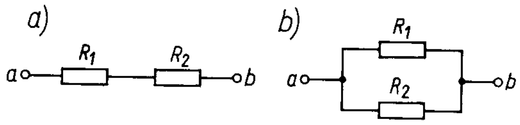
1

Obwody elektryczne w stanie ustalonym

1.1. Obwody elektryczne przy wymuszeniu stałym

1.1. Rezystancja wypadkowa dwóch rezystancji połączonych szeregowo (rys. 1.1a) jest równa 25 Ω, a połączonych równolegle (rys. 1.1b) 4 Ω. Obliczyć wartości poszczególnych rezystancji.



Rys. 1.1

ROZWIĄZANIE. Przy połączeniu szeregowym rezystancja wypadkowa

$$R_{w1} = R_1 + R_2 = 25\ \Omega$$

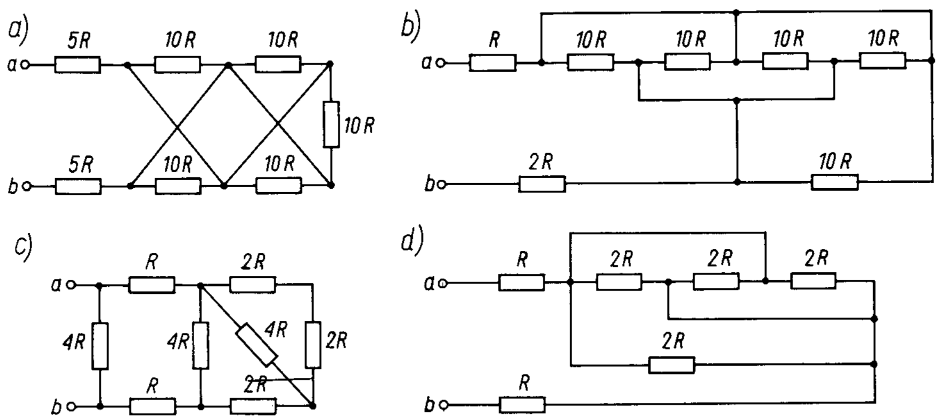
Przy połączeniu równoległym rezystancja wypadkowa

$$R_{w2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\ \Omega$$

Dokonując obliczeń, otrzymujemy

$$R_1 = 5\ \Omega \quad \text{oraz} \quad R_2 = 20\ \Omega$$

1.2. Obliczyć rezystancję zastępczą widzianą z zacisków *a-b* obwodów, których schematy przedstawiono na rys. 1.2.



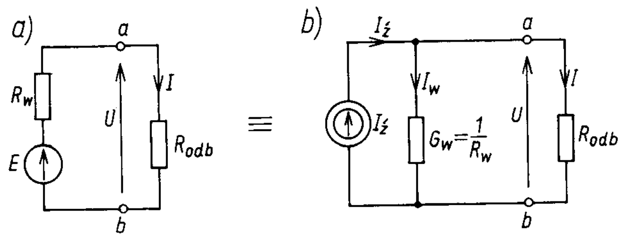
Rys. 1.2

ROZWIĄZANIE. Rezystancje są następujące:

a) $R_{ab} = 5R + \dfrac{10R}{5} + 5R = 12R$ **c)** $R_{ab} = 2R$

b) $R_{ab} = R + \dfrac{10R}{5} + 2R = 5R$ **d)** $R_{ab} = R + 0{,}5R + R = 2{,}5R$

1.3. Obliczyć parametry źródła prądowego równoważnego rzeczywistemu źródłu napięcia (rys. 1.3a) o parametrach: $E = 30$ V, $R_w = 2\ \Omega$. Obliczyć sprawność obydwu źródeł, jeżeli $R_{\text{odb}} = 3\ \Omega$. Dla jakiej wartości R_{odb} wystąpi dopasowanie odbiornika do źródła?



Rys. 1.3

ROZWIĄZANIE

a) Dla rzeczywistego źródła napięcia:

— prąd zwarcia

$$I_{zw} = \frac{E}{R_w} = \frac{30}{2} = 15\ \text{A}$$

— prąd w obwodzie

$$I = \frac{E}{R_w + R_{odb}} = \frac{30}{2+3} = 6\ \mathrm{A}$$

— napięcie na odbiorniku

$$U = R_{odb} I = 3 \cdot 6 = 18\ \mathrm{V}$$

— napięcie na rezystancji wewnętrznej źródła

$$U_w = R_w I = 2 \cdot 6 = 12\ \mathrm{V}$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = R_{odb} I^2 = R_{odb} \left(\frac{E}{R_w + R_{odb}} \right)^2 = 3 \cdot 6^2 = 108\ \mathrm{W}$$

— moc tracona na rezystancji wewnętrznej

$$P_w = R_w I^2 = 2 \cdot 6^2 = 72\ \mathrm{W}$$

— moc wytwarzana przez źródło

$$P = E I = \frac{E^2}{R_w + R_{odb}} = 180\ \mathrm{W}; \qquad P = P_w + P_{odb}$$

Sprawność źródła napięcia η_u jest równa stosunkowi mocy P_{odb} pobieranej przez odbiornik do mocy P wytwarzanej przez źródło

$$\eta_u = \frac{P_{odb}}{P} = \frac{R_{odb}}{R_{odb} + R_w} = 0{,}6$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = P - P_w = E I - R_w I^2$$

Przyrównując pochodną mocy względem prądu do zera

$$\frac{\mathrm{d}P_{odb}}{\mathrm{d}I} = E - 2R_w I = 0$$

otrzymujemy wartość prądu, przy której moc odbiornika jest maksymalna

$$I' = \frac{E}{2R_w} = \frac{30}{4} = 7{,}5\ \mathrm{A}$$

Zatem, przy $R_{odb} = R_w$ wystąpi dopasowanie odbiornika do źródła napięcia stałego. Wydziela się wówczas w odbiorniku moc maksymalna

$$P_{odb\,max} = \frac{E^2}{4R_w} = \frac{900}{8} = 112{,}5\ \mathrm{W}$$

Moc źródła przy dopasowaniu odbiornika do źródła napięcia

$$P' = EI' = 30 \cdot 7{,}5 = 225 \text{ W}$$

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła napięcia, tzn. przy przesyłaniu największej mocy

$$\eta'_u = \frac{P_{\text{odb max}}}{P'} = \frac{R_w}{2R_w} = 0{,}5$$

Oznacza to, że połowa mocy wytworzonej przez źródło jest dostarczana do odbiornika, a połowa jest tracona na rezystancji wewnętrznej R_w. Układy elektroenergetyczne nigdy nie pracują w takich warunkach, tzn. nie przesyłają mocy maksymalnej, gdyż ze względów ekonomicznych nie można dopuścić do tak dużych strat energii. Niektóre odbiory telekomunikacyjne pracują natomiast w pobliżu dopasowania odbioru, bowiem energia przesyłana bywa tak mała, że straty mają niewielkie znaczenie.

b) Na rysunku 1.3b przedstawiono rzeczywiste źródło prądu równoważne rzeczywistemu źródłu napięcia przedstawionemu na rys. 1.3a. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa dla schematu z rys. 1.3a możemy napisać

$$E = (R_w + R_{\text{odb}})I = R_w I + R_{\text{odb}} I = R_w I + U$$

Dzieląc obustronnie przez R_w powyższe równanie (przy założeniu, że $R_w \neq 0$), otrzymujemy

$$\frac{E}{R_w} = I + \frac{U}{R_w}$$

lub

$$I_ż = I + I_w$$

Równaniu temu odpowiada schemat przedstawiony na rys. 1.3b, przy czym: $I_ż = \dfrac{E}{R_w}$ — prąd zwarcia źródła napięcia, równy prądowi idealnego źródła prądu; $I_w = \dfrac{U}{R_w} = G_w U$ — prąd płynący przez konduktancję G_w; I — prąd płynący przez odbiornik.

Źródło napięcia o rezystancji wewnętrznej różnej od zera może być zawsze zastąpione przez źródło prądu. W obu przypadkach na zaciskach odbiornika jest to samo napięcie U, a przez odbiornik płynie ten sam prąd I. Idealne źródło napięcia ($R_w = 0$) nie ma równoważnego sobie idealnego źródła prądu i odwrotnie. Źródła idealne stosowane w schematach obwodów elektrycznych stanowią zawsze przybliżenie źródeł rzeczywistych.

Dla rzeczywistego źródła prądu:

— prąd źródła prądowego

$$I_ż = \frac{E}{R_w} = \frac{30}{2} = 15 \text{ A}$$

— napięcie na odbiorniku

$$U = \frac{I_ź}{G_w + G_{odb}} = \frac{15}{0{,}5 + 0{,}333} = 18\ \mathrm{V}$$

— prądy I_w oraz I wynoszą odpowiednio

$$I_w = \frac{U}{R_w} = G_w U = 0{,}5 \cdot 18 = 9\ \mathrm{A}$$

$$I = I_ź - I_w = 15 - 9 = 6\ \mathrm{A}$$

— moc pobierana przez odbiornik

$$P_{odb} = G_{odb} U^2 = \frac{1}{3} \cdot 18^2 = 108\ \mathrm{W}$$

— moc tracona na konduktancji G_w

$$P_w = G_w U^2 = \frac{1}{2} \cdot 18^2 = 162\ \mathrm{W}$$

— moc wytwarzana przez źródło

$$P = U I_ź = 18 \cdot 15 = 270\ \mathrm{W}; \qquad P = P_w + P_{odb}$$

Sprawność źródła prądu η_i jest równa stosunkowi mocy P_{odb} pobieranej przez odbiornik do mocy P wytwarzanej w źródle

$$\eta_i = \frac{P_{odb}}{P} = \frac{108}{270} = 0{,}4$$

Moc pobierana przez odbiornik o konduktancji $G_{odb} = \frac{1}{R_{odb}}$

$$P_{odb} = G_{odb}\left(\frac{I_ź}{G_w + G_{odb}}\right)^2$$

Postępując analogicznie do przypadku zasilania odbiornika ze źródła napięcia, otrzymujemy wartość mocy maksymalnej $P_{odb\,max}$ dla $G_{odb} = G_w = \frac{1}{2} S$ (dopasowanie odbiornika do źródła prądu)

$$P_{odb\,max} = \frac{I_ź^2}{4G_w} = 112{,}5\ \mathrm{W}$$

Wówczas moc źródła

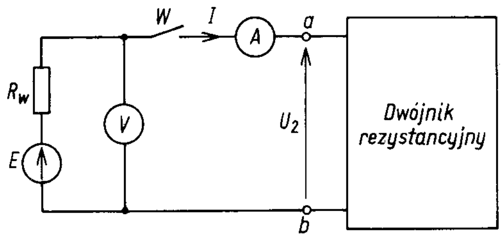
$$P' = U I_ź = \frac{I_ź^2}{2G_w} = 225\ \mathrm{W}$$

Sprawność przy dopasowaniu odbiornika do źródła prądu, tzn. przy przesyle największej mocy

$$\eta_i = \frac{P_{odb\,max}}{P'} = 0{,}5$$

Porównując sprawność źródła napięcia η_u ze sprawnością źródła prądu η_i w schematach zastępczych tego samego źródła energii stwierdzamy, że $\eta_u = \eta_i$ tylko dla $R_w = R_{odb}$. Sprawności rozważanych źródeł napięcia i prądu stałego są sobie równe tylko w stanie dopasowania.

1.4. Wyznaczyć wartość źródła napięcia E, rezystancji wewnętrznej R_w oraz rezystancji zastępczej R_z pasywnego dwójnika rezystancyjnego na podstawie pomiarów w stanach ustalonych (rys. 1.4). Przy otwartym wyłączniku woltomierz wskazywał $U_{V1} = 200$ V, amperomierz $I_{A1} = 0$. Przy zamkniętym wyłączniku wskazania odpowiednio wynosiły $U_{V2} = 180$ V, $I_{A2} = 10$ A.



Rys. 1.4

ROZWIĄZANIE. Z pomiaru przy otwartym wyłączniku wynika, że $E = 200$ V. Przy zamkniętym wyłączniku

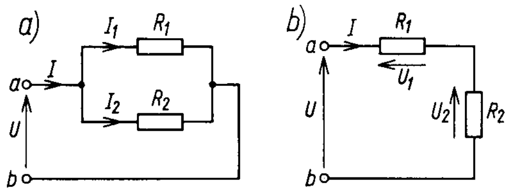
$$U_2 = R_z I_2 = E - R_w I_2$$

Wstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$R_z = \frac{U_2}{I_2} = \frac{180}{10} = 18\ \Omega$$

$$R_w = \frac{E - U_2}{I_2} = \frac{200 - 180}{10} = 2\ \Omega$$

1.5. Dobrać wartość rezystancji R_2 w taki sposób, aby w obwodzie przedstawionym na rys. 1.5a prąd I_1 wynosił $0{,}8I$, a w obwodzie na rys. 1.5b napięcie U_1 było równe $0{,}8U$. Rezystancja $R_1 = 100\ \Omega$.



Rys. 1.5

ROZWIĄZANIE

a) Obwód z rys. 1.5a opisują równania

$$I = I_1 + I_2 \quad \text{stąd} \quad I_2 = I - I_1 = 0{,}2I$$

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 = U$$

ostatecznie

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{0{,}2I}{0{,}8I} = \frac{1}{4}$$

Rozpływ prądów w gałęziach równoległych jest odwrotnie proporcjonalny do wartości rezystancji tych gałęzi, stąd rezystancja

$$R_2 = 4R_1 = 400\ \Omega$$

b) Obwód z rys. 1.5b opisują równania

$$U = U_1 + U_2 \quad \text{stąd} \quad U_2 = U - U_1 = 0{,}2U$$

$$U_1 = R_1 I \quad \text{oraz} \quad U_2 = R_2 I$$

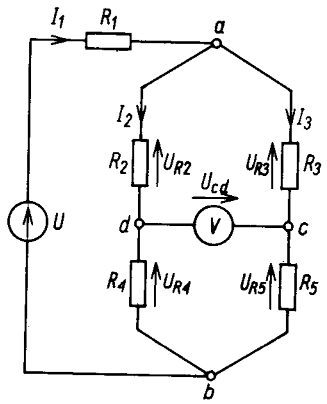
ostatecznie

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2} = 4$$

Spadki napięć w obwodzie szeregowym są wprost proporcjonalne do wartości rezystancji, na których spadki te występują. Rezystancja R_2 wynosi

$$R_2 = \frac{R_1}{4} = 25\ \Omega$$

1.6. Źródło napięcia stałego $U = 60$ V zasila obwód przedstawiony na rys. 1.6.



Rys. 1.6

Wartości rezystancji wynoszą: $R_1 = 18\,\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 10\,\Omega$, $R_5 = 20\,\Omega$. Wyznaczyć wartości prądów gałęziowych, wskazania woltomierza oraz sporządzić bilans mocy w obwodzie (założyć, że woltomierz jest idealny).

ROZWIĄZANIE. Rezystancja wypadkowa obwodu

$$R_w = R_1 + \frac{(R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 18 + \frac{20 \cdot 30}{50} = 30\,\Omega$$

Prąd wejściowy

$$I_1 = \frac{U}{R_w} = \frac{60}{30} = 2\text{ A}$$

Napięcia w gałęziach równoległych możemy obliczyć z zależności

$$U_{ab} = R_{ab} I_1 = 12 \cdot 2 = 24\text{ V}$$

lub

$$U_{ab} = U - R_1 I_1 = 60 - 18 \cdot 2 = 24\text{ V}$$

Prądy gałęziowe

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2 + R_4} = \frac{24}{20} = 1{,}2\text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3 + R_5} = \frac{24}{30} = 0{,}8\text{ A}$$

Woltomierz mierzy napięcie

$$U_{cd} = U_{R2} - U_{R3} = U_{R5} - U_{R4} = 4\text{ V}$$

Sprawdzimy bilans mocy w obwodzie. Zgodnie z zasadą bilansu mocy, moc dostarczona przez źródło równa się mocy pobranej przez odbiornik.
Moc źródła

$$P = U I_1 = 60 \cdot 2 = 120\text{ W}$$

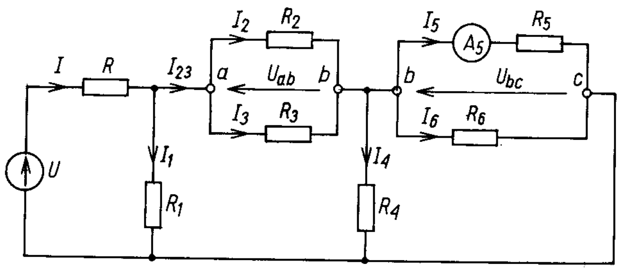
Moc odbiornika

$$P_{\text{odb}} = R_1 I_1^2 + (R_2 + R_4) I_2^2 + (R_3 + R_5) I_3^2 =$$

$$= 18 \cdot 4 + 20 \cdot 1{,}2^2 + 30 \cdot 0{,}8^2 = 120\text{ W}$$

Otrzymujemy $P = P_{\text{odb}}$, zatem zasada bilansu jest spełniona.

1.7. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.7 wskazanie amperomierza wynosi $I_5 = 2$ A, a wartości rezystancji są równe $R = 6\,\Omega$, $R_1 = 18\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 20\,\Omega$, $R_6 = 10\,\Omega$. Obliczyć wartości napięcia i prądu wejściowego.



Rys. 1.7

ROZWIĄZANIE. Mając dany prąd w gałęzi zawierającej rezystancję R_5, możemy obliczyć napięcie U_{bc} oraz prądy gałęziowe I_4 i I_6

$$U_{bc} = R_5 I_5 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ V}$$

$$I_6 = \frac{U_{bc}}{R_6} = \frac{40}{10} = 4 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{bc}}{R_4} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$$

Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła b otrzymujemy

$$I_{23} = I_4 + I_5 + I_6 = 8 \text{ A}$$

Napięcie U_{ab} obliczamy z zależności

$$U_{ab} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I_{23} = \frac{5 \cdot 20}{25} 8 = 32 \text{ V}$$

Napięcie U_{ac} zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$U_{ac} = U_{ab} + U_{bc} = 32 + 40 = 72 \text{ V}$$

Prąd I_1 oraz prąd wejściowy I wynoszą odpowiednio

$$I_1 = \frac{U_{ac}}{R_1} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A}$$

$$I = I_1 + I_{23} = 4 + 8 = 12 \text{ A}$$

Napięcie wejściowe

$$U = U_{ac} + RI = 72 + 6 \cdot 12 = 144 \text{ V}$$

Rezystancja wejściowa obwodu

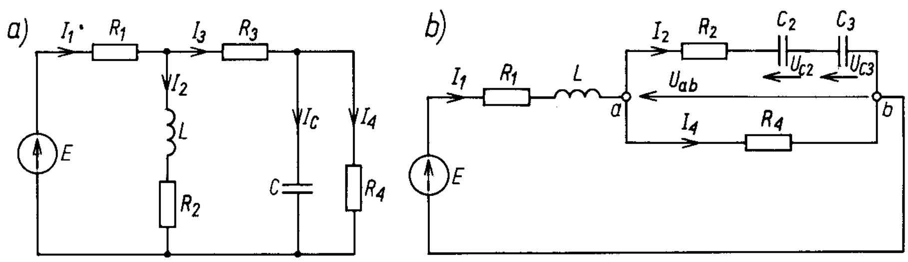
$$R_{we} = \frac{U}{I} = \frac{144}{12} = 12 \, \Omega$$

1.8. Do napięcia źródłowego $E = 150$ V dołączono obwód przedstawiony na:

a) rys. 1.8a o parametrach: $R_1 = 18\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C = 40\ \mu$F;

b) rys. 1.8b o parametrach: $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C_2 = 40\ \mu$F, $C_3 = 60\ \mu$F.

Obliczyć prądy gałęziowe oraz napięcia na poszczególnych kondensatorach.



Rys. 1.8

ROZWIĄZANIE

a) W obwodzie przedstawionym na rys. 1.8a prąd I_1 wynosi

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}} = \frac{150}{18 + 12} = 5\ \text{A}$$

Reaktancja cewki $X_L = 2\pi f L$ dla wymuszeń stałych ($f = 0$) jest równa zeru ($X_L = 0$), zatem cewka stanowi zwarcie. Reaktancja kondensatora $X_C = 1/2\pi f C$ dla wymuszeń stałych dąży do nieskończoności ($X_C \to \infty$), zatem kondensator stanowi przerwę, a prąd $I_C = 0$.

Prądy gałęziowe wynoszą

$$I_2 = \frac{E - R_1 I_1}{R_2} = \frac{150 - 18\cdot 5}{20} = 3\ \text{A}$$

$$I_3 = I_4 = \frac{E - R_1 I_1}{R_3 + R_4} = \frac{60}{30} = 2\ \text{A}$$

Napięcie na kondensatorze C

$$U_C = R_4 I_4 = 10\cdot 2 = 20\ \text{V}$$

b) W obwodzie na rys. 1.8b prądy są równe

$$I_1 = I_4 = \frac{E}{R_1 + R_4} = \frac{150}{50 + 100} = 1\ \text{A}$$

$$I_2 = 0$$

Napięcie na gałęziach równoległych

$$U_{ab} = R_4 I_4 = 100 \text{ V}$$

Przy szeregowo połączonych kondensatorach ładunki są jednakowe $Q_2 = Q_3 = Q$, zatem

$$U_{ab} = U_{C2} + U_{C3} = \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{C_2 + C_3}{C_2 C_3}\right)$$

Po wykonaniu przekształceń

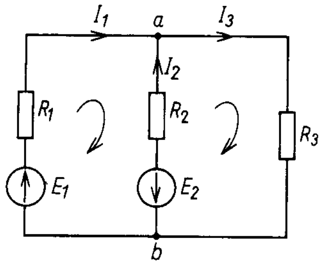
$$Q = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} U_{ab} = \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-6}} 100 = 24 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

Napięcia na kondensatorach C_2 i C_3 wynoszą odpowiednio

$$U_{C2} = \frac{Q}{C_2} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{40 \cdot 10^{-6}} = 60 \text{ V}$$

$$U_{C3} = \frac{Q}{C_3} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{60 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ V}$$

1.9. Wyznaczyć rozpływ prądów w gałęziach obwodu przedstawionego na rys. 1.9. Napięcia źródłowe wynoszą: $E_1 = 80$ V, $E_2 = 64$ V, a rezystancje: $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$. Sporządzić bilans mocy w obwodzie.



Rys. 1.9

ROZWIĄZANIE. Oznaczamy zwroty prądów w gałęziach. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa dla węzła a otrzymamy

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Przyjmujemy zwroty obiegowe oczek i piszemy równania zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa

$$E_1 + E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$-E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$$

W wyniku rozwiązania układu równań otrzymujemy następujące wartości prądów: $I_1 = 14$ A, $I_2 = -15$ A, $I_3 = -1$ A. Zwroty prądów są przyjmowane dowolnie i dlatego może okazać się, że rzeczywiste zwroty prądów w gałęziach są przeciwne do założonych. Tak jest w przypadku prądów I_2 oraz I_3, które mają znak minus.

Sprawdzimy bilans mocy w obwodzie

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$

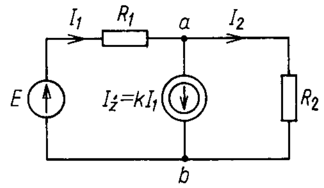
Po podstawieniu wartości liczbowych

$$80 \cdot 14 + 64 \cdot 15 = 6 \cdot 14^2 + 4 \cdot (-15)^2 + 4 \cdot (-1)^2$$

$$2080 = 2080$$

Zasada bilansu mocy jest spełniona.

1.10. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.10 obliczyć rozpływ prądów. Dane: $E = 30$ V, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $I_ż = kI_1$, $k = 2$.



Rys. 1.10

ROZWIĄZANIE. Dla węzła a zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa mamy

$$I_1 = kI_1 + I_2 = 2I_1 + I_2 \quad \text{stąd} \quad I_2 = -I_1$$

Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa otrzymujemy równanie

$$E = R_1 I_1 + R_2 I_2 = -R_1 I_2 + R_2 I_2$$

stąd

$$I_2 = \frac{E}{R_2 - R_1} = \frac{30}{30 - 20} = 3 \text{ A}$$

oraz

$$I_1 = -I_2 = -3 \text{ A}$$

1.2. Obwody elektryczne przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennym w funkcji czasu

1.11. Do obwodu przedstawionego na rys. 1.11a przyłożono napięcie o wartości chwilowej $u = 200\sqrt{2}\sin(\omega t + 90°)$ V i pulsacji $\omega = 1000$ rad/s. Rezystancje $R = 20\,\Omega$, $R_1 = 40\,\Omega$, indukcyjność $L = 60$ mH, a pojemność