量子力学复习

复习书上的例题更加高效

黑体辐射

斯特藩-玻尔兹曼定律

黑体辐射的总辐出度 $M_0(T)$ 与温度的四次方成正比

$$M_0(T) = \sigma T^4$$

其中 σ 是斯特藩-玻尔兹曼常数，$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$。

维恩位移定律

黑体辐射的峰值波长 $\lambda_{\max}$ 与温度 T 之积为常数

$$\lambda_{\max} T = b$$

其中 b 是维恩位移常数，$b \approx 2.898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$。

斯特藩定律和维恩位移定律是遥感、高温测量、红外追踪等级数的物理基础

普朗克假定

对于频率为 ν 的振子，其能量不是连续的，而是分立的，它的取值是某一最小能量 $h\nu$ 的整数倍

振子辐射或者吸收能量时，以 $h\nu$ 为单位进行

普朗克黑体辐射公式

$$M_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

由普朗克公式可以导出其他所有热辐射射公式

$$M_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \begin{cases} \text{积分} \rightarrow M = \sigma T^4,\ \text{斯特番-玻尔兹曼定律} \\ \text{求导} \rightarrow \lambda_m T = b.\ \text{维恩位移定律} \\ \text{低频极限} \rightarrow M_0(\nu, T) = \dfrac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,\ \text{瑞利-金斯公式} \\ \text{高频极限} \rightarrow M_0(\nu, T) = \alpha\nu^3 e^{-\beta/T},\ \text{维恩公式} \end{cases}$$

其中 h 是普朗克常数，$h \approx 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$。不用记

光电效应

爱因斯坦对光电效应的解释

爱因斯坦光电方程

$$h\nu = \frac{1}{2} m v^2 + A$$

红限频率：$\nu_0 = \frac{A}{h}$

光具有波粒二象性

基本关系式

$$\begin{cases} \varepsilon = h\nu \\ p = \dfrac{\epsilon}{c} = \dfrac{h}{\lambda} \end{cases}$$

康普顿散射实验

光打入材料中，会有能量与原来不同的光出现，反射的能量会损失一点

特点

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_C(1-\cos\theta)$$

其中 $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ 是康普顿波长，m_e 是电子的静质量。

波尔氢原子理论

原子模型变迁

模型	主要特点	其他
汤姆逊面包模型	电子均匀分布在正电荷球体中，再各自的平衡位置作简谐振动并发射同频率的电磁波	
卢瑟福原子模型	电子围绕原子核运动，类似于行星围绕太阳运动，但无法解释原子光谱	由 α 粒子散射实验提出
波尔氢原子模型	电子在量子化的轨道上运动，能量是离散的，能级公式 $E_n = -\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2}$	解释了氢原子的光谱线

氢原子光谱

里德伯公式

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (m = 1,2,3,\cdots; n = m+1, m+2, m+3, \cdots)$$

其中：

- $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ 为波长的倒数，即波数
- $R = 1.097 \times 10^7 m^{-1}$ 为里德伯常数

赖曼系（$m = 1$，紫外区）

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 2,3,4,\cdots)$$

巴尔末系（$m=2$）

$$\widetilde{\nu}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad(n=3,4,5,\cdots)$$

帕邢系（$m=3$，红外区）

$$\widetilde{\nu}=R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad(n=4,5,6,\cdots)$$

布拉开系 （$m=4$，近红外区）

$$\widetilde{\nu}=R\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad(n=5,6,7,\cdots)$$

普丰德系（$m=5$，远红外区）

$$\widetilde{\nu}=R\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad(n=6,7,8,\cdots)$$

汉弗莱系 （$m=6$，远红外区）

$$\widetilde{\nu}=R\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{n^2}\right)\quad(n=7,8,9,\cdots)$$

波尔模型

原子中的电子只能在一些分立的轨道上运行，在每一个轨道上运动电子处于稳定的能量状态（定态 E_n），不向外辐射能量

轨道角动量满足

$$\begin{cases} L=n\hbar \\ \oint p\,\mathrm{d}q=nh \end{cases}$$

波尔理论定量的结果

$$\begin{cases} r_n=n^2\dfrac{\varepsilon_0h^2}{\pi me^2}=n^2r_1 \\ \nu_n=\dfrac{e^2}{2\varepsilon_0hn}=\alpha\dfrac{c}{n} \end{cases}$$

$$E_1=-13.6\,\mathrm{eV}$$

$$r_1=0.529\,\mathrm{\AA}$$

波尔的对应原理

量子数 n 很大时，波尔模型与经典力学相符，量子化特征消失

相对论和量子力学都要满足对应原理

实验验证：弗兰克-赫兹实验

在一个真空腔体内注入汞蒸气，加上电压，发现在特定的位置出现光

物质波

德布罗意波

德布罗意假设粒子具有波动性，波长与动量成反比

$$\begin{cases} E = mc^2 = h\nu \\ p = mv = h\lambda \end{cases}$$

相对论情形下

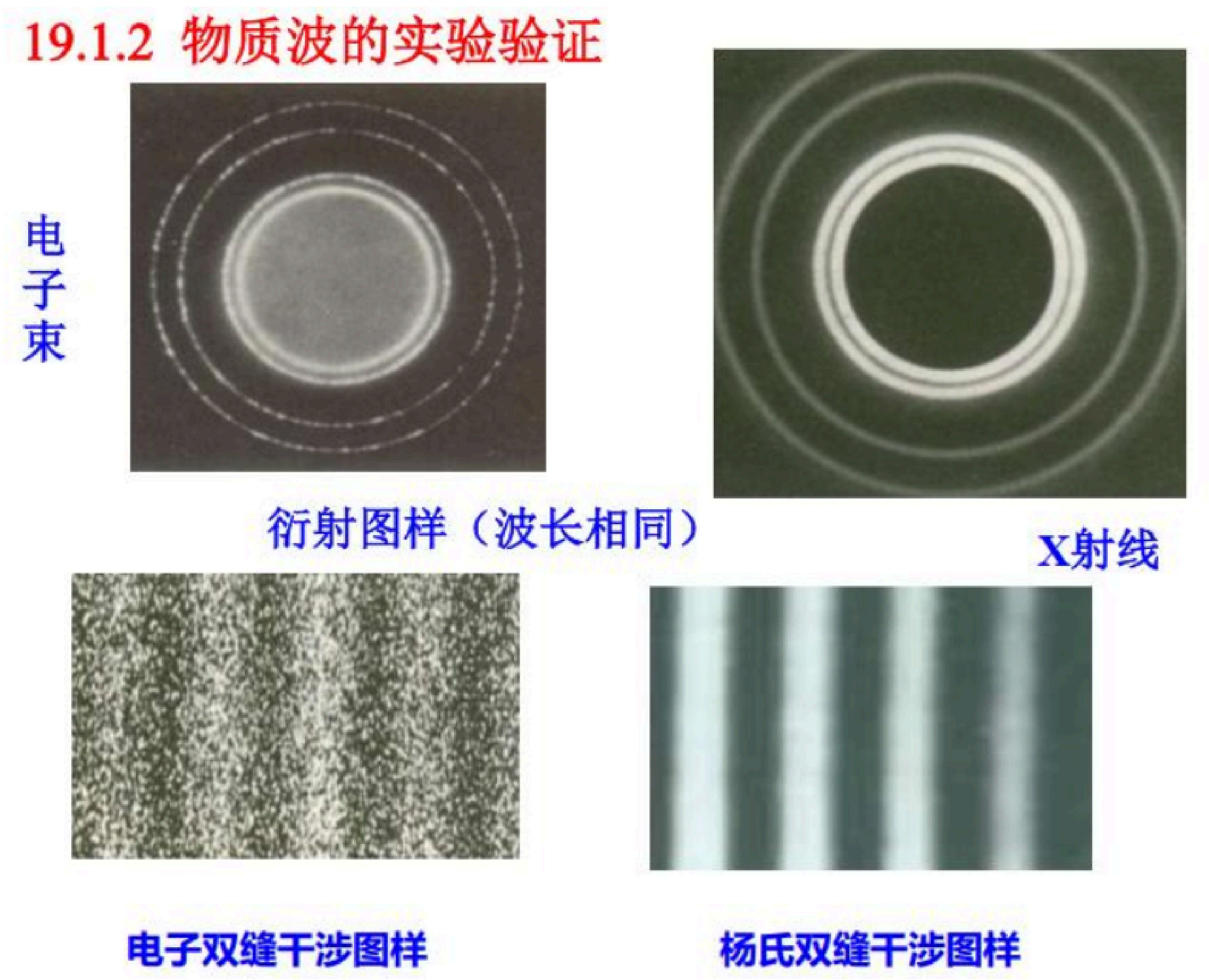
$$E = E_0 + E_k$$

E_0 为静止能量，E_k 为动能

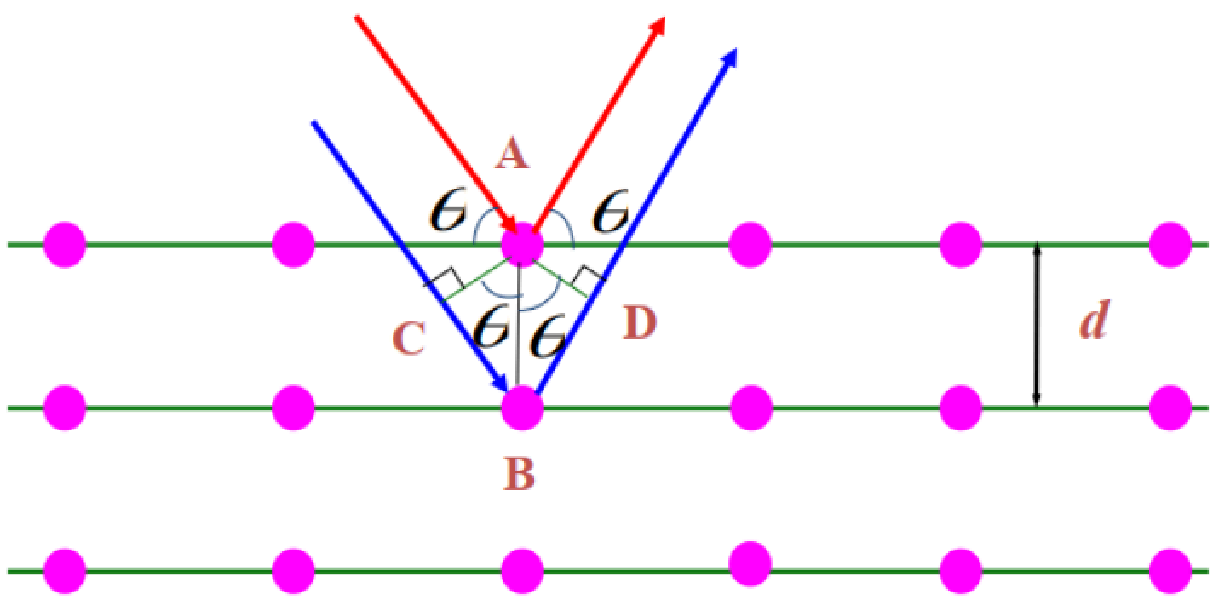
$$\begin{aligned} E^2 &= E_0^2 + C^2 p^2 \\ \Rightarrow (E_0 + E_k)^2 &= E_0^2 + C^2 p^2 \\ \Rightarrow p &= \frac{1}{c}\sqrt{2E_0E_k + E_k^2} \\ &= \frac{1}{c}\sqrt{E_k^2 + 2E_k \cdot m_0c^2} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{h}{p} \\ &= \frac{ch}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k \cdot m_0c^2}} \\ &= \frac{ch}{\sqrt{(eU)^2 + 2eU \cdot m_0c^2}} \end{aligned}$$

使用德布罗意波解决波尔轨道量子化的关键时认为电子绕原子一周，驻波衔接，圆周长为波长的整数倍

物质波的实验验证



布拉格公式



干涉极大（布拉格公式）

$$\delta = 2d\sin\theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

电表最大电流

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \Rightarrow \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}} \to \lambda \sim \frac{12.25}{\sqrt{U}}\mathring{A}$$

则

$$2d\sin\theta = n\frac{12.25}{\sqrt{U}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

波函数

波函数的统计解释

波函数 Ψ 是描述粒子在空间概率分布的**概率振幅**，其模的平方 $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \Psi(\vec{r},t)^*\Psi(\vec{r},t)$ 表示 t 时刻，在坐标 $\vec{r}$ 附近单位体积中发现一个粒子的概率，被称为**概率密度**

波函数满足的条件

1. 单值性
   - 在空间的任何地方，概率密度只能有一个，所以一般波函数在任何地方都是单值的；
2. 有限性
   - 粒子必然在空间的某处出现，概率综合为1，所以在空间的任何有限体积元 $\mathrm{d}V$ 中，概率密度 $\rho(x,y,z,t)$ 有限；
   - **归一化条件**：$\int_\Omega |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 \,\mathrm{d}V = 1$，其中 Ω 为全空间；
   - 归一化条件并不能排除在某些孤立奇点上 $|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 \to \infty$
3. 连续性
   - 波函数一阶导数连续（即使在势能函数有限大小间断点处）

不确定关系

1. 位置和动量的不确定关系：$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
2. 能量和时间的不确定关系：$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

- 说明经典手段对于微观粒子不适用，位置和动量不能通识精确测定
- 说明微观粒子不可能静止
- 给出了宏观物理与围观物理的分界线为普朗克常量 h

当 x 远大于 Δx，p 远大于 Δp 时，可作为经典粒子处理

薛定谔方程和算符（全部掌握）