

용수철

D.C. Kim

2023년 9월 22일

본 문서는 고등학교 물리학 교육과정에서 다루는 이상적인 1차원 운동에 대해서 국한한다. 일반적으로 물체의 크기와 용수철의 질량, 마찰, 공기 저항 등은 특별한 언급이 없는 한 무시한다.

정리 1 (장력) 질량이 각각 m_A, m_B 인 두 물체 A, B가 실 p로 팽팽하게 연결되어 있다. 각 물체에 서로 반대 방향으로 힘 F_A, F_B 가 작용할 때, p에 걸리는 장력의 크기는

$$T = \frac{m_A F_B + m_B F_A}{m_A + m_B} \quad (1)$$

이다.

증명 생략. 23학년도 9월 14번 문제, 22학년도 10월 13번 문제 등은 이를 이용하여 쉽게 풀 수 있다. 기하적 해석은 내분이다. ■

정리 2 (수직항력) 질량이 각각 m_A, m_B 인 두 물체 A, B가 서로 맞닿아 있다. 각 물체에 서로 반대 방향으로 힘 F_A, F_B 가 작용할 때, 수직항력의 크기는

$$f = \frac{m_A F_B + m_B F_A}{m_A + m_B} \quad (2)$$

이다.

정리 1과 같은 방법으로 할 수 있다. ■

정리 3 (분리) 두 물체가 분리될 때 수직항력은 0이다.

정리 4 (한 물체에 용수철이 연결된 두 물체의 분리) 물체 A에 용수철이 연결되어 있고, 물체 B는 A와 맞닿아 용수철이 압축되어 있다. 두 물체는 용수철의 원래 길이에서 분리된다.

마찰이 없는 한, 두 물체가 수평면에 있든 경사면에 있든 연직선상에 있든 상관없이 모두 성립한다. 정리 2를 이용하여 증명해보자. ■

정리 5 (운동 에너지의 비) 질량이 각각 m_A, m_B 인 두 물체가 같은 속도로 운동하고 있을 때, 두 물체의 운동 에너지의 비는 $m_A : m_B$ 이다.

당연한 정리이지만 문제 풀이 시 계를 설정할 때 떠올려야 한다. ■

정리 6 (일-운동 에너지 정리) 물체의 운동 에너지 변화량은 물체에 가한 일과 같다.

증명 생략. ■

정리 7 (평형의 깨짐) (실을 자르는 행위 등의) 평형이 깨지는 경우 물체가 처음 받는 힘의 크기는 평형이 깨진 원인이 되는 힘의 크기와 같다.

예를 들어 장력이 T 만큼 걸린 실로 두 물체가 연결되어 있을 때, 실을 자른 후 두 물체가 처음 받는 힘의 크기는 각각 T 이다. ■

정리 8 (용수철의 평형점) 용수철과 연결된 물체가 평형점에서 속력이 0일 때 물체는 계속 정지 상태를 유지한다.

이때 평형점의 위치는 중력과 용수철의 방향에 따라 용수철의 원래 길이로부터 떨어져 있을 것이다. ■

정리 9 (용수철의 평형점과 운동) 용수철과 연결된 물체를 평형점에서 L 만큼 떨어진 곳에서 가만히 놓았을 때, 물체는 평형점에서 L 만큼 떨어진 곳에서 정지한다.

평형점에서 L 만큼 떨어진 곳은 두 군데 존재함에 유의하자. 물체와 용수철이 수평면에 있다면 단순히 용수철의 탄성 퍼텐셜 에너지를 포함하는 역학적 에너지 보존이고, 단순히 식으로도 쓸 수 있다. 그렇지 않은 경우 평형점은 용수철의 원래 길이가 아니고 일반적인 식을 쓸 경우 물체의 위치 에너지까지 고려해주어야 한다. ■

정리 10 (용수철의 힘) 용수철 상수가 k 인 용수철과 연결된 물체가 용수철의 원래 길이로부터 L 만큼 떨어진 곳에 있을 때, 용수철이 물체에 작용하는 힘의 크기는 kL 이고 힘의 방향은 용수철의 원래 길이를 향하는 방향이다.

방향을 고려하여 $F = -kx$ 라 하자. ■

따름 정리 1 (용수철의 힘2) 용수철 상수가 k 인 용수철과 연결된 물체가 변위 x_0 에서 변위 x_1 로 이동할 때, 물체가 받는 힘은 $-kx_0 + F_0$ 에서 $-kx_1 + F_0$ 까지 선형적으로 변한다.

용수철 문제 풀이의 핵심이다. 정리 6과 같이 사용할 수 있다. ■

따름 정리 2 (용수철과 일) 용수철 상수가 k 인 용수철과 연결된 물체가 변위 x_0 에서 변위 x_1 로 이동할 때, 물체가 받은 일은

$$W = \frac{2F_0 - kx_0 - kx_1}{2}(x_1 - x_0) \quad (3)$$

이다.

다름 아닌 양쪽 끝에서 두 힘의 평균과 변위차의 곱이다! 삼각형을 그려놓고 기울기는 용수철 상수, 가로 길이는 변위, 양끝 세로 길이는 힘의 크기를 사용하는 이유이다. ■