymane macierze: macierz \mathbf{G}' obwodu bez trójkąta i macierz \mathbf{G}'' trójkąta. Praktycznie wystarczy "nałożyć na siebie" obie macierze i zsumować elementy w poszczególnych kratkach.

Otrzymamy w ten sposób macierz obwodu \mathbf{G}

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}''$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G'_{11} + G'_{21} + G'_{31} + G''_{11} & -G'_{31} & G''_{12} & G''_{13} \\ -G'_{31} & G'_{31} + G'_{41} + G'_{71} & -G'_{41} & 0 \\ G''_{21} & -G'_{41} & G'_{41} + G'_{61} + G''_{22} & G''_{23} \\ G''_{31} & 0 & G''_{32} & G'_{51} + G''_{33} \end{bmatrix}$$

W podobny sposób otrzymamy macierz zastępczych sił prądomotorycznych (równanie (4.13.13))

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}'_Z - \mathbf{I}''_Z$$

$$\mathbf{I}_Z = \begin{bmatrix} G_1 E_1 - I''_{z1} \\ G_7 E_7 \\ -I''_{z2} \\ -I''_{z3} \end{bmatrix}$$

Układ równań potencjałów węzłowych dla obwodu z trójkątem (rys. 4.13.3a) ma zatem postać

$$\begin{bmatrix} G'_{11} + G'_{21} + G'_{31} + G''_{11} & -G'_{31} & G''_{12} & G''_{13} \\ -G'_{31} & G'_{31} + G'_{41} + G'_{71} & -G'_{41} & 0 \\ G''_{21} & -G'_{41} & G'_{41} + G'_{61} + G''_{22} & G''_{23} \\ G''_{31} & 0 & G''_{32} & G'_{51} + G''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G'_1 E'_1 - I''_{z1} \\ G'_7 E'_7 \\ -I''_{z2} \\ -I''_{z3} \end{bmatrix}$$

Rozwiązywanie tego układu równań pozwala na obliczenie dowolnych napięć i prądów w obwodzie.

Rozdział 5

OBLCZANIE OBWODÓW LINIOWYCH PRĄDU STAŁEGO NA KOMPUTERACH

Z przedstawionych dotychczas przykładów wynika jasno, że obliczanie prądów i napięć w obwodach z większą liczbą gałęzi i węzłów jest bardzo pracochłonne. W szczególności np. obliczanie zależności jakiejś wielkości (np. prądu) od zmian jednego z parametrów obwodu (np. oporu) wymagać może dużego nakładu pracy. Możliwości, jakie stwarza tu zastosowanie komputerów, są bardzo duże. Przy obecnym stanie rozwoju komputerów i techniki programowania możliwe są wszechstronne analizy bardzo złożonych obwodów w bardzo krótkim czasie przy umiarkowanych kosztach. Zakres czynności, które może wykonać odpowiedni program analizy obwodów prądu stałego, można podzielić na pięć części:

- Przygotowanie danych o obwodzie.
- Układanie równań.
- Rozwiązywanie równań.
- Obliczanie napięć, prądów i mocy.
- Automatyczne obliczanie wariantów układu, charakterystyk, zależności od zmian parametrów itp.

Omówimy w zarysie powyższe czynności.

5.1. Przygotowanie danych o obwodzie

W obwodzie (rys. 5.1.1) należy ponumerować, w dowolny sposób, węzły od 0 do w . Ułożenie równań według metody potencjałów węzłowych wymaga przyjęcia węzła odniesienia. Założymy, że jest nim węzeł "0" obwodu. Na rysunku 5.1.2 przedstawiono schematy gałęzi. Dla każdej gałęzi wyróżniamy węzeł początkowy " w_p " oraz końcowy " w_k ". Jako kierunek przepływu prądu w gałęzi przyjmujemy kierunek od węzła początkowego do węzła końcowego. Siła elektromotoryczna jest skierowana do węzła początkowego (rys. 5.1.2b). Siła prądomotoryczna (rys. 5.1.2c) jest skierowana od węzła początkowego do końcowego.

Dane wyrażające strukturę obwodu i wartości elementów przygotowujemy podając kolejno dla każdej gałęzi *)

XXX nazwę gałęzi,
 w_p węzeł początkowy,
 w_k węzeł końcowy,
 R wartość oporu gałęzi;

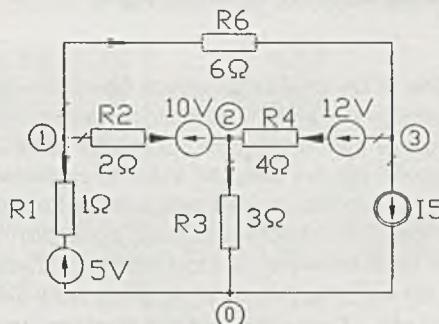
Jeżeli w gałęzi działa siła elektromotoryczna, to podajemy ponadto jej wartość E . Nazwa gałęzi z oporem musi się zaczynać od symbolu R , np. $R1, R12, RB1$ itd. Nazwa gałęzi z siłą elektromotoryczną musi się zaczynać od litery E , zaś z siłą prądomotoryczną - od litery I . Pierwsze litery nazwy gałęzi pozwalają programowi na odróżnienie gałęzi oporowej od innych typów gałęzi.

Jeżeli w gałęzi znajduje się siła prądomotoryczna, to dla niej podajemy:

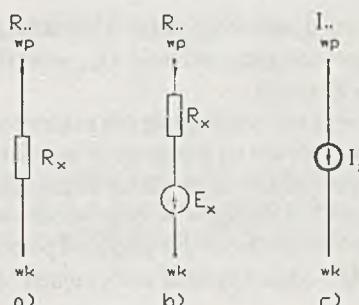
XXX nazwę gałęzi,
 w_p węzeł początkowy,
 w_k węzeł końcowy,
 I wartość siły prądomotorycznej.

Dla przykładu podanego na rys. 5.1.1 dane mają postać:

$E1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 5$
 $E2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 10$
 $R3 \ 2 \ 0 \ 3$
 $E4 \ 3 \ 2 \ 4 \ -12$
 $I5 \ 3 \ 0 \ 0.6667$
 $R6 \ 1 \ 3 \ 6$



Rys. 5.1.1



Rys. 5.1.2

Dane powyższe w sposób jednoznaczny określają strukturę obwodu, kierunki prądów, kierunki sił elektromotorycznych i prądomotorycznych, ich wartości oraz wartości oporów. Liczbę gałęzi oraz liczbę węzłów można już określić na podstawie tych danych (patrz program ALIOS1 w dodatku I).

*) Sposób podawania danych zależy od stosowanego programu.

5.2. Układanie równań obwodu

Dla celów analizy liniowych obwodów prądu stałego najczęściej stosuje się metodę potencjałów węzłowych. Metodę tę łatwo przystosować do potrzeb analizy komputerowej. Stosowanie metody prądów oczkowych jest mniej korzystne, m.in. z powodu konieczności znajomości drzewa obwodu, która to czynność daje się, co prawda, dosyć łatwo zalgorytmizować, przedłużając jednak czas liczenia. Pokażemy niżej zastosowanie metody potencjałów węzłowych dla obwodów bez gałęzi z bezoporowymi siłami elektromotorycznymi. Uwzględnienie bezoporowych sił elektromotorycznych nie przedstawiałoby większych trudności, program stałby się jednak mniej przejrzysty. Dla celów analizy komputerowej przedstawiony w rozdz. 4.5 sposób układania macierzy przewodnościowej \mathbf{G} , polegający na sprawdzaniu, jakie przewodności połączone są z danym węzłem, nie jest najlepszy. Podamy tu inny sposób, lepiej przystosowany do analizy komputerowej. Zauważmy, że każda przewodność G_{ij} , włączona między węzłami "i" i "j", występuje w macierzy \mathbf{G} w następujących miejscach:

- na przecięciu i -tego wiersza i i -tej kolumny ze znakiem +
- na przecięciu j -tego wiersza i j -tej kolumny ze znakiem +
- na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny ze znakiem -
- na przecięciu j -tego wiersza i i -tej kolumny ze znakiem -.

Jeżeli w gałęzi istnieje siła elektromotoryczna E_x , skierowana do i -tego węzła, to wystąpi ona, pomnożona przez wartość G_{xi} , w macierzy \mathbf{I} w i -tym wierszu ze znakiem +, a w j -tym wierszu ze znakiem -.

Jeżeli w gałęzi znajduje się siła prądomotoryczna skierowana do i -tego węzła, to wystąpi ona w i -tym wierszu tej macierzy ze znakiem +, a w j -tym wierszu ze znakiem -.

Algorytm układania macierzy \mathbf{G} polegać może więc na odczytaniu danych dla kolejnych gałęzi obwodu i dodaniu w odpowiednich miejscach wspomnianych wyżej wartości G_{ij} z odpowiednim znakiem. Na przykład po odczytaniu drugiego wiersza danych (dla E2) stan macierzy \mathbf{G} będzie wyglądał następująco *):

		węzły			
		0	1	2	3
węzły	0	$+1$	-1	0	0
	1	-1	$+1+0.5$	$0-0.5$	0
	2	0	$0-0.5$	$0+0.5$	0
	3	0	0	0	0

przy czym wpis dokonany przy odczytaniu danych dla E2 zaznaczono tłustym drukiem. Stan macierzy \mathbf{I} będzie następujący:

		0	1	2	3
węzły	0	$-5 * 1$			
	1	$5 * 1 + 10 * 0.5$			
	2	0	$-10 * 0.5$		
	3	0			

*) Dla prostoty algorytmu wprowadza się do macierzy \mathbf{G} dodatkowo zerowy wiersz i zerową kolumnę przypisane 0-wemu węzłowi. Wiersz ten i kolumna nie są już później wykorzystywane.

Po odczytaniu danych wszystkich gałęzi, macierze **G** i **I** przyjmą następującą postać:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1.333 & -1.000 & -0.333 & 0.000 \\ -1.000 & 1.667 & -0.500 & -0.167 \\ -0.333 & -0.500 & 1.083 & -0.250 \\ 0.000 & -0.167 & -0.250 & 0.417 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -4.333 \\ 10.000 \\ -2.000 \\ -3.667 \end{bmatrix}$$

Na podstawie tych danych można przystąpić do rozwiązywania układu równań potencjałów węzłowych. Zerowa kolumna i zerowy wiersz były potrzebne tylko przy układaniu równań, w dalszym postępowaniu - już nie.

5.3. Rozwiązywanie równań

W wyniku działania algorytmu układania równań otrzymuje się macierz **G** oraz macierz kolumnową wyrazów wolnych **I** reprezentującą układ równań

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (5.3.1)$$

Rozwiązywanie takiego układu można by uzyskać na drodze macierzowej mnożąc obustronnie przez macierz odwrotną \mathbf{G}^{-1} :

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I} \quad (5.3.2)$$

Odwracanie macierzy jest jednak niechętnie stosowane, gdyż wymaga dużej liczby operacji dzielenia i mnożenia rzędu $n^3 + n^2$ (gdzie $n = w-1$). Najczęściej stosuje się tu metodę eliminacji Gaussa i jej pochodne. Metodę Gaussa pokażemy na przykładzie układu trzech równań o trzech niewiadomych:

$$\begin{matrix} \mathbf{R}_1^{(3)} \\ \mathbf{R}_2^{(3)} \\ \mathbf{R}_3^{(3)} \end{matrix} \begin{bmatrix} G_{11}G_{12}G_{13} \\ G_{21}G_{22}G_{23} \\ G_{31}G_{32}G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

Oznaczmy przez $\mathbf{R}_i^{(j)}$ - "i"-te równanie w "j"-tym kroku eliminacji.

Metoda Gaussa polega na takim przekształceniu układu równań (5.3.3), by otrzymać równoważny układ równań, w którym występuje macierz trójkątna z elementami poniżej głównej przekątnej równymi zeru. Taki układ równań łatwo rozwiązać przez kolejne podstawienia obliczonych potencjałów do poprzednich równań.

Najpierw wyeliminujemy zmienną V_1 z drugiego i trzeciego równania odejmując od drugiego równania pierwsze pomnożone przez $\frac{G_{21}}{G_{11}}$ oraz od trzeciego pierwsze pomnożone przez $\frac{G_{31}}{G_{11}}$. Symbolicznie można to zapisać w następujący sposób

$$R_1^{(2)} = R_1^{(1)}$$

$$R_2^{(2)} = R_2^{(1)} - \frac{G_{21}}{G_{11}} R_1^{(1)} \quad (5.3.4)$$

$$R_3^{(2)} = R_3^{(1)} - \frac{G_{31}}{G_{11}} R_1^{(1)}$$

co daje układ równań

$$\begin{aligned} R_1^{(2)} & \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & G_{22}^{(2)} & G_{23}^{(2)} \\ 0 & G_{32}^{(2)} & G_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2^{(2)} \\ I_3^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

w którym np.

$$G_{22}^{(2)} = G_{22} - G_{12} \frac{G_{21}}{G_{11}}$$

a

$$I_2^{(2)} = I_2 - I_1 \frac{G_{21}}{G_{11}} \quad \text{itd.}$$

W kolejnym kroku eliminujemy w podobny sposób z trzeciego równania zmienną V_2 :

$$R_1^{(3)} = R_1^{(1)}$$

$$R_2^{(3)} = R_2^{(2)} \quad (5.3.6)$$

$$R_3^{(3)} = R_3^{(2)} - \frac{G_{32}^{(2)}}{G_{22}^{(2)}} R_2^{(2)}$$

otrzymując

$$\begin{aligned} R_1^{(3)} & \begin{bmatrix} G_{11} G_{12} G_{13} \\ 0 & G_{22}^{(2)} G_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & G_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2^{(2)} \\ I_3^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

(Układ tych równań łatwo już rozwiązać "od końca". Z ostatniego równania $R_3^{(3)}$:

$$V_3 = \frac{I_3^{(2)}}{G_{33}^{(2)}}.$$

Podstawiając tę wartość do $R_2^{(3)}$ otrzymamy:

$$V_2 = \frac{I_2^{(2)} - G_{23}^{(2)} V_3}{G_{22}^{(2)}},$$

a po podstawieniu V_2 i V_3 do pierwszego równania

$$V_1 = \frac{I_1 - G_{13} V_3 - G_{12} V_2}{G_{11}}.$$

Powyższa metoda wymaga jedynie $\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$ mnożeń i dzieleni, jest zatem dla większych n szybsza, niż metoda odwracania macierzy, a więc nadaje się w szczególności dla obwodów z większą liczbą węzłów. Na przykład dla $n = 30$ otrzymujemy dla metody odwracania macierzy 27900 operacji mnożenia i dzielenia, a dla metody Gaussa tylko 9890, w związku z czym czas rozwiązywania układu równań metodą Gaussa będzie znacznie krótszy.

Dalsze ulepszenia tej metody, zmierzające do zwiększenia dokładności, można znaleźć np. w [2].

5.4. Przykład analizy obwodu programem ALIOS1

W dodatku I zamieszczono program analizy liniowych obwodów prądu stałego ALIOS1. Program umożliwia analizę liniowych obwodów prądu stałego zawierających opory, siły elektromotoryczne i siły prądomotoryczne. Jako wyniki analizy otrzymuje się potencjały poszczególnych węzłów - V , prądy - I , napięcia - U , moce wydzielane na oporach - P oraz moce wydzielane przez SEM i SPM - PZ . Program ma charakter przykładowy, nie został zoptymalizowany pod względem szybkości działania ani zajętości pamięci, aby w możliwie poglądowy sposób pokazać zasady komputerowej analizy obwodów.

Dla obwodu z rys. 5.1.1 otrzymano wyniki przedstawione na rys. 5.4.1.

Obwód z rys. 5.1.1

E1 1 0 1.0000 5.0000

E2 1 2 2.0000 10.0000

R3 2 0 3.0000 0.0000

E4 3 2 4.0000 -12.0000

I5 3 0 0.6667 0.0000

R6 1 3 6.0000 0.0000

V0 = 0.0000

V1 = 4.8039

V2 = -1.4118

V3 = -7.7255

	I	U	P	PZ
E1	-0.1961	-0.1961	0.0384	0.9804
E2	-1.8922	-3.7843	7.1605	18.9216
R3	-0.4706	-1.4118	0.6644	0.0000
E4	1.4216	5.6863	8.0834	17.0588
I5	0.6667	-7.7255	0.0000	5.1504
R6	2.0882	12.5294	26.1644	0.0000

Rys. 5.4.1

Bardziej wyczerpujące przedstawienie problemów komputerowej analizy obwodów można znaleźć np. w [1][5].

Rozdział 6

OBWODY NIELINIOWE PRĄDU STAŁEGO

6.1. Elementy nieliniowe

Elementy nie spełniające prawa Ohma, a więc posiadające nieliniową charakterystykę, nazywamy elementami (oporami) nieliniowymi. Element nieliniowy jest określony przez podanie jego charakterystyki.

$$U = U(I)$$

lub

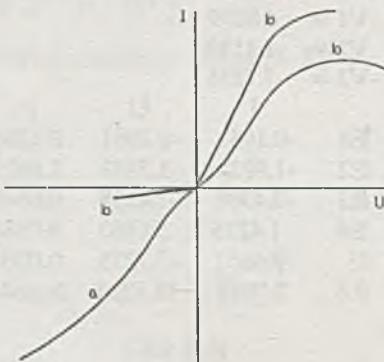
$$I = I(U)$$

Charakterystyki elementów nieliniowych mogą być symetryczne, jeżeli $U(I) = -U(-I)$ (rys. 6.1.1) - charakterystyka "a", albo niesymetryczne - charakterystyka "b". Przy elementach o symetrycznych charakterystykach obojętny jest kierunek przepływu prądu przez element, tzn. obie końcówki elementu są nieroróżnialne. W przypadku elementów o niesymetrycznych charakterystykach konieczne jest odróżnienie obu końcówek.

Z uwagi na trudności analitycznego wyrażenia charakterystyk, podane są one najczęściej w postaci graficznej.

Najbardziej rozpowszechnionym elementem nieliniowym jest żarówka. Nieliniowość jest tu spowodowana zmianą temperatury metalowego włókna pod wpływem przepływu prądu. Charakterystyka żarówki jest symetryczna, przedstawiona ją na rys. 6.1.2.

Nieliniowe charakterystyki wykazują przyrządy oparte na wyładowaniach elektrycznych w gazach. Tak zwana neonówka składająca się z dwóch elektrod umieszczonych w atmosferze gazu szlachetnego



Rys. 6.1.1

(neon, argon itp.) posiada charakterystyki przedstawione na rys. 6.1.3. Cechą szczególną tej charakterystyki jest niezależność napięcia od prądu w pewnych jego granicach oraz konieczność przyłożenia odpowiednio dużej wartości napięcia, większej od tzw. napięcia zapłonu U_z , celem osiągnięcia przepływu prądu. Podobne charakterystyki wykazują przyrządy oparte na wyładowaniach jarzeniowych (świetłówki itp.).

Łuk elektryczny posiada charakterystykę przedstawioną na rys. 6.1.4. Cechą charakterystyczną jest tu fakt, że wzrostowi napięcia na elektrodach łuku towarzyszy zmniejszenie się prądu łuku.

Opory wykonane z półprzewodników, tzw. waristory, posiadają charakterystyki typu

$$U = C I^\beta$$

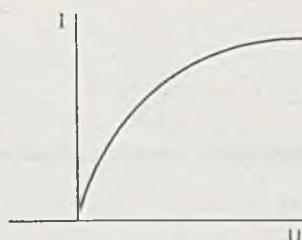
gdzie C - wartość stała,

β - współczynnik nieliniowości prze- ważnie = 0,1-0,3.

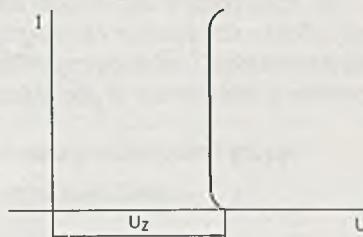
Przykładowa charakterystyka podana jest na rys. 6.1.5.

Charakterystyki niesymetryczne posiadają np. różnego rodzaju diody półprzewodnikowe i próżniowe. Na rys. 6.1.6 przedstawiono dla porównania charakterystykę diody krzemowej ("a"), germanowej ("b") i diody próżniowej ("c").

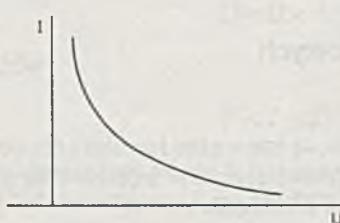
Osobną grupę przedstawiają elementy, których charakterystyki posiadają w pewnych zakresach prądów lub napięć ujemne nachylenie (tzw. opory ujemne). Na rys. 6.1.7a przedstawiono charakterystykę elementu uzależnionego napięciowo, dla którego prąd jest jednoznaczną funkcją napięcia, może on być zatem opisany zależnością $I = I(U)$. Przykładem takiego elementu może być np. tzw. dioda tunelowa. Charakterystyki tego typu wywają również nazywane charakterystykami typu "n". Drugi rodzaj elementów, to elementy uza- leżnione prądowo (rys. 6.1.7.b). Dla nich napięcie jest jednoznaczną funkcją prądu $U = U(I)$. Tego rodzaju charakterystyki nazywane bywają charakterystykami typu "s".



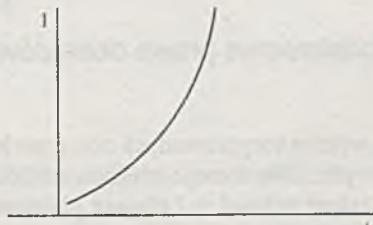
Rys. 6.1.2



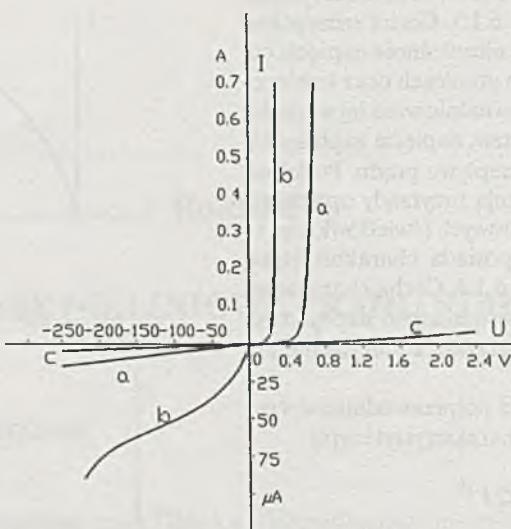
Rys. 6.1.3



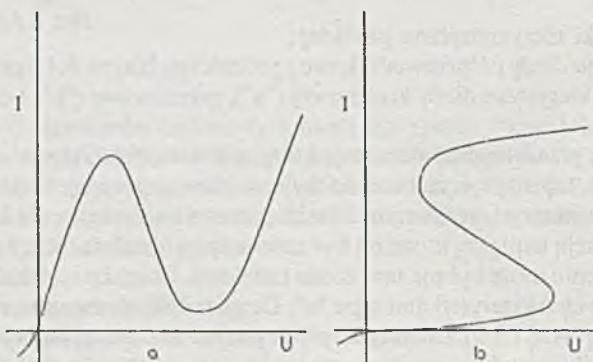
Rys. 6.1.4



Rys. 6.1.5



Rys. 6.1.6



Rys. 6.1.7

6.2. Podstawowe prawa obwodów nieliniowych

Jak wynika z wyprzrowadzeń obu praw Kirchhoffa, są one ważne również i dla obwodów nieliniowych. Dla danego obwodu nieliniowego, posiadającego w węzłach oraz g gałęzi, można zatem napisać $v-1$ równań pierwszego prawa Kirchhoffa :

$$\sum I = 0 \quad (6.2.1)$$

oraz $g-w+1$ równań drugiego prawa Kirchhoffa

$$\sum_o U = 0 \quad (6.2.2)$$

Łącznie z równaniami (charakterystykami) gałęzi w liczbie g równań nieliniowych typu

$$U = U(I) \text{ lub } I = I(U) \quad (6.2.3a,b)$$

otrzymamy układ $w - 1 + g - w + 1 + g = 2g$ równań, o g niewiadomych prądach I i g niewiadomych napięciach U .

Podstawiając (6.2.3a) do (6.2.2) lub (6.2.3b) do (6.2.1) otrzymamy g równań o g niewiadomych prądach lub napięciach.

Niestety, rozwiązywanie takiego układu nie jest tak proste, jak w przypadku obwodów liniowych. Nie istnieją bowiem ogólne metody analitycznego rozwiązywania układu równań nieliniowych, z wyjątkiem pewnych stosunkowo prostych przypadków. Dodatkową trudność sprawia tu fakt, że w większości przypadków charakterystyki elementów podawane są w postaci graficznej.

Metody rozwiązywania obwodów nieliniowych można podzielić na 3 grupy:

1. Metody oparte na linearyzacji elementów nieliniowych,
2. Metody graficzne,
3. Metody iteracyjne.

Z podanych w rozdziale 4 zasad, jedynie zasada wyodrębnienia jest ważna bez ograniczeń. Pozostałe zasady, a więc zasada superpozycji, wzajemności, Thevenina i Nortona nie obowiązują w przypadku obwodów nieliniowych. Można je stosować jedynie do liniowych części obwodu.

6.3. Metoda linearyzacji

Metoda linearyzacji polega na aproksymacji nieliniowych charakterystyk elementów charakterystykami liniowymi. Oczywiście jest to możliwe jedynie w ograniczonym zakresie prądów i napięć każdego z elementów. Na rys. 6.3.1 przedstawiona jest charakterystyka 1, która w zakresie napięć

$$U' < U < U''$$

lub prądów

$$I' < I < I''$$

może być zastąpiona prostą 2. Łatwo sprawdzić, że prosta 2 jest równocześnie charakterystką układów zastępczych z rys. 6.3.2b i c, jej równanie

$$I = I_0 + UG$$

odpowiada bowiem pierwszemu prawu Kirchhoffa dla obwodu z rys. 6.3.2b, zaś równanie tej samej prostej z prądem jako zmienną niezależną

$$U = E_0 + IR$$

odpowiada drugiemu prawu Kirchhoffa dla obwodu z rys. 6.3.2c (jeżeli I_0 i E_0 są równe odpowiednim odcinkom na rys. 6.3.1).

Opór $R = \frac{E_0}{I_0}$ nazywany bywa oporem dynamicznym elementu nieliniowego, można go również określić jako

$$R = \frac{dU}{dI}$$

w zakresie liniowości charakterystyki $I' < I < I''$.

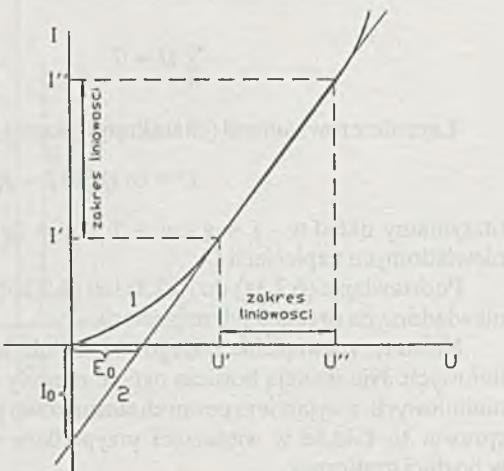
Z powyższego wynika, że opór nieliniowy można w zakresie liniowości zastąpić liniowym układem zastępczym, którego parametry I_0 , E_0 i R łatwo wyznaczyć z charakterystyki.

Zastąpienie wszystkich oporów nieliniowych ich układami zastępczymi sprowadza obwód nieliniowy do liniowego obwodu zastępczego, który już łatwo obliczyć dowolnymi metodami znanymi dla obwodów liniowych. Po obliczeniu należy jednak sprawdzić, czy wszystkie prądy lub napięcia elementów nieliniowych znajdują się w zakresach liniowości, tj. czy dla danego elementu spełnione jest

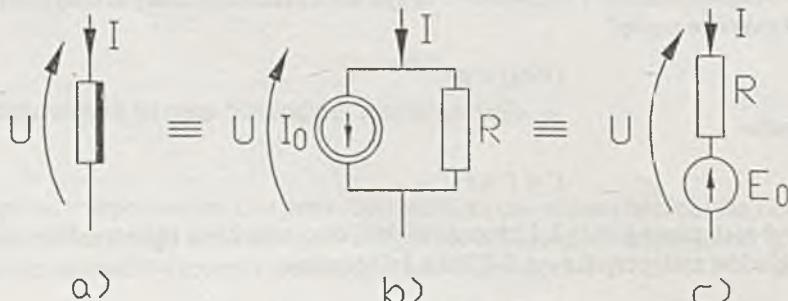
$$I' < I < I''$$

lub

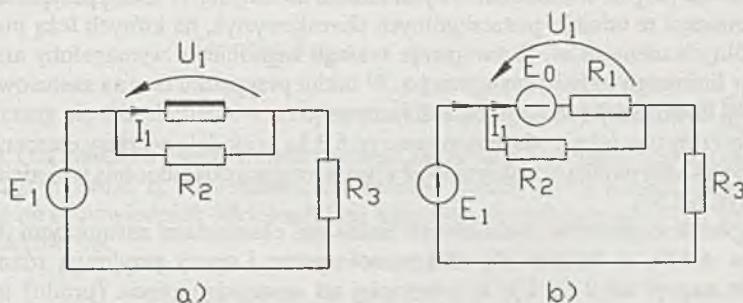
$$U' < U < U''$$



Rys. 6.3.1



Rys. 6.3.2



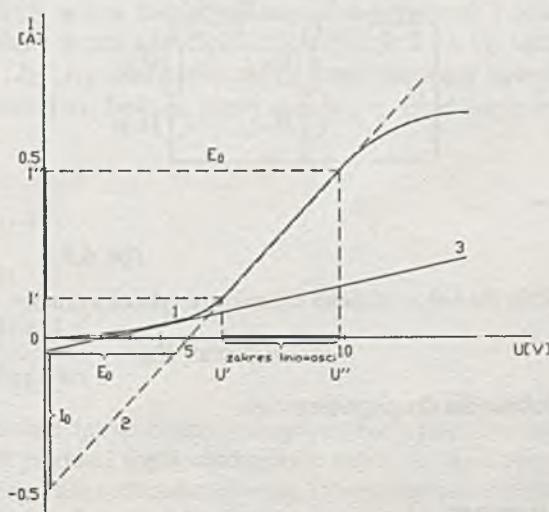
Rys. 6.3.3

Jeżeli okaże się, że warunki te nie są spełnione, należałoby przeprowadzić linearyzację danej charakterystyki w innym zakresie i powtórzyć obliczenia. Z uwagi na to, metodę tę stosuje się zazwyczaj w przypadkach, gdy charakterystyki posiadają duży zakres liniowości oraz przy niewielkiej liczbie elementów nieliniowych.

Rozpatrzmy dla przykładu układ z rys. 6.3.3a, zawierający jeden element nieliniowy o charakterystyce przedstawionej na rys. 6.3.4. Zastąpienie oporu nieliniowego liniowym układem zastępczym z rys. 6.3.2c sprowadza układ do układu zastępczego (rys. 6.3.3b), w którym łatwo obliczyć, że przy $E_1 = 10 \text{ V}$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$ otrzymamy $U_1 = 6.75 \text{ V}$. Napięcie to mieści się w zakresie liniowości, a więc obliczenie jest poprawne. Natomiast dla $E_1 = 5 \text{ V}$ otrzymuje się $U_1 = 3.75 \text{ V}$, co nie mieści się już w zakresie liniowości. Dla takiego napięcia charakterystyka 2 nie może już zastąpić charakterystyki 1. W takim przypadku należałoby charakterystykę zlinearyzować w innym zakresie, np. przez charakterystykę 3 (rys. 6.3.4). Otrzymamy wtedy $U_1 = 3.26 \text{ V}$, co mieści się w zakresie liniowości nowo przyjętej charakterystyki.

Powyższy przykład wykazuje, że metoda linearyzacji prowadzi szybko do celu, jeżeli można z góry oszacować napięcie lub prąd elementu nieliniowego i przyjąć aproksymację w odpowiednim zakresie. Jeżeli nie można tego zrobić, może zajść konieczność kilkakrotnej zmiany charakterystyki zastępczej.

Metoda linearyzacji może okazać się bardzo pracochłonna przy "ręcznym" sposobie analizy obwodu, jeżeli w obwodzie znajdzie się większa liczba elementów nieliniowych, których charakterystyki można



Rys. 6.3.4

aproksymować jedynie wieloodcinkowymi liniami łamanyimi. W takim przypadku trudno a priori wyznaczyć te odcinki poszczególnych charakterystyk, na których leżą punkty pracy poszczególnych elementów. Rozwiążanie takiego zagadnienia wymagałoby analizy wielu wariantów liniowego układu zastępczego. W takim przypadku można zastosować metodę odcinkowej linearizacji (za pomocą linii łamanej).

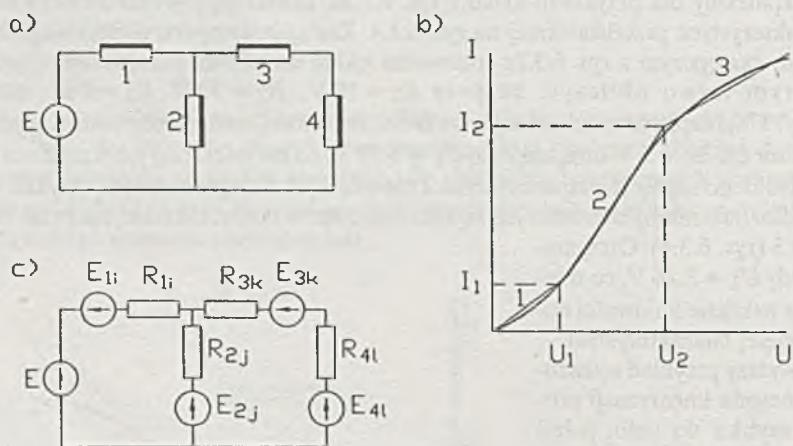
Rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys. 6.3.5a posiadający cztery elementy nieliniowe, z których każdy można aproksymować z wystarczającą dokładnością trójodcinkową linią łamana (rys. 6.3.5b).

Zastąpienie elementów nieliniowych liniowymi elementami zastępczymi daje obwód jak na rys. 6.3.5c, w którym siły elektromotoryczne i opory przyjmują różne wartości w zakresie napięć od 0 do U_1 , w zależności od wartości napięcia (prądu) istniejącego w danym elemencie. Dla pierwszego elementu otrzymamy

dla $0 < U < U_1$: E_{11} i R_{11}

dla $U_1 < U < U_2$: E_{12} i R_{12}

dla $U_2 < U$: E_{13} i R_{13}



Rys. 6.3.5

ogólnie dla i-tego odcinka charakterystyki otrzymamy:

E_{1i} oraz R_{1i}

podobnie dla drugiego elementu

E_{2j} oraz R_{2j}

dla trzeciego

E_{3k} oraz R_{3k}

wreszcie dla czwartego

E_{4l} oraz R_{4l}

Ograniczmy się do elementów z rosnącymi charakterystykami (dla nich $\frac{dI}{du} > 0$ dla każdego U). Dla takich obwodów można wykazać, że posiadają one tylko jedno rozwiązanie. Poprawne rozwiązanie, tj. rozwiązanie, dla którego punkty pracy wszystkich elementów znajdują się na odpowiednich odcinkach linii łamanych, otrzyma się tylko dla jednej kombinacji odcinków, np.

dla $i = 1, j = 2, k = 1, l = 3$.

Ponieważ a priori nie wiadomo, która z kombinacji jest właściwa, należy dany obwód przeliczyć dla wszystkich kombinacji i, j, k, l . Łatwo sprawdzić, że w przypadku obwodu z m elementami aproksymowanymi n - odcinkowymi liniami łamanyimi istnieje n^m takich kombinacji. W rozpatrywanym przykładzie należałoby zatem obliczyć $3^4 = 81$ obwodów, co przy ręcznym obliczaniu byłoby zbyt pracochłonne. Użycie do tego celu komputerów umożliwia, ze względu na znaczną szybkość liczenia liniowych obwodów, praktyczne stosowanie metody linearyzacji odcinkowej. Istnieją przy tym metody pozwalające z góry wykluczyć pewną liczbę "niemożliwych" kombinacji [2]. Warto też podkreślić, że otrzymuje się rozwiązania również dla obwodów z elementami, dla których $\frac{dI}{dU}$ może zmienić znak, a obwód może posiadać kilka rozwiązań.

Metoda linearyzacji może być zastosowana do obliczania przyrostów napięć i prądów. Założymy, że w obwodzie na rys.6.3.3 siła elektromotoryczna E_1 doznała przyrostu o e_1 (rys. 6.3.6a) oraz że w zakresie zmian $E_1 + e_1$ prąd i napięcie elementu nieliniowego pozostają w zakresie liniowości charakterystyki elementu nieliniowego. Zastępując element nieliniowy jego układem zastępczym, otrzymamy obwód jak na rys. 6.3.6b. Ponieważ obwód ten jest obwodem liniowym, możemy w nim zastosować zasadę superpozycji i osobno obliczyć prądy i napięcie wywołane przez siłę elektromotoryczną E_1 i E_0 łącznie (rys. 6.3.6c)- będą to np. prądy I_{11}, I_{21}, I_{31} oraz napięcie U_{11} , a osobno prądy wywołane przez przyrost siły elektromotorycznej e_1 , będą to prądy i_1, i_2, i_3 oraz napięcie u_1 (rys. 6.3.6d).

Oczywiście:

$$I_1 = I_{11} + i_1$$

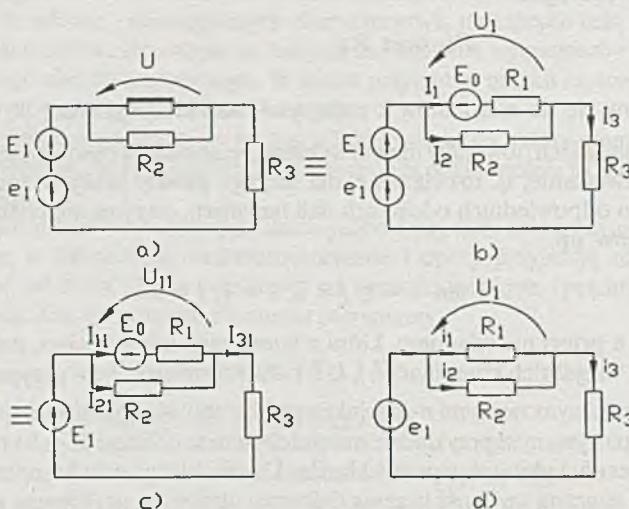
$$I_2 = I_{21} + i_2$$

$$I_3 = I_{31} + i_3$$

$$U_1 = U_{11} + u_1$$

Z powyższego wynika, że w układach takich można obliczyć przyrosty prądów i napięć bez konieczności obliczania samych prądów i napięć. W tym celu należy zastąpić element nieliniowy jego oporem dynamicznym, a siłę elektromotoryczną, której przyrost rozważamy zastąpić samym przyrostem (rys. 6.3.6d). Taki obwód można analizować dowolnymi metodami liniowymi.

Metoda linearyzacji dla przyrostów jest szeroko stosowana np. w elektronice.



Rys. 6.3.6

6.4. Metody graficzne, obwody z jednym elementem nieliniowym

Rozpatrzmy najpierw najprostszy obwód nieliniowy składający się z szeregowego połączenia dwóch elementów nieliniowych i jednej siły elektromotorycznej idealnej (rys. 6.4.1). Charakterystyki obu elementów przedstawione są na rys. 6.4.2.

W obwodzie obowiązuje drugie prawo Kirchhoffa

$$U_1 + U_2 = U_0 \quad (6.4.1)$$

oraz dane są obie charakterystyki w postaci

$$I = I_1(U_1) \quad (6.4.2)$$

$$I = I_2(U_2) \quad (6.4.3)$$

Przez obydwa opory płynie ten sam prąd I .

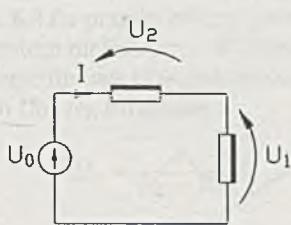
W powyższych trzech równaniach mamy trzy niewiadome U_1 , U_2 oraz I .

Po podstawieniu do (6.4.3) napięcia U_2 wyznaczonego z (6.4.1) otrzymamy dwa równania o dwóch niewiadomych I i U_1 :

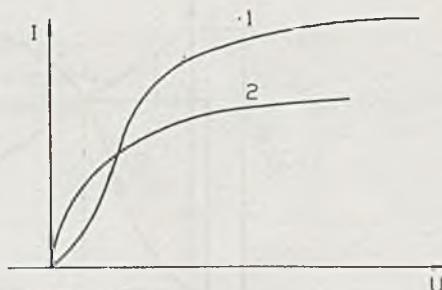
$$I = I(U_1) \quad (6.4.4)$$

$$I = I_2(U_0 - U_1) \quad (6.4.5)$$

Układ tych równań można rozwiązać graficznie rysując obie zależności na jednym wykresie. Pierwsza zależność to charakterystyka pierwszego elementu 1. Drugą zależność (6.4.5) można zidentyfikować jako zwierciadlane odbicie charakterystyki 2 względem osi I ,



Rys. 6.4.1



Rys. 6.4.2

przesunięte w prawo o odcinek równy sile elektromotorycznej U_0 (2' rys.6.4.3). Punkt przecięcia się obu krzywych P wyznacza prąd I , napięcie U_1 oraz napięcie U_2 (rys.6.4.3).

Celem rozwiązywania układu składającego się z szeregowego połączenia SEM U_0 oraz dwóch oporów nieliniowych wystarczy zatem narysować charakterystykę jednego z nich oraz zwierciadlane odbicie charakterystyki drugiego oporu, przesunięte o wartość równą SEM U_0 w kierunku osi U .

W szczególności metodę powyższą można zastosować, jeżeli jeden z elementów jest liniowy. Mamy wówczas

$$I = I_1(U_1) \quad (6.4.6)$$

$$I = \frac{U_0 - U_1}{R} \quad ? \quad (6.4.7)$$

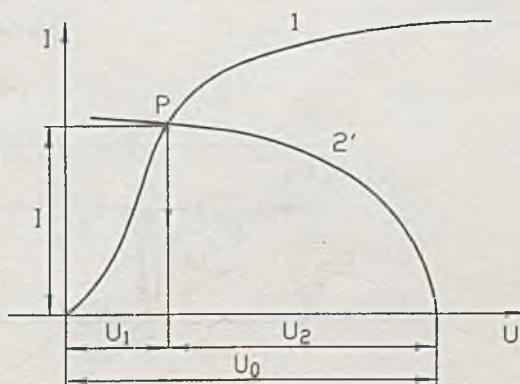
skąd

$$\begin{aligned} I &= I_1(U_1) \\ I &= \frac{U_0 - U_1}{R} \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

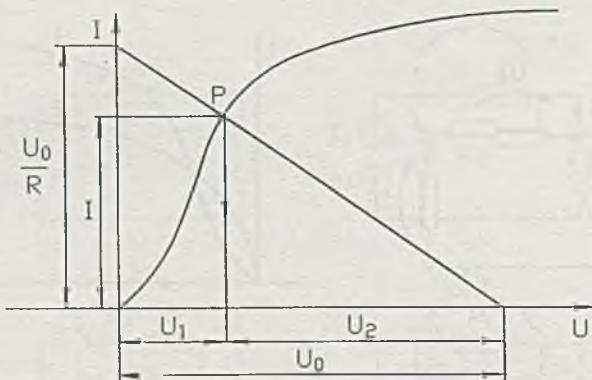
Drugie równanie przedstawia prostą przecinającą oś napięcia w miejscu $U = U_0$, a oś prądu w miejscu

$$I = \frac{U_0}{R} \quad (\text{rys. 6.4.4})$$

Powyższa konstrukcja może stanowić podstawę do rozwiązywania dowolnie złożonych obwodów zawierających jeden element nieliniowy. Dowolny obwód elektryczny zawierający poza jednym elementem nieliniowym tylko idealne źródła i liniowe opory (rys. 6.4.5a), można zawsze przedstawić w postaci układu z rys. 6.4.5b, gdzie liniową część obwodu reprezentuje liniowy dwójnik aktywny. Korzystając

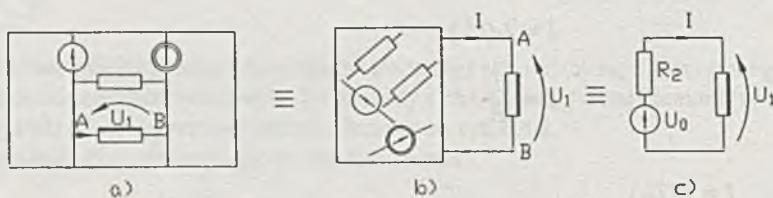


Rys. 6.4.3

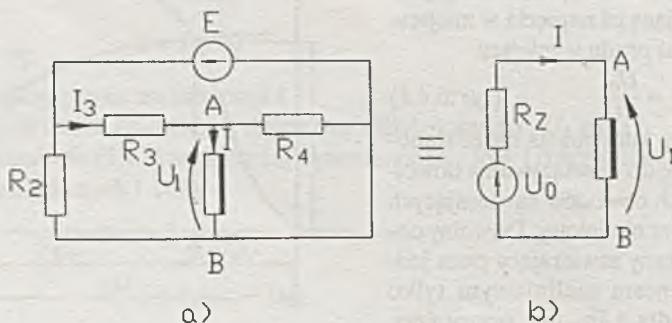


Rys. 6.4.4

z zasady Thevenina dla dwójnika aktywnego, można go przedstawić w postaci układu zastępczego składającego się z SEM U_0 i oporu wewnętrznego R_z w wyniku czego otrzymamy układ z rys. 6.4.5c identyczny z układem z rys. 6.4.1. W układzie tym za pomocą konstrukcji (rys. 6.4.4) można obliczyć prąd i napięcie na dwójniku aktywnym. Znajomość



Rys. 6.4.5



Rys. 6.4.6

tych wielkości umożliwia obliczenie rozprływu prądu i rozkładu napięć w poszczególnych elementach dwójnika.

Na rys. 6.4.6a przedstawiony jest obwód z jednym elementem nieliniowym. W obwodzie tym zastąpiono część liniową (dwójnik aktywny) układem zastępczym U_0, R_2 , otrzymując

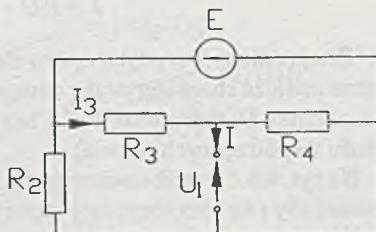
$$U_0 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} E$$

$$R_2 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4},$$

co pozwala na zastosowanie konstrukcji z rys. 6.4.4 i obliczenie prądu I oraz napięcia w liniowej części obwodu w układzie z rys. 6.4.7.

Np. prąd I_3 :

$$I_3 = \frac{1}{R_3} (E + U_1).$$



Rys. 6.4.7

6.5. Nieliniowe elementy zastępcze

W teorii obwodów liniowych można wprowadzić pojęcie oporu zastępczego dla szeregowego połączenia oporów i równoległego połączenia.

Rozpatrzmy obecnie możliwość wprowadzenia nieliniowych elementów zastępczych.

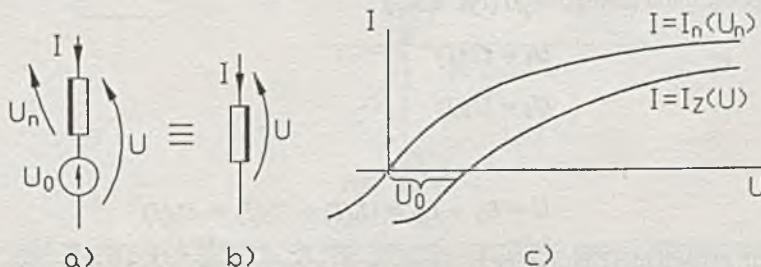
Na rys. 6.5.1a przedstawione jest szeregowo połączenie idealnej siły elektromotorycznej z nieliniowym oporem, które można zastąpić zastępczym elementem nieliniowym (rys. 6.5.1b).

Istotnie, dla obwodu z rys. 6.5.1a obowiązuje

$$I = I(U_n) \quad (6.5.1)$$

oraz

$$U_n = U - U_0, \quad (6.5.2)$$



Rys. 6.5.1

zatem

$$I = I(U - U_0) = I_z(U) \quad (6.5.3)$$

Znając charakterystykę oporu nieliniowego $I = I(U_n)$ oraz siłę elektromotoryczną U_0 można znaleźć charakterystykę zastępczą oporu nieliniowego $I = I_z(U)$ przez przesunięcie jej o odcinek U_0 w prawo (rys. 6.5.1a). (Albo równoważnie - przez równoległe przesunięcie układu współrzędnych w lewo).

Na rys. 6.5.2 przedstawiona jest odpowiednia konstrukcja dla równoległego połączenia idealnej siły prądomotorycznej i oporu nieliniowego.

W tym przypadku

$$I_n = I_n(U) \quad (6.5.4)$$

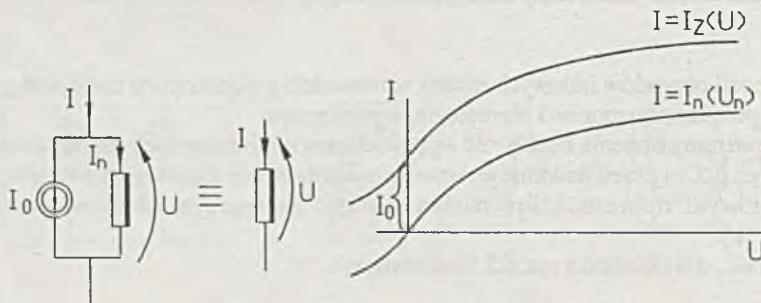
oraz

$$I = I_n + I_0, \quad (6.5.5)$$

zatem

$$I = I_1(U) + I_0 = I_z(U) \quad (6.5.6)$$

co odpowiada przesunięciu charakterystyki $I_n(U)$ o odcinek I_0 w góre.



Rys. 6.5.2

Równie łatwo można uzyskać charakterystyki nieliniowego oporu zastępczego szeregowego i równoległego połączenia oporów nieliniowych.

Dla połączenia szeregowego (rys. 6.5.3)

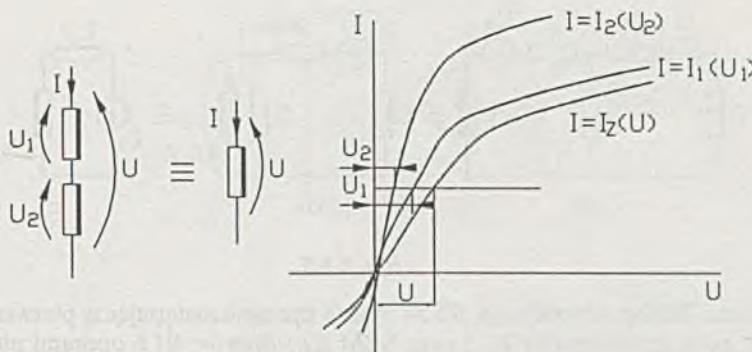
$$U_1 = U_1(I) \quad (6.5.7)$$

$$U_2 = U_2(I) \quad (6.5.8)$$

oraz

$$U = U_1 + U_2 = U_1(I) + U_2(I) = U_z(I) \quad (6.5.9)$$

Celem otrzymania charakterystyki zastępczej szeregowego połączenia należy dodać dla danego prądu napięcia obu elementów.



Rys. 6.5.3

Dla połączenia równoległego (rys. 6.5.4)

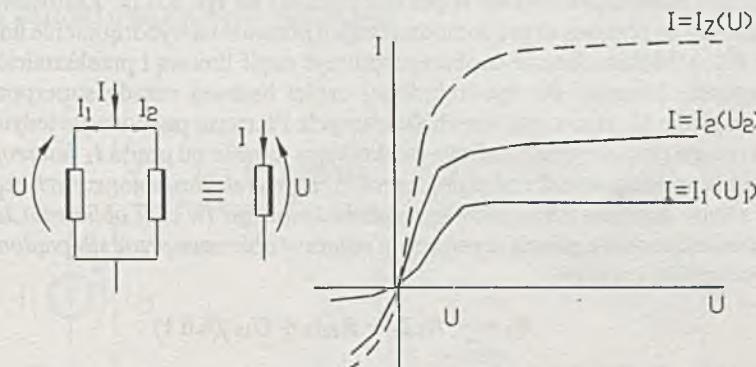
$$I_1 = I_1(U) \quad (6.5.10)$$

$$I_2 = I_2(U) \quad (6.5.11)$$

oraz

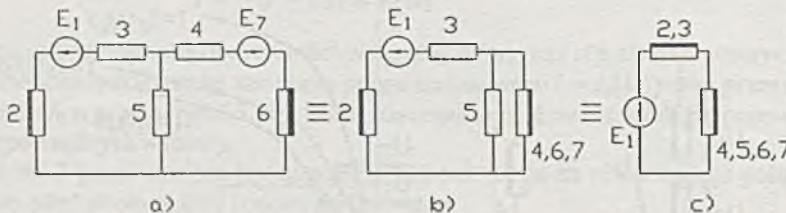
$$I = I_1 + I_2 = I_1(U) + I_2(U) = I_Z(U) \quad (6.5.12)$$

Celem otrzymania charakterystyki zastępczej równoległego połączenia należy dodać dla danego napięcia prądy obu elementów.



Rys. 6.5.4

Stosowanie zastępczych elementów nieliniowych umożliwia często zmniejszenie liczby elementów nieliniowych w układzie, prowadząc tym samym do uproszczenia obliczeń. W niektórych przypadkach można dojść przez wielokrotne stosowanie elementów zastępczych do obwodów prostych, np. typu pokazanego na rys. 6.4.1, dla których rozwiązanie



Rys. 6.5.5

jest już znane. Tak np. obwód z rys. 6.5.5a można uprościć zastępując w pierwszym etapie szeregowo połączenie oporów 2 i 3 oraz SEM E_7 i oporów 4 i 6 oporami nieliniowymi zastępczymi 2, 3 oraz 4, 6, 7 (rys. 6.5.5b). W kolejnym etapie można zastąpić równolegle połączenie oporów 4, 6, 7 oraz 5 jednym oporem zastępczym 4, 5, 6, 7, otrzymując układ z rys. 6.5.5c, który jest identyczny z układem z rys. 6.4.1 i może być łatwo rozwiązyany.

Należy zwrócić uwagę, że nie wszystkie obwody nieliniowe można sprowadzić tą drogą do prostszych obwodów. Już prosty stosunkowo nieliniowy mostek nie może być tym sposobem rozwiązyany.

6.6. Obwody z dwoma elementami nieliniowymi

Jeżeli obwód zawiera jedynie dwa elementy nieliniowe, to sprowadzić go można zawsze do zastępczego obwodu z rys. 6.5.5a. Zauważmy, że dowolny obwód zawierający, oprócz liniowych oporów, idealnych sił elektromotorycznych i prądomotorycznych, dwa nieliniowe opory można zawsze przedstawić w postaci podanej na rys. 6.6.1a. Zastosowanie zasady wyodrębniania za pomocą sił prądomotorycznych pozwala na wyodrębnienie liniowej części L (rys. 6.6.1b). Można obecnie osobno rozpatrzyć część liniową i przekształcić ją w odpowiedni sposób. Stosując do wyodrębnionej części liniowej zasadę superpozycji można obliczyć napięcie U_1 jako sumę trzech składowych. Pierwsza pochodząca jedynie od prądu I_1 jest do niego proporcjonalna, druga pochodząca jedynie od prądu I_2 jest proporcjonalna do tego prądu, trzecia pochodzi od sił prądomotorycznych i elektromotorycznych części liniowej, jest ona równa napięciu biegu jałowego układu liniowego (w celu obliczenia tej składowej należy bowiem zgodnie z zasadą superpozycji odłączyć obie zewnętrzne siły prądomotoryczne).

Można zatem napisać

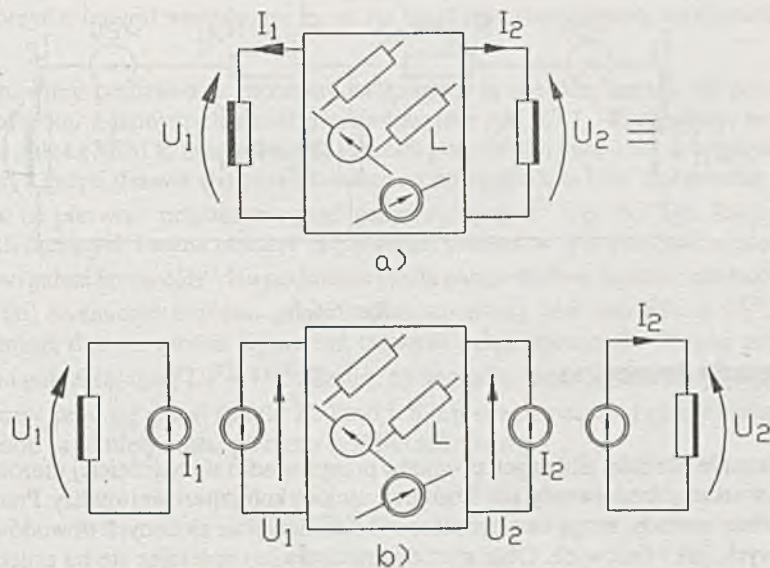
$$U_1 = -R_{11}I_1 - R_{12}I_2 + U_{10}, \quad (6.6.1)$$

gdzie R_{11} i R_{12} współczynniki zależne od struktury części liniowej.

Podobnie można napisać

$$U_2 = -R_{21} - R_{22}I_2 + U_{20}. \quad (6.6.2)$$

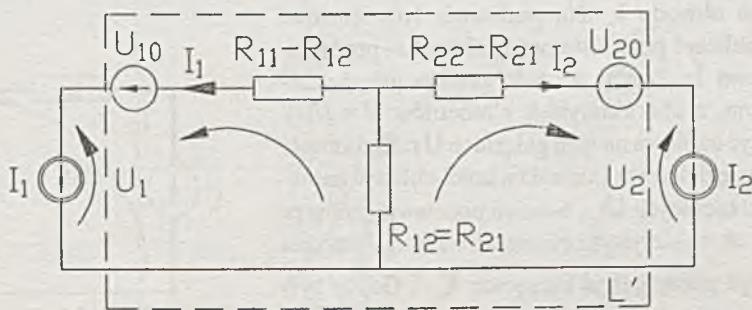
Zauważmy, że powyższe równania można również traktować jako równania prądów oczkowych obwodu zastępczego przedstawionego na rys. 6.6.2.



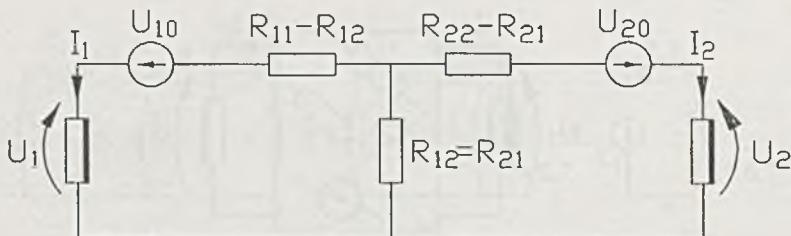
Rys. 6.6.1

Można zatem każdy układ zawierający dwa elementy nieliniowe sprowadzić do układu zastępczego z rys. 6.6.3, który jest równoważny układowi z rys. 6.5.5a i może być rozwiązyany w sposób przedstawiony powyżej.

Praktyczne zastosowanie tej metody wymaga obliczenia napięć biegu jałowego czwórnika liniowego "L", tzn. napięć U_{10} i U_{20} , jakie powstaną po odłączeniu elementów nieliniowych, a następnie przedstawienia równań części liniowej L w postaci równań (6.6.1) i (6.6.2) i określenia wartości trzech oporów zastępczych.



Rys. 6.6.2



Rys. 6.6.3

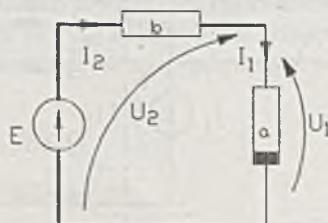
6.7. Metody iteracyjne

Obliczanie bardziej złożonych obwodów przeprowadza się najczęściej metodami iteracyjnymi, w szczególności wtedy, gdy stosuje się metody komputerowej analizy. Przedstawimy poniżej dwie metody, mogą one być stosowane do dowolnie złożonych obwodów zarówno nieliniowych, jak i liniowych. Obie metody przedstawimy opierając się na pojęciu drzewa obwodu. W drzewie obwodu muszą znaleźć się wszystkie elementy obwodu uzależnione prądowo, zaś w zbiorze gałęzi łączących, wszystkie elementy uzależnione napięciowo. Pozostałe elementy mogą znaleźć się zarówno w drzewie, jak i wśród gałęzi łączących.

6.7.1. Metoda iteracji prostej

Pierwsza z nich, to tzw. metoda iteracji prostej. Metoda opiera się na możliwości wyrażania prądów gałęzi drzewa przez prądy gałęzi łączących oraz napięć gałęzi łączących przez napięcia gałęzi drzewa, zależności te wyprowadzono w rozdziale 4.2. (4.2.12 i 4.2.17). Można również zacząć od wyrażenia napięć na gałęziach łączących przez napięcia gałęzi drzewa.

Przyjmijmy dowolne wartości dla prądów gałęzi łączących obwodu I_L . Na podstawie tych wartości można obliczyć pozostałe prądy obwodu - prądy gałęzi drzewa I_T . Znając wartości prądów gałęzi drzewa można, z charakterystyk elementów $U = U(I)$, wyznaczyć napięcia na tych gałęziach U_T . Znajomość napięć gałęzi drzewa pozwala z kolei obliczyć napięcia gałęzi łączących U_L , a na ich podstawie (znów za pomocą charakterystyki elementów $I = I(U)$) można wyznaczyć prądy gałęzi łączących I_L^* . Gdyby były one równe prądom pierwszego przybliżenia I_L , to zagadnienie byłoby rozwiązywane. Jeżeli nie są one równe, to całą operację, zwaną krokiem iteracji, na-



Rys. 6.7.1

leży powtórzyć z innymi wartościami I_L , aż do uzyskania dostatecznej zgodności między I_L a I_L^{*} .

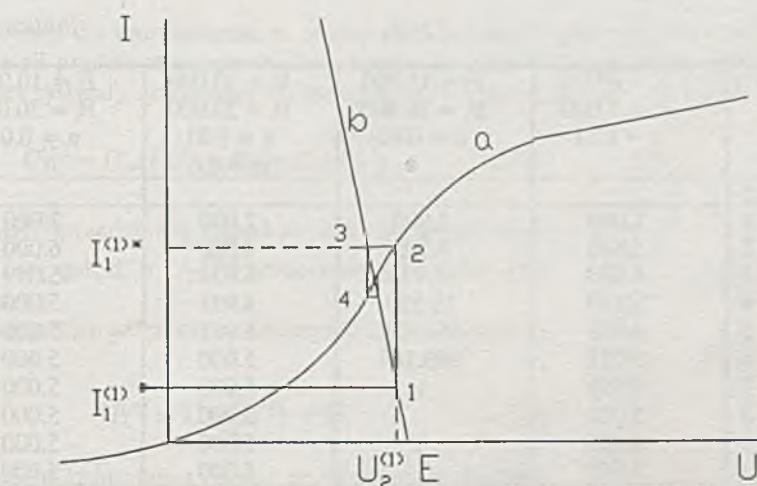
Przedstawimy podstawowe problemy związane z tą metodą iteracji na przykładzie prostego obwodu z jednym elementem nieliniowym z rys. 6.7.1. Przyjmijmy, że gałąź drzewa jest gałąź z SEM E zaznaczona na rysunku pogrubioną linią, charakterystyka gałęzi łączącej (a) i gałęzi drzewa (b) przedstawione są na rysunku 6.7.2a. Zaczynamy iterację przyjmując za pierwsze przybliżenie prąd gałęzi łączącej $I_1^{(1)}$ (rys. 6.7.2a). Znając prądy w gałęziach łączących można obliczyć prądy gałęzi drzewa, w tym przypadku prąd równy jest prądem gałęzi łączącej $I_2^{(1)}$. Na podstawie prądu gałęzi drzewa można z charakterystyki tej gałęzi (b) wyznaczyć napięcie gałęzi drzewa (punkt 1), jest ono równe $U_2^{(1)}$. Znając napięcia gałęzi drzewa można wyznaczyć napięcia gałęzi łączących. W tym przypadku napięcie na gałęzi łączącej $U_1^{(1)} = U_2^{(1)}$. Znając to napięcie, można z charakterystyki gałęzi (a) wyznaczyć prąd tej gałęzi (punkt 2). Prąd ten jest równy prądem gałęzi łączącej $I_1^{(1)*}$. W ten sposób zamknięty został pierwszy cykl iteracji. Gdyby

$$\frac{|I_1^{(1)*} - I_1^{(1)}|}{I_1^{(1)}} < \varepsilon,$$

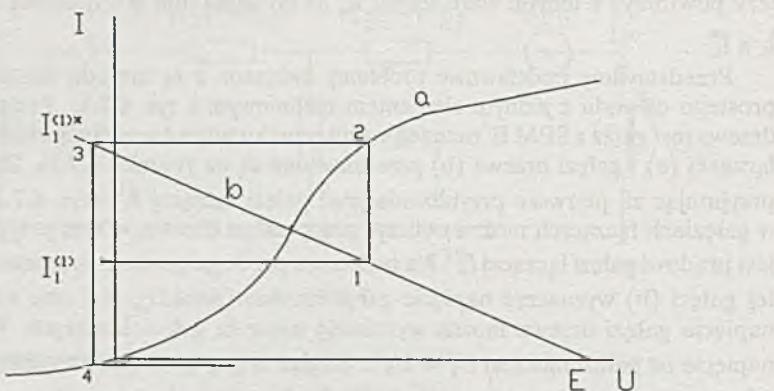
to oznaczałoby to, że znalezione zostało rozwiązanie z określona przez powyższą nierównością dokładnością. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony, to trzeba kontynuować iterację. W przypadku iteracji prostej dla następnego cyklu iteracji przyjmuje się wartość prądu z poprzedniej iteracji, a więc

$$I_1^{(2)} = I_1^{(1)*},$$

otrzymując kolejne punkty 3,4,5... powtarzając postępowanie aż do osiągnięcia dostatecznej dokładności, a więc punktu dostatecznie bliskiego punktowi stanowiącego rozwiązanie układu.



Rys. 6.7.2a



Rys. 6.7.2b

W tablicy 6.7.1 przedstawiono przebieg iteracji dla obwodu z rys. 6.7.1, przy czym przyjęto, że element nieliniowy ma charakterystykę typu $I_1 = a U_1 |U_1|$. W kolumnie "a" przedstawiono wartości napięcia na elemencie nieliniowym U_1 w kolejnych iteracjach, dla przypadku gdy $R = 4 \Omega$ oraz $E = 6V$. Można zauważyć, że iteracja jest zbieżna, napięcie na elemencie nieliniowym ustala się na wartości $U_1 = 5V$.

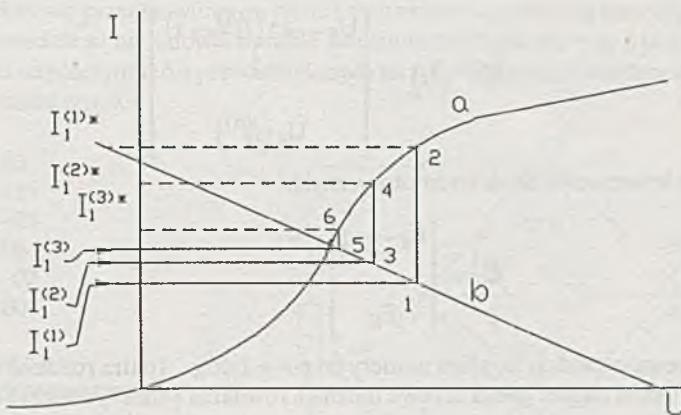
Łatwo jednak zauważyć, że procedura iteracji prostej nie zawsze musi być zbieżna. W przypadku większej wartości rezystancji liniowej R , np. $R = 20 \Omega$ (rys. 6.7.2 b), iteracja może być rozbieżna. Ilustruje to przykład przedstawiony na tym rysunku. Przebieg iteracji w tym przypadku przedstawiony jest w tablicy 6.7.1 w kolumnie b.

W takich przypadkach należałoby przyjąć do kolejnej iteracji wartość

$$I_1^{(n)*} < I_1^{(n+1)} < I_1^{(n)}$$

Tablica 6.7.1

	$E = 6.000$ $R = 4.000$ $a = 0.01$	$E = 10.000$ $R = 20.000$ $a = 0.01$	$E = 10.000$ $R = 20.000$ $a = 0.01$ $\alpha = 0.6$	$E = 10.000$ $R = 20.000$ $a = 0.01$
n				
1	2.000	2.000	2.000	2.000
2	5.840	9.200	4.880	6.000
3	4.636	-6.928	5.023	5.059
4	5.140	19.599	4.995	5.000
5	4.943	-66.828	5.001	5.000
6	5.023	903.185	5.000	5.000
7	4.991	.	5.000	5.000
8	5.004	.	5.000	5.000
9	4.999	.	5.000	5.000
10	5.001	.	5.000	5.000
	a	b	c	d



Rys. 6.7.2.c

czyli

$$I_1^{(n+1)} = \alpha I_1^{(n)} + (1 - \alpha) I_1^{(n)*},$$

$0 < \alpha < 1$. Przez odpowiedni dobór wartości α można uzyskać zbieżność procesu iteracyjnego, co przedstawiono na rys. 6.7.2c oraz w tablicy 6.7.1 w kolumnie c, po 5 iteracjach błąd jest mniejszy od 0.1%.

Prześledźmy obecnie tę metodę w sposób ogólny dla dowolnego obwodu. Przypuśćmy, że w wyniku przeprowadzenia iteracji w n -tym kroku obliczone są prądy gałęzi łączących $I_1^{(n+1)}$, wtedy prądy gałęzi drzewa można obliczyć według równania (4.2.12)

$$I_1^{(n)} = -\mathbf{A}^* I_1^{(n)} \quad (6.7.1)$$

Zakładając dla uproszczenia, że obwód zawiera jedynie siły elektromotoryczne (uwzględnienie sił prądomotorycznych nie przedstawia trudności, uczyniłoby jednak wywody mniej przejrzystymi), otrzymamy dla napięcia na i -tej gałęzi drzewa (rys. 6.7.3)

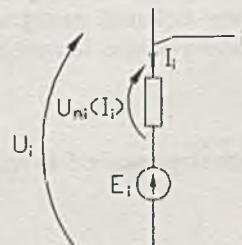
$$U_{1i}^{(n)} = U_{ni}(I_{1i}^{(n)}) + E_{Ti} = U_{Ti}(I_{1i}^{(n)}) \quad (6.7.2)$$

gdzie $U_{ni}(I_{1i}^{(n)})$ przedstawia charakterystykę elementu nieliniowego i -tej gałęzi, a $U_{Ti}(I_{1i}^{(n)})$ charakterystykę całej i -tej gałęzi drzewa.

Dla wszystkich gałęzi drzewa można to zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{U}_1^{(n)} = \mathbf{U}_{Tn}(I_1^{(n)}) + \mathbf{E}_T \quad (6.7.3)$$

gdzie macierz kolumnowa napięć na elementach nieliniowych



Rys. 6.7.3

$$\mathbf{U}_T^{(n)}(I_T) = \begin{bmatrix} U_{g-w+2}(I_{g-w+2}^{(n)}) \\ \vdots \\ U_g(I_g^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (6.7.4)$$

zaś macierz kolumnowa sił elektromotorycznych

$$\mathbf{E}_T = \begin{bmatrix} E_{g-w+2} \\ \vdots \\ E_g \end{bmatrix} \quad (6.7.5)$$

Gałęzie drzewa posiadają bowiem numery od $g-w+2$ do g (patrz rozdział 4.2).

Po obliczeniu napięć gałęzi drzewa można z równania (4.2.17) obliczyć napięcia gałęzi łączących

$$\mathbf{U}_L^{(n)} = \mathbf{A}^T \mathbf{U}_T^{(n)} \quad (6.7.6)$$

zaś na podstawie charakterystyk można wyznaczyć prądy w gałęziach łączących. Na elemencie nieliniowym i -tej gałęzi łączącej istnieje napięcie $U_{Li} - E_{Li}$, zatem

$$I_{Li}^{(n)*} = I_{Li} \left(U_{Li}^{(n)} - E_{Li} \right) \quad (6.7.7)$$

co w zapisie macierzowym ma postać

$$\mathbf{I}_L^{(n)*} = \mathbf{I}_L \left(\mathbf{U}_L^{(n)} - \mathbf{E}_L \right) \quad (6.7.8)$$

Gwiazdka $*$ w $\mathbf{I}_L^{(n)*}$ oznacza, że będzie to na ogół inna wartość niż wartość początkowa n -tej iteracji $\mathbf{I}_L^{(n)}$.

W ten sposób została zakończona n -ta iteracja. Jeżeli w jej wyniku wartości końcowe iteracji są dostatecznie bliskie wartościom początkowym, tj.

$$\frac{|I_{Li}^{(n)*} - I_{Li}^{(n)}|}{I_{Li}^{(n)}} < \epsilon \quad (6.7.9)$$

to można uznać, że są one rozwiązaniem obwodu. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, należy dokonać następnej $n+1$ -szej iteracji. W ogólnym przypadku przyjęcie wartości końcowych n -tej iteracji jako wartości początkowych $n+1$ -szej iteracji

$$\mathbf{I}_L^{(n+1)} = \mathbf{I}_L^{(n)*}$$

może doprowadzić do rozbieżnej iteracji. W takich przypadkach można przyjąć

$$\mathbf{I}_L^{(n+1)} = \alpha \mathbf{I}_L^{(n)} + (1-\alpha) \mathbf{I}_L^{(n)*} \quad (6.7.10)$$

gdzie współczynnik α ($0 < \alpha \leq 1$) pozwala na uzyskanie zbieżności (zbyt duże α prowadzi do zwiększenia liczby koniecznych iteracji, zapewniając zbieżność, zbyt małe może doprowadzić do rozbieżnej iteracji). Optymalny dobór α zapewniający uzyskanie minimalnej liczby iteracji, jest tu osobnym problemem.

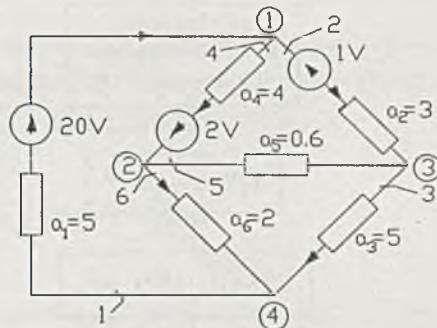
Obwód nieliniowy przedstawiony na rys. 6.7.4 rozwiązyano powyższą metodą. Wszystkie opory w tym obwodzie są nieliniowe, opisane zależnościami typu $U_i = a_i I_i | I_i |$.

Dla wartości współczynników przedstawionych na rys. 6.7.4 przeprowadzono obliczenia otrzymując poniższe wyniki:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1.741 \text{ E } 00 \\ I_2 &= 6.934 \text{ E } -01 \\ I_3 &= 6.707 \text{ E } -01 \\ I_4 &= 1.048 \text{ E } 00 \\ I_5 &= -2.274 \text{ E } -02 \\ I_6 &= 1.070 \text{ E } 00 \end{aligned}$$

Liczba iteracji = 51

Na rys. 6.7.5 przedstawiono schemat blokowy tej metody.



Rys. 6.7.4

6.7.2. Metoda Newtona-Raphsona

W opisanej w poprzednim rozdziale metodzie iteracji prostej znaczną trudność przedstawia odpowiedni wybór współczynników α . Dla każdej bowiem gałęzi łączącej należałoby dobrąć inny współczynnik celem otrzymania optymalnego procesu iteracji. Przedstawiony poniżej algorytm Newtona - Raphsona nie posiada tej wady, a równocześnie zapewnia z jednej strony zbieżność procesu iteracyjnego, jeżeli punkt startowy znajduje się dostatecznie blisko rozwiązania, z drugiej zaś strony zapewnia szybszą zbieżność algorytmu w pobliżu rozwiązania. Okupione jest to jednak większą złożonością obliczeniową. Przedstawimy tę metodę na przykładzie rozpatrywanego już obwodu z rys. 6.7.1 a. Dla tego obwodu można bowiem napisać równanie I prawa Kirchhoffa:

$$U + U_2 = E$$

i równania elementów:

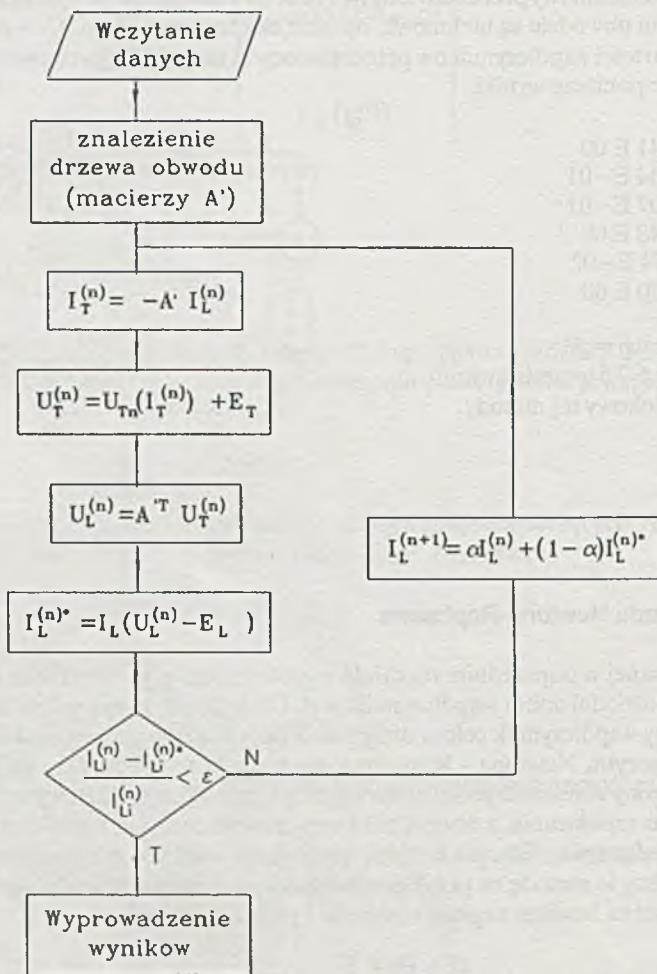
$$I_2 = \frac{U_2}{R} \quad I = I(U)$$

Ponieważ $I_2 = I$, otrzymamy stąd

$$F(U) = \frac{E - U}{R} - I(U) = 0 \quad (6.7.11)$$

Rozłożymy funkcję $F(U)$ w szereg Taylora wokół punktu $U^{(n)}$:

$$F(U) = F(U^{(n)}) + \frac{\partial F}{\partial U} \Bigg|_{U=U^{(n)}} (U - U^{(n)}) + \dots \quad (6.7.12)$$



Rys. 6.7.5

Dla następnej iteracji $U^{(n+1)}$ znajduje się w pobliżu $U^{(n)}$, zatem można pominąć w rozkładzie człony z wyższymi pochodnymi:

$$F(U^{(n+1)}) = F(U^{(n)}) + \frac{\partial F}{\partial U} \Bigg|_{U=U^{(n)}} \left. \begin{aligned} & (U^{(n+1)} - U^{(n)}) \\ & \end{aligned} \right\} \quad (6.7.13)$$

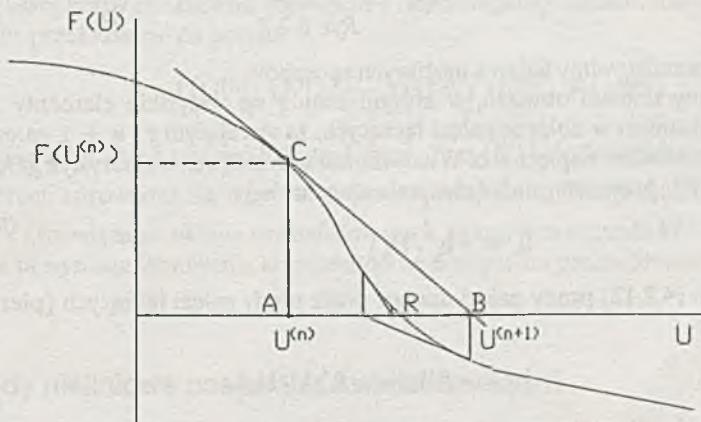
Jeżeli znamy wartość $U^{(n)}$, to kolejna wartość $U^{(n+1)}$ powinna nas doprowadzić w pobliże rozwiązania, a więc powinno być $F(U^{(n+1)}) = 0$, skąd

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} - \left[\frac{\partial F}{\partial U} \Bigg|_{U=U^{(n)}} \right]^{-1} F(U^{(n)}). \quad (6.7.14)$$

Interpretacja graficzna powyższego równania przedstawiona jest na rys. 6.7.6. Jeżeli narysujemy styczną do krzywej $F(U)$ w miejscu $U = U^{(n)}$, to zauważymy, że przecina ona oś U w punkcie B a więc w miejscu $U = U^{(n+1)}$. Z trójkąta ABC wynika, że

$$\frac{F(U^{(n)})}{(U^{(n)} - U^{(n+1)})} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial F}{\partial U} \Bigg|_{U=U^{(n)}}$$

Widać stąd, że przy kolejnych iteracjach algorytm prowadzi szybko do rozwiązania (punkt R). Przebieg iteracji przedstawiony jest w tablicy 6.7.1. w kolumnie d. Już po 4 iteracji otrzymuje się błąd mniejszy od 0.1%. Z tablicy 6.7.1 wynika, że w tym przypadku metoda Newtona-Raphsona najszybciej prowadzi do celu.

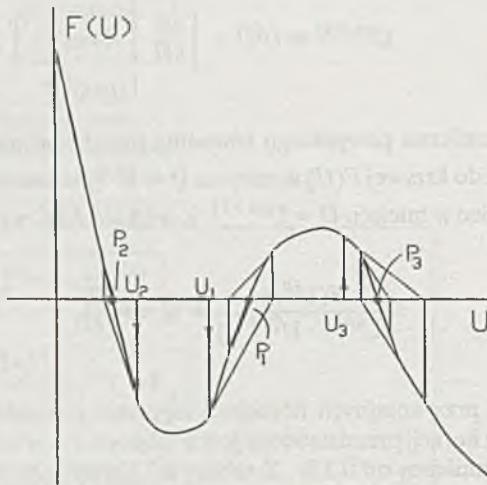


Rys. 6.7.6

W niektórych przypadkach, przy nieodpowiednim doborze punktu startowego (daleko od rozwiązania) lub przy specyficzny charakterze nieliniowości, algorytm Newtona-Raphsona może okazać się rozbieżny. Skuteczne stosowanie tej metody wymaga więc przyjęcia dobrego przybliżenia początkowego. Na rys. 6.7.7 przedstawiony jest przypadek, w którym obwód posiada kilka rozwiązań. W zależności od doboru punktu startowego metoda daje różne rozwiązania. Jeżeli przyjmiemy za wartość początkową (punkt startowy) napięcie U_1 , to otrzymamy jako rozwiązanie punkt P_1 , jeżeli U_2 , to punkt P_2 itd.

Algorytm Newtona-Raphsona można uogólnić na przypadek wielowymiarowy. W tym celu należy przedstawić równania obwodów w postaci:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (6.7.15)$$



Rys. 6.7.7

Poniżej przedstawimy jeden z możliwych sposobów.

Przyjmijmy drzewo obwodu, w którym znajdują się wszystkie elementy uzależnione prądowo, natomiast w zbiorze gałęzi łączących, zawierającym $g - w + 1$ gałęzi, wszystkie elementy uzależnione napięciowo. Wtedy można wyrazić (z charakterystyk gałęzi) napięcia gałęzi łączących przez ich prądy (równania elementów) :

$$I_L = -I_L(U_L)$$

na podstawie (4.2.12) prądy gałęzi drzewa przez prądy gałęzi łączących (pierwsze prawo Kirchhoffa) :

$$I_T = -A' I_L = -A' I_L(U_L)$$

na podstawie prądów gałęzi drzewa można z ich charakterystyk obliczyć napięcia (równania elementów) :

$$U_T = U_T(I_T) = U_T(-A' I_L(U_T))$$

Znając napięcia gałęzi drzewa można obliczyć napięcia gałęzi łączących (4.2.17) (drugie prawo Kirchhoffa) :

$$U_L = A^T U_T = A^T U_T(-A' I_L(U_L))$$

co można przepisać w postaci:

$$F(U_L) = U_L - A^T U_T(-A' I_L(U_L)) = 0 \quad (6.7.16)$$

a więc w postaci (6.7.15) (w tym przypadku $\mathbf{U} = \mathbf{U}_L$).

Wprowadzimy macierz Jacobiego funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ w postaci:

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_1(\mathbf{U})}{\partial U_n} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_2(\mathbf{U})}{\partial U_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\mathbf{U})}{\partial U_1} & \frac{\partial F_n(\mathbf{U})}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(\mathbf{U})}{\partial U_n} \end{bmatrix} \quad (6.7.17)$$

Równanie dla obliczenia kolejnego przybliżenia można więc przedstawić w postaci analogicznej do (6.39) :

$$\mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{J}(\mathbf{U}^{(n)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{U}^{(n)}) \quad (6.7.18)$$

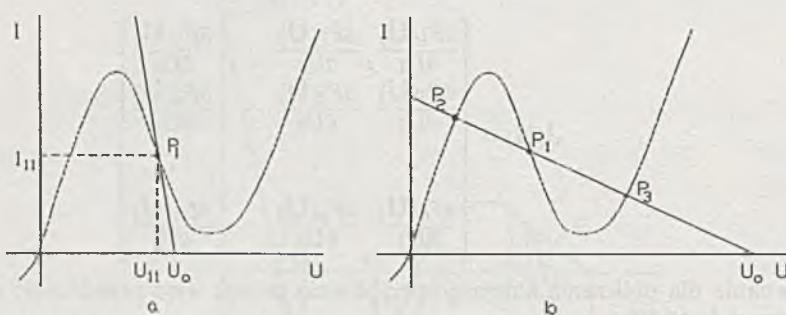
Jak z powyższego wzoru wynika, do obliczenia kolejnych wartości zmien-nych konieczna jest znajomość Jacobianu obliczonego dla wartości zmiennych z poprzedniej iteracji oraz znalezienie jego macierzy odwrotnej. Celem uniknięcia obliczania macierzy odwrotnej (wymaga większej liczby operacji niż rozwiązanie odpowiedniego układu równań), można powyższy wzór przekształcić do postaci:

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^{(n)}) \mathbf{U}^{(n+1)} = \mathbf{J}(\mathbf{U}^{(n)}) \mathbf{U}^{(n)} - \mathbf{F}(\mathbf{U}^{(n)}) \quad (6.7.19)$$

co przedstawia sobą układ równań liniowych względem $\mathbf{U}^{(n+1)}$. Zagadnienie obliczania kolejnych iteracji sprowadza się więc do obliczenia Jacobianu funkcji $\mathbf{J}(\mathbf{U}^{(n)})$ oraz jej wartości $\mathbf{U}^{(n)}$ i rozwiązania układu równań liniowych, celem wyznaczenia $\mathbf{U}^{(n+1)}$. Praktyczne metoda ta wymaga stosowania komputerów ze względu na pracochłonność obliczeń.

6.8. Obwody nieliniowe posiadające wiele rozwiązań

Cechą charakterystyczną obwodów nieliniowych jest możliwość występowania w nich wielu rozwiązań. Do takich obwodów należą np. tzw. przerzutniki, oraz obwody zawierające elementy o charakterystykach typu "n" i "s". Rozpatrzmy jeszcze raz obwód z rys. 6.4.1. Niech charakterystyka pierwszego elementu nieliniowego będzie charakterystyką typu "n" (rys. 6.8.1a), zaś drugi element niech będzie elementem liniowym R . Korzystając z metody graficznego rozwiązania obwodów z jednym elementem nieliniowym (rozdz. 6.4), otrzymamy przy małej wartości R przypadek przedstawiony na rys. 6.8.1a - jedno rozwiązanie dla punktu pracy elementu. Jeżeli jednak zwiększymy wartość SEM_U_0 oraz R , otrzymamy przypadek przedstawiony na rys. 6.8.1b. Teraz możliwe są trzy różne rozwiązania, dla punktów P_1 , P_2 i P_3 . Stosując metody iteracyjne otrzymamy, w zależności od doboru punktu startowego iteracji, jedno z tych rozwiązań. W bardziej złożonych obwodach liczba możliwych rozwiązań nie jest na ogół znana a priori. Znalezienie wszystkich rozwiązań



Rys. 6.8.1

w takich obwodach jest problemem trudnym. Jedyną, prostą i skuteczną metodą pozwalającą na znalezienie wszystkich rozwiązań jest metoda linearizacji odcinkowej.

W realnym obwodzie punkt pracy P_1 będzie punktem niestabilnym, to znaczy obwód nie może się znaleźć w tym punkcie w stanie ustalonym, pozostałe punkty pracy P_2 i P_3 są możliwe. W którym z nich realny realny obwód się ustali, nie można stwierdzić ani uzasadnić na podstawie teorii obwodów prądu stałego. Konieczne jest tu uwzględnienie elementów biernych obwodu (indukcyjności oraz pojemności) oraz znajomość sposobu załączania obwodu.

Rozdział 7

OBWODY ZE STEROWANYMI ELEMENTAMI I WIELOBIEGUNNIKAMI

7.1. Elementy sterowane

W dotychczasowych rozważaniach rozpatrywano elementy obwodów, w których napięcie jest jedynie funkcją prądu płynącego przez ten element:

$$U = U(I) \quad (7.1.1)$$

względnie

$$I = I(U) \quad (7.1.2)$$

Obecnie rozważymy elementy, dla których napięcie uzależnione jest od prądu I płynącego przez ten element oraz od innej wielkości fizycznej X :

$$U = U(I, X) \quad (7.1.3)$$

względnie

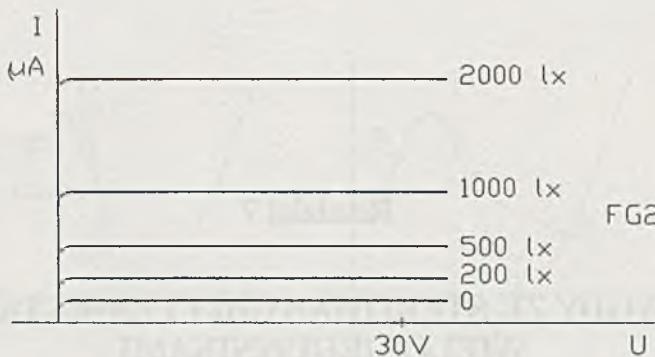
$$I = I(U, X) \quad (7.1.4)$$

Przedstawicielem tej klasy elementów może być np. fotodioda, w której prąd I zależny jest od napięcia U oraz od strumienia światelnego Φ padającego na złącze fotodiody:

$$I = (U, \Phi) \quad (7.1.5)$$

Zależność taką można przedstawić na płaszczyźnie I, U w postaci rodzinny krzywych $I = I(U, \Phi_n)$ przy $\Phi_n = \text{const.}$ Na rys. 7.1.1 przedstawiono rodzinę charakterystyk fotodiody krzemowej. Innym przykładem takiego elementu może być tzw. termistor, gdzie rolę wielkości X przyjmuje temperatura.

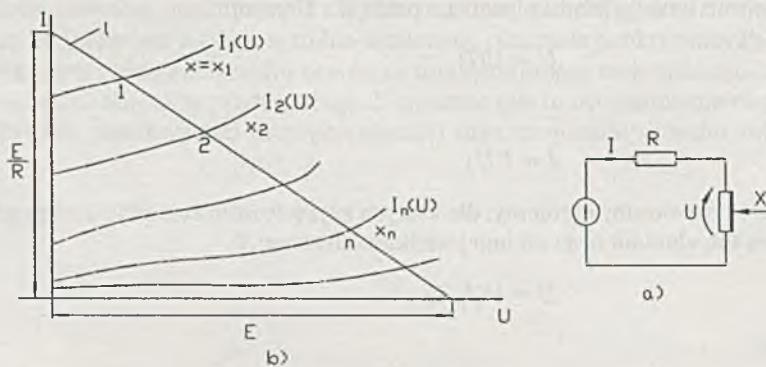
Włączenie takiego elementu w szereg z oporem R i SEM E (rys. 7.1.2) można rozpatrywać przy konkretnej wartości $X = X_n$, podobnie jak połączenie szeregowego oporu nieliniowego



Rys. 7.1.1

$$I = I(U, X_n) = I_n(U)$$

z oporem R i SEM E (patrz rozdział 6.4).



Rys. 7.1.2

W ten sposób punkt pracy układu może być ustalony przez zmianę wartości wielkości X . Na przykład dla $X = X_1$ - punkt 1, dla $X = X_n$ - punkt n. Przy zmianie wartości wielkości X od X_1 do X_n punkt pracy będzie się przemieszczał wzduł prostej l od punktu 1 do n. Można mówić, że element taki jest sterowany przez wielkość X .

Elementy o charakterystykach

$$I = I(U, X)$$

$$U = U(I, X)$$

będziemy nazywali elementami sterowanymi, a wielkość X - wielkością sterującą. Możliwe są również elementy sterowane przez więcej niż jedną wielkość sterującą, wówczas $I = I(U, X_1, X_2, \dots, X_n)$.

7.2. Idealne napięciowe i prądowe źródła sterowane

Dla dalszych rozważań wygodne jest wprowadzić pojęcie idealnych źródeł sterowanych. Są one uogólnieniem pojęć idealnych źródeł napięciowych i prądowych.

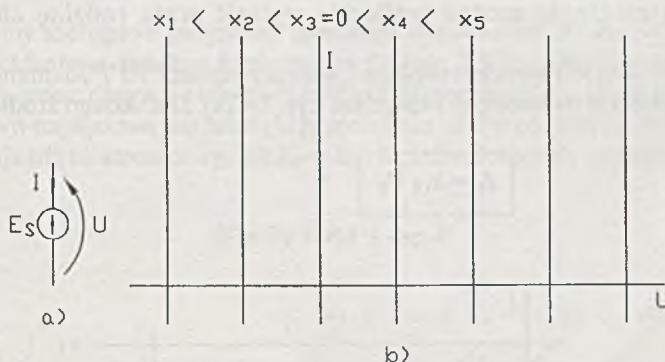
Idealnym napięciowym źródłem sterowanym nazwiemy źródło napięciowe, którego siła elektromotoryczna E jest proporcjonalna do wielkości sterującej X (najczęściej jest to napięcie lub prąd).

$$E_s = k_E X \quad (7.2.1)$$

(7.2.2) Napięcie na idealnym napięciowym źródle sterowanym zależy jedynie od wielkości sterującej, nie zależy więc od prądu płynącego przez źródło:

$$U = E_s = k_E X \quad (7.2.2)$$

Zależność powyższą można graficznie wyrazić przez rodzinę charakterystyk (rys. 7.2.1b).*)



Rys. 7.2.1

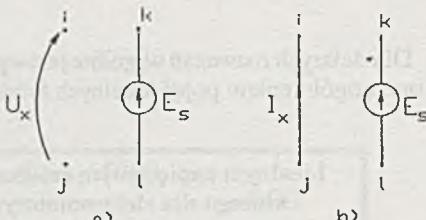
Jeżeli wielkością sterującą jest napięcie U_x między węzłami "i" i "j", to mamy do czynienia ze źródłem napięciowym sterowanym napięciem (rys. 7.2.2a). Dla takiego źródła :

$$E_s = k_{UE} U_x \quad (7.2.3)$$

*) Dla sil sterowanych stosujemy odbiornikowy system strzałkowania

Jeżeli wielkością sterującą jest prąd I_x płynący w gałęzi włączonej między węzłami "i" i "j", to mamy do czynienia ze źródłem napięciowym sterowanym prądowo (rys. 7.2.2b). Dla niego :

$$E_s = k_{IE} I_x \quad (7.2.4)$$



Podobnie można wprowadzić pojęcie idealnego prądowego źródła sterowanego. Jest nim źródło prądowe, którego prąd wy-muszany J_s jest proporcjonalny do wielkości sterującej X

Rys. 7.2.2

$$J_s = k_I X \quad (7.2.5)$$

Prąd w takim źródle sterowanym zależy jedynie od wielkości sterującej, nie zależy od napięcia na jego zaciskach, zatem

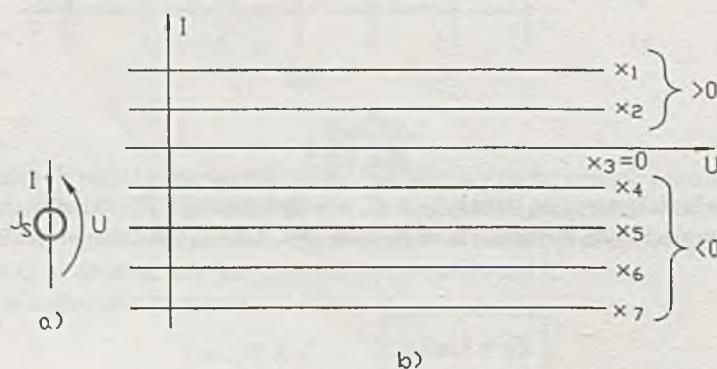
$$I = J_s = k_I X \quad (7.2.6)$$

Powyższą zależność można graficznie wyrazić przez rodzinę charakterystyk (rys. 7.2.3b).

Jeżeli wielkością sterującą jest napięcie U_x między węzłami "i" i "j", to mamy do czynienia z źródłem prądowym sterowanym napięciem (rys. 7.4.2a). Dla takiego źródła :

$$J_s = k_{UI} U_x$$

(7.2.7)

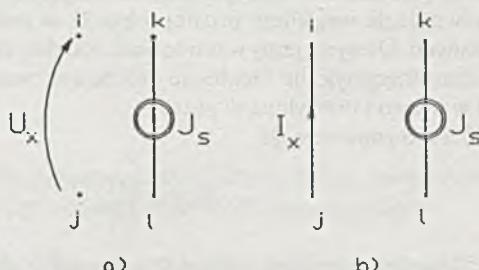


Rys. 7.2.3

Jeżeli wielkością sterującą jest prąd I_x płynący w gałęzi włączonej między węzłami "i" i "j", to mamy do czynienia z źródłem prądowym sterowanym prądem. Dla niego :

$$J_s = k_{ij} I_x \quad (7.2.8)$$

Idealne napięciowe i prądowe źródła sterowane stanowią idealizację rzeczywistych źródeł. Mają one jednak ważne zastosowanie w schematach zastępczych rzeczywistych sterowanych źródeł, tranzystorów i innych elementów elektronicznych.

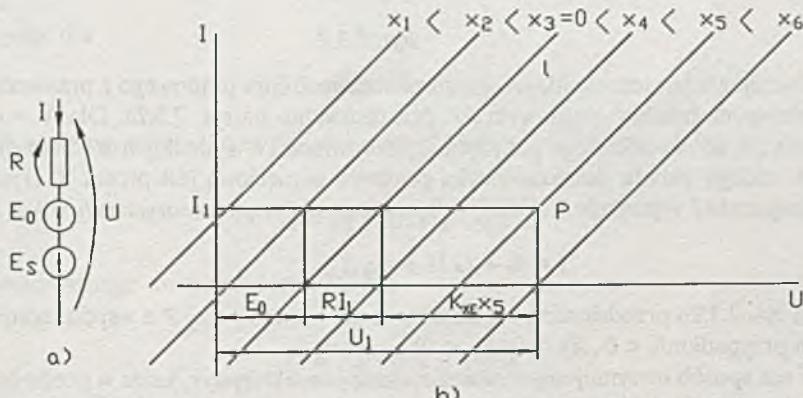


Rys. 7.2.4

7.3. Liniowe układy zastępcze rzeczywistych dwójników sterowanych

Rozpatrzymy szeregowe połączenie idealnego sterowanego źródła napięciowego E_s z oporem R i idealnym źródłem napięciowym E_0 (rys. 7.3.1a). Dla $X = 0$ otrzymujemy szeregowe połączenie oporu R z idealnym źródłem napięciowym E_0 , dla którego charakterystyką prądowo-napięciową jest prosta linia przecinająca oś U w miejscu E_0 (rys. 7.3.1b). Dla $X \neq 0$ powstaje siła elektromotoryczna $E_s = k_{xE} X$, która dodaje się do napięcia na oporze R , wtedy

$$U = E_0 + R I + k_{xE} X \quad (7.3.1)$$



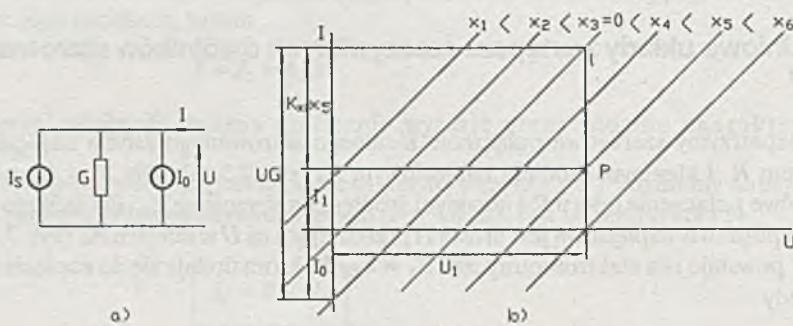
Rys. 7.3.1

Na rys. 7.3.1b przedstawiono tę zależność dla punktu pracy P o współrzędnych I_1, U_1 . Dla tej wartości X otrzymujemy charakterystykę prądowo-napięciową, która jest przesunięta równolegle względem prostej o $k_{xE} X$ w prawo dla dodatnich wartości X i w lewo dla ujemnych. Otrzymujemy w ten sposób rodzinę charakterystyk, która w porównaniu z rodziną charakterystyk dla idealnego źródła sterowanego napięciowo (rys. 7.2.1b) przesunięta jest w prawo i pochylona w prawo.

Łatwo zauważać, że

$$k_{xE} = \frac{\partial U}{\partial X} \quad (7.3.2)$$

Również tu przyjęto odbiornikowy system strzałkowania prądu i napięcia. Układ zastępczy scharakteryzowany jest trzema parametrami: E_0, R i k_{xE} . Parametr E_0 (stała siła elektromotoryczna) decyduje o równoległym przesunięciu rodzinę charakterystyk, parametr R (opór wewnętrzny) decyduje o nachyleniu charakterystyk, zaś parametr k_{xE} o odległości między poszczególnymi prostymi.



Rys. 7.3.2

Równoległe połączenie idealnego sterowanego źródła prądowego z przewodnością G oraz idealnym źródłem prądowym J_0 przedstawiono na rys. 7.3.2a. Dla $X = 0$ układ redukuje się do równoległego połączenia przewodności G z idealnym źródłem prądowym J_0 , dla takiego układu charakterystyką prądowo napięciową jest prosta "I" (rys. 7.3.2b), przecinająca oś I w punkcie J_0 . Dla $X \neq 0$ powstaje siła prądomotoryczna $J_s = k_{xE} X$, wtedy

$$I = J_0 + G U + k_{xi} X \quad (7.3.3)$$

Na rys. 7.3.2b przedstawiono tę zależność dla punktu pracy P o współrzędnych I_1, U_1 (w tym przypadku $J_0 < 0, X_5 > 0, k_{xi} < 0$).

W ten sposób otrzymujemy również rodzinę charakterystyk, która w porównaniu z rodziną charakterystyk idealnego sterowanego źródła prądowego (rys. 7.2.3b), jest pochylona w prawo i przesunięta w dół. Tak jak i poprzednio, układ zastępczy scharakteryzowany jest trzema parametrami: J_0, G i k_{xi} . Parametr J_0 (stała siła prądomotoryczna) decyduje

o równoległy przesunięciu rodziny charakterystyk, parametr G (przewodność wewnętrzna) decyduje o nachyleniu charakterystyk, zaś parametr k_{X1} o odległości między poszczególnymi prostymi.

Łatwo zauważyc, że w tym przypadku

$$k_E = \frac{\partial I}{\partial X}$$

(7.3.4) Z porównania charakterystyk obu układów zastępczych wynika, że mogą one być wzajemnie równoważne. Jeżeli rozwiążemy równanie (7.3.3) względem napięcia U :

$$U = -\frac{J_0}{G} + \frac{J}{G} - \frac{k_{X1}}{G} X$$

to będzie ono identyczne z równaniem (7.3.1), jeżeli:

$$R = \frac{1}{G} \quad (\text{identyczne nachylenie obu rodzin charakterystyk})$$

$$E_0 = -\frac{J_0}{G},$$

$$k_{XE} = -\frac{k_{X1}}{G}.$$

Przy spełnieniu powyższych warunków oba układy zastępcze są wzajemnie równoważne.

Porównując charakterystyki rzeczywistego elementu sterowanego (np. rys. 7.1.2b) z charakterystykami układów zastępczych (rys. 7.3.1b i 7.3.2b) można zauważyc, że rzeczywisty element można w pewnym obszarze, zwanym dalej obszarem liniowości elementu, zastąpić układem zastępczym. Przez odpowiedni dobór parametrów układu zastępczego E_0 , k_{XE} i R można doprowadzić do tego, że w pewnym obszarze rodziny charakterystyk układu rzeczywistego i układu zastępczego będą się pokrywały z dostateczną dla praktyki dokładnością. Obszar ten zakreskowano na rys. 7.3.3. W przybliżeniu można go określić przez graniczne wartości napięć U_1 , U_2 oraz graniczne wartości wielkości sterującej X_2 i X_7 .

Tak więc dla

$$U_1 \leq U \leq U_2$$

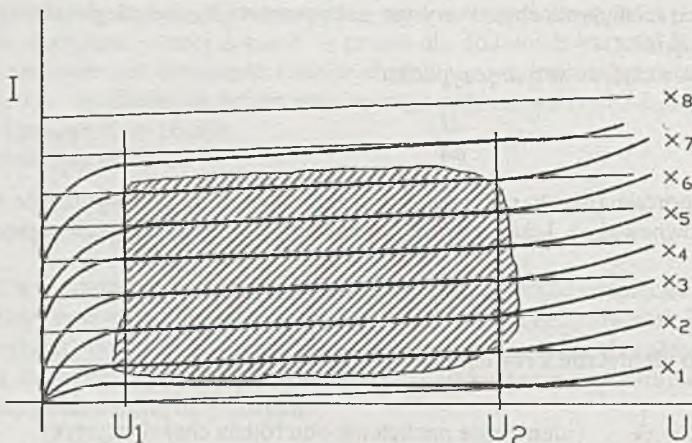
prąd I będzie można określić na podstawie zastępczego układu (rys. 7.3.2a) jako

$$I = J_0 + G U + k_{X1} X$$

lub z równoważnego mu układu (rys. 7.3.1a)

$$U = E_0 + R I + k_{XE} X$$

W zależności od charakteru elementu obszar liniowości może być większy lub mniejszy.



Rys. 7.3.3

7.4. Trójkąt aktywny sterowany

Szeroką klasę elementów sterowanych stanowią elementy, w których wielkość sterowana jest napięciem lub prądem. W najprostszym przypadku można je przedstawić w postaci sterowanego trójkąta aktywnego (rys.

7.4.1). Przyjmiemy dowolny węzeł wejściowy trójkąta jako węzeł odniesienia (w tym przypadku węzeł 3). Dla takiego układu

$$I_1 = f_1(U_1, U_2)$$

$$I_2 = f_2(U_1, U_2) \quad (7.4.1)$$

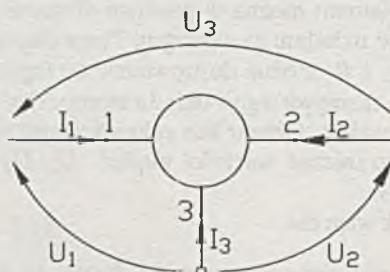
Obydwa prądy są więc uzależnione od napięć na wejściu i wyjściu trójkąta. Trzeci prąd I_3 jest na podstawie uogólnionego II prawa Kirchhoffa równy sumie obu prądów:

$$-I_3 = I_1 + I_2 \quad (7.4.2)$$

Podobnie dla napięcia U_3 otrzymamy na podstawie II prawa Kirchhoffa

$$U_3 = U_1 - U_2 \quad (7.4.3)$$

Do pełnego opisania trójkąta wystarczą więc zależności (7.4.1). Zależności powyższe można również rozwiązać względem dowolnych dwóch z czterech zmiennych I_1, I_2, U_1, U_2 np.:



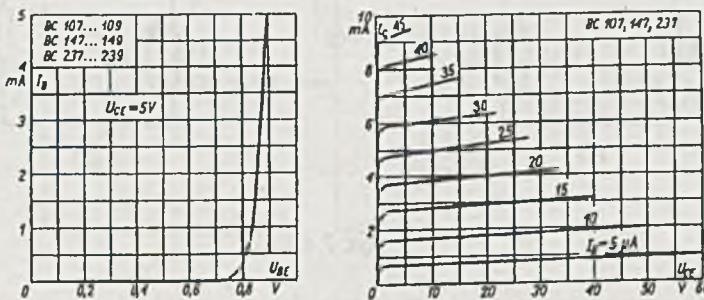
Rys. 7.4.1

$$\begin{aligned} U_1 &= f_2 (I_1, I_2) \\ U_2 &= f_4 (I_1, I_2) \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

albo

$$\begin{aligned} U_1 &= f_5 (U_2, I_1) \\ I_2 &= f_6 (U_2, I_1) \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Wszystkie te pary równań jednakowo opisują dany układ *). Na rys. 7.4.2 przedstawione są charakterystyki tranzystora jako typowego przedstawiciela tej grupy elementów, w tym przypadku prąd bazy I_B , prąd kolektora I_C , napięcie U_1 - to napięcie



Rys. 7.4.2

między emiterem a bazą U_{BE} , zaś U_2 - to napięcie między kolektorem a emiterem U_{CE} , zatem

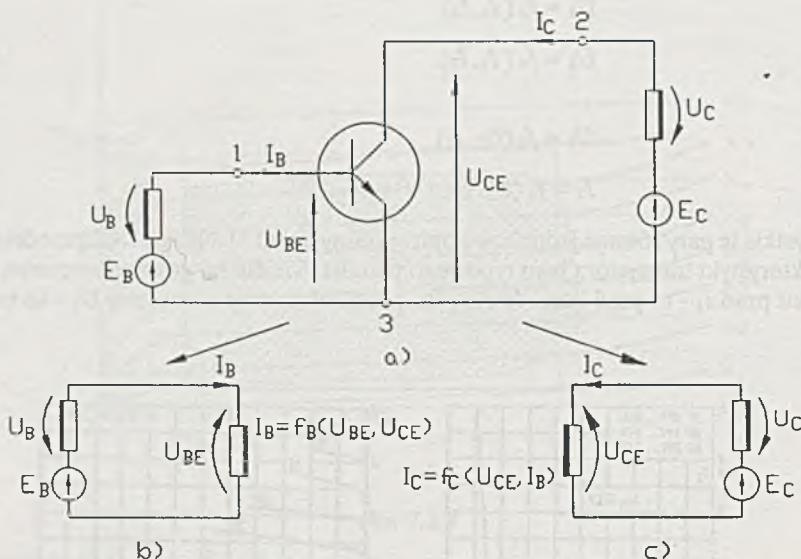
$$\begin{aligned} U_{BE} &= f_5 (U_{CE}, I_B) \\ I_C &= f_6 (U_{CE}, I_B) \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Na rys. 7.4.3a przedstawiono połączenie trójkątnika aktywnego z dwoma elementami nieliniowymi. Rozpatrując układ trójkątnika wraz z dołączonym z prawej strony obwodem od strony biegunów 1-3 można stwierdzić, że przedstawia on sobą dwójnik, dla którego prąd wejściowy I_B jest funkcją napięcia wejściowego U_{BE} oraz napięcia U_{CE} , które można tu traktować jako wielkość sterującą:

$$I_B = f_B (U_{BE}, U_{CE}) \quad (7.4.7)$$

Otrzymujemy dla strony wejściowej układ zastępczy (rys. 7.4.3b), w którym dla oporu nieliniowego mamy zależność

*) W niektórych przypadkach układ może być opisywany tylko niektórymi równaniami.



Rys. 7.4.3

$$I_B = I_B(U_B) \quad (7.4.8)$$

przedstawioną na rys. 7.4.4c.

Z drugiego prawa Kirchhoffa zaś

$$U_B + U_{BE} = E_B \quad (7.4.9)$$

Te trzy równania pozwalają na zastosowanie graficznej metody rozwiązywania szeregowego połączenia dwóch oporów nieliniowych z siłą elektromotoryczną (rozdział 6.4), przedstawioną tu na rys. 7.4.4a. W tym przypadku jednak dwójnik nie jest scharakteryzowany pojedynczą charakterystyką, ale rodziną charakterystyk zależną od napięcia U_{CE} . W związku z tym rozwiązaniem będzie jeden z punktów przecięcia się $Q_1 \dots Q_5$ charakterystyk. Każdemu z tych punktów odpowiada inny prąd I_B .

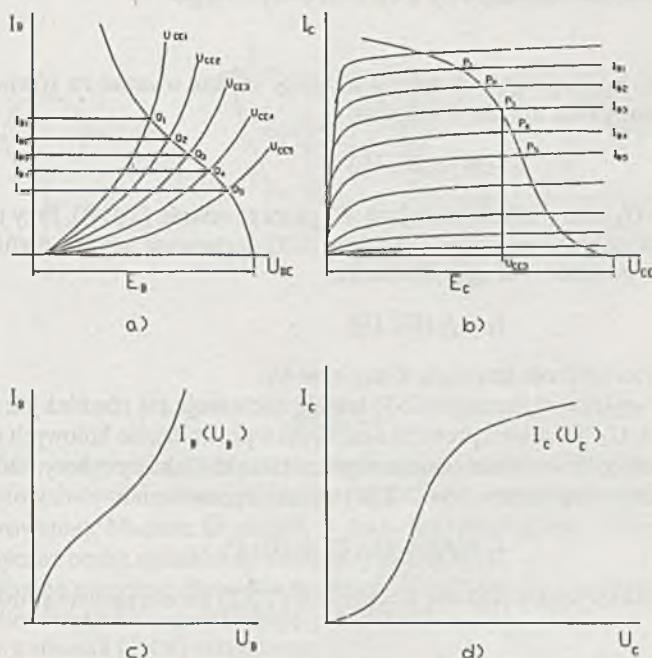
Podobnie rozpatrując układ trójnika wraz z dołączonym do niego z lewej strony obwodem od strony biegunów 2-3 można stwierdzić, że przedstawia on sobą również dwójnik, dla którego prąd I_C jest funkcją napięcia U_{CE} oraz prądu I_B , który można tu traktować jako wielkość sterującą:

$$I_C = f_C(U_{CE}, I_B) \quad (7.4.10)$$

Dla strony wyjściowej otrzymamy zatem układ zastępczy z rys. 7.4.3c, w którym dla oporu nieliniowego mamy zależność

$$I_C = I_C(U_C) \quad (7.4.11)$$

przedstawioną na rys. 7.4.4d.



Rys. 7.4.4

Z drugiego prawa Kirchhoffa zaś

$$U_C + U_{CE} = E_C \quad (7.4.12)$$

Te trzy równania pozwalają również na zastosowanie metody graficznej z rozdziału 6.4.

Rozwiążanie przedstawiono na rys. 7.4.4b. W tym przypadku dwójnik również scharakteryzowany jest rodziną charakterystyk, rozwiązaniem tego układu będzie jeden z punktów $P_1 \dots P_6$ przecięcia charakterystyk. Każdemu z tych punktów odpowiada inne napięcie U_{CE} .

Równania 7.4.6 - 7.4.12 opisują więc cały układ. Łatwo zauważyć, że punkt pracy obwodu wejściowego Q musi leżeć na charakterystyce odpowiadającej tej wartości U_{CE} , która wyznaczona jest przez punkt pracy P (rozwiążanie) obwodu wyjściowego. Z kolei punkt pracy P musi leżeć na charakterystyce odpowiadającej tej wartości I_B , która wyznaczona jest w obwodzie wejściowym przez punkt pracy Q_3 i P_3 odpowiadające wartościom I_{B3} i U_{CE3} . Jedynie te wartości spełniają równocześnie wszystkie równania opisujące powyższy układ.

Graficzna metoda jest w tym przypadku bardzo przydatna, prowadzi ona w prosty sposób do rozwiązania układu. W przypadku tranzystorów można zazwyczaj z wystarczającą dla praktyki dokładnością zastąpić rodzinę charakterystyk $I_B = f(U_{BE}, U_{CE})$ jedną charakterystyką, gdyż prąd bazy I_B mało zależy od napięcia U_{CE} . W tym przypadku rozwiązanie jest szczególnie proste.

Podobne konstrukcje graficzne można stosować również w przypadkach, gdy równania trójkąta podane są w innych postaciach.

7.5. Liniowy układ zastępczy trójkąta aktywnego

Każde z równań opisujących trójkąt aktywny można uważać za równanie opisujące element sterowany i tak np. dla równania

$$I_1 = f_1(U_1, U_2) \quad (7.5.1)$$

można uważać U_2 jako wielkość sterującą X (patrz równanie (7.1.4)). Przy takiej interpretacji trójkąt od strony wejściowej (zacisków 1-3) zachowuje się jak dwójnik sterowany napięciem U_2 . Podobnie w drugim równaniu

$$I_2 = f_2(U_1, U_2) \quad (7.5.2)$$

można uważać za wielkość sterującą X napięcie U_1 .

Od strony wyjściowej (zacisków 2-3) trójkąt zachowuje się również jak dwójnik sterowany napięciem U_1 . Taka interpretacja umożliwia wprowadzenie liniowych układów zastępczych. W obszarze liniowości można zastąpić rodzinę charakterystyk wyrażoną równaniem (7.5.1) zlinearyzowaną rodziną (rys. 7.3.2b) wyrażoną równaniem

$$I_1 = J_{01} + G_{11} U_1 + G_{12} U_2 \quad (7.5.3)$$

a rodzinę charakterystyk wyrażoną równaniem (7.5.2) zlinearyzowaną rodziną wyrażoną równaniem

$$I_2 = J_{02} + G_{22} U_2 + G_{21} U_1 \quad (7.5.4)$$

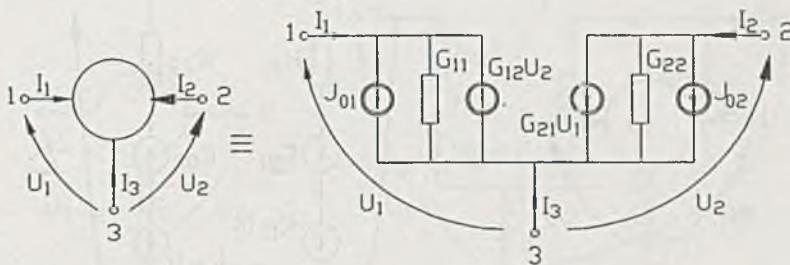
gdzie zamiast współczynników k_{\pm} wprowadzono współczynniki G_{12} i G_{21} . Powyższe dwa równania opisują zatem trójkąt w zakresie jego liniowości.

Na rys. 7.5.1 przedstawiony jest liniowy układ zastępczy opisany przez te same równania (7.5.3) i (7.5.4). Można zatem twierdzić, że w obszarze liniowości można zastąpić trójkąt aktywny liniowym układem zastępczym. Jak wynika z rozważań przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach, parametr G_{11} decyduje o nachyleniu charakterystyk wejściowych trójkąta, zaś parametr G_{22} o nachyleniu charakterystyk wyjściowych. Podobnie stałe siły prądomotoryczne J_{01} i J_{02} decydują o przesunięciu odpowiednich rodzin charakterystyk w górę lub w dół. Sterowana siła prądomotoryczna $G_{21} U_2$ uwzględnia wpływ napięcia wyjściowego na wejście trójkąta. G_{12} decyduje tu o odległości poszczególnych charakterystyk od siebie: im większe G_{12} , tym większy wpływ napięcia wyjściowego U_2 na wejście. Sterowana siła prądomotoryczna $G_{21} U_1$ uwzględnia wpływ napięcia wejściowego na wyjście trójkąta. Im większa wartość parametru G_{21} , tym większy jest ten wpływ. Oba równania można zapisać w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{I} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{G} \mathbf{U} \quad (7.5.5)$$

gdzie

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} J_{01} \\ J_{02} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$



Rys. 7.5.1

Warto zwrócić uwagę na to, że równanie macierzowe trójkąta (7.5.5) ma postać analogiczną do równania dwójnika oraz trójkąta aktywnego (znak + wynika tu z odbiornikowego systemu strzałkowania). Macierz \mathbf{G} nie jest tu macierzą symetryczną ($G_{12} \neq G_{21}$). Jest to charakterystyczna cecha układów ze sterowanymi źródłami.

Podobnie można otrzymać równania zastępczych układów liniowych wychodząc z innych układów równań nieliniowych opisujących trójkąt.

Wychodząc z równań (7.4.4) otrzymamy

$$\begin{aligned} U_1 &= E_{01} + R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ U_2 &= E_{02} + R_{22} I_2 + R_{21} I_1 \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

gdzie: $k_{XE} = R_{12}$ względnie R_{21} .

Liniowy układ zastępczy trójkąta aktywnego odpowiadający powyższym równaniom przedstawiono na rys. 7.5.2. Również i tu można wyjaśnić znaczenie poszczególnych parametrów: R_{11} i R_{22} decydują o nachyleniu charakterystyk, E_{01} i E_{02} o przesunięciu charakterystyk w lewo lub w prawo, zaś siły elektromotoryczne sterowane określają wpływ wyjścia na wejście i odwrotnie.

W postaci macierzowej

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{R} \mathbf{I} \quad (7.5.7)$$

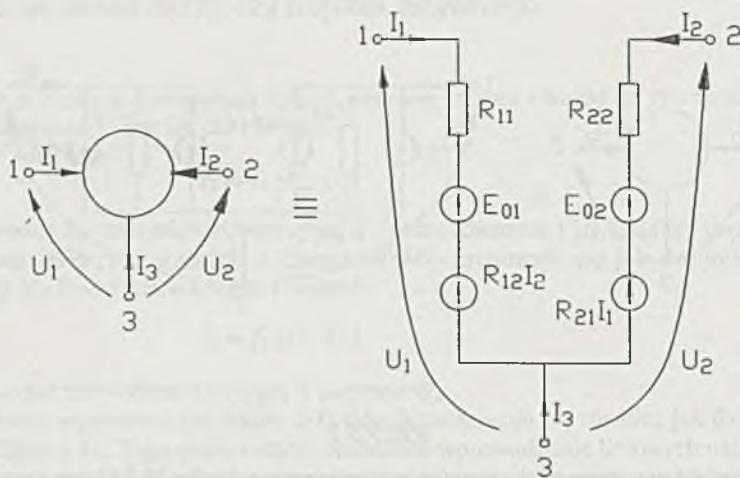
gdzie

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} E_{01} \\ E_{02} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} R_{12} \\ R_{21} R_{22} \end{bmatrix}$$

Również i to równanie macierzowe trójkąta aktywnego podobne jest do równania dwójnika.

Wychodząc z równań (7.4.5) możemy otrzymać

$$\begin{aligned} U_1 &= E_{01} + h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 &= J_{02} + h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{aligned} \quad (7.5.8)$$



Rys. 7.5.2

albo

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{01} \\ J_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (7.5.9)$$

Liniowy układ zastępczy odpowiadający powyższym równaniom przedstawiono na rys. 7.5.3.

Wszystkie powyższe układy zastępcze są równoważne. Łatwo jest przejść z jednego układu do drugiego. Równania układu zastępczego II otrzymamy np. z układu I (7.5.5), obliczając z tego ostatniego \mathbf{U}

$$\mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_0$$

skąd

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{J}_0$$

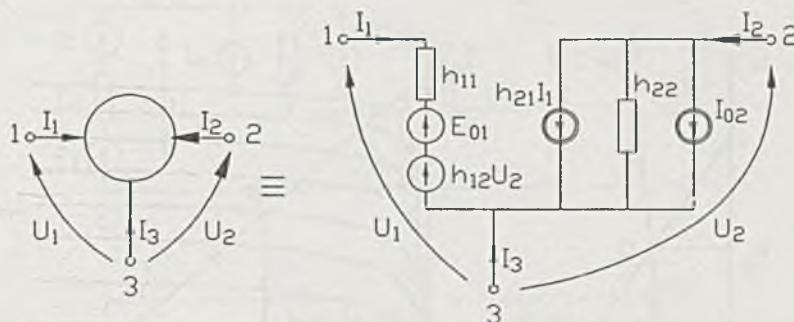
Porównując z (7.5.7) otrzymamy

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$$

oraz

$$\mathbf{E}_0 = - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{J}_0$$

Stosowanie liniowych układów zastępczych przy analizie obwodów wymaga, po dokonaniu obliczeń, sprawdzenia, czy prądy i napięcia elementów nieliniowych mieszczą się w przyjętym zakresie linearyzacji (patrz rys. 7.3.3). Należy przy tym zwrócić uwagę na to, że w zależności od przyjętego obszaru, dla którego przeprowadza się linearyzację, parametry układu zastępczego, np. \mathbf{J} i \mathbf{G} , mogą przyjmować różne wartości.

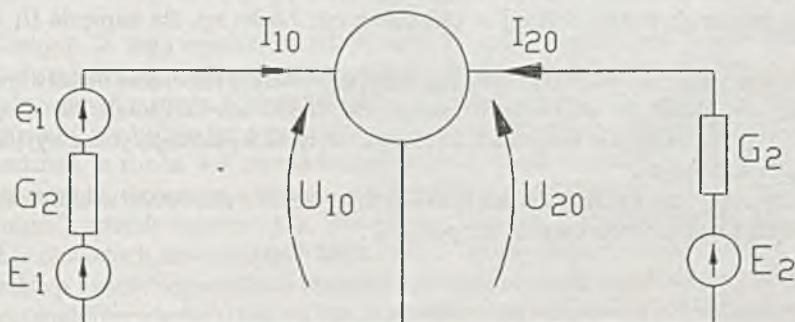


Rys. 7.5.3

7.6. Liniowy układ zastępczy trójkąta aktywnego dla składowych zmiennych napięć i prądów

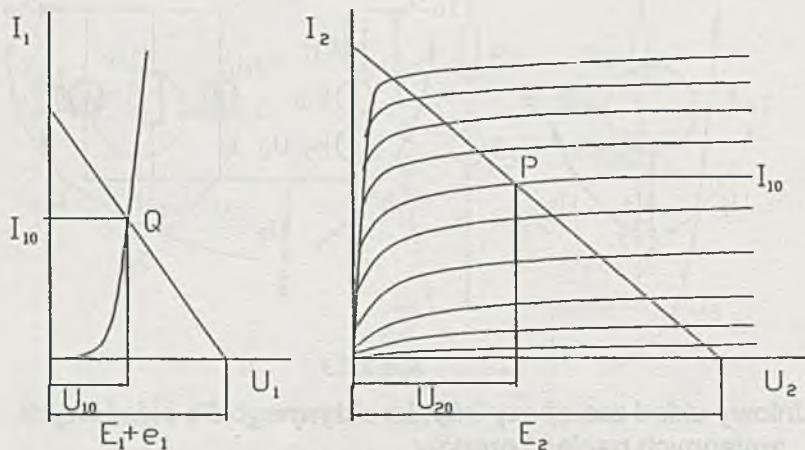
Przy analizie obwodów elektrycznych często wystarczająca jest znajomość składowych zmiennych prądów i napięć spowodowanych przez składowe zmienne sił wymuszających. Zakłada się przy tym, że w obwodzie ustaliły się pod wpływem stałych sił wymuszających odpowiednie punkty pracy.

Rozpatrzymy trójkąt aktywny zasilany z obu stron stałymi siłami elektromotorycznymi E_1 i E_2 oraz małą w porównaniu z SEM E_1 zmienną siłą elektromotoryczną e_1 , której wartość można zmieniać (rys. 7.6.1)*. Pod ich wpływem ustala się na wejściu napięcie U_{10} a na wyjściu U_{20} , w trójkąt natomiast odpowiednie punkty pracy O i P, które można wyznaczyć np. za pomocą konstrukcji przedstawionej w rozdziale 7.4. W okolicy P i O



Rys. 7.6.1

*) Dla uproszczenia przyjęto, że w trójkątku II mało zależy od U_2 , dlatego dla strony wejściowej trójkątka istnieje tylko pojedyncza charakterystyka.



Rys. 7.6.2

(rys. 7.6.2) można teraz przeprowadzić linearyzację, tj. zastąpić charakterystyki nieliniowe rodziną charakterystyk liniowych, a tym samym zastąpić rzeczywisty trójkąt jednym z jego liniowych układów zastępczych przedstawionych poprzednio. Zastępując trójkąt aktywny układem zastępczym przewodnościowym (rys. 7.5.1) otrzymamy układ z rys. 7.6.3a.

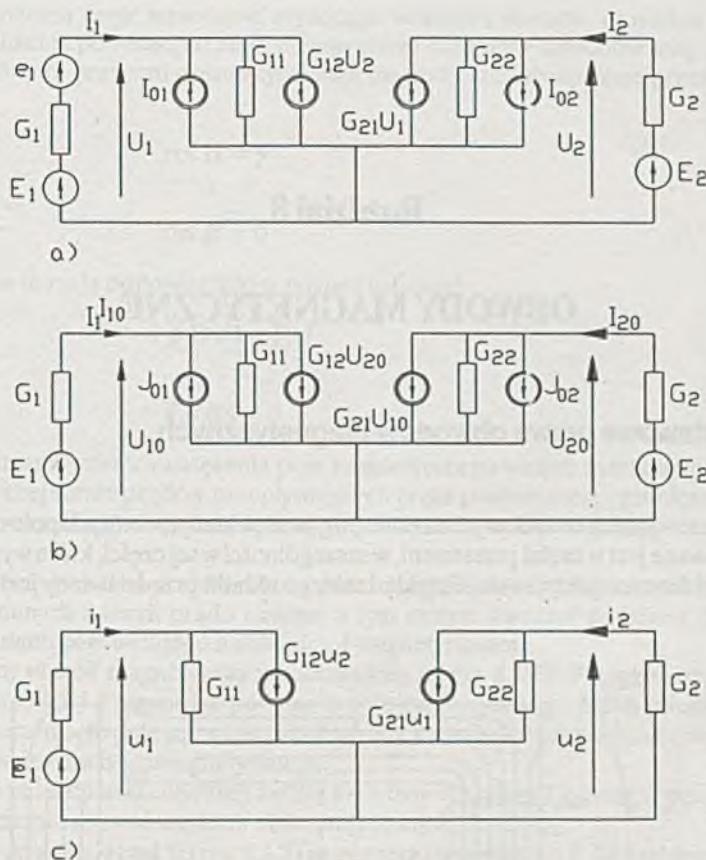
Otrzymany układ jest już układem liniowym. Stosując do niego zasadę superpozycji można obliczyć dla każdego prądu i napięcia dwie składowe. Pierwszą, która jest wynikiem działania wszystkich autonomicznych sił wymuszających działających w obwodzie (J_{01}, J_{02}, E_1, E_2), będzie tzw. składowa stała; np. dla napięcia U będzie nią U_{10} . Składowe stałe można wg zasady superpozycji obliczyć w układzie z rys. 7.6.3b. Drugą składową będącą wynikiem działania siły wymuszającej e_1 (oznaczmy ją małymi literami jako tzw. składową zmienną) można obliczyć w układzie z rys. 7.6.3c: np. dla napięcia U_1 - będzie nią u_1 .

Jeżeli interesują nas tylko składowe zmienne, to wystarczy rozwiązać układ z rys. 7.6.3c, tzn. zastępczy układ dla składowych zmiennych. Układ ten otrzymuje się z ogólnego (rys. 7.6.3a) przez usunięcie wszystkich autonomicznych sił wymuszających, z wyjątkiem ich składowych zmiennych.

Układy zastępcze dla składowych zmiennych są szeroko stosowane w elektronice przy analizie układów tranzystorowych i lampowych.

7.7. Obwody ze sterowanymi źródłami napięciowymi i prądowymi

Obwody zawierające sterowane źródła napięciowe i prądowe będą opisane, po zastosowaniu dowolnych metod układania równań (metoda obu praw Kirchhoffa, metoda potencjałów węzłowych, prądów oczkowych itp.), również układem liniowym równań



Rys. 7.6.3

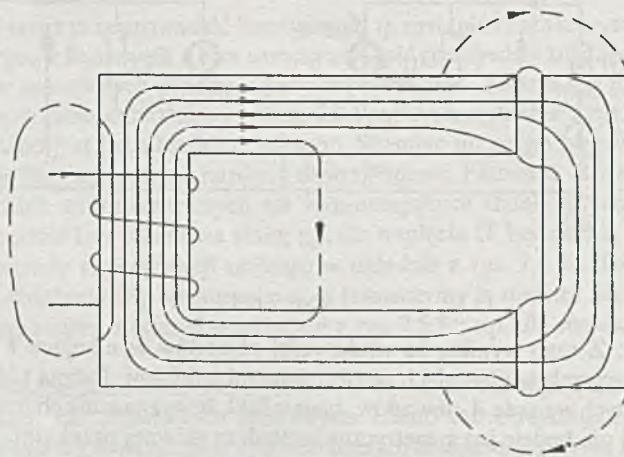
algebraicznych. Z tego wynika, że właściwości obwodów wynikające z tego faktu będą również obowiązywały w obwodach ze sterowanymi źródłami. Jedyną różnicą, w stosunku do rozpatrywanych w rozdz. 4. obwodów, będzie fakt, że wyznacznik charakterystyczny tego układu równań nie będzie już symetryczny względem głównej przekątnej. W związku z tym wyprowadzona w rozdz. 4.9 zasada wzajemności nie będzie ważna w takich obwodach. Pozostałe zasady, dotyczące obwodów z jedną siłą wymuszającą (w tym również pojęcie transmitancji), zasady superpozycji, Thevenina, Norton'a i wyodrębnienia, będą ważne również w obwodach zawierających takie źródła. Należy jedynie zwrócić uwagę na to, że w dwójnikach i wielobiegunkach wielkość sterująca musi się znajdować wewnątrz tegoż dwójnika (wielobiegunka) i nie jest ona przyrównywana do zera przy obliczaniu np. oporu zastępczego dwójnika lub przy stosowaniu zasady superpozycji (tak jak się to czyni przy autonomicznych źródłach).

Rozdział 8

OBWODY MAGNETYCZNE

8.1. Podstawowe prawa obwodów magnetycznych

W zastosowaniach technicznych często spotyka się układy, w których pole magnetyczne skoncentrowane jest w części przestrzeni, w szczególności w tej części, która wypełniona jest materiałami ferromagnetycznymi. Przykład takiego układu przedstawiony jest na rys. 8.1.1.



Rys. 8.1.1

Strumień magnetyczny wytworzony przez prąd płynący przez uzwojenie wzbudzające w przeważającej swej części płynie wewnątrz materiału ferromagnetycznego. Jedynie niewielka jego część zamknięta przez powietrze. Tę część strumienia (reprezentowaną przez kreskowane linie na rys. 8.1.1) nazwiemy strumieniem rozproszenia. Układy takie nazywamy obwodami magnetycznymi. Wartość strumienia rozproszenia zależy od konfiguracji układu i własności magnetycznych poszczególnych jego części. Jeżeli strumień rozproszenia

stanowi nieznaczną część strumienia płynącego wewnątrz obwodu, to można go w pierwszym przybliżeniu pominać, co znacznie upraszcza obliczanie obwodów magnetycznych.

Podstawowymi prawami opisującymi pole magnetyczne wytworzone przez prądy stałe są:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \bar{\gamma} \quad (8.1.1)$$

oraz

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (8.1.2)$$

Równania te mają odpowiedniki w postaci całkowej

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum I \quad (8.1.3)$$

oraz

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (8.1.4)$$

Całka okrężna wektora natężenia pola magnetycznego wzduż zamkniętej linii równa jest algebraicznej sumie prądów przepływających przez powierzchnię ograniczoną tą linią.

Całka powierzchniowa po zamkniętej powierzchni z wektora indukcji magnetycznej równa jest zeru.

Prawa te będzie można przedstawić w postaci mającej duże podobieństwo do obu praw Kirchhoffa znanych z teorii prądu stałego, a tym samym stworzyć podstawy dla analogii między obwodami prądu stałego a obwodami magnetycznymi.

Rozważmy obwód magnetyczny przedstawiony na rys. 8.1.2a. Przepływ prądu stałego przez uzwojenie 1,2 i 3 powoduje powstanie pola magnetycznego. Jeżeli pominiemy strumienie rozproszenia, to pole to będzie różne od zera jedynie wewnątrz rdzenia, wykonanego zazwyczaj z materiału ferromagnetycznego.

Strumień indukcji magnetycznej będzie się wtedy rozgałęziać jedynie w pewnych miejscach, które można nazwać węzłami obwodu (punkty A, B, C i D).

Otoczmy dowolny węzeł B (rys. 8.1.2) zamkniętą powierzchnią S . Dla takiej powierzchni obowiązuje

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

Z uwagi na brak pola na zewnątrz rdzenia, $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$ będzie różna od zera jedynie dla powierzchni przekroju rdzenia S_{BD} , S_{BA} i S_{BC} (rys. 8.1.2 b)

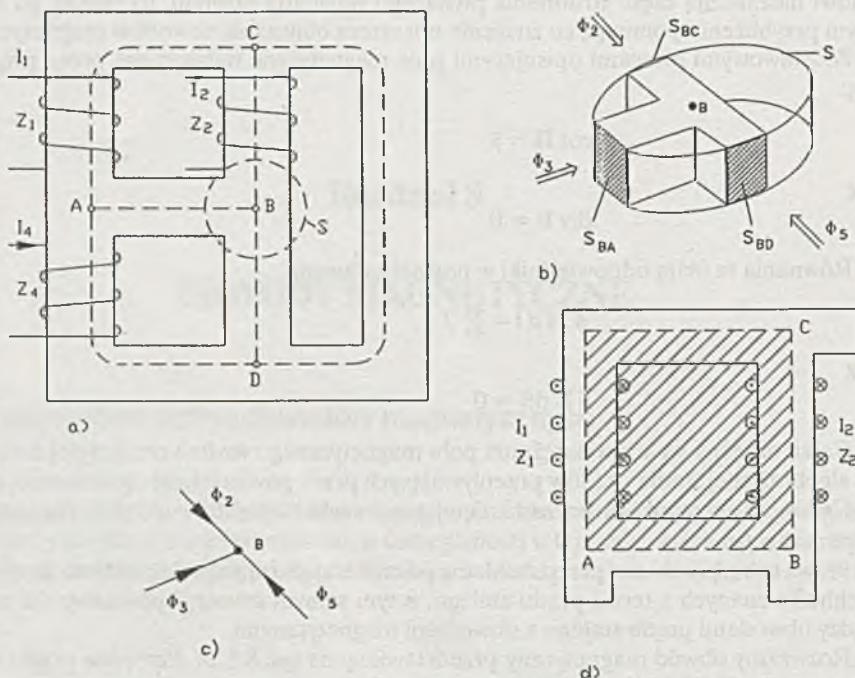
$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{S_{BD}} \mathbf{B} d\mathbf{S} + \int_{S_{BA}} \mathbf{B} d\mathbf{S} + \int_{S_{BC}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$$

oznaczając

$$\int_{S_{BD}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_5$$

$$\int_{S_{BA}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_3$$

$$\int_{S_{BC}} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi_2$$



Rys. 8.1.2

otrzymamy zatem

$$\Phi_5 + \Phi_3 + \Phi_2 = 0$$

Uogólniając, można wynik ten zapisać w postaci I prawa Kirchhoffa dla obwodów magnetycznych:

$$\sum_{*} \Phi = 0 \quad (8.1.5)$$

Algebraiczna suma strumieni dopływających do węzła obwodu magnetycznego jest równa zero.

Strumienie odpływające z węzła uważamy przy tym za ujemne dopływające. Schematycznie można węzeł przedstawić jak na rys. 8.1.2c.

Rozważmy dowolną zamkniętą linię wewnątrz obwodu magnetycznego, np. BACB na rys. 8.1.2d. Będziemy również mówili o oczku obwodu magnetycznego. Dla takiej linii całka

okrężna z wektora natężenia pola równa jest sumie prądów przepływających przez powierzchnię ograniczoną tą linią (powierzchnia zakreskowana na rys. 8.1.2 d), zatem

$$\oint \mathbf{H} \, dl = z_1 I_1 - z_2 I_2$$

Wprowadźmy pojęcie siły magnetomotorycznej uzwojenia

$$F = z I$$

(8.1.6)

gdzie z - liczba zwojów uzwojenia, a I - prąd płynący przez uzwojenie.

Sile magnetomotorycznej przypisujemy kierunek działania zgodny z kierunkiem pola wytworzonego wewnątrz uzwojenia przez to uzwojenie. Siła magnetomotoryczna uzwojenia pierwszego jest więc skierowana ku górze. (Dla uzwojenia czwartego ku dołowi).

Całkę okrężną z wektora natężenia pola można rozbić na trzy całki: od A do C, od C do B i od B do A. Każda z tych całek równa jest napięciu magnetycznemu między tymi punktami:

$$\int_A^C \mathbf{H} \, dl = U_{M_{AC}}$$

$$\int_C^B \mathbf{H} \, dl = U_{M_{CB}}$$

$$\int_B^A \mathbf{H} \, dl = U_{M_{BA}}$$

zatem

$$\oint \mathbf{H} \, dl = \int_A^C \mathbf{H} \, dl + \int_C^B \mathbf{H} \, dl + \int_B^A \mathbf{H} \, dl = U_{M_{AC}} + U_{M_{CB}} + U_{M_{BA}} = F_1 - F_2.$$

Można więc powiedzieć, że dla oczka obwodu suma napięć magnetycznych jest równa sumie sił magnetomotorycznych.

Powyższe równanie można również przedstawić w postaci

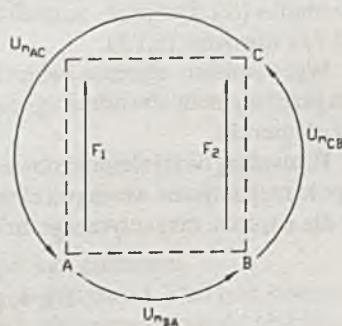
$$U_{M_{AC}} - F_1 + U_{M_{BA}} + U_{M_{CB}} + F_2 = 0$$

Na rys. 8.1.3 przedstawione są napięcia i siły magnetomotoryczne danego oczka.

Uogólniając powyższe fakty można stwierdzić, że przy przyjętych konwencjach odnośnie strzałkowania sił magnetomotorycznych i napięć magnetycznych można obie wielkości traktować identycznie przy ustalaniu II prawa Kirchhoffa dla obwodów magnetycznych. Można przyjąć formalnie, że każde uzwojenie, przez które płynie prąd, wytwarza napięcie magnetyczne U_{MF} równe co do wartości sile magnetomotorycznej tegoż uzwojenia

$$F = I z = U_{MF}$$

Rys. 8.1.3



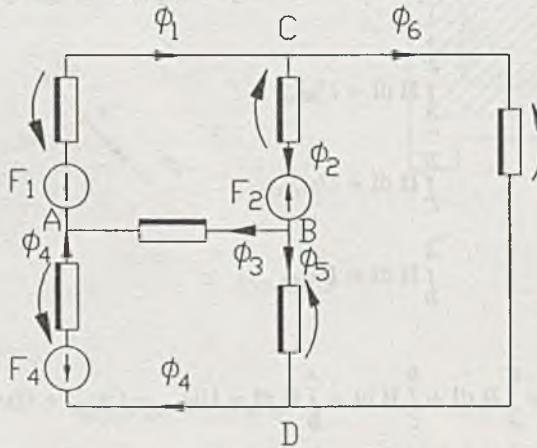
otrzymując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodów magnetycznych:

$$\sum_{\sigma} U_M = 0$$

(8.1.7)

Dla dowolnego oczka obwodu magnetycznego algebraiczna suma napięć magnetycznych i sił magnetomotorycznych równa jest zero.

Takie sformułowanie drugiego prawa Kirchhoffa pozwala na przyjęcie schematu zastępczego obwodu magnetycznego przedstawionego na rys. 8.1.4.



Rys. 8.1.4

Wprowadzone w ten sposób oba prawa Kirchhoffa są zatem równoważne podstawowym prawom opisującym pole magnetyczne wytworzone przez prądy stałe. Pierwsze prawo Kirchhoffa (8.1.5) wynika bezpośrednio z równania (8.1.4), zaś drugie prawo Kirchhoffa (8.1.7) z równania (8.1.3).

Wprowadzimy obecnie związek między strumieniem magnetycznym Φ przepływającym przez element obwodu magnetycznego a napięciem magnetycznym U_M istniejącym na tym elemencie.

Rozważmy bliżej element obwodu magnetycznego w postaci walca (rys. 8.1.5). Założymy, że pole magnetyczne wewnątrz elementu można uważać za jednorodne. Wówczas otrzymamy dla napięcia magnetycznego między podstawami walca

$$U_M = \int_A^B \mathbf{H} \, dl = Hl \quad (8.1.8)$$

bo całkowanie odbywa się wzdłuż linii sił, a natężenie pola jest stałe wzdłuż drogi całkowej.

Dla strumienia magnetycznego przepływającego przez walec otrzymamy

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B S \quad (8.1.9)$$

bo indukcja magnetyczna na powierzchni przekroju jest stała i prostopadła do powierzchni.

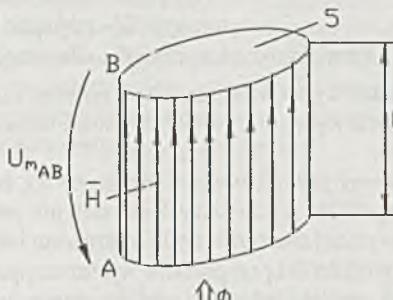
Dla materiałów ferromagnetycznych istnieje nieliniowa zależność między natężeniem pola a indukcją magnetyczną (charakterystyka magnesowania):

$$B = B(H)$$

lub

$$H = H(B) \quad (8.1.10)$$

zatem



Rys. 8.1.5

$$U_M = H l = H(B) = H \left(\frac{B S}{S} \right) l = H \left(\frac{\Phi}{S} \right) l \quad (8.1.11)$$

Napięcie magnetyczne elementu obwodu magnetycznego jest zatem nieliniową funkcją strumienia:

$$U_M = U_M(\Phi) \quad (8.1.12)$$

albo, wyrażając Φ jako funkcję U_M :

$$\Phi = \Phi(U_M) \quad (8.1.13)$$

Zależność ta, jako charakterystyka elementu, opisuje element obwodu magnetycznego. Jak widać z powyższego wyprowadzenia, można ją łatwo uzyskać z charakterystyki magnesowania przez pomnożenie wszystkich jej odciętych H przez długość elementu l , a jej rzędnych B przez powierzchnię przekroju S .

Dla obwodów magnetycznych można zatem przy założeniach:

- 1) pomijalności strumienia rozproszenia,
- 2) jednorodności pola wewnątrz obwodu,

otrzymać układ składający się z równań:

I prawa Kirchhoffa $\sum \Phi = 0$ dla każdego węzła

II prawa Kirchhoffa $\sum U_M = 0$ dla każdego oczka

oraz charakterystyki elementu $U_M = U_M(\Phi)$ dla każdego elementu.

Spośród tych równań jedynie równania elementów są nieliniowe. Układ tych równań co do formy jest identyczny z układem równań opisujących nieliniowe obwody elektryczne prądu stałego:

$$\begin{aligned} \sum I &= 0 \\ \sum_o U &= 0 \\ U &= U(I) \end{aligned} \tag{8.1.14}$$

Analogia dotyczy tu

prąd I - strumień Φ

napięcie U - napięcie magnetyczne U_M

siła elektromotoryczna E - siła magnetomotoryczna F .

W ten sposób dla analizy i syntezy obwodów magnetycznych można przy spełnieniu podanych wyżej warunków stosować te same metody co dla nieliniowych obwodów prądu stałego.

Należy jednak zwrócić uwagę na to, że ze względu na specyfikę pola magnetycznego ściśle spełnienie powyższych założeń nie jest w zasadzie możliwe. Dlatego obliczenia oparte na powyższej metodzie będą obarczone błędami. Tym niemniej dokładność obliczeń może być w większości przypadków wystarczająca dla celów praktycznych. Dokładność tę można zresztą powiększyć przez częściowe uwzględnienie strumieni rozproszenia (poprzez wprowadzenie dodatkowych elementów obwodu), uwzględnienie zwiększenia efektywnego przekroju szczelin powietrznych itp.

Jeżeli charakterystyka magnesowania w przewidywanym zakresie natężeń pola jest liniowa lub może być aproksymowana linią prostą, to

$$B = \mu_r \mu_0 H \tag{8.1.15}$$

Mnożąc obustronnie przez powierzchnię przekroju S i uwzględniając, że $H = \frac{U_M}{l}$ otrzymamy stąd

$$\Phi = \frac{\mu_r \mu_0 S}{l} U_M \tag{8.1.16}$$

Oznaczając

$$R_M = \frac{l}{\mu_r \mu_0 S} \tag{8.1.17}$$

otrzymamy prawo Ohma dla liniowego elementu obwodu magnetycznego :

$$U_M = R_M \Phi \tag{8.1.18}$$

Napięcie magnetyczne na liniowym elemencie obwodu magnetycznego jest proporcjonalne do strumienia magnetycznego płynącego przez ten element.

Jak wynika ze wzoru (8.1.16), opór magnetyczny jest wprost proporcjonalny do długości, a odwrotnie proporcjonalny do powierzchni przekroju oraz przenikalności magnetycznej elementu. Również i tu istnieje analogia z oporem elektrycznym. Liniowymi elementami obwodu magnetycznego są w szczególności szczeliny powietrzne.

8.2. Obliczanie obwodów magnetycznych

Przy obliczaniu obwodów magnetycznych występują w zasadzie dwa zagadnienia. W obu zagadnieniach dany jest obwód magnetyczny, tj. jego konfiguracja, wymiary geometryczne oraz charakterystyki magnesowania materiałów obwodu.

W pierwszym zagadnieniu ponadto dane są wszystkie siły magnetomotoryczne $F = IZ$, a więc liczby zwojów i prądy poszczególnych uzwojeń. Obliczaniu podlegają strumienie w poszczególnych częściach obwodu. Jest to więc typowe zagadnienie analizy obwodu.

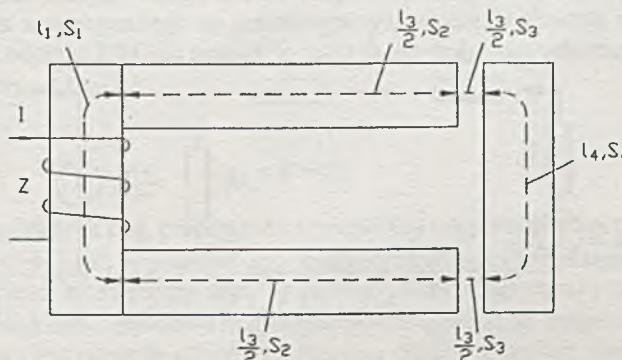
W drugim zagadnieniu oprócz obwodu dane są strumienie w pewnych częściach obwodu. Na ich podstawie należy wyznaczyć siły magnetomotoryczne, a więc liczby zwojów i prądy uzwojeń. W tym zagadnieniu tkwią więc elementy syntezy obwodu.

8.3. Obwód szeregowy

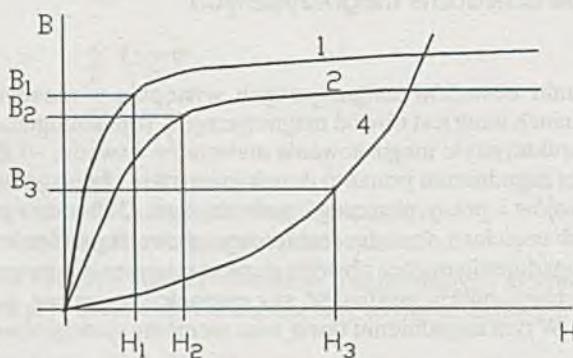
Na rys. 8.3.1 przedstawiony jest jednooczkowy obwód magnetyczny. Wymiary geometryczne obwodu podane są na rysunku, charakterystyki magnesowania materiałów poszczególnych części obwodu przedstawia rys. 8.3.2.

Jako długość elementów obwodu przyjmiemy długość średniej linii magnetycznej, jak to pokazano na rys. 8.3.1. (linia przerywana). Jest to, oczywiście, pewne przybliżenie polegające na zastąpieniu danego elementu z niejednorodnym polem, elementem o jednorodnym polu magnetycznym o długości równej długości średniej linii magnetycznej. Przyjęcie takie w większości przypadków, w szczególności przy dużym stosunku długości elementu do jego wymiarów poprzecznych, daje w praktyce dobre wyniki.

Dla powyższego obwodu można utworzyć schemat zastępczy, który przedstawiono na rys. 8.3.3a. Na schemacie tym element liniowy 3 zastępuje obie szczeleiny powietrza (są one połączone szeregowo), podobnie element 2 zastępuje obie części o długościach $\frac{l_2}{2}$ (jego równoważna długość wynosi $\frac{l_2}{2}$).



Rys. 8.3.1



Rys. 8.3.2

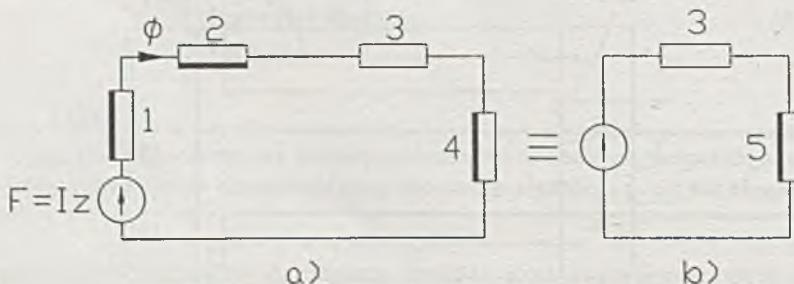
Obliczenie strumienia Φ wywołanego siłą magnetomotoryczną $F = Iz$ można przeprowadzić najlepiej metodą graficzną korzystając z metody zastępowania szeregowego połączenia elementów jednym elementem zastępczym: szeregowego połączenie elementów 1,2 i 4 można zastąpić jednym elementem 5 otrzymując układ z rys. 8.3.3b, który łatwo rozwiązać metodą podaną w rozdz. 6.4. Sposób konstrukcji rozwiązania przedstawiony jest na rys. 8.3.4. Ze znanych charakterystyk magnesowania materiałów, np. dla części 1:

$$B_1 = B_1(H_1)$$

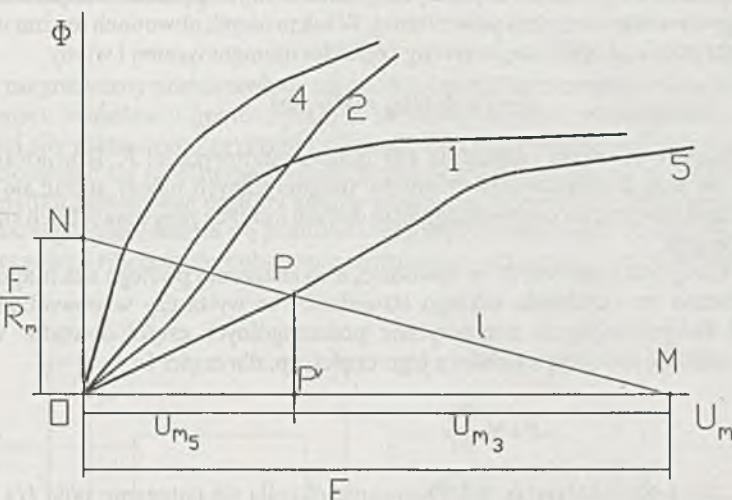
otrzymuje się charakterystyki

$$\Phi_1 = \Phi_1(U_{M1})$$

mnożąc wszystkie rzędne wykresu $B_1 = B_1(H_1)$ przez powierzchnię przekroju elementu S_1 , a wszystkie odcięte przez długość elementu l_1 , otrzymując w ten sposób charakterystykę pierwszego elementu ("1" na rys. 8.3.4). Podobnie otrzymuje się charakterystyki pozostałych elementów nieliniowych "2" i "4". Charakterystykę zastępczego elementu "5" otrzymuje się



Rys. 8.3.3



Rys. 8.3.4

przez sumowanie napięć magnetycznych elementów 1,2 i 4 dla tych samych wartości strumienia Φ w tych elementach. Rezultatem jest charakterystyka "5" na rys. 8.3.4.

Szczelina powietrzna jest liniowym elementem magnetycznym o oporze magnetycznym

$$R_{M3} = \frac{I_3}{\mu_r \mu_0 S_3}$$

Zgodnie z zasadami podanymi w rozdz. 6.4, na osi napięć magnetycznych U_M odcina się odcinek F , na osi strumienia Φ odcinek $\frac{F}{R_{M3}}$. Przez tak otrzymane punkty można przeprowadzić prostą "l", która w przecięciu z charakterystyką elementu "5" w punkcie P daje rozwiązanie: rzędna tego punktu równa jest wartości strumienia, który popłynie w obwodzie magnetycznym. Równocześnie długość odcinka OP' jest proporcjonalna do wartości napięcia magnetycznego na ferromagnetycznej części obwodu magnetycznego U_{M5} , zaś długość odcinka $P'M$ jest proporcjonalna do wartości napięcia magnetycznego na szczelinie powietrznej U_{M3} .

Ponieważ

$$U_{M3} + U_{M5} = F = Iz$$

można też powiedzieć, że U_{M5} przedstawia tę część siły magnetomotorycznej ("amperozwojów"), którą należy użyć, by pokonać opór magnetyczny części ferromagnetycznej obwodu, zaś U_{M3} tę część, którą należy użyć, by pokonać opór magnetyczny szczeliny. Warto zauważać, że w większości obwodów magnetycznych długość drogi magnetycznej w części ferromagnetycznej jest znacznie większa od długości drogi w szczelinie powietrznej, mimo to zazwyczaj

$$U_{M3} >> U_{M5}$$

Stąd wynika, że największa część siły magnetomotorycznej konieczna jest do pokonania oporu magnetycznego szczeliny powietrznej. W tak prostych obwodach można w pierwszym przybliżeniu pominąć opór magnetyczny części ferromagnetycznej i wtedy

$$F = Iz \approx U_{M3} = R_{M3} \Phi_3$$

Upraszczają to znacznie obliczenie siły magnetomotorycznej F . Równocześnie warto zauważać, że przy projektowaniu obwodów magnetycznych należy starać się o możliwie małe szczeliny powietrzne celem osiągnięcia dużych indukcji przy niewielkich siłach magnetomotorycznych.

Jeżeli znany jest strumień Φ w obwodzie, a wyznaczeniu podlega siła magnetomotoryczna konieczna do uzyskania takiego strumienia, to wystarczy w obwodzie rys. 8.3.3a wyznaczyć kolejno napięcia magnetyczne poszczególnych części obwodu. W tym celu wystarczy obliczyć indukcję z każdej z jego części, np. dla części 1:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$$

Następnie z charakterystyk magnesowania określa się natężenie pola H_1 w tej części (rys. 8.3.2).

Napięcie magnetyczne

$$U_{M1} = H_1 l_1$$

Dla szczeliny powietrznej

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu_0}$$

zatem

$$U_{M3} = \frac{B_3}{\mu_0} l_3 = \Phi_3 \frac{l_3}{\mu_0 S_3}$$

Konieczną siłę magnetomotoryczną można wyznaczyć z II prawa Kirchhoffa dla obwodów magnetycznych:

$$F = Iz = U_{M1} + U_{M2} + U_{M3} + U_{M4}$$

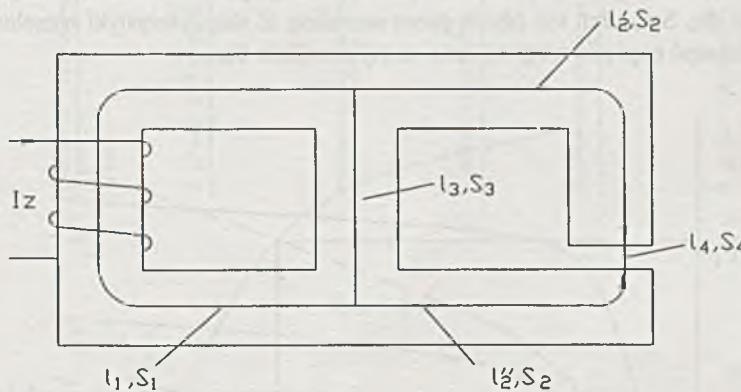
W przybliżeniu można ocenić konieczną siłę magnetomotoryczną F ("amperozwoje Iz):

$$F \approx U_{M3} = \Phi_3 \frac{l_3}{\mu_0 S_3}$$

8.4. Obwód dwuoczkowy

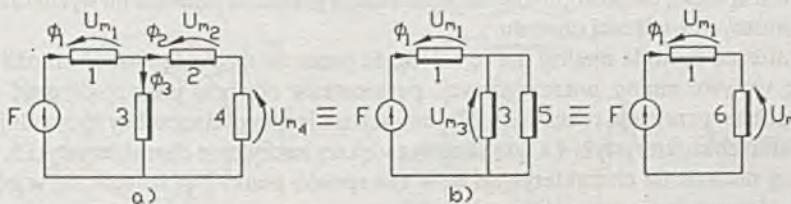
Obwód magnetyczny przedstawiony na rys. 8.4.1 posiada dwa oczka i dwa węzły.

Przy danych wymiarach geometrycznych obwodu, charakterystykach magnesowania oraz wartości siły magnetomotorycznej obliczenie strumieni magnetycznych można prowadzić opierając się na schemacie zastępczym przedstawionym na rys. 8.4.2a. Można w tym przypadku zastosować metody analizy stosowane w nieliniowych obwodach prądu stałego. W szczególności można się posłużyć metodą przekształcania obwodów zastępując kolejno szeregowie i równoległe połączenie elementów - elementami zastępczymi.



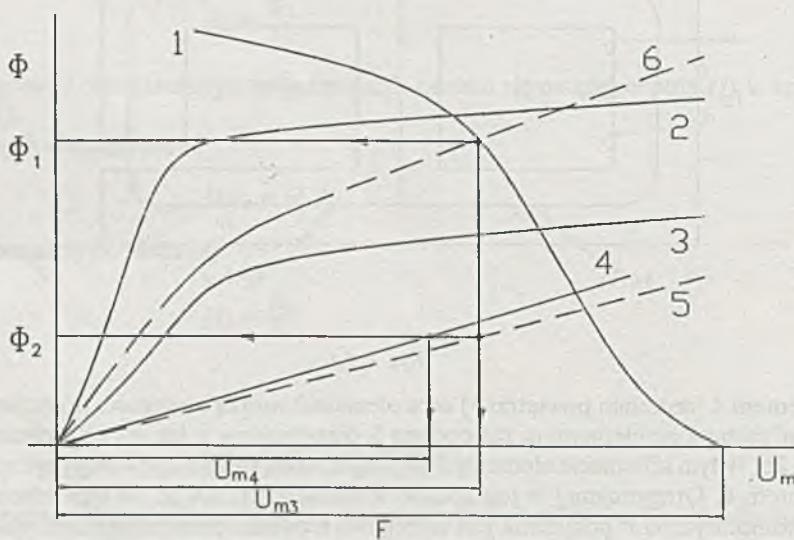
Rys. 8.4.1

Element 4 (szczelina powietrzna) oraz element 2 tworzą szeregową połączenie, mogą więc być zastąpione elementem zastępczym 5, otrzymujemy w ten sposób schemat jak na rys. 8.4.2b. W tym schemacie elementy 3 i 5 połączone są równolegle i mogą być zastąpione elementem 6. Otrzymujemy w ten sposób schemat z rys. 8.4.2c. W tym schemacie siła magnetomotoryczna F połączona jest szeregowo z dwoma elementami nieliniowymi. Zastosowanie metody podanej w rozdz. 6.4 pozwala na rozwiązywanie układu.



Rys. 8.4.2

Całość konstrukcji graficznej można przeprowadzić na jednym rysunku (rys. 8.4.3). Punktem wyjścia są charakterystyki elementu 4 (szczelina) oraz elementu 2. Dodając odcieć tych charakterystyk dla tych samych wartości strumienia w obu elementach otrzymamy charakterystykę zastępczego elementu 5. Warto zwrócić uwagę, że szczelina powietrza jako element liniowy o stosunkowo dużym oporze magnetycznym połączona szeregowo z elementem nieliniowym powoduje znaczną linearyzację wypadkowej charakterystyki 5. Sumując rzędne charakterystyk 5 i 3 otrzymamy charakterystykę elementu zastępczego 6. Zgodnie z konstrukcją podaną w rozdz. 6.4, rysujemy teraz charakterystykę $\Phi_1 = \Phi_1(F - U_{M1})$ dla elementu 1. Współrzędne punktu przecięcia się tej charakterystyki z charakterystyką elementu 6 wyznaczają nam strumień Φ_1 oraz napięcie magnetyczne U_{M3} . Z kolei dla tego napięcia można, z charakterystyki elementu 5, odczytać wartość strumienia Φ_2 . Strumień ten płynie przez szczelinę. Z charakterystyki szczeliny 4 można teraz wyznaczyć napięcie magnetyczne na tej szczelinie U_{M4} .

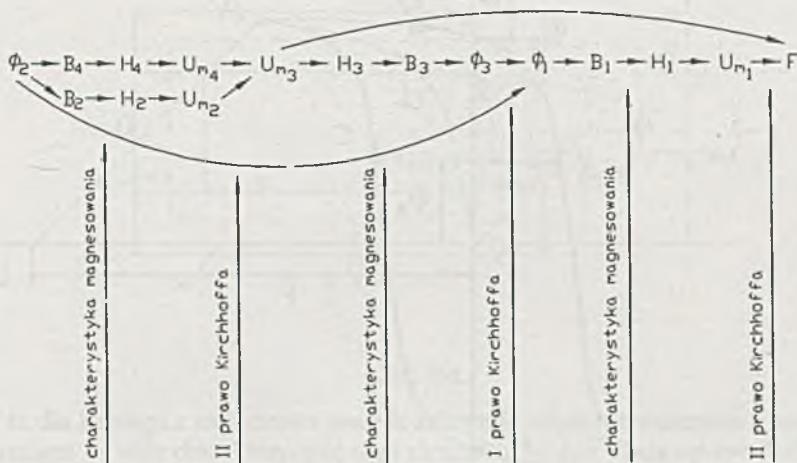


Rys. 8.4.3

W ten sposób, nieskomplikowana konstrukcja graficzna pozwala na wyznaczenie wszystkich istotnych wielkości obwodu.

Graficzna metoda analizy ma tę zaletę, że przez swoją poglądowość umożliwia łatwo analizę wpływu zmian poszczególnych parametrów obwodu jak np. długość szczeliny, powierzchnia przekroju rdzenia itp. Np. zmniejszenie długości szczeliny spowoduje większe nachylenie charakterystyki 4 a tym samym zwiększy nachylenie charakterystyki 5, co z kolei zwiększy nachylenie charakterystyki 6. W ten sposób punkt P przesunie się w górę powodując zwiększenie się strumieni w obwodzie.

Odwrotne zagadnienie - znalezienia wymaganej siły magnetomotorycznej zapewniającej odpowiednią wartość strumienia Φ_2 w szczelinie powietrznej, można zrealizować bez konstrukcji graficznej, stosując jedynie oba prawa Kirchhoffa oraz charakterystyki magnesowania. Rysunek 8.4.4 przedstawia schemat obliczeń.

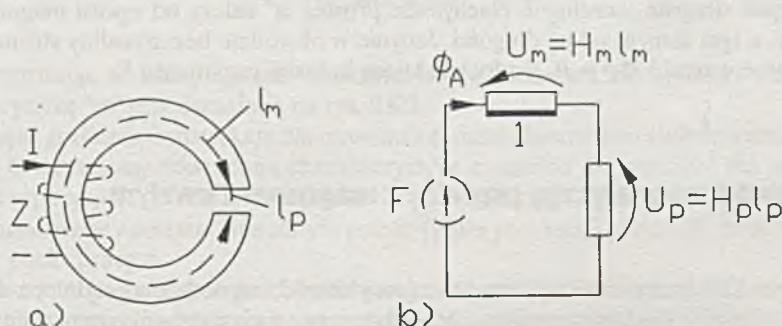


Rys. 8.4.4

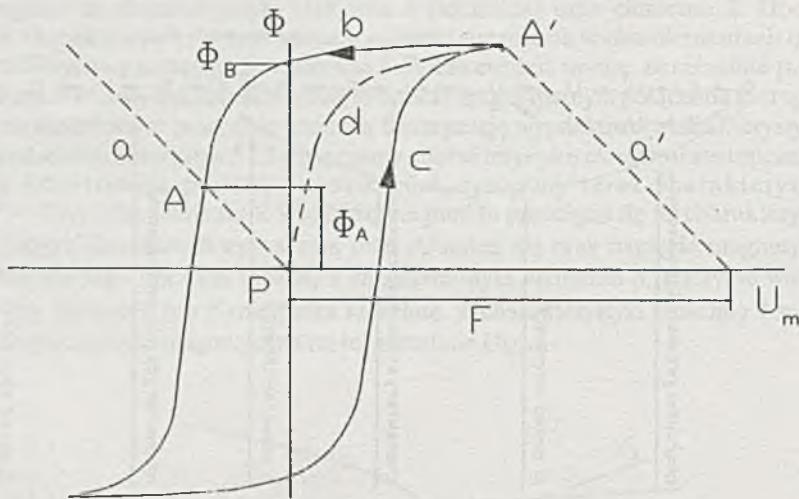
8.5. Obwód z magnesem trwałym

Metodę obliczania obwodów magnetycznych można zastosować również do obwodów z magnesami trwałymi. Na rys. 8.5.1a przedstawiony jest prosty obwód magnetyczny. Charakterystyka magnesowania materiałów przedstawiona jest na rys. 8.5.2.

Celem namagnesowania magnesu zastosowano uwzijenie o liczbie zwoi z i prądzie I , a więc sile magnetomotorycznej $F = Iz$. Jeżeli uprzednio materiał nie był namagnesowany, to włączenie siły magnetomotorycznej spowoduje ustalenie się punktu pracy na krzywej pierwszego magnesowania "d" w punkcie A'.



Rys. 8.5.1



Rys. 8.5.2

Jak widać, do tego konieczna jest odpowiednia siła magnetomotoryczna, która musi pokonać opór szczeliny powietrznej oraz opór magnetyczny magnesu trwałego. Po wyłączeniu siły magnetomotorycznej punkt pracy przesunie się po krzywej "b" do punktu A, którego współrzędne określą napięcie magnetyczne na szczelinie oraz na części ferromagnetycznej obwodu; jak wynika z II prawa Kirchhoffa, otrzymamy teraz (rys. 8.5.1b)

$$H_m l_m + H_p l_p = 0$$

czyli

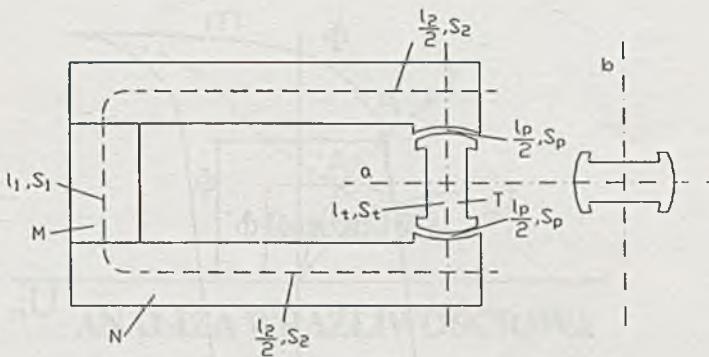
$$H_m l_m = - H_p l_p$$

Punkt A określi nam strumień Φ_A , jaki ustali się w obwodzie.

Strumień ten zależyć będzie od oporu magnetycznego szczeliny; będzie on tym większy, im mniejsza długość szczeliny l . Nabylenie prostej "a" zależy od oporu magnetycznego szczeliny, a tym samym od jej długości. Jedynie w obwodzie bez szczeliny strumień może przyjmować wartość $\Phi_B = B_r S$ odpowiadającą indukcji remanentu B_r .

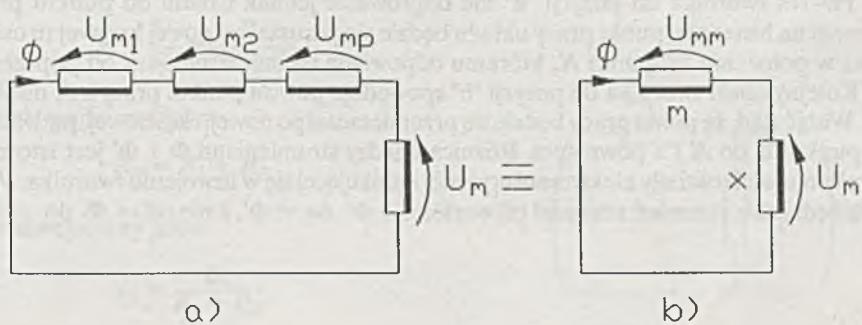
8.6. Obwód magnetyczny prądnicy z magnesem trwałym

Na rys. 8.6.1 przedstawiony jest uproszczony obwód magnetyczny prądnicy z magnesem trwałym. Obwód składa się z magnesu M, wykonanego z materiału magnetycznie twardego (posiadającego pętlę histerezy), nabiegunków N i twornika T wykonanych z materiału magnetycznego miękkiego (z "bezprętlową" charakterystyką magnesowania). Choćż kształty elementów nie spełniają ściśle założeń podanych w rozdziale 8.1, to jednak można



Rys. 8.6.1

przyjąć, że dla każdego z nich można znaleźć zależność między strumieniem a napięciem magnetycznym - a więc charakterystykę tego elementu. Można wtedy wprowadzić obwód zastępczy przedstawiony na rys. 8.6.2a, który po zastąpieniu szeregowego połączenia elementów, magnesu i nabiegunków jednym elementem zastępczym "m", a szczelin powietrznych z twornikiem elementem zastępczym "x" można sprowadzić do obwodu z rys. 8.6.2b.

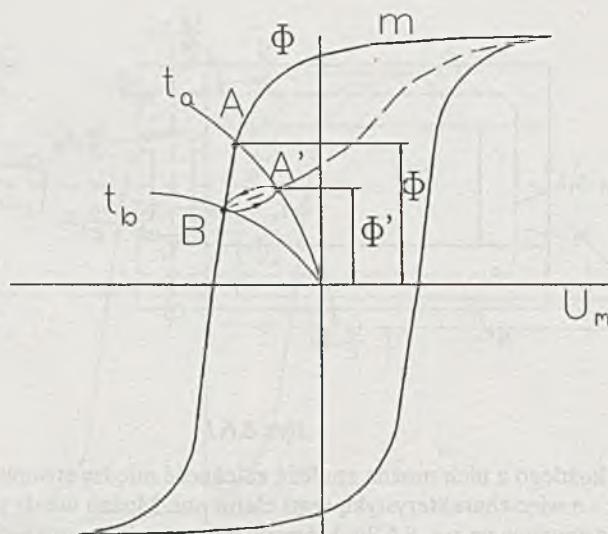


Rys. 8.6.2

Konstruując w znany sposób charakterystykę elementu zastępczego otrzymamy charakterystykę "m" przedstawioną na rys. 8.6.3.

Stosując graficzną konstrukcję dla obwodu z dwoma elementami nieliniowymi, podaną w rozdz. 6.4, rysujemy odwróconą charakterystykę elementu T (twornika) dla położenia twornika w pozycji a (rys. 8.6.1) i otrzymamy charakterystykę t_a . Jeżeli obwód magnetyczny był namagnesowany dostatecznie silnym polem (patrz poprzedni przykład), to w obwodzie ustali się punkt pracy A.

Jeżeli teraz twornik obróci się wokół swej osi w położenie b (rys. 8.6.1), to wskutek zwiększenia się szczeliny zmieni się znacznie opór magnetyczny elementu "t". Element ten będzie teraz opisany przez charakterystykę t_b (rys. 8.6.3). Punkt pracy A przesunie się do punktu B, w obwodzie ustali się mniejsza wartość strumienia magnetycznego.



Rys. 8.6.3

Powrót twornika do pozycji "a" nie doprowadzi jednak układu do punktu pracy A. Z uwagi na histerezę, punkt pracy układu będzie się poruszał po nowej krzywej m osiągając teraz w położeniu "a" punkt A', któremu odpowiada strumień mniejszy od poprzedniego Φ' . Kolejny obrót twornika do pozycji "b" spowoduje powrót punktu pracy z A' do B.

Widać stąd, że punkt pracy będzie się przemieszczał po nowej, częściowej, pętli histerezji od punktu B do A' i z powrotem. Różnica między strumieniami Φ i Φ' jest istotna przy określaniu wielkości siły elektromotorycznej indukującej się w uzwojeniu twornika. W tworniku będzie się strumień zmieniał od wartości $+ \Phi'$ do $- \Phi'$, a nie od $+ \Phi$ do $- \Phi$.

Rozdział 9

ANALIZA WRAZLIWOŚCIOWA

9.1. Zależność funkcji układowych od parametrów obwodu

Przy dotychczasowych rozważaniach zakładano, że wszystkie parametry obwodu (opory, SEM, SPM itd.) mają stałe wartości, zaś prądy i napięcia zależne są od tych parametrów obwodu. Rozpatrzmy np. obwód dzielnika napięcia przedstawiony na rys. 9.1.1. Transmitem tego układu można wyrazić jako:

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

jego opór wejściowy jako:

$$R_w = R_1 + R_2$$

zaś prąd wejściowy jako:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + R_2}$$

Wszystkie te wyrażenia mają wspólną postać:

Rys. 9.1.1

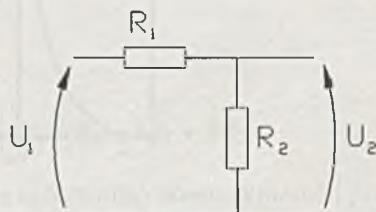
$$F = F(R_1, R_2)$$

gdzie F nazwiemy funkcją układową. Mogą nią być zarówno prąd, napięcie transmitancja itp. Funkcja układowa jest więc zależnością danej wielkości od parametrów obwodu :

$$F = F(\mathbf{X})$$

przy czym $\mathbf{X} = [X_1, X_2 \dots X_n]^T$ jest wektorem parametrów obwodu. W powyższym przykładzie $\mathbf{X} = [R_1, R_2]^T$.

Przy budowie układów elektronicznych, a w szczególności przy masowej produkcji tych układów, trzeba uwzględnić fakt, że poszczególne parametry obwodu mogą wykazywać



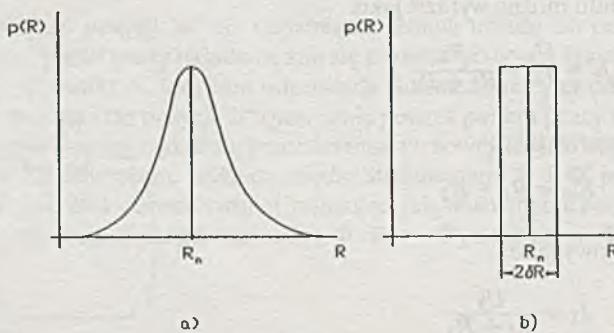
odchylenia od ich nominalnych wartości, dla których układ został zaprojektowany. W związku z tym również wszystkie funkcje układowe (prądy, napięcia, transmitancje itp.) będą wykazywały odchylenia od zaprojektowanych wartości.

Naszym zadaniem będzie analiza zależności funkcji układowych od zmian ich parametrów.

9.2. Obszary tolerancji i rozrzutu

Dokonując pomiaru partii oporów o nominalnych wartościach R_n , zauważymy rozkład wartości oporów wokół ich wartości nominalnych. Rozkład ten może mieć np. charakter przedstawiony na rys. 9.2.1a, gdzie $p(R)$ przedstawia gęstość rozkładu prawdopodobieństwa. Jeżeli z tej partii wyselekcjonujemy wstępnie opory o wartościach $R_n \pm \delta R$, to rozkład tej partii możemy często przybliżyć za pomocą rozkładu równomiernego, przedstawionego na rys. 9.2.1b. W tym przypadku opory z tej partii przyjmują wartości z zakresu:

$$R_n \left(1 - \frac{\delta R}{R_n}\right) \leq R \leq R_n \left(1 + \frac{\delta R}{R_n}\right)$$



Rys. 9.2.1

Wielkość $t_n = \frac{\delta R}{R_n}$ nazywana jest tolerancją elementu.

Wprowadzimy pojęcie obszaru tolerancji parametrów układu.

Obszarem tolerancji układu nazywamy obszar, w którym znajdują się parametry układu z uwzględnieniem ich tolerancji.

Dla układu z rys. 9.1.1 obszar ten przedstawiony jest na rys. 9.2.2 jako prostokąt. Przy większej liczbie parametrów otrzymujemy jako obszar tolerancji hiperprostopadłością tolerancji.

Jeżeli zbudujemy układ z elementów których parametry mieszą się w obszarze tolerancji, to funkcja układowa również będzie miała pewne rozrzuty jej wartości.

Obszar rozrzutu jest to obszar, w którym znajdują się wartości funkcji układowej, jeżeli parametry układu znajdują się w obszarze tolerancji.

Celem obliczenia obszarów rozrzutu funkcji układowych należałoby obliczyć największe i najmniejsze wartości funkcji układowych dla wartości parametrów z obszaru tolerancji. Dla układu z rys. 9.1.1 obszar rozrzutu dla transmitancji K będzie określony przez:

$$K_- \leq K \leq K_+$$

gdzie

$$K_- = \frac{R_2 - \delta R_2}{R_1 + \delta R_1 + R_2 - \delta R_2}$$

$$K_+ = \frac{R_2 + \delta R_2}{R_1 - \delta R_1 + R_2 + \delta R_2}$$

dla R_w zaś:

$$R_{w-} \leq R_w \leq R_{w+}$$

gdzie

$$R_{w-} = R_1 + R_2 - \delta R_1 - \delta R_2 \quad R_{w+} = R_1 + R_2 + \delta R_1 + \delta R_2$$

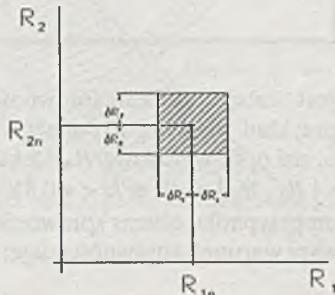
Obliczanie obszarów rozrzutu tą metodą jest na ogół bardzo skomplikowane i pracochłonne. Przedstawimy dalej bardziej efektywne metody obliczania obszarów rozrzutu.

9.3. Warunki sprawności układu

Podstawą do projektowania układów są zazwyczaj pewne warunki nałożone na odpowiednie funkcje układowe, zapewniające poprawną pracę układu. W wspomnianym przykładzie dzielnika napięć mogą to być np. żądania, by transmitancja układu oraz opór wejściowy dzielnika spełniały warunki:

$$K_{\min} \leq K \leq K_{\max}$$

$$R_{w \min} \leq R_w \leq R_{w \max}$$



Rys. 9.2.2

Warunki te nazywamy warunkami sprawności. Celem projektowania będzie znalezienie takiego obszaru parametrów, który zapewni spełnienie warunków sprawności. Będzie to tzw. obszar sprawności układu.

Obszarem sprawności układu R_A nazywamy zbiór wartości parametrów układu, dla którego układ spełnia narzucone warunki sprawności:

$$R_A = \{ X \mid F_i \min \leq F_i \leq F_i \max \} \quad i = 1 \dots m$$

gdzie m jest liczbą warunków sprawności.

Na przykład dla rozpatrywanego przykładu, wartość transmitancji K ma wynosić $0.5 \pm 2\%$, zaś opór wejściowy R_w $2 \text{ k}\Omega + -10\%$, wtedy:

$$R_A = \{ R_1, R_2 \mid 0.49 \leq K \leq 0.51, 1.8 \text{ k}\Omega \leq R_w \leq 2.2 \text{ k}\Omega \}.$$

W tym przypadku obszar sprawności można łatwo wyznaczyć z następujących równań: Pierwszy warunek sprawności daje:

$$0.49 \leq \frac{R_2}{R_1 + R_2} \leq 0.51$$

Granice obszaru sprawności można wyznaczyć ze skrajnych równości, które dają nam równania prostych, ograniczających obszar sprawności (rys. 9.3.1):

$$R_2 = \frac{0.51}{0.49} R_1 \quad \text{prosta } K_{\max}$$

$$R_2 = \frac{0.49}{0.51} R_1 \quad \text{prosta } K_{\min}$$

Wartości R_1 i R_2 leżące między tymi prostymi, w zakresowanym obszarze, spełniają wymagania odnośnie do transmitancji K .

Drugi warunek sprawności daje :

$$1.8 \text{ k}\Omega \leq R_1 + R_2 \leq 2.2 \text{ k}\Omega$$

skąd proste ograniczające ten obszar sprawności :

$$R_2 = -R_1 + 2.2 \text{ k}\Omega \quad \text{prosta } R_w \max$$

$$R_2 = -R_1 + 1.8 \text{ k}\Omega \quad \text{prosta } R_w \min$$

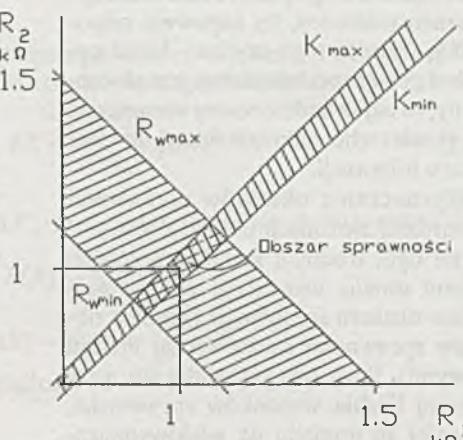
Wartości R_1 i R_2 leżące między tymi prostymi, w zakresowanym obszarze, spełniają wymagania odnośnie do oporu wejściowego R_w .

Obydwa warunki sprawności spełnione są dla wartości R_1 i R_2 leżących wewnątrz podwójnie zakresowanej części - obszaru sprawności R_A . Wewnątrz obszaru sprawności leży również punkt nominalny (dla wartości $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$).

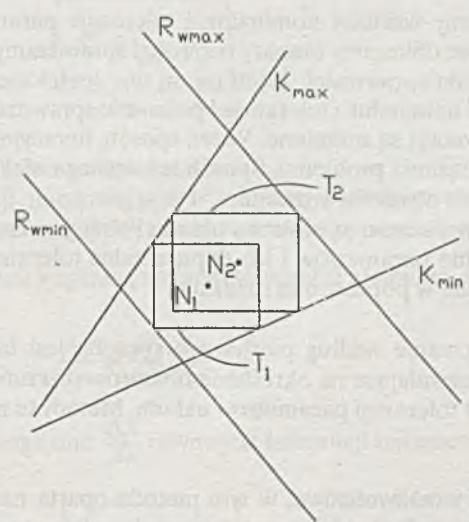
Znajomość obszaru sprawności daje możliwość bardzo efektywnego projektowania układów, pozwalając na rozwiązanie m.in. takich problemów, jak centrowanie, czyli dobór nominalnych wartości parametrów, oraz problem doboru tolerancji poszczególnych parametrów. Pokażemy to na przykładzie rys. 9.3.2, na którym przedstawiony jest obszar

sprawności układu R_w . Jeżeli dobierzymy jako punkt nominalny punkt N_1 (a więc nominalne wartości elementów X_{in}), to obszar tolerancji T_1 zapewni, że wszystkie układy wykonane z elementów, których parametry znajdują się w obszarze tolerancji będą spełniały warunki sprawności. Łatwo zauważyc, że nominalny punkt N_2 umożliwia stosowanie większych tolerancji parametrów. Ponieważ koszt elementów maleje wraz ze zwiększeniem ich tolerancji, to rozwiązań to jest korzystniejsze.

Przy produkcji masowej wymaganie, by każdy wykonany układ spełniał warunki sprawności, jest ze względów ekonomicznych często niecelowe. Mówimy wtedy o tzw. uzysku, który równy jest stosunkowi liczby sprawnych układów uzyskanych w procesie produkcji do liczby wykonanych układów. Znajomość obszaru sprawności pozwala na ocenę tego uzysku. Na rys. 9.3.3 przedstawiony jest obszar sprawności układu R_A , przyjęty punkt nominalny N oraz założony obszar tolerancji T . Sprawne będą jedynie układy zbudowane z elementów, których wartości parametrów leżą wewnątrz zakreskowanej części (wewnątrz obszaru wspólnego R_A i T). Można wtedy obliczyć uzysk na podstawie znajomości tych obszarów. Pozwala to również



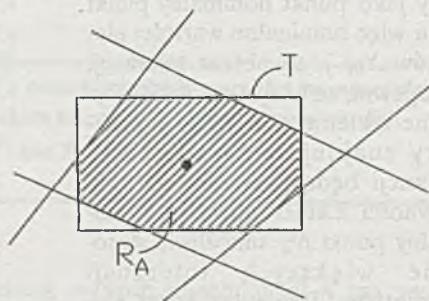
Rys. 9.3.1



Rys. 9.3.2

na dobranie takiego punktu nominalnego i obszaru tolerancji, by zapewnić odpowiednią wartość tego uzysku. Jeżeli np. rozkład prawdopodobieństwa jest równomierny, to uzysk będzie równy stosunkowi pola powierzchni zakreskowanej do pola obszaru tolerancji.

Wyznaczanie obszarów sprawności dla bardziej złożonych układów jest jednak na ogół trudnym zadaniem, rzadko bowiem można wyznaczyć analitycznie granice obszaru sprawności (granice obszarów sprawności są zazwyczaj liniami krzywymi). Poza tym pojawiają się, przy większej liczbie warunków sprawności, trudności ze względu na wielowymiarowość problemu.



Rys. 9.3.3

9.4. Projektowanie układów zapewniające spełnienie warunków sprawności

Przy projektowaniu układów zadane są zazwyczaj wymagane warunki sprawności układu.

Możliwe są dwa sposoby podejścia do tego zagadnienia:

1. Dobieramy wartości nominalne i tolerancje parametrów, na ich podstawie obliczamy obszary rozrzutu i sprawdzamy, czy spełnione są warunki sprawności. Jeżeli nie są one spełnione, to zmieniamy wartości nominalne i tolerancje i ponownie sprawdzamy, czy warunki sprawności są spełnione. W ten sposób, iteracyjnie, dochodzimy do rozwiązania problemu. Sposób ten wymaga efektywnych metod obliczania obszarów rozrzutu.
2. Obliczamy obszar sprawności układu i z niego określamy wartości nominalne parametrów i ich dopuszczalne tolerancje. Sposób ten omówiono w poprzednim rozdziale.

Zazwyczaj postępowanie według pierwszego sposobu jest łatwiejsze. Należy zatem przedstawić metody pozwalające na określanie obszarów rozrzutu na podstawie znanych wartości nominalnych i tolerancji parametrów układu. Metody te można podzielić na dwie grupy:

1. metody wrażliwościowe, w tym metoda oparta na tzw. obwodzie dołączonym i metoda oparta na tzw. obwodzie przyrostowym,
2. metoda funkcji biliniowej.

9.5. Metoda wrażliwościowa

Wyznaczmy wpływ zmiany wartości jednego z parametrów X funkcji układowej $F(X)$ na tą funkcję. Jeżeli X zmieni się o ΔX , to otrzymamy z rozkładu na szereg Taylora:

$$F(X + \Delta X) = F(X) + \frac{\partial F}{\partial X} \Delta X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} (\Delta X)^2 + \dots \quad (9.5.1)$$

Zakładając małe zmiany parametrów ΔX , można ograniczyć się do liniowego członu:

$$F(X + \Delta X) \approx F(X) + \frac{\partial F}{\partial X} \Delta X$$

albo

$$\Delta F = F(X + \Delta X) - F(X) = \frac{\partial F}{\partial X} \Delta X$$

Wprowadzając tzw. wrażliwość bezwzględną S :

$$S = \frac{\partial F}{\partial X} \quad (9.5.2)$$

otrzymamy przyrost funkcji układowej spowodowany zmianą parametru o ΔX :

$$\Delta F \approx S \Delta X \quad (9.5.3)$$

Wprowadza się też tzw. wrażliwość względową S_x^F , (gdzie górny indeks oznacza funkcję układową, a dolny zmienną, względem której oblicza się wrażliwość) :

$$S_x^F = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{X_n}{F_n} \quad (9.5.4)$$

gdzie:

X_n - wartość nominalna parametru,

F_n - wartość funkcji układowej przy nominalnej wartości parametru.

Dzieląc obustronnie wzór 9.5.3 przez F_n , możemy wyrazić względną zmianę funkcji układowej $t_r = \frac{\Delta F}{F_n}$ przez względową zmianę parametru elementu $t_x = \frac{\Delta X}{X_n}$:

$$\frac{\Delta F}{F_n} = \frac{\partial F}{\partial X} \frac{X_n}{F_n} \frac{\Delta X}{X_n}$$

Jeżeli odchylenie względne $\frac{\Delta X}{X_n}$ równe jest tolerancji parametru $\frac{\delta X}{X_n}$, to

$$t_F = S_x^F t_x \quad (9.5.5)$$

Wzory 9.5.3 i 9.5.5 ważne są tylko dla małych odchyлеń od wartości nominalnej, t.zn. takich, przy których wystarczy z dostateczną dokładnością uwzględnić tylko liniowy człon w rozkładzie na szereg Taylora (9.5.1).

Dla równoczesnej zmiany wielu parametrów można, ograniczając się znowu do liniowych członów w rozkładzie na szereg Taylora, otrzymać:

$$F(X + \Delta X) \approx F(X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i} \Delta X_i$$

stąd

$$\Delta F \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i} \Delta X_i$$

oraz

$$\Delta F \approx \sum_{i=1}^n S_i \Delta X_i \quad (9.5.6)$$

gdzie: $S_i = \frac{\partial F}{\partial X_i}$ są wrażliwościami funkcji układowej względem i-tego parametru. Wzór ten pozwala na obliczenie wartości odchylenia funkcji układowej dla dowolnych odchyлеń parametrów od ich wartości nominalnych.

Wprowadzając zaś wrażliwości względne $S_{x_i}^F = \frac{\partial F}{\partial X_i} \frac{X_{in}}{F_n}$ otrzymamy:

$$t_F = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^F t_{x_i} \quad (9.5.7)$$

Wzory 9.5.6 oraz 9.5.7 pozwalają na obliczenie względnego odchylenia funkcji układowej pod wpływem zmian wartości n parametrów. Na ich podstawie można obliczyć obszar rozrzutu. Poszczególne członów tych wyrażeń mogą przyjmować wartości dodatnie lub ujemne w zależności od znaków wrażliwości S_{x_i} i odchylen ΔX_i . Rozpatrzmy tzw. najgorszy przypadek, który wystąpi wtedy, gdy wszystkie członów pod znakiem sumy będą miały te same znaki, wtedy odchylenie funkcji układowej będzie maksymalne:

$$\Delta F_{\max} \approx \sum_{i=1}^n |S_i \Delta X_i| \quad (9.5.8)$$

albo

$$t_r = \sum_{i=1}^n |S_{x_i}^F t_{x_i}| \quad (9.5.9)$$

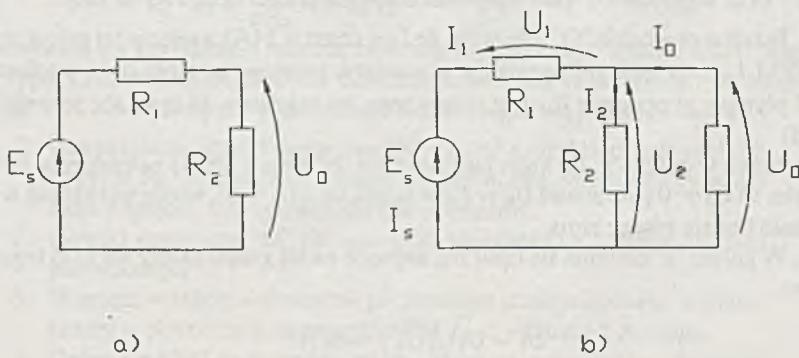
Obszar rozrzutu wynosi wtedy $F_n \pm \Delta F_{\max}$. W tym przypadku wszystkie układy zbudowane z elementów o tolerancjach t_{xi} będą miały wartości funkcji układowej mieszczące się w obszarze rozrzutu. Wszystkie wyniki otrzymane metodą wrażliwościową są przybliżone i mają wystarczającą dokładność jedynie przy odpowiednio małych tolerancjach t_{xi} .

Podstawową zaletą metody wrażliwościowej jest możliwość równoczesnego obliczania wpływu wielu parametrów oraz stosunkowo mały nakład obliczeniowy, co przedstawimy w następnych paragrafach. Pewną wadą jest natomiast możliwość jej stosowania jedynie przy małych odchyleniach parametrów od ich wartości nominalnych oraz trudności w ocenie "małości" tych parametrów.

Podstawowym zagadnieniem przy stosowaniu tej metody jest efektywne obliczanie wrażliwości funkcji układowych na zmiany parametrów obwodu. W następnych rozdziałach przedstawimy podstawy dwóch metod pozwalających na efektywne obliczanie tych wrażliwości.

9.6. Metoda wrażliwościowa oparta na obwodzie dołączonym

Niech dany będzie obwód "N", przedstawiony na rys. 9.6.1a, dla którego należy obliczyć wrażliwość napięcia U_o na zmianę oporu R_1 . Wprowadźmy nową gałąź o nieskończonym wielkim oporze dołączoną do miejsc, pomiędzy którymi istnieje napięcie U_o (w tym przypadku równolegle do oporu R_2), otrzymujemy wtedy obwód z rys. 9.6.1b. Wprowadzenie tej gałęzi jest zabiegiem czysto formalnym, nie zmienia ono rozprływu prądów i rozkładu napięć w obwodzie.



Rys. 9.6.1

Rozpatrzmy równolegle obwód "D" o identycznej strukturze (o tym samym grafie), rys. 9.6.2, w którym dobierzemy później rodzaj elementów i ich parametry. Prądy i napięcia tego obwodu oznaczymy daszkami \wedge .

Z twierdzenia Tellegena (rozdział 4.3) wynika:

$$\sum U \hat{I} = 0$$

$$\sum \hat{U} I = 0$$

Jeżeli w obwodzie "N" skutkiem zmiany parametrów obwodu ulegną zmianie napięcia o dU i prądy o dI , to powyższe równania przyjmą postać:

$$\sum (U + dU) \hat{I} = 0$$

$$\sum \hat{U} (I + dI) = 0$$

odejmując te równania stronami otrzymamy:

$$\sum (\hat{I} dU - \hat{U} dI) = 0 \quad (9.6.1)$$

Dla rozpatrywanego obwodu otrzymamy:

$$\begin{aligned} (\hat{I}_s dU_s - \hat{U}_s dI_s) + (\hat{I}_1 dU_1 - \hat{U}_1 dI_1) + \\ + (\hat{I}_2 dU_2 - \hat{U}_2 dI_2) + (\hat{I}_o dU_o - \hat{U}_o dI_o) = 0 \end{aligned} \quad (9.6.2)$$

Podkreślimy jeszcze raz, że równanie 9.6.2, wynikające z zasady Tellegena, jest ważne niezależnie od rodzaju i wartości parametrów elementów obwodu "D", możemy zatem fakt ten wykorzystać do uproszczenia powyższego wyrażenia. Celem naszym jest obliczenie zmiany dU_o napięcia U_o pod wpływem zmiany wartości oporu R_1 o dR_1 :

1. Jeżeli w obwodzie "D" założymy, że $I_o = \text{const} = 1$ [A], a więc w tej gałęzi umieszczona jest SPM I_o , to ostatnie wyrażenie w nawiasie przyjmie wartość dU_o , ponieważ $dI_o = 0$ (prąd płynący przez opór R_o jest równy zero, bo założono, że opór R_o jest nieskończonym wielikiem)

2. Jeżeli w gałęzi "s" (w której w obwodzie "N" działa SEM) założymy w obwodzie "D" zwarcie, to $\hat{U}_s = 0$ (ponieważ $U_o = E_s = \text{const}$, to $dU_s = 0$), wtedy wyrażenie w pierwszym nawiasie będzie równe zero.

3. W gałęzi "1" zmienia się opór R_1 , napięcie na tej gałęzi zależy więc od tego oporu i od prądu:

$$U_1 = U_1 (R_1, I_1) = R_1 I_1$$

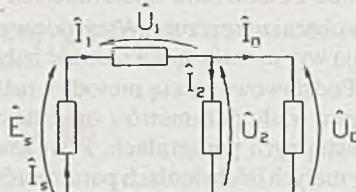
skąd

$$dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial U_1}{\partial I_1} dI_1 = I_1 dR_1 + R_1 dI_1$$

zatem wyrażenie w drugim nawiasie

$$(\hat{I}_1 dU_1 - \hat{U}_1 dI_1) = \hat{I}_1 I_1 dR_1 + \hat{I}_1 R_1 dI_1 - \hat{U}_1 dI_1$$

przyjmując w obwodzie "D" ten sam opór R_1 , a więc $\hat{U}_1 = \hat{I}_1 R_1$, otrzymamy



Rys. 9.6.2

$$(\hat{I}_1 dU_1 - \hat{U}_1 dI_1) = \hat{I}_1 I_1 dR_1$$

4. W gałęzi "2" opór R_2 nie ulega zmianie, zatem

$$dU_2 = \frac{\partial U_2}{\partial I_2} dI_2 = R_2 dI_2$$

zakładając w obwodzie "D" ten sam opór R_2 , otrzymamy

$$(\hat{I}_2 dU_2 - \hat{U}_2 dI_2) = \hat{I}_2 R_2 dI_2 - \hat{I}_2 R_2 dI_2 = 0$$

Ostatecznie równanie 9.6.2 przyjmie postać:

$$\hat{I}_1 I_1 dR_1 + dU_o = 0$$

skąd

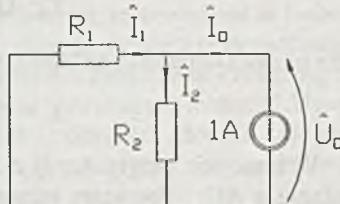
$$S_1 = \frac{dU_o}{dR_1} = -\hat{I}_1 I_1 \quad (9.6.3)$$

Obwód "D", nazywany też obwodem dołączonym, przedstawiony jest na rys. 9.6.3. Jak z powyższego wynika, wrażliwość napięcia U_o na zmianę oporu R_1 można wyznaczyć obliczając prąd I_1 w obwodzie pierwotnym "N" oraz prąd \hat{I}_1 w obwodzie dołączonym. Łatwo zauważyc, że obliczając wszystkie prądy w obu obwodach można obliczyć wrażliwość napięcia U_o na zmianę wartości oporu R_2

$$S_2 = \frac{dU_o}{dR_2} = -\hat{I}_2 I_2$$

Przedstawioną na przykładzie metodę obwodu dołączonego można łatwo uogólnić. Równanie typu 9.6.2 można napisać dla dowolnego obwodu składającego się z oporów, SEM oraz SPM. Obwód dołączony konstruuje się według następujących zasad:

1. Uzupełniamy obwód pierwotny "N" o gałąź z nieskończenie wielkim oporem R_o umieszczoną pomiędzy punktami, między którymi istnieje napięcie, którego wrażliwość obliczamy.
2. Obwód dołączony "D" posiada graf identyczny z grafem obwodu pierwotnego.
3. W gałęzi, w której w obwodzie pierwotnym istnieje opór R_o , umieszczać w obwodzie dołączonym SPM \hat{I}_o o wartości 1 Ampera.
4. Gałęzie z SEM w obwodzie pierwotnym zastępujemy w obwodzie dołączonym zwarciem, a gałęzie z SPM przerwą.
5. Gałęzie zawierające opory w obwodzie pierwotnym występują w obwodzie dołączonym z tymi samymi wartościami.
6. Wrażliwości na zmiany oporu w i-tej gałęzi oblicza się jako:



Rys. 9.6.3

$$S_i = -\hat{I}_i I_i \quad (9.6.4)$$

Podobnie można otrzymać wzory na wrażliwość na zmiany SEM, SPM, sił sterowanych oraz wrażliwości innych funkcji układowych [1], [3], [4].

Warto zauważyć, że dokonując dwóch analiz - obwodu pierwotnego i obwodu dołącznego - otrzymuje się wrażliwości danej funkcji układowej na zmiany wszystkich parametrów obwodu.

9.7. Metoda wrażliwościowa oparta na obwodzie przyrostowym

Założymy, że w obwodzie liniowym obliczono wszystkie prądy i napięcia poszczególnych elementów. Układ równań opisujący ten obwód składa się z obu praw Kirchhoffa (równania 4.2.9a i 4.2.15) :

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (9.7.1)$$

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (9.7.2)$$

oraz prawa Ohma dla każdego z elementów obwodu:

$$I_i = G_i U_i \quad (9.7.3)$$

W metodzie przyrostowej zakładamy, że wartość jednej z przewodności G_j uległa zmianie o ΔG_j . Pozostałe parametry obwodu pozostają nie zmienione. Skutkiem tego będzie zmiana wartości wszystkich prądów o ΔI i napięć o ΔU , wobec tego prawa Kirchhoffa przyjmą teraz postać:

$$\mathbf{A} (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (9.7.4)$$

$$\mathbf{C}^T (\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (9.7.5)$$

prawo Ohma dla wszystkich gałęzi, za wyjątkiem j-tej gałęzi:

$$I_i + \Delta I_i = G_i (U_i + \Delta U_i)$$

co, z uwagi na 9.7.3 daje:

$$\Delta I_i = G_i \Delta U_i \quad (9.7.6)$$

dla j-tej gałęzi zaś :

$$I_j + \Delta I_j = (G_j + \Delta G_j)(U_j + \Delta U_j)$$

Jeżeli uwzględnimy w tym równaniu równanie 9.7.3 oraz założymy, że zmiany parametru ΔG_j są małe, wtedy można pominąć człon $\Delta U_j \Delta G_j$, otrzymując dla j-tej gałęzi:

$$\Delta I_j = G_j \Delta U_j + \Delta G_j U_j \quad (9.7.7)$$

Dla tego ostatniego równania można znaleźć układ zastępczy w postaci równoległego połączenia przewodności G_j oraz SPM o wartości $\Delta G_j U_j$ (rys. 9.7.1).

Równania 9.7.4 - 9.7.7 opisują nowy obwód, tzw. obwód przyrostowy. Jak łatwo zauważyć, posiada on tę samą strukturę co obwód pierwotny, usunięto z niego jedynie stałe SEM i SPM zastępując je odpowiednio przez zwarzcie i przerwę, oraz zastąpiono gałąź "j" wyżej wymienionym układem zastępczym. Prądy ΔI_i oraz napięcia ΔU_i obliczone w tym obwodzie będą szukanymi przyrostami spowodowanymi przyrostem przewodności G_j o wartość ΔG_j .

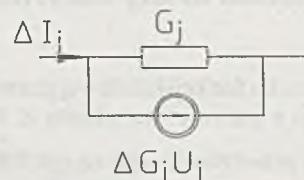
Wrażliwość poszczególnych prądów na zmianę parametru G_j o ΔG_j można stąd obliczyć jako:

$$S_{ij} = \frac{\Delta I_i}{\Delta G_j}$$

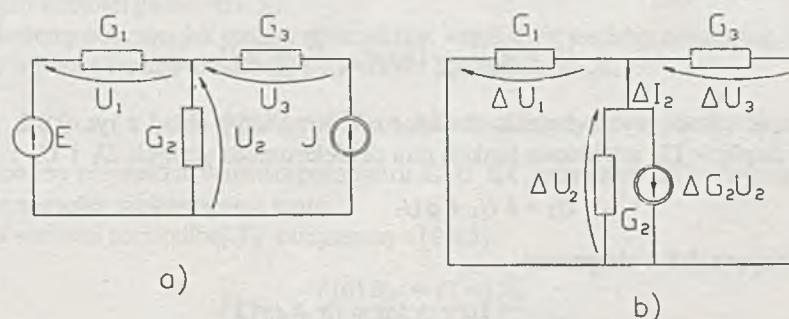
podobnie dla napięć itp.

Z punktu widzenia złożoności obliczeniowej warto zauważyć, że konieczne są tu dwie analizy obwodu. Pierwsza - analiza obwodu pierwotnego - i druga - obwodu przyrostowego. Ponieważ obwód przyrostowy ma tę samą strukturę i wartości elementów i różni się od obwodu pierwotnego tylko innymi siłami wymuszającymi, to korzystając z metody LU przy rozwiązywaniu równań, można osiągnąć dalsze uproszczenie obliczeń. Metoda daje przy tym możliwość obliczenia wrażliwości wszystkich prądów (napięć) na zmianę jednego z parametrów w trakcie jednej analizy.

Rozpatrzmy dla przykładu obwód z rys. 9.7.2a. Jeżeli chcemy obliczyć przyrosty prądów i napięć spowodowane zmianą przewodności G_2 o ΔG_2 , to otrzymujemy obwód przyrostowy z rys. 9.7.2b. Obwód ten ma identyczną strukturę z obwodem pierwotnym, jedynie zastąpiono SEM E zwarciem, SPM J przerwą i zastąpiono przewodność G_2 układem zastępczym składającym się z tejże przewodności połączonej równolegle z SPM J o wartości $\Delta G_2 U_2$. Obliczone w tym obwodzie prądy i napięcia będą przyrostami spowodowanymi zmianą przewodności G_2 o ΔG_2 . Na podstawie tych przyrostów można obliczyć odpowiednie wrażliwości.



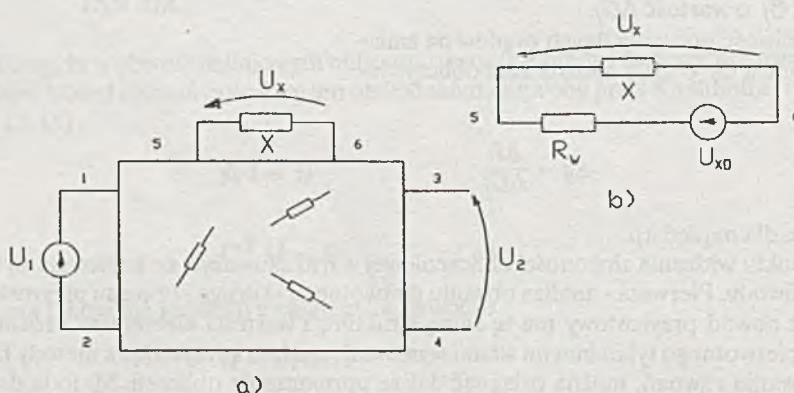
Rys. 9.7.1



Rys. 9.7.2

9.8. Metoda funkcji biliniowej

Metoda funkcji biliniowej pozwala na przedstawienie zależności funkcji układowej F od jednego z parametrów układu X . Pokażemy to na przykładzie transmitancji napięciowej układu przedstawionego na rys. 9.8.1. W tym przypadku chodzi o zależność transmitancji



Rys. 9.8.1

$F(X) = \frac{U_2}{U_1}$. Zakładamy, że układ A nie zawiera żadnych sił wymuszających. Od strony zacisków 5-6 układ jest dwójnikiem aktywnym, może więc być zastąpiony, według zasady Thevenina, układem zastępczym rys. 9.8.1b. Napięcie biegu jałowego tego dwójnika U_{xo} jest proporcjonalne do SEM U_1 :

$$U_{xo} = a U_1$$

zatem

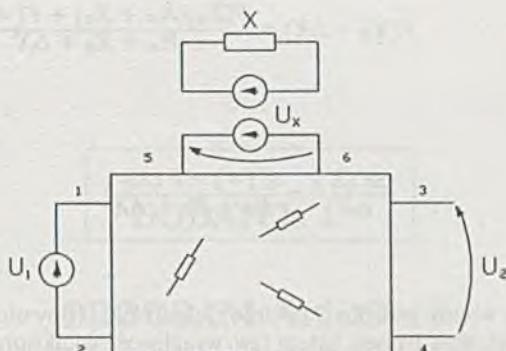
$$U_x = \frac{X}{R_w + X} U_{xo} = \frac{X}{R_w + X} a U_1 \quad (9.8.1)$$

Stosując zasadę wyodrębnienia dla oporu X otrzymamy układ z rys. 9.8.2, w takim układzie napięcie U_2 jest liniową funkcją obu sił elektromotorycznych U_1 i U_x :

$$U_2 = b U_1 + c U_x$$

uwzględniając r. 9.8.1 otrzymamy

$$F(X) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{b R_w + (b + ac) X}{R_w + X} \quad (9.8.2)$$



Rys. 9.8.2

Wzór powyższy można jeszcze uprościć. Dla $X = 0$ otrzymamy z powyższego wzoru $F(0) = b$, zaś dla $X = \infty$ otrzymamy $F(\infty) = (b + ac)$, wtedy:

$$F(X) = \frac{F(0) R_w + F(\infty) X}{R_w + X} \quad (9.8.3)$$

Wyrażenie powyższe przedstawia zależność funkcji układowej od parametru X i nazywane jest funkcją biliniową od X . Funkcja ta charakteryzuje się trzema współczynnikami:

- R_w – to opór widziany od strony zacisków do których podłączony jest opór X (zaciski 5-6).
- $F(0)$ – to wartość funkcji układowej przy zwartych zaciskach 5 - 6,
- $F(\infty)$ – to wartość funkcji układowej przy rozwartych zaciskach 5 - 6.

Aby wyznaczyć te współczynniki, trzeba wykonać, jak wykażemy dalej, dwie analizy obwodu. Warto również zwrócić uwagę na to, że współczynniki te można otrzymać z pomiarów na realnym układzie. Wzór 9.8.3 pozwala na obliczenie wartości funkcji układowej dla dowolnych wartości parametru X .

Wykażemy obecnie, jak można obliczyć tzw. wrażliwość wielkoprzystową, to znaczy przyrost wartości funkcji układowej od wartości nominalnej $F(X_n)$:

$$\Delta F(X) = F(X_n + \Delta X) - F(X_n)$$

spowodowany przyrostem wartości parametru X_n o ΔX , przy czym ΔX może przyjmować dowolne wartości, niekoniecznie małe.

Dla wartości nominalnej X_n otrzymamy z (9.8.3):

$$F(X_n) = \frac{F(0) R_w + F(\infty) X_n}{R_w + X_n}$$

Obliczając z tego wzoru $F(0)$ i podstawiając do 9.8.3 otrzymamy dla $X = X_n + \Delta X$:

$$F(X_n + \Delta X) = \frac{F(X_n)(R_w + X_n) + F(\infty) \Delta X}{R_w + X_n + \Delta X}$$

skąd

$$\frac{\Delta F(X)}{\Delta X} = \frac{F(\infty) - F(X_n)}{R_w + X_n + \Delta X} \quad (9.8.4)$$

Wzór powyższy ważny jest dla dowolnie dużych ΔX (dowolnie dużych odchyлеń od wartości nominalnej), przedstawia zatem tzw. wrażliwość wielkopryrostową.

Współczynniki $F(\infty)$, $F(X_n)$ oraz R_w można otrzymać w wyniku dwóch analiz obwodu. W pierwszej analizie otrzymujemy dla wartości $X = \infty$ (dla rozwartych zacisków 5-6) wartość $F(\infty)$ oraz wartość $U_{x\sigma}$, w drugiej, dla nominalnej wartości X_n , wartość $F(X_n)$.

Z powyższego wzoru łatwo otrzymać wrażliwość małopryrostową. Przechodząc do granicy, $\Delta x \rightarrow 0$, otrzymamy:

$$S = \frac{dF(X)}{dX} = \frac{F(\infty) - F(X_n)}{R_w + X_n} \quad (9.8.5)$$

Porównując wzór 9.8.5 dla wrażliwości małopryrostowej ze wzorem 9.8.4 dla wrażliwości wielkopryrostowej, można, w tym przypadku, ocenić wielkość błędu popełnianego przy stosowaniu wrażliwości małopryrostowej dla większych przyrostów ΔX .

DODATEK I

PROGRAM ALIOS1

(Analiza Liniowych Obwodów Stałoprądowych)

10.1. Charakter i możliwości programu

Program ALIOS ma charakter dydaktyczno - demonstracyjny. Jego celem jest przedstawienie w możliwie prosty sposób komputerowej realizacji metody potencjałów węzlowych. W związku z tym, program nie jest optymalizowany pod względem zajętości pamięci operacyjnej ani pod względem szybkości działania. W przedstawionej formie umożliwia on obliczanie prądów, napięć i mocy w liniowych obwodach stałoprądowych, zawierających prócz oporów gałęzie z szeregowo połączonymi SEM i oporami oraz siły prądomotoryczne. Konstrukcja programu umożliwia łatwe dodawanie procedur dla sił prądomotorycznych sterowanych napięciem oraz innych liniowych elementów obwodu. Do rozwiązywania układu liniowych równań zastosowano najprostszą wersję metody Gaussa (bez przedstawiania wierszy i kolumn). W razie potrzeby procedura ta może być zastąpiona inną, bardziej dokładną metodą. Program napisany jest w języku TURBO PASCAL 6.0.

10.2. Opis programu

Program składa się z pięciu procedur i programu głównego. Zadeklarowane na początku maksymalna liczba gałęzi $NGM=50$ i maksymalna liczba węzłów $NWM=20$ mogą być w razie potrzeby zwiększone.

PROCEDURA RENUM

Procedura RENUM przyporządkowuje poszczególnym węzłom (ich numerom wprowadzanym w danych o obwodzie) nowe wewnętrzne dla programu numery tak, by nie zmieniając numeru węzła odniesienia, którym zawsze musi być węzeł 0, nowe numery następowały w kolejności 1, 2, 3 itd. Przenumerowanie węzłów nie jest konieczne, ale przy jego braku trzeba, już w danych, numerować węzły w kolejności 0, 1, 2, co przy ewentualnych zmianach w obwodzie, np. usunięciu jednego z węzłów, wymagałoby nowej numeracji wszystkich węzłów. Równocześnie w tejże procedurze oblicza się liczbę węzłów obwodu (nie musi ona być podawana w danych o obwodzie).

PROCEDURA READDATA

Procedura READDATA odczytuje dane o obwodzie zapisane w zbiorze tekstowym o zadanej nazwie i wpisuje je w odpowiednie komórki pamięci. Równocześnie procedura ta oblicza liczbę gałęzi obwodu.

PROCEDURA GMATRIX

Procedura GMATRIX, po wyzerowaniu macierzy przewodnościowej obwodu G, analizuje kolejno dane każdej gałęzi i w zależności od charakteru gałęzi, (gałąź oporowa, gałąź z SEM i oporem, gałąź z SPM) dopisuje w odpowiednie miejsca macierzy G odpowiednie wartości, zgodnie z omówioną w rozdz. 5, metodą.

PROCEDURA GAUSS

Procedura GAUSS rozwiązuje układ równań liniowych potencjałów węzłowych metodą Gaussa.

PROCEDURA BRANCHUIP

Procedura BRANCHUIP oblicza napięcia i prądy gałęziowe oraz moce tracone na oporach i źródłach obwodu, zapisuje wyniki obliczonych napięć i prądów gałęziowych a także mocy w zbiorze o nazwie wynik.

10.3. Wprowadzanie danych o obwodzie

Dane muszą być zapisane w zbiorze tekstowym (ASCII) o dowolnej nazwie, którą trzeba podać po zgłoszeniu się programu. Struktura danych jest następująca:

- a) komentarz słowny, (nazwa obwodu, numer, komentarze) o długości maksymalnie 255 znaków,
- b) dane dotyczące poszczególnych gałęzi,
- c) słowo kluczowe END oznaczające koniec zbioru tekstowego.

Dane dotyczące gałęzi obwodu rozpoczynają się od trzyznakowego określenia gałęzi, przy czym pierwszy znak identyfikuje rodzaj gałęzi:

E ** gałąź z SEM (i oporem połączonym szeregowo),
R ** gałąź z oporem,
I ** gałąź z SPM.
np. *E12, EZ1, RZ1, RAB, IZ2* itd.

W dalszym ciągu przyjęto, że *wp* oznacza numer węzła początkowego gałęzi, a *wk* numer węzła końcowego. Numery mogą być maksymalnie trzycyfrowe. Jako kierunek prądu w gałęzi przyjmuje się dla wszystkich gałęzi kierunek od węzła końcowego do węzła początkowego. Strzałkowanie napięć na oporach odbiornikowe, na SEM i SPM wydajnikowe.

Gałąź z SEM:

E ** *wp wk R E*
gdzie oznaczają:
R – wartość oporu gałęzi,
E – wartość SEM (ze znakiem + jeżeli skierowana jest do węzła początkowego, a - gdy skierowana jest do węzła końcowego, np.
E12 21 3 5 -10.

Gałąź z oporem:

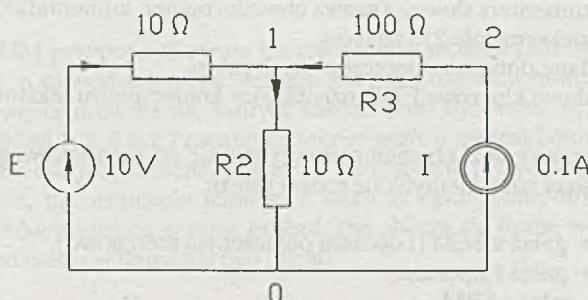
R ** *wp wk R*
gdzie oznaczają:
R – wartość oporu gałęzi, np.
RZ1 3 0 13.5.

Gałąź z SPM:

I ** *wp wk I*
gdzie oznaczają:
I – wartość SPM (ze znakiem + jeżeli skierowana jest do węzła początkowego, a - gdy skierowana jest do węzła końcowego), np.
IZ1 1 21 5.

Dla obwodu przedstawionego na rys. 10.1 tekstowy zbiór danych ma następującą postać:

OBWÓD RYS. 10.1
E 1 0 10.0 10.0
R2 0 1 10.0
R3 1 2 100.0
I 2 0 0.1
END



Rys. 10.1

10.4. Wyniki obliczeń

Wyniki obliczeń zapisywane są w zbiorze o nazwie wynik. Najpierw podawany jest komentarz, potem dane o obwodzie, wartości potencjałów węzłowych oraz wyniki obliczeń prądów I , napięć U , mocy traconej na oporach P oraz mocy źródeł P_Z . Przykładowy wydruk wyników przedstawiony jest poniżej.

ALIOS1 1992-3-24

OBWÓD RYS. 10.1

E	1	0	10.0000	10.0000
R2	0	1	10.0000	0.0000
R3	1	2	100.0000	0.0000
I	2	0	0.1000	0.0000

V0 = 0.0000

V1 = 5.5000

V2 = 15.5000

	WP	WK	I	U	P	PZ
E	1	0	0.4500	4.5000	2.0250	4.5000
R2	0	1	0.5500	5.5000	3.0250	0.0000
R3	1	2	0.1000	10.0000	1.0000	0.0000
I	2	0	0.1000	15.5000	0.0000	1.5500

10.5. Program źródłowy

PROGRAM ALIOS; {AM TP 6.0 92-02-23}

{PROGRAM ANALIZY LINIOWYCH OBWODÓW STAŁOPRĄDOWYCH}

USES DOS;

CONST

 NGM=50; {MAKSYMALNA LICZBA GAŁĘZI}
 NWM=20; {MAKSYMALNA LICZBA WĘZŁÓW}

TYPE

 VECTORORG= ARRAY[1..2*NGM] OF INTEGER;
 VECTORGR= ARRAY[0..NGM] OF REAL;
 VECTORW= ARRAY[0..NWM] OF INTEGER;
 MATRIX= ARRAY[0..NWM,1..NWM+1] OF REAL;

VAR

 BRANCH1: ARRAY[1..NGM] OF STRING[3];
 G: MATRIX;
 W : VECTORW;
 INODE, TNODE, INO, TNO: VECTORORG;
 VAL,GVAL,EVAL,V: VECTORGR;
 NG,K,NW: INTEGER;
 COMM: STRING;
 OUT: TEXT;
 Y,M,D,DOW: WORD;

PROCEDURE RENUM;

{PROCEDURA PRZEPROWADZA PRZENUMEROWANIE WĘZŁÓW TAK,
ABY NOWE NUMERY NASTĘPOWAŁY W KOLEJNOŚCI 0,1,2...}

VAR

 I,J,K : INTEGER;
 A: INTEGER;

BEGIN

 FOR I:= 1 TO NG DO

 BEGIN

 GVAL[I]:=1/VAL[I]; {ZAMIANA OPORÓW NA PRZEWODNOŚCI}
 IF INODE[I]=0 THEN
 INO[I]:= 0 ELSE
 INO[I]:= INODE[I] + NGM;

```
IF TNODE[I]= 0 THEN
  INO[I + NG]:= 0 ELSE
  INO[I + NG]:= TNODE[I] + NGM;
END;
W[0]:= 0;
J:=1;
FOR I:= 1 TO 2*NG DO
BEGIN
  IF INO[I] NGM THEN
  BEGIN
    A:= INO[I];
    INO[I]:= J;
    FOR K:= I TO 2*NG DO
      IF INO[K] = A THEN INO[K]:= INO[I];
      W[J]:= A - NGM; {W TABLICY W[J] ZAPISANE SĄ
      NUMERY WĘZŁÓW ODPWIADAJĄCE NOWEJ NUMERACJI J}
      J:= J + 1;
      NW:= J - 1; {OBLCZANIE LICZBY WĘZŁÓW NW}
    END;
  END;
  FOR I:= 1 TO NG DO
    TNO[I]:= INO[I + NG];
END; {OF RENUM}
```

PROCEDURE READDATA;

{PROCEDURA ODCZYTUJE DANE O OBWODZIE ZAWARTE W ZBIORZE
"NAZWA" I WPISUJE JE W ODPOWIEDNIE KOMÓRKĘ PAMIĘCI}

```
VAR
  I,J: INTEGER;
  DFILE: TEXT;
  A: STRING[3];
  NAZWA: STRING[10];

BEGIN
  WRITELN('NAZWA ZBIORU DANYCH');
  READLN(NAZWA);
  ASSIGN(DFILE,NAZWA);
  RESET(DFILE);
  READLN(DFILE,COMM);
  I:=1;
  A:='AAA';
  FILLCHAR(EVAL,SIZEOF(EVAL),0); {ZEROWANIE TABLICY EVAL}
  WHILE NOT (A='END') DO
```

```
BEGIN
  READ(DFILE,A);
  BRANCH1[I]:=A;
  CASE A[1] OF
    'R': READLN(DFILE,INODE[I],TNODE[I],VAL[I]);
    'E': READLN(DFILE,INODE[I],TNODE[I],VAL[I],EVAL[I]);
    'I': READLN(DFILE,INODE[I],TNODE[I],VAL[I]);
  END;
  NG:=I-1; {OBLCZANIE LICZBY GALEZI OBWODU}
  I:=I+1;
END;
  WRITELN(OUT,COMM);
END; {OF READDATA}
```

PROCEDURE GMATRIX;

{PROCEDURA OBLCZA KOLEJNE ELEMENTY MACIERZY
PRZEWODNOSCIOWEJ G}

```
VAR
I,WP,WK: INTEGER;
A: STRING[3];
BEGIN
  FILLCHAR(G,SIZEOF(G),0); {ZEROWANIE ELEMENTOW MACIERZY G}
  FOR I:=1 TO NG DO
    BEGIN
      A:=BRANCH1[I];
      WP:=INO[I];
      WK:=TNO[I];
      CASE A[1] OF
        'R': BEGIN
          G[WP,WP]:=G[WP,WP] + GVAL[I];
          G[WK,WK]:=G[WK,WK] + GVAL[I];
          G[WP,WK]:=G[WP,WK] - GVAL[I];
          G[WK,WP]:=G[WK,WP] - GVAL[I];
        END;
        'E': BEGIN
          G[WP,WP]:=G[WP,WP] + GVAL[I];
          G[WK,WK]:=G[WK,WK] + GVAL[I];
          G[WP,WK]:=G[WP,WK] - GVAL[I];
          G[WK,WP]:=G[WK,WP] - GVAL[I];
          G[WP,NW+1]:=G[WP,NW+1] + EVAL[I]*GVAL[I];
          G[WK,NW+1]:=G[WK,NW+1] - EVAL[I]*GVAL[I];
        END;
      END;
    END;
```

```
'I: BEGIN
  G[WP,NW+1]:=G[WP,NW+1] + VAL[I];
  G[WK,NW+1]:=G[WK,NW+1] - VAL[I];
END;
END;
END; {OF GMATRIX}
```

PROCEDURE GAUSS (VAR Y: MATRIX; VAR X: VECTORGR;
 VAR N: INTEGER);

{PROCEDURA ROZWIĄZYWANIA UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH
METODĄ GAUSSA}

```
VAR
I,J,K : INTEGER;

BEGIN {SPROWADZENIE MACIERZY G DO MACIERZY TRÓJKĄTNEJ}
FOR K:=1 to N-1 DO
FOR I:=K+1 TO N DO
FOR J:=K+1 TO N+1 DO
  Y[I,J]:= Y[I,J] - Y[K,J]*( Y[I,K] / Y[K,K] );
FOR K:=N DOWNT0 1 DO {OBLCZANIE KOLEJNYCH ZMIENNYCH}
BEGIN
  X[K]:= Y[K,N+1] / Y[K,K];
  FOR I:=1 TO K DO
    Y[I,N+1]:=Y[I,N+1]-Y[I,K]*X[K];
  END;
END; {OF GAUSS}
```

PROCEDURE BRANCHUIP;

{PROCEDURA OBLCZA PRĄDY I, NAPIĘCIA NA OPORACH U, MOCE
WYDZIELANE NA OPORACH P, WYDAWANE PRZEZ SIŁY ELEKTRO-
I PRĄDOMOTORYCZNE PZ ORAZ ZAPISUJE WYNIKI OBLCZEŃ
W ZBIORZE TEKSTOWYM "WYNIK"}

```
VAR
K,WP,WK : INTEGER;
I,U,P,PZ : ARRAY[1..NGM] OF REAL;
A : STRING[3];
```

```
BEGIN
  WRITELN(OUT,' WP WK I U P PZ');
  FOR K:=1 TO NG DO
    BEGIN
      A:= BRANCH1[K];
      WP:= INO[K];
      WK:= TNO[K];
      CASE A[1] OF
        'E': BEGIN
          I[K]:= (V[TNO[K]] - V[WP] + EVAL[K])*GVAL[K];
          U[K]:= I[K]/GVAL[K];
          P[K]:= U[K]*I[K];
          PZ[K]:= EVAL[K]*I[K];
        END;
        'R': BEGIN
          I[K]:= (V[WK] - V[WP])*GVAL[K];
          U[K]:= I[K]/GVAL[K];
          P[K]:= U[K]*I[K];
          PZ[K]:= 0;
        END;
        'I': BEGIN
          I[K]:= VAL[K];
          U[K]:= V[WP] - V[WK];
          P[K]:= 0;
          PZ[K]:= (V[WP] - V[WK])*I[K];
        END;
      END;
      WRITELN(OUT,BRANCH1[K],' ',INODE[K],' ',TNODE[K],'',
              I[K]:10:4,' ',U[K]:10:4,' ',P[K]:10:4,' ',PZ[K]:10:4);
    END;
  END; {OF BRANCHUIP}
```

{PROGRAM GŁÓWNY}

```
BEGIN
  ASSIGN(OUT,'WYNIK');
  REWRITE(OUT);
  GETDATE(Y,M,D,DOW);
  WRITELN(OUT,'ALIOS',' ',Y:0,'-',M:0,'.',D:0);
  READDATA; {CZYTANIE DANYCH O OBWODZIE}
  RENUM; {PRZENUMEROWANIE WĘZŁÓW}
  GMATRIX; {OBLCZENIE MACIERZY PRZEWODNOŚCIOWEJ}
  {WYDRUK DANYCH O OBWODZIE}
  FOR K:=1 TO NG DO
    WRITELN(OUT,BRANCH1[K],' ',INODE[K],' ',TNODE[K],' ',VAL[K]:10:4,
            ',EVAL[K]:10:4);
```

```
WRITELN(OUT);
GAUSS(G,V,NW);      {ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ}
V[0]:= 0;
{WYDRUK WARTOŚCI POTENCJAŁÓW}
WRITELN(OUT,'V0 = ',V[0]:10:4);
FOR K:=1 TO NW DO
  WRITELN(OUT,'V',W[K],',',V[K]:10:4);
  WRITELN(OUT);
  BRANCHUIP;      {OBLCZANIE I WYDRUK PRĄDÓW, NAPIĘĆ
  I MOCY}
CLOSE(OUT);
END.
```



LITERATURA

- 1 Chua L. O., Pen-Min Lin.: *Komputerowa analiza układów elektronicznych*. WNT, Warszawa 1981.
- 2 Tadeusiewicz M.: *Metody komputerowej analizy stałoprądowej nieliniowych układów elektronicznych*. WNT, Warszawa 1991.
- 3 Chojcan J., Lasek L.: *Metody analizy wrażliwościowej układów elektronicznych*. Wyd. Polit. Śl., Gliwice 1980.
- 4 Stybliński M.: *Metody analizy i optymalizacji tolerancji parametrów układów elektronicznych*. WNT, Warszawa 1981.
- 5 Ogrodnik J.: *Komputerowa analiza obwodów elektronicznych*. PWN, Warszawa 1994



BG Politechniki Śląskiej w Gliwicach
nr inw.: 105 - 48034



MG S.48034