

高数 2 笔记

dcldyhb

2025 年 6 月 6 日

目 录

第 1 章 重积分	1
1.1 重积分的概念和性质.....	1
1.2 二重积分的性质.....	1
1.3 二重积分的计算.....	3
1.3.1 直角坐标系下的计算	3

第 1 章 重积分

1.1 重积分的概念和性质

定义 1.1 设 D 是平面上的有界闭区域, $f(x, y)$ 为 D 上的有界函数, I 为实数. 若对 D 的任意分割 $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$, 任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i (i = 1, \dots, n)$, 作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ ($\Delta \sigma_i$ 为 D_i 的面积), 总有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = I$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$, d_i 是小区域 ΔD_i 的直径, 则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 记为 $f \in R(D)$; 极限值 I 称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

1. \iint 积分号
2. D 积分区域
3. $f(x, y)$ 被积函数
4. $d\sigma$ 面积元素 (微元)
5. 二重积分的几何意义
 - (a) 当被积函数大于 0 时, 二重积分是柱体体积
 - (b) 当被积函数小于 0 时, 二重积分是柱体体积的负值
 - (c) 一般的, 为曲顶柱体体积的代数和
6. 可积的充分条件
 - (a) 若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 则 $f(x, y) \in R(D)$
7. $f(x, y)$ 在 D 上的可积性及积分值与其在 D 内有限条光滑曲线上的定义无关

1.2 二重积分的性质

1. $\iint_D d\sigma = \iint_D 1 d\sigma = A_D$ (D 的面积).

2. 线性性: 设 $f, g \in R(D)$, α, β , 是任意常数, 则 $\alpha f + \beta g \in R(D)$, 且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \iint_D f d\sigma + \beta \iint_D g d\sigma$$

3. ** 区域可加性: ** 若 $f \in R(D)$ 且积分区域 D 分为内部不相交的子区域 D_1, D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

4. ** 保序性: ** 若 $f, g \in R(D)$, 且当 $(x, y) \in D$ 时, $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(a) ** 推论 1: ** 若 $f \in R(D)$, 则 $|f(x, y)| \in R(D)$, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

(b) ** 推论 2: ** 若 $f \in R(D)$, 且当 $(x, y) \in D$ 时, $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$mA_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA_D$$

(c) ** 推论 3: ** 若 $f \in R(D)$, 且当 $(x, y) \in D$ 时, $f(x, y) \geq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$$

5. ** 积分中值定理: ** 若 $f(x, y) \in C(D)$, $g(x, y) \in R(D)$, 且 g 在 D 上不变号, 则 $\exists \xi, \eta \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(a) ** 推论: ** 若 $f(x, y) \in C(D)$, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A_D$$

称 $f(\xi, \eta) = \frac{\iint_D f d\sigma}{A_D}$ 为函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的 ** 平均值 **

1.3 二重积分的计算

1.3.1 直角坐标系下的计算

当二重积分存在时, 可利用平行于坐标轴的直线来划分积分区域 D , 此时, 面积元素

$$d\sigma = dxdy$$

故二重积分在直角坐标系下可表示为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dxdy$$

1.3.1.1 x 型正则区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \right\}$$

化为先 y 后 x 的二次积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dxdy &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &\equiv \int_a^b f(x, y) dxdy \end{aligned}$$

假设 1.1 这是一个假设环境。

公理 1.1 这是一个公理环境。

猜想 1.1 这是一个猜想环境。