上海交通大学报告模板示例文档

某某

2025 年 6 月 6 日

目　录

第 1 章　高等数学 2 笔记

1.1　重积分

1.1.1　重积分的概念和性质

1.1.1.1　二重积分的概念

定义：

设 D 是平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 为 D 上的有界函数，I 为实数。若对 D 的任意分割 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i (i=1,\ldots,n)$，作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$（$\Delta\sigma_i$ 为 D_i 的面积），总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

其中 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{d_i\}$，$d_i$ 是小区域 ΔD_i 的直径，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，记为 $f\in R(D)$；极限值 I 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

- $\iint$ 积分号
- D 积分区域
- $f(x,y)$ 被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 面积元素（微元）

- 二重积分的几何意义 - 当被积函数大于 0 时，二重积分是柱体体积 - 当被积函数小于 0 时，二重积分是柱体体积的负值 - 一般的，为曲顶柱体体积的代数和

- 可积的充分条件 - **定理：**若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $f(x,y)\in D$。

- $f(x,y)$ 在 D 上的可积性及积分值与其在 D 内**有限条光滑曲线**上的定义无关

1.1.1.2　二重积分的性质

1. $\iint_D \mathrm{d}\sigma = \iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A_D$　(D 的面积)。
2. **线性性：**设 $f,g\in R(D)$，α,β 是任意常数，则 $\alpha f+\beta g\in R(D)$，且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\sigma = \alpha \iint_D f\,\mathrm{d}\sigma + \beta \iint_D g\,\mathrm{d}\sigma$$

3. **区域可加性**：若 $f \in R(D)$ 且积分区域 D 分为内部不相交的子区域 D_1, D_2，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

4. **保序性**：若 $f, g \in R(D)$，且当 $(x,y) \in D$ 时，$f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

- **推论 1**：若 $f \in R(D)$，则 $|f(x,y)| \in R(D)$，且

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

- **推论 2**：若 $f \in R(D)$，且当 $(x,y) \in D$ 时，$m \le f(x,y) \le M$，则

$$mA_D \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le MA_D$$

- **推论 3**：若 $f \in R(D)$，且当 $(x,y) \in D$ 时，$f(x,y) \ge 0$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \ge 0$$

5. **积分中值定理**：若 $f(x,y) \in C(D)$，$g(x,y) \in R(D)$，且 g 在 D 上不变号，则 $\exists \xi, \eta \in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta) \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

- **推论**：若 $f(x,y) \in C(D)$，则存在 $(\xi,\eta) \in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A_D$$

称 $f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D f\,\mathrm{d}\sigma}{A_D}$ 为函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的**平均值**

1.1.2 二重积分的计算

1.1.2.1 直角坐标系下的计算

当二重积分存在时，可利用平行于坐标轴的直线来划分积分区域 D，此时，面积元素

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故二重积分在直角坐标系下可表示为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

x 型正则区域

$$D = \{(x,y) \mid \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\}$$

化为先 y 后 x 的二次积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &\equiv \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

y 型正则区域

$$D = \{(x,y) \mid \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), c \le y \le d\}$$

化为先 x 后 y 的二次积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &\equiv \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

一般区域的二重积分　分割成若干个正则子区域，利用积分区域可加性，分别在子区域上积分后求和

直角坐标计算二重积分的步骤

1. **画出积分区域** D 的草图，并**确定类型** 2. 按照所确定的类型**表示区域** D 3. **化二重积分为二次积分**（注意上下限）4. **计算**二重积分

1.1.2.2　极坐标系下的计算

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时，可用极坐标来计算二重积分。

面积元素 $\varDelta\sigma$ 在极坐标下为

$$\boxed{\varDelta\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式为

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

若积分区域 D 可表示为 $\{(r,\theta) \mid r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

1.1.2.3　二重积分的变量代换

定理：

设变换 $T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数，且满足 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ (Jacobi 行列式) $\neq 0$，而 $f(x,y) \in C(D)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- 在定理条件下，变换 T 一定存在逆变换 $T^{-1}:\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$，且 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$

有时，借助此式求 J 较为简单

- 当 Jacobi 行列式仅在区域 D^* 内个别点上或个别曲线上为 0 时，定理结论仍成立 - 在广义极坐标 $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ 下，$J = abr$

1.1.3 三重积分

1.1.3.1 三重积分的定义

定义：

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，三元函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界，I 为实数。若将 Ω 任意分割成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \ldots, \Delta\Omega_n$，任取 $(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \in \Delta\Omega_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$，作和 $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i)\Delta V_i$，（$\Delta V_i$ 是 $\Delta\Omega_i$ 的体积），总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i)\Delta V_i = I$$

其中 $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{d_i\}$，$d_i$ 是 $\Delta\Omega_i$ 的直径，则称函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上**可积**，记为 $f \in R(\Omega)$；I 称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**，记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

其中 V_Ω 是区域 Ω 的体积

- 若 $f(x,y,z)$ 表示占有三维空间区域 Ω 的物体的体密度函数，则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ 给出了物体的**质量** - 类似二重积分，三重积分具有线性性，区域可加性，保序性以及推论和积分中值定理，并且有 $\iiint_\Omega \mathrm{d}V = V_\Omega$

1.1.3.2 直角坐标系下的计算

直角坐标系下，由于 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，故

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

柱线法（坐标面投影法） 设 Ω 是以曲面 $z = z_1(x,y)$ 为底，曲面 $z = z_2(x,y)$，而侧面是母线平行于 z 轴的柱体所围成的区域

设 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D_1，则 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_1, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), (x,y) \in D\}$$

则物体总质量为

$$\iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故有

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

截面法（坐标轴投影法） 设区域 Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[h_1,h_2]$，即 Ω 介于平面 $z=h_1$ 和 $z=h_2$ 之间，过 z 处且垂直于 z 轴的平面截 Ω 得截面区域 D_z，则 Ω 可表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid h_1 \le z \le h_2, (x,y) \in D_z\}$$

物体总质量为

$$\int\limits_{h_1}^{h_2} \left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z$$

故有

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{h_1}^{h_2} \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.1.3.3 三重积分的变量代换

定理：

设变换 $T: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 有连续偏导数，且满足 $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$，而 $f(x,y,z) \in C(\Omega)$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

柱面坐标系下的计算 柱面坐标系，实际上就是将 x, y 坐标转换为极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

则柱面积分积分公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

球面坐标系下的计算 球面坐标系，实际上就是将 x, y, z 坐标转换为球坐标

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

则球面积分积分公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

1.1.4 重积分的应用

1.1.4.1 重积分的几何应用

平面图形的面积

$$A(D)=\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

立体的体积

$$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

曲面的面积 设空间曲面 $S:z=f(x,y),(x,y)\in D$。

则曲面 S 的面积为

$$A(S)=\iint\limits_{D}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.1.4.2 重积分的物理应用

质心 体密度为 $\rho(x,y)$ 的物体占据空间 Ω，其质心坐标为

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\iiint_{\Omega}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}\\ \bar{y}=\dfrac{\iiint_{\Omega}y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}\\ \bar{z}=\dfrac{\iiint_{\Omega}z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}\end{cases}$$

转动惯量 设物体的密度为 $\rho(x,y,z)$，则物体分别关于 x，y，z 轴的转动惯量为

$$\begin{cases}I_x=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\ I_y=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,\mathrm{d}V\\ I_z=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V\end{cases}$$

引力

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{F} &= G\frac{m_0\mathrm{d}m}{r^3}\vec{r} \\ &= G\frac{m_0\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{r^3}\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0) \\ &= \left(\mathrm{d}F_x,\mathrm{d}F_y,\mathrm{d}F_z\right)\end{aligned}$$

1.2 曲线积分和曲面积分

1.2.1 第一类曲线积分和曲面积分

1.2.1.1 第一类曲线积分的概念

定义：

设 C 是 xOy 面上的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 是定义在 C 上的有界函数，在 C 上任意插入分点 $A=A_0,A_1,\ldots,A_{n-1},A_n=B$，将其分成 n 个小弧段，记第 i 个小弧段的弧长为 Δs_i，在第 i 个小段上任取点 (ϵ_i,η_i)，和式 $\sum_{i=1}^n f(\epsilon_i,\eta_i)\Delta s_i$，当 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}\to 0$ 时，有确定的极限值 I，即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\epsilon_i,\eta_i)\Delta s_i = I$$

则称函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上**可积**，并将此极限值 I 称为函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的**第一类曲线积分**，记作 $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$，即

$$I=\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\epsilon_i,\eta_i)\Delta s_i$$

- 第一类曲线积分的几何含义为柱面的面积 - $\int_C \mathrm{d}s=\int_C 1\,\mathrm{d}s=s_C$ - 若 C 是封闭曲线，即 C 的二端点重合，则记第一类曲线积分为 $\oint_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$

1.2.1.2 第一类曲线积分的性质

与曲线方向无关　若曲线 C 的端点为 A 和 B，$f(x,y)$ 在曲线 C 上可积，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

线性性 若 f, g 在曲线 C 上可积，α, β 是任意常数，则 $\alpha f + \beta g$ 在曲线 C 上可积，且

$$\int_C (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}s = \alpha \int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s + \beta \int_C g(x,y)\,\mathrm{d}s$$

路径可加性 若曲线 C 由两段光滑曲线 C_1 和 C_2 首尾连接而成，则 $f(x,y)$ 在曲线 C 上可积，等价于 $f(x,y)$ 在曲线 C_1 和 C_2 上均可积，且

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

中值定理 设函数 f 在光滑曲线 C 上连续，则 $\exists(\epsilon,\eta) \in C$，使得

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = f(\epsilon,\eta)\cdot s_C$$

其中 s_C 是曲线段 C 的长度

1.2.1.3 第一类曲线积分的计算

设函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 C 上连续，C 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [a,b]$，满足 $x'(t)$，$y'(t)$ 连续，且 $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$，则

$$\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

- 右端积分限应 $a < b$ - 当曲线 C 形式为 $y = y(x)$，$x \in [a,b]$ 时，则 $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$ - 当曲线 C 为极坐标 $r = r(\theta)$，$\theta \in [\alpha,\beta]$ 时，则 $\int_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

1.2.2 第二类曲线积分与曲面积分

1.2.2.1 第二类曲线积分的概念

定义：

设 C 为平面光滑定向曲线 $(A \to B)$，且向量值函数 $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ 在 C 上有界，$\vec{e}_\tau$ 为 C 上点 (x,y) 处于定向一致的单位切向量，若

$$\int\limits_C \vec{F}(x,y)\cdot\vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$$

存在，则称为**向量值函数 $\vec{F}$ 在定向曲线 C 上的曲线积分或第二类曲线积分**

若 $\vec{e}_\tau(x,y)=(\cos\alpha,\cos\beta)$，则

$$\begin{aligned}\int\limits_C \vec{F}(x,y)\cdot\vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s &= \int\limits_C P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\,\mathrm{d}s\\ &= \int\limits_C P(x,y)\cos\alpha\,\mathrm{d}s+\int\limits_C Q(x,y)\cos\beta\,\mathrm{d}s\\ &= \int\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这是对坐标的曲线积分

记 $\vec{r}=(x,y)$，则 $\mathrm{d}\vec{r}=\vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$ 称为**定向弧微分**

从而有向量形式的第二类曲线积分

$$\int\limits_C \vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int\limits_C \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

第二类曲线积分的性质 第二类曲线积分与**曲线方向有关**，即

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \vec{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

此外线性性与对定向积分路径的可加性等仍然成立

第二类曲线积分的计算 若曲线 C 为 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，$t:\alpha\to\beta$

起点 A 对应 α，终点 B 对应 β

考察 $\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_C \vec{F}\cdot\vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$，沿曲线 C 有 $\vec{F}=(P\left(x(t),y(t)\right),Q\left(x(t),y(t)\right))$，则

$$\int\limits_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int\limits_\alpha^\beta P\left(x(t),y(t)\right)\,\mathrm{d}x(t)+Q\left(x(t),y(t)\right)\,\mathrm{d}y(t)$$

1.2.2.2 第二类曲面积分的概念

双侧曲面　定义：

若点 P 沿曲面 S 上任何不越过曲面边界的连续闭曲线移动后回到起始位置时，法向量 $\vec{n}$ 保持原来的指向，则称 S 为**双侧曲面**

典型的，Mobius 面不是双侧曲面

选定双侧曲面 S 一侧为正向，称为**正侧**，记为 S^{+}，其相反侧记作 S^{-}

双侧曲面定侧　若 $S: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，$\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\pm\frac{(-z_x,-z_y,1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

若选取 $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{(-z_x,-z_y,1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，则说明 $\cos\gamma>0$，选取了曲面的上侧

一般的

$$\begin{cases}\cos\alpha>0\Leftrightarrow \text{前侧}\ \cos\alpha<0\Leftrightarrow \text{后侧}\\ \cos\beta>0\Leftrightarrow \text{右侧}\ \cos\beta<0\Leftrightarrow \text{左侧}\\ \cos\gamma>0\Leftrightarrow \text{上侧}\ \cos\gamma<0\Leftrightarrow \text{下侧}\end{cases}$$

习惯上选取曲面片的上侧为 S^{+}；对于封闭曲面，选取外侧为 S^{+}

对于向量值函数 $\vec{F}=(P,Q,R)$

$$\iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_S P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

第二类曲面积分的性质　第二类曲面积分与在曲面的哪一侧积分有关

$$\iint_{S^+} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{S^-} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

此外第二类曲面积分也具有线性性和可加性等性质

1.2.2.3 第二类曲面积分的计算

合一投影法

$$\iint_{S^+} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xy}}\left(-Pz_x-Qz_y+R\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

分面投影法　分 $P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 三个部分进行积分

常在部分曲面垂直坐标轴时进行

公式法 常用于参数方程确定的曲面

设 $S:\vec{r}=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，其中 $(u,v)\in D_{uv}$，则

$$\iint\limits_{S^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_{D_{uv}}\vec{F}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

1.2.3 Green 公式及其应用

1.2.3.1 Green 公式

连通区域及其边界方向 设 D 为平面区域，若 D 内的任意一条闭曲线所围的区域都落在 D 内，则称 D 是单连通的，否则称 D 为复连通的

当点沿区域边界朝一个方向前进时，区域总在它的左侧，则将此方向规定为边界曲线 C 的正向，记为 C^+，与 C^+ 相反方向为 C

Green 公式 定理：

设有界闭区域 D 由分段光滑曲线 C 围成，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则

$$\oint\limits_{C^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 对于复连通区域 D，Green 公式仍然成立，但需将 C 分成若干个单连通区域 D_i，并对每个区域应用 Green 公式 - 公式也可以记为 $\oint_{C^+}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\P&Q\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Green 公式的向量形式

$$\oint\limits_{C^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\iint\limits_{D}\nabla\times\vec{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.2.3.2 曲线积分与路径无关的条件

定义：

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 D 内连续，若对 D 内任意两点 A，B 以及 D 内连接 A,B 的任意二分段光滑曲线 C_1，C_2，均有

$$\int\limits_{C_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int\limits_{C_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

则称曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内**与路径无关**

定理：

设函数 P，Q 在**单连通**区域 D 上有连续偏导数，则下述四命题等价

1. 在 D 内的任一条分段光滑闭曲线 C 上，有 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$
2. 曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关
3. 存在 D 上的可微函数 $u(x, y)$ 使得 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$，此时称 $u(x, y)$ 为 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 的一个**原函数**
4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内恒成立

1.2.3.3 全微分求积与全微分方程

设函数 P，Q 在单连通区域 D 上有连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，则 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 为某函数 u 的全微分，且取定 $(x_0, y_0) \in D$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \quad (x, y) \in D$$

从而全体函数为 $u(x, y) + C$

称求 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 的原函数的过程为**全微分求积**

若 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 是某二元函数的全微分，称方程

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为**全微分方程**

求出一个原函数 $u(x, y)$，则方程的通解为 $u(x, y) = C$，其中 C 是任意常数

1.2.4 Gauss 公式和 Stokes 公式

1.2.4.1 Gauss 公式

定理：

设函数 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有连续偏导数，Ω 的边界是光滑或分片光滑的闭曲面 Σ，则

$$\oiint_{\Sigma^+} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- 令 $P=\frac{x}{3}$，$Q=\frac{y}{3}$，$R=\frac{z}{3}$，则可导出 $V_\Omega=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma^+}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即体积公式 - 使用 Gauss 公式时，注意 Σ^+ 的方向应与 Ω 的外侧一致

向量形式的 Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

1.2.4.2　通量和散度

通量　若给定向量场

$$\vec{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

则称曲面积分

$$\Phi=\oiint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oiint_{\Sigma^+}P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

为向量场 $\vec{F}$ 在通过定侧曲面 Σ^+ 的**通量**

散度　称

$$\mathrm{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 $\vec{F}$ 的**散度**

则 Gauss 公式可写为

$$\Phi=\oiint_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{F}\,\mathrm{d}V$$

1.3　级数

1.3.1　数项级数

1.3.1.1　数项级数的概念

定义：

给定数列 $\{a_n\}$，和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为**（无穷）级数**，a_n 称为级数的**通项**（或**一般项**）

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项**部分和** - $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**余项级数**

定义：

- 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，S 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**和**，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ - 若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**

常用结论：

等比数列 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{收敛于} \frac{a}{1-q} & , |q| < 1 \\ \text{发散} & , |q| \geq 1 \end{cases}$

1.3.1.2 数项级数的基本性质

基本性质

1. 若常数 $\alpha \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ 有相同敛散性
2. **线性性：**若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S + \beta T$
3. **可加性：**将级数增加、删减或改换**有限项**，不改变级数的**敛散性**
4. **结合律：**若级数收敛于 S，则将相邻若干项添加括号所成新级数仍收敛于 S - 其本质是部分和数列收敛于 S，则子列均收敛于 S - 加括号后级数收敛 $\nRightarrow$ 原级数收敛 - 加括号后级数发散 $\Rightarrow$ 原级数发散

级数收敛的必要条件　定理：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- 若 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 - 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，比如调和级数

1.3.2 正项级数敛散性

1.3.2.1 正项级数

定义：

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$，则称此级数为**正项级数**

定理：（收敛原理）

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界,即 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+ : S_n \leq M$

p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛} & , p > 1 \\ \text{发散} & , p \leq 1 \end{cases}$$

1.3.2.2　正项级数敛散性判别法

比较判别法　定理：

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $a_n \leq b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

- 条件 $\forall n \in \mathbb{N}^+ a_n \leq b_n$ 可改为 $\exists N, C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ \forall n \geq N a_n \leq C b_n$ - 使用该判别法时需要有参照级数，常选**等比级数**或 p **级数**作参照

比较判别法（极限形式）　定理：

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

- 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散 - 当 $l = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 - 当 $l = +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

通常使用 $b_n = \frac{1}{n^p}$ 作为参照物，因为我们此时在分析无穷小 a_n 的阶

比值判别法（d'Alembert 判别法）　定理：

若**正项级数** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$，则

- 当 $0 \leq l < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 - 当 $l > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 - 当 $l = 1$ 时，判别法失效

Stirling 公式：$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (n \to \infty)$

当 a_n 是一些乘积构成或含 $n!$ 时，可以考虑比值法

根值判别法（Cauchy 判别法）　定理：

若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$，则

1. 当 $0 \leq l < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
2. 当 $1 < l \leq +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
3. 当 $l = 1$ 时，判别法失效

当 a_n 中含有 n 次方时，可以考虑使用根值法

比值法和根值法实际上可看作是在将级数与等比级数作比较，均只能判断收敛速度不慢于等比级数的级数。当所求级数存在时，可称级数为**拟等比级数**

根值法优于比值法

- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ - $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l \nRightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$

积分判别法　定理:

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**正项级数**,若非负函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上**单调递减**,且 $a_n=f(n)\quad(\forall n\in\mathbb{N}^+)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性

- 条件 $[1,+\infty)$ 可改为 $[a,+\infty)\ (a>1)$

1.3.3　任意项级数的敛散性

任意项级数

正负项分布是任意的级数

1.3.3.1　交错级数敛散性的判别法

交错级数　定义:

各项正负相间的级数称为**交错级数**，其形式为

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\quad(\text{其中}a_n>0)$$

Leibniz 判别法　定理:

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$ 满足:

1. $a_{n+1}\le a_n\quad(n=1,2,\dots)$
2. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其余项级数满足

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|\le a_{n+1}$$

我们称满足定理条件的级数为 **Leibniz 型级数**

1.3.3.2 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

定理：（Abel 判别法）

若 $\{a_n\}$ 单调且有界，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

定理：（Dirichlet 判别法）

若 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

1.3.3.3 绝对收敛与条件收敛

定义：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为任意项级数

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**绝对收敛**
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**

定理：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

常用结论：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \begin{cases} \text{绝对收敛} & ,p > 1 \\ \text{条件收敛} & ,0 < p \leq 1 \end{cases}$$

定理：（绝对收敛与条件收敛的本质）

1. 绝对收敛的级数，可以改变任意项的顺序，其收敛性与和均不变（即满足加法交换律）
2. 条件收敛的级数，总可以适当改变项的顺序，使其按照任意预定的方式收敛或者发散

1.3.4 函数项级数

定义：

设函数列 $\{u_n(x)\}(n = 1, 2, \ldots)$ 在数集 X 上有定义，则称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为**函数项级数**，其中 $u_n(x)$ 称为**通项**

定义：

若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**，否则称为**发散点**，全体收敛点所组成的集合 I 称为**收敛域**

定义

记 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项**部分和 (函数)**，记 $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 为**余和**

定义：

对于收敛域 I 中的任意一点 x，记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和为 $S(x)$，称此函数 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**

显然，$\forall x \in I$，$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$，$\lim_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$

1.3.5 幂级数

1.3.5.1 幂级数及其收敛半径

在函数项级数中，最简单及最重要的级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

称为**幂级数**，其中常数项 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 称为幂级数的**系数**

幂级数更一般的形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

Abel 定理

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $x = x_0(x \neq 0)$ 收敛，则当 $|x| < |$