高数 2 笔记

dcldyhb

2025 年 6 月 7 日

目　录

第 1 章　重积分

1.1　重积分的概念和性质

定义 1.1　设 D 是平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 为 D 上的有界函数，I 为实数. 若对 D 的任意分割 $\varDelta D_1, \varDelta D_2, \cdots, \varDelta D_n$，任 $(\xi_i,\eta_i) \in \varDelta D_i (i=1,\ldots,n)$，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\varDelta\sigma_i$（$\varDelta\sigma_i$ 为 D_i 的面积），总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\varDelta\sigma_i = I$$

其中 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le d}\{d_i\}$，$d_i$ 是小区域 $\varDelta D_i$ 的直径，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，记为 $f \in R(D)$；极限值 I 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

1. $\iint$ 积分号
2. D 积分区域
3. $f(x,y)$ 被积函数
4. $\mathrm{d}\sigma$ 面积元素（微元）
5. 二重积分的几何意义
    (a) 当被积函数大于 0 时，二重积分是柱体体积
    (b) 当被积函数小于 0 时，二重积分是柱体体积的负值
    (c) 一般的，为曲顶柱体体积的代数和
6. 可积的充分条件
    (a) **定理：**若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $f(x,y) \in D$.
7. $f(x,y)$ 在 D 上的可积性及积分值与其在 D 内**有限条光滑曲线**上的定义无关

1.2　二重积分的性质

1. $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A_D$　(D 的面积).

2. **线性性：** 设 $f,g\in R(D)$，α,β，是任意常数，则 $\alpha f+\beta g\in R(D)$，且

$$\iint\limits_D(\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}\sigma=\alpha\iint\limits_D f\,\mathrm{d}\sigma+\beta\iint\limits_D g\,\mathrm{d}\sigma$$

3. **区域可加性：** 若 $f\in R(D)$ 且积分区域 D 分为内部不相交的子区域 D_1,D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

4. **保序性：** 若 $f,g\in R(D)$，且当 $(x,y)\in D$ 时，$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

(a) **推论 1：** 若 $f\in R(D)$, 则 $|f(x,y)|\in R(D)$，且

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

(a) **推论 2：** 若 $f\in R(D)$，且当 $(x,y)\in D$ 时，$m\le f(x,y)\le M$，则

$$mA_D\le\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\le MA_D$$

(a) **推论 3：** 若 $f\in R(D)$，且当 $(x,y)\in D$ 时，$f(x,y)\ge 0$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\ge 0$$

5. **积分中值定理：** 若 $f(x,y)\in C(D)$，$g(x,y)\in R(D)$，且 g 在 D 上不变号，则 $\exists\xi,\eta\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

(a) **推论：** 若 $f(x,y)\in C(D)$，则存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)A_D$$

称 $f(\xi,\eta)=\frac{\iint_D f\,\mathrm{d}\sigma}{A_D}$ 为函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上的**平均值**

1.3 二重积分的计算

1.3.1 直角坐标系下的计算

当二重积分存在时，可利用平行于坐标轴的直线来划分积分区域 D，此时，面积元素

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故二重积分在直角坐标系下可表示为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.3.1.1 x 型正则区域

$$D = \left\{(x,y)\middle|\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\right\}$$

化为先 y 后 x 的二次积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &\equiv \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

1.3.1.2 y 型正则区域

$$D = \left\{(x,y)\middle|\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), c \le y \le d\right\}$$

化为先 x 后 y 的二次积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &\equiv \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

1.3.1.3　一般区域的二重积分

分割成若干个正则子区域，利用积分区域可加性，分别在子区域上积分后求和

注　直角坐标计算二重积分的步骤

1. **画出积分区域** D 的草图，并**确定类型**
2. 按照所确定的类型**表示区域** D
3. **化二重积分为二次积分**（注意上下限）
4. **计算**二重积分

1.3.2　极坐标系下的计算

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时，可用极坐标来计算二重积分.

面积元素 $\varDelta\sigma$ 在极坐标下为

$$\boxed{\varDelta\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\{(r,\theta)\,|r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta \int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

1.3.3　二重积分的变量代换

定理 1.1　设变换 $T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 有连续偏导数,且满足 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \left|x_u, x_v y_u, y_v\right|$ (Jacobi 行列式) $\neq$ 0，而 $f(x,y) \in C(D)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

1. 在定理条件下，变换 T 一定存在逆变换 $T^{-1}:\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，且 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$ 有时，借助此式求 J 较为简单
2. 当 Jacobi 行列式仅在区域 D^* 内个别点上或个别曲线上为 0 时，定理结论仍成立
3. 在广义极坐标 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\y=br\sin\theta\end{cases}$ 下，$J=abr$

1.4 三重积分

1.4.1 三重积分的定义

定义 1.2 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域，三元函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界，I 为实数. 若将 Ω 任意分割成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\ldots,\Delta\Omega_n$，任取 $(\varepsilon_i,\eta_i,\xi_i)\in\Delta\Omega_i\ (i=1,2,.,,n)$，作和 $\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i,\eta_i,\xi_i)\,\Delta V_i$，（$\Delta V_i$ 是 $\Delta\Omega_i$ 的体积），总有

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i,\eta_i,\xi_i)\,\Delta V_i=I$$

其中 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{d_i\}$，$d_i$ 是 $\Delta\Omega_i$ 的直径，则称函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上**可积**，记为 $f\in R(\Omega)$；I 称为 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**，记作

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

其中 V_Ω 是区域 Ω 的体积

1. 若 $f(x,y,z)$ 表示占有三维空间区域 Ω 的物体的体密度函数，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ 给出了物体的**质量**
2. 类似二重积分，三重积分具有线性性，区域可加性，保序性以及推论和积分中值定理，并且有 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=V_\Omega$

1.4.2 直角坐标系下的计算

直角坐标系下，由于 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

1.4.2.1 柱线法（坐标面投影法）

设 Ω 是以曲面 $z=z_1(x,y)$ 为底，曲面 $x=x_2(x,y)$，而侧面是母线平行于 z 轴的柱体所围成的区域

设 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D_1，则 Ω 可表示为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x,y)\in D_1, z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)(x,y)\in D\right\}$$

则物体总质量为

$$\iint\limits_{D}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

1.4.2.2 截面法（坐标轴投影法）

设区域 Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[h_1,h_2]$，即 Ω 介于平面 $z=h_1$ 和 $z=h_2$ 之间，过 z 处且垂直于 z 轴的平面截 Ω 得截面区域 D_z，则 Ω 可表示为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|h_1\le z\le h_2,(x,y)\in D_z\right\}$$

物体总质量为

$$\int\limits_{h_1}^{h_2}\left(\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

故有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\int\limits_{h_1}^{h_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.4.3 三重积分的变量代换

定理 1.2 设变换 T : $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ 有连续偏导数，且满足 $J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$，而 $f(x,y,z) \in C(\Omega)$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

1.4.3.1 柱面坐标系下的计算

柱面坐标系，实际上就是将 x, y 坐标转换为极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

则柱面积分积分公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

1.4.3.2 球面坐标系下的计算

球面坐标系，实际上就是将 x, y, z 坐标转换为球坐标

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

则球面积分积分公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

1.5 重积分的应用

1.5.1 重积分的几何应用

1.5.1.1 平面图形的面积

$$A(D) = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.5.1.2 立体的体积

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

1.5.1.3 曲面的面积

空间曲面 $S: z = f(x,y), (x,y) \in D$.
则曲面 S 的面积为

$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.5.2 重积分的物理应用

1.5.2.1 质心

体密度为 $\rho(x,y)$ 的物体占据空间 Ω，其质心坐标为

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V} \\ \bar{y} = \dfrac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V} \\ \bar{z} = \dfrac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V}{\iiint_\Omega \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}V} \end{cases}$$

1.5.2.2 转动惯量

设物体的密度为 $\rho(x,y,z)$，则物体分别关于 x，y，z 轴的转动惯量为

$$\begin{cases} I_x = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \\ I_y = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,\mathrm{d}V \\ I_z = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V \end{cases}$$

1.5.2.3 引力

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{F} &= G\frac{m_0\mathrm{d}m}{r^3}\vec{r} \\ &= G\frac{m_0\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{r^3}\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ &= \left(\mathrm{d}F_x, \mathrm{d}F_y, \mathrm{d}F_z\right) \end{aligned}$$

第 2 章　曲线积分和曲面积分

2.1　第一类曲线积分和曲面积分

2.1.1　第一类曲线积分的概念

定义 2.1　设 C 是 xOy 面上的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 是定义在 C 上的有界函数，在 C 上任意插入分点 $A=A_0,A_1,\dots,A_{n-1},A_n=B$，将其分成 n 个小弧段，记第 i 个小弧段的弧长为 Δs_i，在第 i 个小段上任取点 (ϵ_i,η_i)，和式 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} f(\epsilon_i,\eta_i)\Delta s_i$，当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}\to 0$ 时，有确定的极限值 I，即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i,\eta_i)\Delta s_i = I$$

则称函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上**可积**，并将此极限值 I 称为函数 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的**第一类曲线积分**，记作 $\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$，即

$$I=\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\epsilon_i,\eta_i)\Delta s_i$$

1. 第一类曲线积分的几何含义为柱面的面积
2. $\int\limits_C \mathrm{d}s=\int\limits_c 1\,\mathrm{d}s=s_C$
3. 若 C 是封闭曲线，即 C 的二端点重合，则记第一类曲线积分为 $\oint\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s$

2.1.2　第一类曲线积分的性质

2.1.2.1　与曲线方向无关

若曲线 C 的端点为 A 和 B，$f(x,y)$ 在曲线 C 上可积，则

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,\mathrm{d}s=\oint\limits_{BA} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

2.1.2.2 线性性

若 f, g 在曲线 C 上可积，α, β 是任意常数，则 $\alpha f + \beta g$ 在曲线 C 上可积，且

$$\int\limits_C (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}s = \alpha \int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s + \beta \int\limits_C g(x,y)\,\mathrm{d}s$$

2.1.2.3 路径可加性

若曲线 C 由两段光滑曲线 C_1 和 C_2 首尾连接而成，则 $f(x,y)$ 在曲线 C 上可积，等价于 $f(x,y)$ 在曲线 C_1 和 C_2 上均可积，且

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{C_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{C_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

2.1.2.4 中值定理

设函数 f 在光滑曲线 C 上连续，则 $\exists(\epsilon,\eta) \in C$，使得

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = f(\epsilon,\eta) \cdot s_C$$

其中 s_C 是曲线段 C 的长度

2.1.3 一类曲线积分的计算

设函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线 C 上连续，C 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$，$t \in [a,b]$，满足 $x'(t)$，$y'(t)$ 连续，且 $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$，则

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

1. 右端积分限应 $\alpha < \beta$
2. 当曲线 C 形式为 $y = y(x)$，$x \in [a,b]$ 时

$$\int\limits_C f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

3. 当曲线 C 为极坐标 $r = r(\theta)$，$\theta \in [\alpha, \beta]$ 时

$$\int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r(\theta)^2 + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

2.2 第二类曲线积分与曲面积分

2.2.1 第二类曲线积分的概念

定义 2.2 设 C 为平面光滑定向曲线 $(A \to B)$，且向量值函数 $\vec{F}(x, y) = R(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 在 C 上有界，$\vec{e}_\tau$ 为 C 上点 (x, y) 处于定向一致的单位切向量，若

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$$

存在，则称为**向量值函数 $\vec{F}$ 在定向曲线 C 上的曲线积分或第二类曲线积分**

若 $\vec{e}_\tau(x, y) = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s &= \int_C P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta\,\mathrm{d}s \\ &= \int_C P(x, y)\cos\alpha\,\mathrm{d}s + \int_C Q(x, y)\cos\beta\,\mathrm{d}s \\ &= \int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这是对坐标的曲线积分

记 $\vec{r} = (x, y)$，则 $\mathrm{d}\vec{e} = \vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$ 称为**定向弧微分**

从而有向量形式的第一类曲线积分

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{e} = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

2.2.1.1 第二类曲线积分的性质

第二类曲线积分与**曲线方向有关**，即

$$\int_{AB} \vec{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\oint_{BA} \vec{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

此外线性性与对定向积分路径的可加性等仍然成立

2.2.1.2 第二类曲线积分的计算

若曲线 C 为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ，$t : \alpha \to \beta$

起点 A 对应 α，终点 B 对应 β

考察 $\int\limits_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{e}_\tau\,\mathrm{d}s$，沿曲线 C 有 $\vec{F} = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$，则

$$\int\limits_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t))\,\mathrm{d}x(t) + Q(x(t), y(t))\,\mathrm{d}y(t)$$

2.2.2 第二类曲面积分的概念

2.2.2.1 双侧曲面

定义 2.3 若点 P 沿曲面 S 上任何不越过曲面边界的连续闭曲线移动后回到起始位置时，法向量 $\vec{n}$ 保持原来的指向，则称 S 为**双侧曲面**

典型的，Mobius 面不是双侧曲面

选定双侧曲面 S 一侧为正向，称为**正侧**，记为 S^+，其相反测记作 S^-

2.2.2.2 双侧曲面定侧

若 $S: z = z(x, y)$，$(x, y) \in D_{xy}$，$\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \pm\frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

若选取 $\vec{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，则说明 $\cos\gamma > 0$，选取了曲面的上侧

一般的

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \text{前侧}\ \cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \text{后侧} \\ \cos\beta > 0 \Leftrightarrow \text{右侧}\ \cos\beta < 0 \Leftrightarrow \text{左侧} \\ \cos\gamma > 0 \Leftrightarrow \text{上侧}\ \cos\gamma < 0 \Leftrightarrow \text{下侧} \end{cases}$$

习惯上选取曲面片的上侧为 S^+；对于封闭曲面，选取外侧为 S^+

对于向量值函数 $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}S = \int\limits_c P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

2.2.2.3 第二类曲面积分的性质

第二类曲面积分与在曲面的哪一侧积分有关

$$\iint_{S^+} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint_{S^-} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

此外第二类曲面积分也具有线性性和可加性等性质

2.2.3 第二类曲面积分的计算

2.2.3.1 合一投影法

$$\iint_{S^+} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{D_{xy}} \left(-Pz_x - Qz_y + R\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2.2.3.2 分面投影法

分 $P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 三个部分进行积分
常在部分曲面垂直坐标轴时进行

2.2.3.3 公式法

常用于参数方程确定的曲面
设 $S : \vec{r} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$，其中 $(u,v) \in D_{xy}$，则

$$\iint_{S^+} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{F}\cdot(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

2.3 Green 公式及其应用

2.3.1 Green 公式

2.3.1.1 连通区域及其边界方向

设 D 为平面区域, 若 D 内的任意一条闭曲线所围的区域都落在 D 内, 则称 D 是单连通的, 否则称 D 为复连通的

当点沿区域边界朝一个方向前进时, 区域总在它的左侧, 则将此方向规定为边界曲线 C 的正向, 记为 C^+, 与 C^+ 相反方向为 C^-

2.3.1.2 Green 公式

定理 2.1 设有界闭区域 D 由分段光滑曲线 C 围成，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{C^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1. 对于复连通区域 D，Green 公式仍然成立，但需将 C 分成若干个单连通区域 D_i，并对每个区域应用 Green 公式
2. 公式也可以记为 $\oint_{C^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2.3.1.3 Green 公式的向量形式

2.3.2 线积分与路径无关的条件

定义 2.4 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 D 内连续，若对 D 内任意两点 A，B 以及 D 内连接 A, B 的任意二分段光滑曲线 C_1，C_2，均有

$$\int_{C_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{C_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则称曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内**与路径无关**

定理 2.2 设函数 P，Q 在**单连通**区域 D 上有连续偏导数，则下述四命题等价

1. 在 D 内的任一条分段光滑闭曲线 C 上，有 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$
2. 曲线积分 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关
3. 存在 D 上的可微函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$，此时称 $u(x,y)$ 为 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 的一个**原函数**
4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内恒成立

2.3.3 全微分求积与全微分方程

设函数 P，Q 在单连通区域 D 上有连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，则 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 为某函数 u 的全微分，且取定 $(x_0, y_0) \in D$

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y,\quad (x,y)\in D$$

从而全体函数为 $u(x,y)+C$

称求 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的原函数的过程为**全微分求积**

若 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 是某二元函数的全微分，称方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

为**全微分方程**

求出一个原函数 $u(x,y)$，则方程的通解为 $u(x,y)=C$，其中 C 是任意常数

2.4 Gauss 公式和 Strokes 公式

2.4.1 Gauss 公式

定理 2.3 设函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有连续偏导数，Ω 的边界时光滑或分片光滑的闭曲面 Σ，则

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

1. 令 $P=\frac{x}{3}$，$Q=\frac{y}{3}$，$R=\frac{z}{3}$，则可导出 $V_\Omega=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma^+} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即体积公式
2. 使用 Gauss 公式时，注意 Σ^+ 的方向应与 Ω 的外侧一致

2.4.1.1 向量形式的 Gauss 公式

$$\oiint\limits_{\Sigma^+}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint\limits_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

2.4.2 通量和散度

2.4.2.1 通量

若给定向量场

$$\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

则称曲面积分

$$\Phi = \oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{\Sigma^+} P \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + Q \,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R \,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

为向量场 $\vec{F}$ 在通过定侧曲面 Σ^+ 的**通量**

2.4.2.2 散度

称

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 $\vec{F}$ 的**散度**

则 Gauss 公式可写为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\vec{F} \,\mathrm{d}V$$

第 3 章　级数

3.1　数项级数

3.1.1　数项级数的概念

定义 3.1　给定数列 $\{a_n\}$，和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为（**无穷）极数**，a_n 称为级数的**通项**（或**一般项**）

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 称为级数 $\sum_{n=1} a_n$ 的前 n 项**部分和**
2. $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为级数 $\sum_{n=1} a_n$ 的**余项级数**

定义 3.2　1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，S 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的**和**，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

2. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**

注　常用结论：

等比数列 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{收敛于} \frac{a}{1-q}, |q| < 1 \\ \text{发散}, |q| \geq 1 \end{cases}$

3.1.2　数项级数的概念

3.1.3　数项级数的基本性质

3.1.3.1　基本性质

1. 若常数 $\alpha \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ 有相同敛散性
2. **线性性**：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，有 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S + \beta T$

3. **可加性**：将级数增加、删减或改换**有限项**，不改变级数的**敛散性**
4. **结合律**：若级数收敛于 S，则将相邻若干项添加括号所成新级数仍收敛于 S
   (a) 其本质是部分和数列收敛于 S，则子列均收敛于 S
   (b) 加括号后级数收敛 $\nRightarrow$ 原级数收敛
   (c) 加括号后级数发散 $\Rightarrow$ 原级数发散

3.1.3.2 级数收敛的必要条件

定理 3.1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \nRightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，比如调和级数

3.2 正项级数敛散性

3.2.1 正项级数

定义 3.3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}^+)$，则称此级数为**正项级数**

定理 3.2 收敛原理: 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，即 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+ : S_n \leq M$

注 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 收敛, p > 1 发散, p \leq 1 \end{cases}$$

3.2.2 正项级数敛散性判别法

3.2.2.1 比较判别法

定理 3.3 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $a_n \leq b_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

1. 条件 $\forall n \in \mathbb{N}^+ a_n \leq b_n$ 可改为 $\exists N, C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ \forall n \geq N a_n \leq C b_n$
2. 使用该判别法时需要有参照级数，常选**等比级数**或 p **级数**作参照

3.2.2.2 比较判别法（极限形式）

定理 3.4 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

1. 当 $0 < l < +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散
2. 当 $l = 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
3. 当 $l = +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

注 通常使用 $b_n = \frac{1}{n^p}$ 作为参照物，因为我们此时在分析无穷小 a_n 的阶

3.2.2.3 比值判别法（d'Alembert 判别法）

定理 3.5 若**正项级数** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$，则

1. 当 $0 \le l < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
2. 当 $l > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
3. 当 $l = 1$ 时，判别法失效

注 Stirling 公式：$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (n \to \infty)$

注 当 a_n 是一些乘积构成或含 $n!$ 时，可以考虑比值法

3.2.2.4 根值判别法（Cauchy 判别法）

定理 3.6 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$，则

1. 当 $0 \le l < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
2. 当 $1 < l \le +\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
3. 当 $l = 1$ 时，判别法失效

注 当 a_n 中含有 n 次方时，可以考虑使用根值法

注 比值法和根值法实际上可看作是在将级数与等比级数作比较，均智能判断收敛速度不满与等比级数的级数. 当所求级数存在时，可称级数为**拟等比级数**

注 根值法优于比值法

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}=l$
2. $\sqrt[n]{a_n}=l\nRightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$

3.2.2.5 积分判别法

定义 3.4 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**正项级数**，若非负函数 $f(X)$ 在 $[1,+\infty)$ 上**单调递减**，且 $a_n=f(n)\quad(\forall n\in\mathbb{N}^+)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与反常积分 $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性

1. 条件 $[1,+\infty)$ 可改为 $[a,+\infty)\ (a>1)$

3.3 任意项级数的敛散性

任意项级数

正负项分布是任意的级数

3.3.1 错级数敛散性的判别法

3.3.1.1 交错级数

定义 3.5 各项正负相间的级数称为**交错级数**，其形式为

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}-1^{n-1}a_n\quad(\text{其中}a_n>0)$$

3.3.1.2 Leibniz 判别法

定义 3.6 若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\ (a_n>0)$ 满足:

1. $a_{n+1}\le a_n\quad(n=1,2,\ldots)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其余项级数满足

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|\le a_{n+1}$$

我们称满足定理条件的级数为 **leibniz 型级数**

3.3.2 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

定理 3.7 （Abel 判别法）若 $\{a_n\}$ 单调且有界，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

定理 3.8 （Abel 判别法）若 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

3.3.3 绝对收敛与条件收敛

定义 3.7 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为任意项级数

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**绝对收敛**
2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**

定义 3.8 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

注 **常用结论：**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \begin{cases} \text{绝对收敛} & ,p > 1 \\ \text{条件收敛} & ,0 < p \leq 1 \end{cases}$$

定义 3.9 （绝对收敛与条件收敛的本质）

1. 绝对收敛的级数，可以改变任意项的顺序，其收敛性与和均不变（即满足加法交换律）
2. 条件收敛的级数，总可以适当改变项的顺序，使其按照任意预定的方式收敛或者发散

3.4 函数项级数

定义 3.10 设函数列 $\{u_n x\}(n = 1, 2, \ldots)$ 在数集 X 上有定义，则称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为**函数项级数**，其中 $u_n(x)$ 称为**通项**

定义 3.11 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则 x_0 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**，否则称为**发散点**，全体收敛点所组成的集合 I 称为**收敛域**

定义 3.12 记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项**部分和 (函数)**, 记 $r_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 为**余和**

定义 3.13 对于收敛域 I 中的任意一点 x，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和为 $S(x)$，称此函数 $S(x)$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**

显然，$\forall x\in I$，$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=S(x)$，$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0$

3.5 幂级数

3.5.1 幂级数及其收敛半径

在函数项级数中，最简单及最重要的级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1x + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

称为**幂级数**，其中常数项 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 称为幂级数的**系数**

幂级数更加一半的形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

3.5.1.1 Abel 定理

1. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $x=x_0(x\neq 0)$ 收敛，则当 $|x|<|x_0|$，时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 绝对收敛
2. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $x=x_1$ 发散，则当 $|x|>|x_1|$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 发散

引理 3.1 （幂级数收敛域的情况）幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛域 I 仅有以下几种情况：

1. 仅在 $x=0$ 的情况收敛（$R=0$）
2. 在区间 $(-R,R)(R>0)$ 内绝对收敛，在 $(-\infty,-R)\bigcup(R,+\infty)$ 发散
3. 在区间 $(-R,R)$ 内绝对收敛（$R=+\infty$）

3.6 幂级数收敛半径的求法

3.6.1 系数模比值法

定理 3.9 对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$,若 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$,则收敛半径 $R = \{0, \rho = +\infty\frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty + \infty, \rho = 0$

3.6.2 系数模根值法

定理 3.10 对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$,若 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,则收敛半径 $R = \{0, \rho = +\infty\frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty + \infty, \rho = 0$

3.7 幂级数的性质

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$
2. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$，在收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(n)$，则 $S(n)$ 在 $(-R, R)$ 上连续；若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 或 $x = -R$ 收敛，则和函数 $S(n)$ 在 $x = R$ 左连续或 $x = -R$ 处右连续，即 $\lim_{x\to R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$
3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$，在收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(n)$，则 $S(n)$ 在 $(-R, R)$ 上可导，且有**逐项求导公式**

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$，在收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(n)$，则 $S(n)$ 在 $(-R, R)$ 上可导，且有**逐项求积公式**

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径仍为 R

3.7.1 幂级数的分析性质

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$，在收敛区间 $(-R, R)$ 上连续；若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 或 $x = -R$ 收敛，则和函数 $S(n)$ 在 $x = R$ 左连续或 $x = -R$ 处右连续，即

$$\lim_{x \to R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

2. 若幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$，在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数为 $S(n)$，则 $S(n)$ 在 $(-R, R)$ 上可导，且有**逐项求导公式**

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R

3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$，在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数为 $S(n)$，则 $S(n)$ 在 $(-R, R)$ 上可导，且有**逐项求积公式**

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径仍为 R

注 1. 幂函数逐项求导，逐项积分后，收敛半径不变，但是收敛域可能改变

2. 幂函数在收敛区间内具有任意阶导数

3.7.2 Taylor 级数

定义 3.14 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内有任意阶导数，称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **Taylor** 级数，记为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$x_0 = 0$ 是，称为 **Maclaurin 级数**

定理 3.11 （唯一性）若 $f(x)$ 在 x_0 可展开为幂级数，则展开式唯一，且恰为 Taylor 级数

定理 3.12 设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 I 内任意阶可导，则在 I 内

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

3.7.3 常用的初等函数的幂级数展开式

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$
4. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (|x| < 1)$
5. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (|x| < 1)$
6. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$
7. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$
8. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \le 1)$

3.7.4 正弦级数和余弦级数

若周期为 2π 的函数 $f(x)$ 是奇函数时，其 Fourier 系数 $a_n = 0$，从而

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{正弦级数}$$

其中 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x$

若周期为 2π 的函数 $f(x)$ 是偶函数，其 Fourier 系数 $b_n = 0$，从而

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{余弦级数}$$

其中 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x$

若函数 $f(x)$ 定义在 $[0, \pi]$ 上，可作奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} f(x), 0 < x < \pi \\ -f(-x), -\pi < x < 0 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

使得 $F(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数

也可作偶延拓

$$G(x)=\begin{cases} f(x), 0<x<\pi \\ f(-x), -\pi<x<0 \\ 0, x=0, \pm\pi \end{cases}$$

使得函数 $G(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数

对于一定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$，可以对其先做奇延拓或者偶延拓，再将其展开为正弦级数或者余弦级数

3.7.5 周期为 $2l$ 的 Fourier 级数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上可积，作代换 $x=\frac{l}{\pi}t$，使得 $F(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数，从而

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(nt)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

故

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\mathrm{d}x$$

定理 3.13 若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足 Dirichlet 条件，则 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right)$$

收敛到

$$S(n)=\begin{cases} f(x), & x\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为}f(x)\text{的间断点}\\ \frac{f(l^-)+f(-l^+)}{2}, & x=\pm l \end{cases}$$