

高数 2 笔记

dcldyhb

2025 年 6 月 7 日



目 录

第 1 章 重积分

1.1 重积分的概念和性质

定义 1.1 设 D 是平面上的有界闭区域, $f(x, y)$ 为 D 上的有界函数, I 为实数. 若对 D 的任意分割 $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$, 任 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i (i = 1, \dots, n)$, 作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$ ($\Delta \sigma_i$ 为 D_i 的面积), 总有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = I$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$, d_i 是小区域 ΔD_i 的直径, 则称函数 $f(x, y)$ 在 D 上可积, 记为 $f \in R(D)$; 极限值 I 称为 $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

1. \iint 积分号
2. D 积分区域
3. $f(x, y)$ 被积函数
4. $d\sigma$ 面积元素 (微元)
5. 二重积分的几何意义
 - (a) 当被积函数大于 0 时, 二重积分是柱体体积
 - (b) 当被积函数小于 0 时, 二重积分是柱体体积的负值
 - (c) 一般的, 为曲顶柱体体积的代数和
6. 可积的充分条件
 - (a) **定理:** 若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续, 则 $f(x, y) \in R(D)$.
7. $f(x, y)$ 在 D 上的可积性及积分值与其在 D 内有限条光滑曲线上的定义无关

1.2 二重积分的性质

1. $\iint_D d\sigma = \iint_D 1 d\sigma = A_D$ (D 的面积).

2. 线性性: 设 $f, g \in R(D)$, α, β , 是任意常数, 则 $\alpha f + \beta g \in R(D)$, 且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \iint_D f d\sigma + \beta \iint_D g d\sigma$$

3. 区域可加性: 若 $f \in R(D)$ 且积分区域 D 分为内部不相交的子区域 D_1, D_2 , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

4. 保序性: 若 $f, g \in R(D)$, 且当 $(x, y) \in D$ 时, $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(a) 推论 1: 若 $f \in R(D)$, 则 $|f(x, y)| \in R(D)$, 且

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

(a) 推论 2: 若 $f \in R(D)$, 且当 $(x, y) \in D$ 时, $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$mA_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA_D$$

(a) 推论 3: 若 $f \in R(D)$, 且当 $(x, y) \in D$ 时, $f(x, y) \geq 0$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$$

5. 积分中值定理: 若 $f(x, y) \in C(D)$, $g(x, y) \in R(D)$, 且 g 在 D 上不变号, 则 $\exists \xi, \eta \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(a) 推论: 若 $f(x, y) \in C(D)$, 则存在 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A_D$$

称 $f(\xi, \eta) = \frac{\iint_D f d\sigma}{A_D}$ 为函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的平均值

1.3 二重积分的计算

1.3.1 直角坐标系下的计算

当二重积分存在时, 可利用平行于坐标轴的直线来划分积分区域 D , 此时, 面积元素

$$d\sigma = dx dy$$

故二重积分在直角坐标系下可表示为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

1.3.1.1 x 型正则区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \right\}$$

化为先 y 后 x 的二次积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &\equiv \int_a^b f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

1.3.1.2 y 型正则区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d \right\}$$

化为先 x 后 y 的二次积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \\ &\equiv \int_c^d f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

1.3.1.3 一般区域的二重积分

分割成若干个正则子区域, 利用积分区域可加性, 分别在子区域上积分后求和

注 直角坐标计算二重积分的步骤

1. 画出积分区域 D 的草图, 并确定类型
2. 按照所确定的类型表示区域 D
3. 化二重积分为二次积分 (注意上下限)
4. 计算二重积分

1.3.2 极坐标系下的计算

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时, 可用极坐标来计算二重积分.

面积元素 $\Delta\sigma$ 在极坐标下为

$$\Delta\sigma = r dr d\theta$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

1.3.3 二重积分的变量代换

定理 1.1 设变换 $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ (Jacobi 行列式) $\neq 0$, 而 $f(x, y) \in C(D)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

1. 在定理条件下, 变换 T 一定存在逆变换 $T^{-1} : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, 且 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$
有时, 借助此式求 J 较为简单
2. 当 Jacobi 行列式仅在区域 D^* 内个别点上或个别曲线上为 0 时, 定理结论仍成立
3. 在广义极坐标 $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ 下, $J = abr$

1.4 三重积分

1.4.1 三重积分的定义

定义 1.2 设 Ω 是 \mathbb{R}^3 中的有界闭区域, 三元函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上有界, I 为实数. 若将 Ω 任意分割成 n 个小区间 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$, 任取 $(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \in \Delta\Omega_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 作和 $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \Delta V_i$, (ΔV_i 是 $\Delta\Omega_i$ 的体积), 总有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \Delta V_i = I$$

其中 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$, d_i 是 $\Delta\Omega_i$ 的直径, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 记为 $f \in R(\Omega)$; I 称为 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

其中 V_{Ω} 是区域 Ω 的体积

1. 若 $f(x, y, z)$ 表示占有三维空间区域 Ω 的物体的体密度函数, 则 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ 给出了物体的质量
2. 类似二重积分, 三重积分具有线性性, 区域可加性, 保序性以及推论和积分中值定理, 并且有 $\iiint_{\Omega} dV = V_{\Omega}$

1.4.2 直角坐标系下的计算

直角坐标系下, 由于 $dV = dx dy dz$, 故

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

1.4.2.1 柱线法（坐标面投影法）

设 Ω 是以曲面 $z = z_1(x, y)$ 为底，曲面 $z = z_2(x, y)$ ，而侧面是母线平行于 z 轴的柱体所围成的区域

设 Ω 在 xOy 面上的投影区域为 D_1 ，则 Ω 可表示为

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D_1, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D \right\}$$

则物体总质量为

$$\iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

故有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

1.4.2.2 截面法（坐标轴投影法）

设区域 Ω 在 z 轴上的投影区间为 $[h_1, h_2]$ ，即 Ω 介于平面 $z = h_1$ 和 $z = h_2$ 之间，过 z 处且垂直于 z 轴的平面截 Ω 得截面区域 D_z ，则 Ω 可表示为

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in D_z \right\}$$

物体总质量为

$$\int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

故有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

1.4.3 三重积分的变量代换

定理 1.2 设变换 $T : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$ 有连续偏导数, 且满足 $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$, 而

$f(x, y, z) \in C(\Omega)$, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

1.4.3.1 柱面坐标系下的计算

柱面坐标系, 实际上就是将 x, y 坐标转换为极坐标

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

则柱面积分公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

1.4.3.2 球面坐标系下的计算

球面坐标系, 实际上就是将 x, y, z 坐标转换为球坐标

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

则球面积分公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega^*} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

1.5 重积分的应用

1.5.1 重积分的几何应用

1.5.1.1 平面图形的面积

$$A(D) = \iint_D d\sigma = \iint_D dx dy$$

1.5.1.2 立体的体积

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

1.5.1.3 曲面的面积

空间曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$.

则曲面 S 的面积为

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

1.5.2 重积分的物理应用

1.5.2.1 质心

体密度为 $\rho(x, y)$ 的物体占据空间 Ω , 其质心坐标为

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x, y, z) dV} \end{cases}$$

1.5.2.2 转动惯量

设物体的密度为 $\rho(x, y, z)$ ，则物体分别关于 x , y , z 轴的转动惯量为

$$\begin{cases} I_x = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(y^2 + z^2) dV \\ I_y = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(x^2 + z^2) dV \\ I_z = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dV \end{cases}$$

1.5.2.3 引力

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= G \frac{m_0 dm}{r^3} \vec{r} \\ &= G \frac{m_0 \rho(x, y, z) dV}{r^3} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ &= (dF_x, dF_y, dF_z) \end{aligned}$$

第 2 章 曲线积分和曲面积分

2.1 第一类曲线积分和曲面积分

2.1.1 第一类曲线积分的概念

定义 2.1 设 C 是 xOy 面上的一条光滑曲线弧, 函数 $f(x, y)$ 是定义在 C 上的有界函数, 在 C 上任意插入分点 $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$, 将其分成 n 个小弧段, 记第 i 个小弧段的弧长为 Δs_i , 在第 i 个小段上任取点 (ϵ_i, η_i) , 和式 $\sum_{i=1}^n f(\epsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$, 当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ 时, 有确定的极限值 I , 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i, \eta_i) \Delta s_i = I$$

则称函数 $f(x, y)$ 在曲线 C 上可积, 并将此极限值 I 称为函数 $f(x, y)$ 在曲线 C 上的第一类曲线积分, 记作 $\int_C f(x, y) ds$, 即

$$I = \int_C f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$$

1. 第一类曲线积分的几何含义为柱面的面积

$$2. \int_C ds = \int_c 1 ds = s_C$$

3. 若 C 是封闭曲线, 即 C 的二端点重合, 则记第一类曲线积分为 $\oint_C f(x, y) ds$

2.1.2 第一类曲线积分的性质

2.1.2.1 与曲线方向无关

若曲线 C 的端点为 A 和 B , $f(x, y)$ 在曲线 C 上可积, 则

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \oint_{\widehat{BA}} f(x, y) ds$$

2.1.2.2 线性性

若 f, g 在曲线 C 上可积, α, β 是任意常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在曲线 C 上可积, 且

$$\int_C (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_C f(x, y) ds + \beta \int_C g(x, y) ds$$

2.1.2.3 路径可加性

若曲线 C 由两段光滑曲线 C_1 和 C_2 首尾连接而成, 则 $f(x, y)$ 在曲线 C 上可积, 等价于 $f(x, y)$ 在曲线 C_1 和 C_2 上均可积, 且

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds$$

2.1.2.4 中值定理

设函数 f 在光滑曲线 C 上连续, 则 $\exists(\epsilon, \eta) \in C$, 使得

$$\int_C f(x, y) ds = f(\epsilon, \eta) \cdot s_C$$

其中 s_C 是曲线段 C 的长度

2.1.3 一类曲线积分的计算

设函数 $f(x, y)$ 在光滑曲线 C 上连续, C 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [a, b]$, 满足 $x'(t), y'(t)$ 连续, 且 $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$, 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

1. 右端积分限应 $\alpha < \beta$
2. 当曲线 C 形式为 $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ 时

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

3. 当曲线 C 为极坐标 $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ 时

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$$

2.2 第二类曲线积分与曲面积分

2.2.1 第二类曲线积分的概念

定义 2.2 设 C 为平面光滑定向曲线 ($A \rightarrow B$), 且向量值函数 $\vec{F}(x, y) = R(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 在 C 上有界, \vec{e}_τ 为 C 上点 (x, y) 处于定向一致的单位切向量, 若

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{e}_\tau ds$$

存在, 则称为向量值函数 \vec{F} 在定向曲线 C 上的曲线积分或第二类曲线积分

若 $\vec{e}_\tau(x, y) = (\cos \alpha, \cos \beta)$, 则

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{e}_\tau ds &= \int_C P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta ds \\ &= \int_C P(x, y) \cos \alpha ds + \int_C Q(x, y) \cos \beta ds \\ &= \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \end{aligned}$$

这是对坐标的曲线积分

记 $\vec{r} = (x, y)$, 则 $d\vec{r} = \vec{e}_\tau ds$ 称为定向弧微分

从而有向量形式的第一类曲线积分

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2.2.1.1 第二类曲线积分的性质

第二类曲线积分与曲线方向有关, 即

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = - \oint_{\widehat{BA}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

此外线性性与对定向积分路径的可加性等仍然成立

2.2.1.2 第二类曲线积分的计算

若曲线 C 为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t: \alpha \rightarrow \beta$

起点 A 对应 α , 终点 B 对应 β

考察 $\int_C P dx + Q dy = \int_C \vec{F} \cdot \vec{e}_\tau ds$, 沿曲线 C 有 $\vec{F} = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$, 则

$$\int_C P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t)) dx(t) + Q(x(t), y(t)) dy(t)$$

2.2.2 第二类曲面积分的概念

2.2.2.1 双侧曲面

定义 2.3 若点 P 沿曲面 S 上任何不越过曲面边界的连续闭曲线移动后回到起始位置时, 法向量 \vec{n} 保持原来的指向, 则称 S 为**双侧曲面**

典型的, Mobius 面不是双侧曲面

选定双侧曲面 S 一侧为正向, 称为**正侧**, 记为 S^+ , 其相反侧记作 S^-

2.2.2.2 双侧曲面定侧

若 $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

若选取 $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$, 则说明 $\cos \gamma > 0$, 选取了曲面的上侧一般的

$$\begin{cases} \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \text{前侧} & \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \text{后侧} \\ \cos \beta > 0 \Leftrightarrow \text{右侧} & \cos \beta < 0 \Leftrightarrow \text{左侧} \\ \cos \gamma > 0 \Leftrightarrow \text{上侧} & \cos \gamma < 0 \Leftrightarrow \text{下侧} \end{cases}$$

习惯上选取曲面片的上侧为 S^+ ; 对于封闭曲面, 选取外侧为 S^+

对于向量值函数 $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C P dx dy + Q dy dz + R dz dx$$

2.2.2.3 第二类曲面积分的性质

第二类曲面积分与在曲面的哪一侧积分有关

$$\iint_{S^+} P dx dy + Q dy dz + R dz dx = - \iint_{S^-} P dx dy + Q dy dz + R dz dx$$

此外第二类曲面积分也具有线性性和可加性等性质

2.2.3 第二类曲面积分的计算

2.2.3.1 合一投影法

$$\iint_{S^+} P dx dy + Q dy dz + R dz dx = \iint_{D_{xy}} (-P z_x - Q z_y + R) dx dy$$

2.2.3.2 分面投影法

分 $P dx dy$, $Q dy dz$, $R dz dx$ 三个部分进行积分
常在部分曲面垂直坐标轴时进行

2.2.3.3 公式法

常用于参数方程确定的曲面

设 $S: \vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, 其中 $(u, v) \in D_{uv}$, 则

$$\iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

2.3 Green 公式及其应用

2.3.1 Green 公式

2.3.1.1 连通区域及其边界方向

设 D 为平面区域, 若 D 内的任意一条闭曲线所围的区域都落在 D 内, 则称 D 是单连通的, 否则称 D 为复连通的

当点沿区域边界朝一个方向前进时, 区域总在它的左侧, 则将此方向规定为边界曲线 C 的正向, 记为 C^+ , 与 C^+ 相反方向为 C^-

2.3.1.2 Green 公式

定理 2.1 设有界闭区域 D 由分段光滑曲线 C 围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

1. 对于复连通区域 D , Green 公式仍然成立, 但需将 C 分成若干个单连通区域 D_i , 并对每个区域应用 Green 公式
2. 公式也可以记为 $\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} P \quad Q \right| dx dy$

2.3.1.3 Green 公式的向量形式

2.3.2 线积分与路径无关的条件

定义 2.4 设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 D 内连续, 若对 D 内任意两点 A, B 以及 D 内连接 A, B 的任意二分光滑曲线 C_1, C_2 , 均有

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

则称曲线积分 $\int_C P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关

定理 2.2 设函数 P, Q 在单连通区域 D 上有连续偏导数, 则下述四命题等价

1. 在 D 内的任一条分段光滑闭曲线 C 上, 有 $\int_C P dx + Q dy = 0$
2. 曲线积分 $\int_C P dx + Q dy$ 在 D 内与路径无关
3. 存在 D 上的可微函数 $u(x, y)$ 使得 $du = P dx + Q dy$, 此时称 $u(x, y)$ 为 $P dx + Q dy$ 的一个原函数
4. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内恒成立

2.3.3 全微分求积与全微分方程

设函数 P, Q 在单连通区域 D 上有连续偏导数, 且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则 $P dx + Q dy$ 为某函数 u 的全微分, 且取定 $(x_0, y_0) \in D$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, \quad (x, y) \in D$$

从而全体函数为 $u(x, y) + C$

称求 $P dx + Q dy$ 的原函数的过程为全微分求积

若 $P dx + Q dy$ 是某二元函数的全微分，称方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

为全微分方程

求出一个原函数 $u(x, y)$ ，则方程的通解为 $u(x, y) = C$ ，其中 C 是任意常数

2.4 Gauss 公式和 Stokes 公式

2.4.1 Gauss 公式

定理 2.3 设函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有连续偏导数， Ω 的边界时光滑或分片光滑的闭曲面 Σ ，则

$$\oiint_{\Sigma^+} P dx dy + Q dy dz + R dz dx = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

1. 令 $P = \frac{x}{3}$, $Q = \frac{y}{3}$, $R = \frac{z}{3}$ ，则可导出 $V_{\Omega} = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ ，即体积公式
2. 使用 Gauss 公式时，注意 Σ^+ 的方向应与 Ω 的外侧一致

2.4.1.1 向量形式的 Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz$$

2.4.2 通量和散度

2.4.2.1 通量

若给定向量场

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

则称曲面积分

$$\Phi = \oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma^+} P dx dy + Q dy dz + R dz dx$$

为向量场 \vec{F} 在通过定侧曲面 Σ^+ 的**通量**

2.4.2.2 散度

称

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 \vec{F} 的**散度**

则 Gauss 公式可写为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

第3章 级数

3.1 数项级数

3.1.1 数项级数的概念

定义 3.1 给定数列 $\{a_n\}$ ，和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为（无穷）极数， a_n 称为级数的通项（或一般项）

1. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和

2. $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的余项级数

定义 3.2 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛， S 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

2. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

注 常用结论：

等比数列 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{收敛于 } \frac{a}{1-q}, |q| < 1 \\ \text{发散}, |q| \geq 1 \end{array} \right.$

3.1.2 数项级数的概念

3.1.3 数项级数的基本性质

3.1.3.1 基本性质

1. 若常数 $\alpha \neq 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ 有相同敛散性

2. 线性性：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ ，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，有 $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S + \beta T$

3. 可加性：将级数增加、删减或改换有限项，不改变级数的敛散性
4. 结合律：若级数收敛于 S ，则将相邻若干项添加括号所成新级数仍收敛于 S
 - (a) 其本质是部分和数列收敛于 S ，则子列均收敛于 S
 - (b) 加括号后级数收敛 \Rightarrow 原级数收敛
 - (c) 加括号后级数发散 \Rightarrow 原级数发散

3.1.3.2 级数收敛的必要条件

定理 3.1 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，比如调和级数

3.2 正项级数敛散性

3.2.1 正项级数

定义 3.3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$)，则称此级数为正项级数

定理 3.2 收敛原理：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 \Leftrightarrow 是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界，即 $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+ : S_n \leq M$

注 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases}$$

3.2.2 正项级数敛散性判别法

3.2.2.1 比较判别法

定理 3.3 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $a_n \leq b_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^+$)，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

1. 条件 $\forall n \in \mathbb{N}^+ a_n \leq b_n$ 可改为 $\exists N, C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ \forall n \geq N a_n \leq C b_n$
2. 使用该判别法时需要有参照级数，常选等比级数或 p 级数作参照

3.2.2.2 比较判别法（极限形式）

定理 3.4 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

1. 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散
2. 当 $l = 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
3. 当 $l = +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

注 通常使用 $b_n = \frac{1}{n^p}$ 作为参照物, 因为我们此时在分析无穷小 a_n 的阶

3.2.2.3 比值判别法（d'Alembert 判别法）

定理 3.5 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 则

1. 当 $0 \leq l < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
2. 当 $l > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
3. 当 $l = 1$ 时, 判别法失效

注 Stirling 公式: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (n \rightarrow \infty)$

注 当 a_n 是一些乘积构成或含 $n!$ 时, 可以考虑比值法

3.2.2.4 根值判别法（Cauchy 判别法）

定理 3.6 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 则

1. 当 $0 \leq l < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
2. 当 $1 < l \leq +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
3. 当 $l = 1$ 时, 判别法失效

注 当 a_n 中含有 n 次方时, 可以考虑使用根值法

注 比值法和根值法实际上可看作是在将级数与等比级数作比较, 均智能判断收敛速度不满与等比级数的级数. 当所求级数存在时, 可称级数为**拟等比级数**

注 根值法优于比值法

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = l$$

$$2. \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

3.2.2.5 积分判别法

定义 3.4 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 若非负函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $a_n =$

$f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 有相同的敛散性

1. 条件 $[1, +\infty)$ 可改为 $[a, +\infty) (a > 1)$

3.3 任意项级数的敛散性

任意项级数

正负项分布是任意的级数

3.3.1 错级数敛散性的判别法

3.3.1.1 交错级数

定义 3.5 各项正负相间的级数称为**交错级数**, 其形式为

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (\text{其中 } a_n > 0)$$

3.3.1.2 Leibniz 判别法

定义 3.6 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (a_n > 0)$ 满足:

$$1. a_{n+1} \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 且其余项级数满足

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_{n+1}$$

我们称满足定理条件的级数为 **leibniz 型级数**

3.3.2 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

定理 3.7 (Abel 判别法) 若 $\{a_n\}$ 单调且有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

定理 3.8 (Abel 判别法) 若 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

3.3.3 绝对收敛与条件收敛

定义 3.7 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为任意项级数

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**绝对收敛**
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**

定义 3.8 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

注 常用结论:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \begin{cases} \text{绝对收敛} & , p > 1 \\ \text{条件收敛} & , 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

定义 3.9 (绝对收敛与条件收敛的本质)

1. 绝对收敛的级数, 可以改变任意项的顺序, 其收敛性与和均不变 (即满足加法交换律)
2. 条件收敛的级数, 总可以适当改变项的顺序, 使其按照任意预定的方式收敛或者发散

3.4 函数项级数

定义 3.10 设函数列 $\{u_n(x)\} (n = 1, 2, \dots)$ 在数集 X 上有定义, 则称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为**函数项级数**, 其中 $u_n(x)$ 称为**通项**

定义 3.11 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则 x_0 为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一个**收敛点**, 否则称为**发散点**, 全体收敛点所组成的集合 I 称为**收敛域**

定义 3.12 记 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项**部分和 (函数)**, 记 $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 为**余和**

定义 3.13 对于收敛域 I 中的任意一点 x , 记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和为 $S(x)$, 称此函数 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**

显然, $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x), \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$

3.5 幂级数

3.5.1 幂级数及其收敛半径

在函数项级数中, 最简单及最重要的级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1x + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

称为**幂级数**, 其中常数项 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 称为幂级数的**系数**

幂级数更加一般的形式为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

3.5.1.1 Abel 定理

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 在 $x = x_0(x \neq 0)$ 收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ 绝对收敛}$$

2. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $x = x_1$ 发散, 则当 $|x| > |x_1|$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 发散

引理 3.1 (幂级数收敛域的情况) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 的收敛域 I 仅有以下几种情况:

1. 仅在 $x = 0$ 的情况收敛 ($R = 0$)
2. 在区间 $(-R, R)(R > 0)$ 内绝对收敛, 在 $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ 发散
3. 在区间 $(-R, R)$ 内绝对收敛 ($R = +\infty$)

3.6 幂级数收敛半径的求法

3.6.1 系数模比值法

定理 3.9 对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则收敛半径 $R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$

3.6.2 系数模根值法

定理 3.10 对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则收敛半径 $R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \end{cases}$

3.7 幂级数的性质

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$
2. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 在收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上连续; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 或 $x = -R$ 收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 左连续或 $x = -R$ 处右连续, 即 $\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$
3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 在收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求导公式

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 在收敛区间 $(-R, R)$ 内的和函数为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求积公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径仍为 R

3.7.1 幂级数的分析性质

1. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 在收敛区间 $(-R, R)$ 上连续; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 或 $x = -R$ 收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 左连续或 $x = -R$ 处右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

2. 若幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求导公式

$$\begin{aligned}S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\end{aligned}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R

3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数为 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求积公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

且幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径仍为 R

- 注**
1. 幂函数逐项求导，逐项积分后，收敛半径不变，但是收敛域可能改变
 2. 幂函数在收敛区间内具有任意阶导数

3.7.2 Taylor 级数

定义 3.14 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某领域内有任意阶导数，称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的 **Taylor** 级数，记为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$x_0 = 0$ 是，称为 **Maclaurin** 级数

定理 3.11 （唯一性）若 $f(x)$ 在 x_0 可展开为幂级数，则展开式唯一，且恰为 Taylor 级数

定理 3.12 设 $f(x)$ 在 x_0 的某领域 I 内任意阶可导，则在 I 内

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

3.7.3 常用的初等函数的幂级数展开式

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (|x| < 1)$$

$$5. (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$6. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

$$7. \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

$$8. \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1)$$

3.7.4 正弦级数和余弦级数

若周期为 2π 的函数 $f(x)$ 是奇函数时, 其 Fourier 系数 $a_n = 0$, 从而

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{正弦级数}$$

$$\text{其中 } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

若周期为 2π 的函数 $f(x)$ 是偶函数, 其 Fourier 系数 $b_n = 0$, 从而

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{余弦级数}$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

若函数 $f(x)$ 定义在 $[0, \pi]$ 上, 可作奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

使得 $F(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数

也可作偶延拓

$$G(x) = \begin{cases} f(x), 0 < x < \pi \\ f(-x), -\pi < x < 0 \\ 0, x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

使得函数 $G(x)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的偶函数

对于一定义在 $[0, \pi]$ 上的函数 $f(x)$, 可以对其先做奇延拓或者偶延拓, 再将其展开为正弦级数或者余弦级数

3.7.5 周期为 $2l$ 的 Fourier 级数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-l, l]$ 上可积, 作代换 $x = \frac{l}{\pi}t$, 使得 $F(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ 为 $[-\pi, \pi]$ 上的可积函数, 从而

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

故

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

定理 3.13 若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上满足 Dirichlet 条件, 则 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{\pi n}{l} x \right) + b_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} x \right) \right)$$

收敛到

$$S(n) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点} \\ \frac{f(l^-) + f(-l^+)}{2}, & x = \pm l \end{cases}$$