



El Modelo

- Se estudia un modelo depredador-presa con un doble efecto Allee fuerte sobre el crecimiento de la presa.

- El modelo a estudiar viene dado por el siguiente sistema de EDOs:

$$\mathbf{X} : \begin{cases} \dot{x} = \frac{rx}{x+n} \left(1 - \frac{x}{k}\right) (x - m) - qxy; \\ \dot{y} = sxy - dy - cy^2; \end{cases}$$

donde la población de presa y depredador viene dado por $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente, con $t \geq 0$ y pertenecen al dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$. Los parámetros $(r, n, k, q, s, c, d, m) \in \mathbb{R}_+^7 \times]0, k[$ poseen interpretaciones biológicas. En particular, el doble efecto Allee viene dado por los términos $\frac{1}{x+n}$ y $(x - m)$ que multiplican la expresión de crecimiento logístico de las presas.

- Con un cambio de coordenadas y parámetros junto con un reescalamiento del tiempo se reescribe el sistema \mathbf{X} :

$$\mathbf{Y} : \begin{cases} \dot{x} = x[r(1-x)(x-M) - y(x+N)]; \\ \dot{y} = y(x+N)(Sx - d - Cy); \end{cases}$$

donde los parámetros $(r, N, S, d, C, M) \in \Lambda : \mathbb{R}_+^5 \times]0, 1[$. Este modelo es topológicamente equivalente al original.

Coordenadas de los puntos de equilibrio

- Los puntos de equilibrio de \mathbf{Y} sobre los ejes son $(0, 0)$, $(M, 0)$, $(1, 0)$, y dependiendo de los parámetros existen hasta dos puntos de equilibrio $\mathbf{p}_+ = (a_+, y_{a_+})$ y $\mathbf{p}_- = (a_-, y_{a_-})$ en $\text{int}(\Omega)$ con $a_{\pm} \in]M, 1[$ donde

$$a_{\pm} = \frac{D \pm \sqrt{\Delta}}{2(Cr + S)} \quad \text{y} \quad y_{a_{\pm}} = \frac{Sa_{\pm} - d}{C} \quad \text{con}$$

$$\Delta = (Cr(M+1) + d - NS)^2 + 4(Cr + S)(dN - CrM),$$

$$D = Cr(M+1) + d - NS.$$

Existencia de puntos de equilibrio

- Sea σ la curva para la cual $\Delta = 0$ y S^* es punto de intersección de σ con la recta $d = MS$. Se definen las curvas:

$$\Gamma_1 = \{(S, d) \in \mathbb{R}_+^2 \mid d = S\}, \quad \Gamma_2 = \{(S, d) \in \mathbb{R}_+^2 \mid d = MS\},$$

$$\Gamma_3 = \{(S, d) \in \sigma \mid S < S^*\}, \quad H = \{(S, d) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \text{Tr}(DY(\mathbf{p}_+)) = 0\}.$$

En la figura 1 se muestra la existencia de puntos de equilibrio en el $\text{int}(\Omega)$ dependiendo de las regiones en el espacio de parámetros (S, d) .

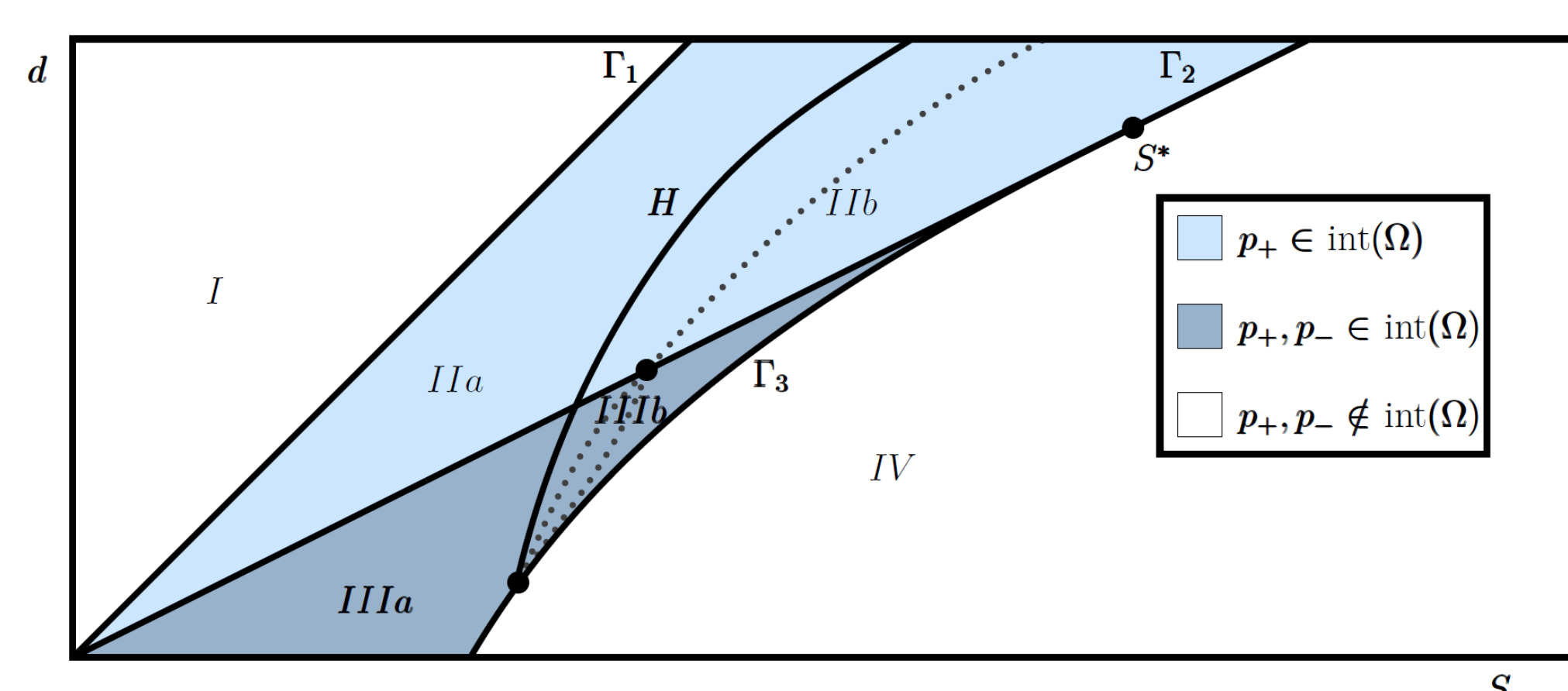


Fig. 1: Existencia de puntos de equilibrio en $\text{int}(\Omega)$.

- **Lema 1 (Condiciones para \mathbf{p}_{\pm} colapsen con otros puntos)**

- Si $(S, d) \in \Gamma_1$, entonces \mathbf{p}_+ colapsa con el punto $(1, 0)$.
- Si $(S, d) \in \Gamma_2$ y $S < S^*$, entonces \mathbf{p}_- colapsa con el punto $(M, 0)$.
- Si $(S, d) \in \Gamma_2$ y $S > S^*$, entonces \mathbf{p}_+ colapsa con el punto $(M, 0)$.
- Si $(S, d) \in \Gamma_3$ y , entonces \mathbf{p}_+ colapsa con \mathbf{p}_- .

Acotamiento de Soluciones

- El campo de vectores \mathbf{Y} es invariante a lo largo de los ejes coordenados. Mas aún, por medio del estudio de los puntos de equilibrio de \mathbf{Y} en el infinito con la compactificación de Poincaré se demuestra que ninguna trayectoria de \mathbf{Y} en $\text{int}\{\Omega\}$ converge al infinito.

- **Lema 2 (Acotamiento de soluciones)**

- Si $C > 1$, existen 3 puntos de equilibrio en el infinito: \mathbf{q}_y nodo repulsor no hiperbólico, \mathbf{q}_x nodo repulsor hiperbólico y además \mathbf{q}_C silla hiperbólica.
- Si $C < 1$, existen 2 puntos de equilibrio en el infinito: \mathbf{q}_y silla no hiperbólica y \mathbf{q}_x nodo repulsor hiperbólico.

Dinámica Global

- En la figura 2 se muestra un bosquejo de la dinámica global del sistema \mathbf{Y} , en el caso particular de $C < 1$ para las distintas regiones en el espacio de parámetro (S, d) .

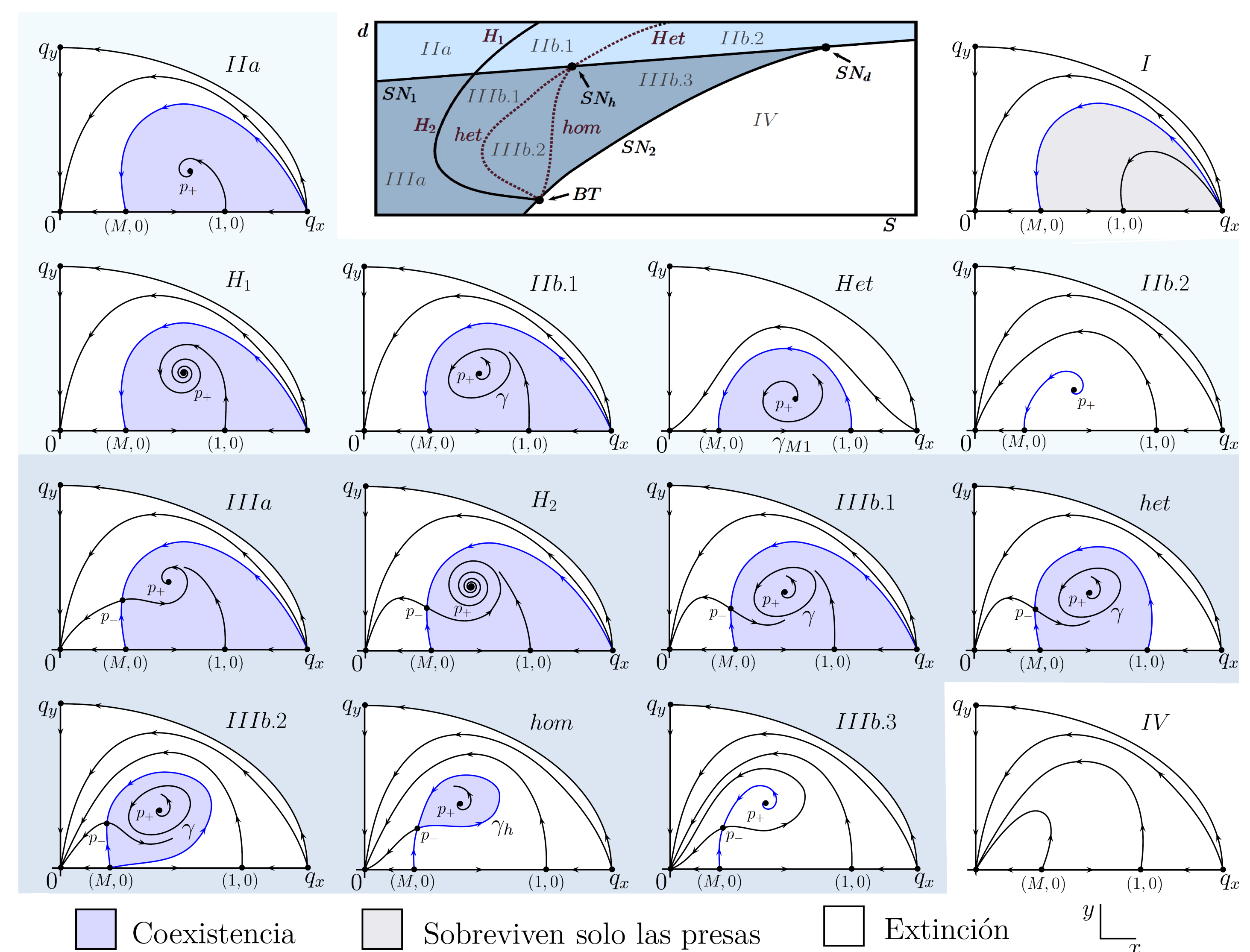


Fig. 2: Todos los retratos de fase no equivalentes del sistema.

- Bifurcaciones locales de codimension 1: Silla-nodo (SN_1, SN_2) y Hopf (H_1, H_2).
- Bifurcaciones de codimension mayor: Silla-nodo degenerada (SN_d) y Bogdanov-Takens (BT).
- Bifurcaciones globales: Homoclínica (hom), Heteroclínica (het), Ciclo heteroclínico (Het) y Silla-nodo heteroclínico (SN_h).

Conclusiones

- Análisis de bifurcaciones locales y globales además de los retratos de fase del sistema.
- Condiciones para sobrevivencia/extinción de los depredadores y presas.
- $W^s(\mathbf{p}_+)$ y $W^s(M, 0)$ son separatrices o umbrales para la extinción o sobrevivencia de los depredadores y presas.

Referencias

- P. Aguirre, J. Flores y E. Gonzales-Olivares. *Bifurcations and global dynamics in a predator-prey model with a strong Allee effect on the prey, and a ratio-dependent functional response*. 2013
- P. Aguirre. *A general class of predation models with multiplicative Allee effect*. 2014
- Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*
- Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*