

# 高数 2 笔记

dcldyhb

2025 年 6 月 8 日

## 目 录

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 第 1 章 重积分 .....               | 1  |
| 1.1 重积分的概念和性质.....            | 1  |
| 1.2 二重积分的性质.....              | 1  |
| 1.3 二重积分的计算.....              | 3  |
| 1.3.1 直角坐标系下的计算 .....         | 3  |
| 1.3.2 极坐标系下的计算 .....          | 4  |
| 1.3.3 二重积分的变量代换 .....         | 4  |
| 1.4 三重积分.....                 | 5  |
| 1.4.1 三重积分的定义 .....           | 5  |
| 1.4.2 直角坐标系下的计算 .....         | 5  |
| 1.4.3 三重积分的变量代换 .....         | 6  |
| 1.5 重积分的应用.....               | 8  |
| 1.5.1 重积分的几何应用 .....          | 8  |
| 1.5.2 重积分的物理应用 .....          | 8  |
| 第 2 章 曲线积分和曲面积分 .....         | 10 |
| 2.1 第一类曲线积分和曲面积分.....         | 10 |
| 2.1.1 第一类曲线积分的概念 .....        | 10 |
| 2.1.2 第一类曲线积分的性质 .....        | 10 |
| 2.1.3 一类曲线积分的计算 .....         | 11 |
| 2.2 第二类曲线积分与曲面积分.....         | 12 |
| 2.2.1 第二类曲线积分的概念 .....        | 12 |
| 2.2.2 第二类曲面积分的概念 .....        | 13 |
| 2.2.3 第二类曲面积分的计算 .....        | 14 |
| 2.3 Green 公式及其应用 .....        | 14 |
| 2.3.1 Green 公式 .....          | 14 |
| 2.3.2 线积分与路径无关的条件 .....       | 15 |
| 2.3.3 全微分求积与全微分方程 .....       | 15 |
| 2.4 Gauss 公式和 Stokes 公式 ..... | 16 |
| 2.4.1 Gauss 公式 .....          | 16 |

|                                    |           |
|------------------------------------|-----------|
| 2.4.2 通量和散度 .....                  | 16        |
| <b>第 3 章 级数 .....</b>              | <b>18</b> |
| 3.1 数项级数.....                      | 18        |
| 3.1.1 数项级数的概念 .....                | 18        |
| 3.1.2 数项级数的概念 .....                | 18        |
| 3.1.3 数项级数的基本性质 .....              | 18        |
| 3.2 正项级数敛散性.....                   | 19        |
| 3.2.1 正项级数 .....                   | 19        |
| 3.2.2 正项级数敛散性判别法 .....             | 19        |
| 3.3 任意项级数的敛散性.....                 | 21        |
| 3.3.1 交错级数敛散性的判别法 .....            | 21        |
| 3.3.2 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法..... | 22        |
| 3.3.3 绝对收敛与条件收敛 .....              | 22        |
| 3.4 函数项级数.....                     | 22        |
| 3.5 幂级数.....                       | 23        |
| 3.5.1 幂级数及其收敛半径 .....              | 23        |
| 3.6 幂级数收敛半径的求法.....                | 24        |
| 3.6.1 系数模比值法 .....                 | 24        |
| 3.6.2 系数模根值法 .....                 | 24        |
| 3.7 幂级数的性质.....                    | 24        |
| 3.7.1 幂级数的分析性质 .....               | 25        |
| 3.7.2 Taylor 级数.....               | 26        |
| 3.7.3 常用的初等函数的幂级数展开式 .....         | 27        |
| 3.7.4 正弦级数和余弦级数 .....              | 27        |
| 3.7.5 周期为 $2l$ 的 Fourier 级数.....   | 28        |

## 第 1 章 重积分

### 1.1 重积分的概念和性质

**定义 1.1** 设  $D$  是平面上的有界闭区域,  $f(x, y)$  为  $D$  上的有界函数,  $I$  为实数. 若对  $D$  的任意分割  $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ , 任  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta D_i (i = 1, \dots, n)$ , 作和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$  ( $\Delta \sigma_i$  为  $D_i$  的面积), 总有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i = I$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ ,  $d_i$  是小区域  $\Delta D_i$  的直径, 则称函数  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 记为  $f \in R(D)$ ; 极限值  $I$  称为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma.$$

1.  $\iint$  积分号
2.  $D$  积分区域
3.  $f(x, y)$  被积函数
4.  $d\sigma$  面积元素 (微元)
5. 二重积分的几何意义
  - (a) 当被积函数大于 0 时, 二重积分是柱体体积
  - (b) 当被积函数小于 0 时, 二重积分是柱体体积的负值
  - (c) 一般的, 为曲顶柱体体积的代数和
6. 可积的充分条件
  - (a) **定理:** 若函数  $f(x, y)$  在区域  $D$  上连续, 则  $f(x, y) \in R(D)$ .
7.  $f(x, y)$  在  $D$  上的可积性及积分值与其在  $D$  内有限条光滑曲线上的定义无关

### 1.2 二重积分的性质

1.  $\iint_D d\sigma = \iint_D 1 d\sigma = A_D$  ( $D$  的面积).
2. **线性性:** 设  $f, g \in R(D)$ ,  $\alpha, \beta$ , 是任意常数, 则  $\alpha f + \beta g \in R(D)$ , 且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) d\sigma = \alpha \iint_D f d\sigma + \beta \iint_D g d\sigma$$

3. 区域可加性: 若  $f \in R(D)$  且积分区域  $D$  分为内部不相交的子区域  $D_1, D_2$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

4. 保序性: 若  $f, g \in R(D)$ , 且当  $(x, y) \in D$  时,  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(a) 推论 1: 若  $f \in R(D)$ , 则  $|f(x, y)| \in R(D)$ , 且

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

(a) 推论 2: 若  $f \in R(D)$ , 且当  $(x, y) \in D$  时,  $m \leq f(x, y) \leq M$ , 则

$$mA_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA_D$$

(a) 推论 3: 若  $f \in R(D)$ , 且当  $(x, y) \in D$  时,  $f(x, y) \geq 0$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \geq 0$$

5. 积分中值定理: 若  $f(x, y) \in C(D)$ ,  $g(x, y) \in R(D)$ , 且  $g$  在  $D$  上不变号, 则  $\exists \xi, \eta \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(a) 推论: 若  $f(x, y) \in C(D)$ , 则存在  $(\xi, \eta) \in D$ , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A_D$$

称  $f(\xi, \eta) = \frac{\iint_D f d\sigma}{A_D}$  为函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上的平均值

## 1.3 二重积分的计算

### 1.3.1 直角坐标系下的计算

当二重积分存在时, 可利用平行于坐标轴的直线来划分积分区域  $D$ , 此时, 面积元素

$$d\sigma = dx dy$$

故二重积分在直角坐标系下可表示为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy$$

#### 1.3.1.1 $x$ 型正则区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \right\}$$

化为先  $y$  后  $x$  的二次积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\ &\equiv \int_a^b f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

#### 1.3.1.2 $y$ 型正则区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d \right\}$$

化为先  $x$  后  $y$  的二次积分

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left[ \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \\ &\equiv \int_c^d f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

### 1.3.1.3 一般区域的二重积分

分割成若干个正则子区域, 利用积分区域可加性, 分别在子区域上积分后求和

**注** 直角坐标计算二重积分的步骤

1. 画出积分区域  $D$  的草图, 并确定类型
2. 按照所确定的类型表示区域  $D$
3. 化二重积分为二次积分 (注意上下限)
4. 计算二重积分

### 1.3.2 极坐标系下的计算

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时, 可用极坐标来计算二重积分.

面积元素  $\Delta\sigma$  在极坐标下为

$$\Delta\sigma = r dr d\theta$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\{(r, \theta) | r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

### 1.3.3 二重积分的变量代换

**定理 1.1** 设变换  $T: \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  有连续偏导数, 且满足

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \text{ (Jacobi 行列式)} \neq 0$$

, 而  $f(x, y) \in C(D)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

1. 在定理条件下, 变换  $T$  一定存在逆变换  $T^{-1}$ :  $\begin{matrix} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{matrix}$ , 且  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$

有时, 借助此式求  $J$  较为简单

2. 当 Jacobi 行列式仅在区域  $D^*$  内个别点上或个别曲线上为 0 时, 定理结论仍成立
3. 在广义极坐标  $\begin{matrix} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{matrix}$  下,  $J = abr$

## 1.4 三重积分

### 1.4.1 三重积分的定义

**定义 1.2** 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^3$  中的有界闭区域, 三元函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上有界,  $I$  为实数. 若将  $\Omega$  任意分割成  $n$  个小区间  $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ , 任取  $(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \in \Delta\Omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 作和  $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \Delta V_i$ , ( $\Delta V_i$  是  $\Delta\Omega_i$  的体积), 总有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \xi_i) \Delta V_i = I$$

其中  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}$ ,  $d_i$  是  $\Delta\Omega_i$  的直径, 则称函数  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上可积, 记为  $f \in R(\Omega)$ ;  $I$  称为  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

其中  $V_{\Omega}$  是区域  $\Omega$  的体积

1. 若  $f(x, y, z)$  表示占有三维空间区域  $\Omega$  的物体的体密度函数, 则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$  给出了物体的质量
2. 类似二重积分, 三重积分具有线性性, 区域可加性, 保序性以及推论和积分中值定理, 并且有  $\iiint_{\Omega} dV = V_{\Omega}$

### 1.4.2 直角坐标系下的计算

直角坐标系下, 由于  $dV = dx dy dz$ , 故

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$



#### 1.4.2.1 柱线法（坐标面投影法）

设  $\Omega$  是以曲面  $z = z_1(x, y)$  为底，曲面  $z = z_2(x, y)$ ，而侧面是母线平行于  $z$  轴的柱体所围成的区域

设  $\Omega$  在  $xOy$  面上的投影区域为  $D_1$ ，则  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D_1, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D \right\}$$

则物体总质量为

$$\iint_D \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

故有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_1} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

#### 1.4.2.2 截面法（坐标轴投影法）

设区域  $\Omega$  在  $z$  轴上的投影区间为  $[h_1, h_2]$ ，即  $\Omega$  介于平面  $z = h_1$  和  $z = h_2$  之间，过  $z$  处且垂直于  $z$  轴的平面截  $\Omega$  得截面区域  $D_z$ ，则  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in D_z \right\}$$

物体总质量为

$$\int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

故有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{h_1}^{h_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

#### 1.4.3 三重积分的变量代换

$$x = x(u, v, w)$$

**定理 1.2** 设变换  $T: y = y(u, v, w)$  有连续偏导数，且满足  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0$ ，而  $f(x, y, z) \in$

$$z = z(u, v, w)$$

$C(\Omega)$ ，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw$$

#### 1.4.3.1 柱面坐标系下的计算

柱面坐标系，实际上就是将  $x, y$  坐标转换为极坐标

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

则柱面积分公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

#### 1.4.3.2 球面坐标系下的计算

球面坐标系，实际上就是将  $x, y, z$  坐标转换为球坐标

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

其 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

则球面积分公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega^*} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

## 1.5 重积分的应用

### 1.5.1 重积分的几何应用

#### 1.5.1.1 平面图形的面积

$$A(D) = \iint_D d\sigma = \iint_D dx dy$$

#### 1.5.1.2 立体的体积

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

#### 1.5.1.3 曲面的面积

空间曲面  $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$ .

则曲面  $S$  的面积为

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

### 1.5.2 重积分的物理应用

#### 1.5.2.1 质心

体密度为  $\rho(x, y, z)$  的物体占据空间  $\Omega$ , 其质心坐标为

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV} \\ \bar{y} &= \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV} \\ \bar{z} &= \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV}\end{aligned}$$

#### 1.5.2.2 转动惯量

设物体的密度为  $\rho(x, y, z)$ , 则物体分别关于  $x, y, z$  轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_x &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(y^2 + z^2) \, dV \\I_y &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(x^2 + z^2) \, dV \\I_z &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dV\end{aligned}$$

### 1.5.2.3 引力

$$\begin{aligned}d\vec{F} &= G \frac{m_0 dm}{r^3} \vec{r} \\&= G \frac{m_0 \rho(x, y, z) dV}{r^3} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\&= (dF_x, dF_y, dF_z)\end{aligned}$$

## 第2章 曲线积分和曲面积分

### 2.1 第一类曲线积分和曲面积分

#### 2.1.1 第一类曲线积分的概念

**定义 2.1** 设  $C$  是  $xOy$  面上的一条光滑曲线弧, 函数  $f(x, y)$  是定义在  $C$  上的有界函数, 在  $C$  上任意插入分点  $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ , 将其分成  $n$  个小弧段, 记第  $i$  个小弧段的弧长为  $\Delta s_i$ , 在第  $i$  个小段上任取点  $(\epsilon_i, \eta_i)$ , 和式  $\sum_{i=1}^n f(\epsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$ , 当  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$  时, 有确定的极限值  $I$ , 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i, \eta_i) \Delta s_i = I$$

则称函数  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上可积, 并将此极限值  $I$  称为函数  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的第一类曲线积分, 记作  $\int_C f(x, y) ds$ , 即

$$I = \int_C f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\epsilon_i, \eta_i) \Delta s_i$$

1. 第一类曲线积分的几何含义为柱面的面积
2.  $\int_C ds = \int_C 1 ds = s_C$
3. 若  $C$  是封闭曲线, 即  $C$  的二端点重合, 则记第一类曲线积分为  $\oint_C f(x, y) ds$

#### 2.1.2 第一类曲线积分的性质

##### 2.1.2.1 与曲线方向无关

若曲线  $C$  的端点为  $A$  和  $B$ ,  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上可积, 则

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y) ds = \oint_{\widehat{BA}} f(x, y) ds$$

##### 2.1.2.2 线性性

若  $f, g$  在曲线  $C$  上可积,  $\alpha, \beta$  是任意常数, 则  $\alpha f + \beta g$  在曲线  $C$  上可积, 且

$$\int_C (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_C f(x, y) ds + \beta \int_C g(x, y) ds$$

### 2.1.2.3 路径可加性

若曲线  $C$  由两段光滑曲线  $C_1$  和  $C_2$  首尾连接而成, 则  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上可积, 等价于  $f(x, y)$  在曲线  $C_1$  和  $C_2$  上均可积, 且

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds$$

### 2.1.2.4 中值定理

设函数  $f$  在光滑曲线  $C$  上连续, 则  $\exists(\epsilon, \eta) \in C$ , 使得

$$\int_C f(x, y) ds = f(\epsilon, \eta) \cdot s_C$$

其中  $s_C$  是曲线段  $C$  的长度

## 2.1.3 一类曲线积分的计算

设函数  $f(x, y)$  在光滑曲线  $C$  上连续,  $C$  的参数方程为  $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ ,  $t \in [a, b]$ , 满足  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  连续, 且  $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ , 则

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

1. 右端积分限应  $\alpha < \beta$
2. 当曲线  $C$  形式为  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$  时

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

3. 当曲线  $C$  为极坐标  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$  时

$$\int_C f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

## 2.2 第二类曲线积分与曲面积分

### 2.2.1 第二类曲线积分的概念

**定义 2.2** 设  $C$  为平面光滑定向曲线 ( $A \rightarrow B$ ), 且向量值函数  $\vec{F}(x, y) = R(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  在  $C$  上有界,  $\vec{e}_\tau$  为  $C$  上点  $(x, y)$  处于定向一致的单位切向量, 若

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{e}_\tau ds$$

存在, 则称为向量值函数  $\vec{F}$  在定向曲线  $C$  上的曲线积分或第二类曲线积分

若  $\vec{e}_\tau(x, y) = (\cos \alpha, \cos \beta)$ , 则

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y) \cdot \vec{e}_\tau ds &= \int_C P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \cos \beta ds \\ &= \int_C P(x, y) \cos \alpha ds + \int_C Q(x, y) \cos \beta ds \\ &= \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \end{aligned}$$

这是对坐标的曲线积分

记  $\vec{r} = (x, y)$ , 则  $d\vec{e} = \vec{e}_\tau ds$  称为定向弧微分

从而有向量形式的第一类曲线积分

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{e} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

#### 2.2.1.1 第二类曲线积分的性质

第二类曲线积分与曲线方向有关, 即

$$\int_{\overleftarrow{AB}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = - \oint_{\overrightarrow{BA}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

此外线性性与对定向积分路径的可加性等仍然成立

#### 2.2.1.2 第二类曲线积分的计算

若曲线  $C$  为  $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ ,  $t: \alpha \rightarrow \beta$

起点  $A$  对应  $\alpha$ , 终点  $B$  对应  $\beta$

考察  $\int_C P dx + Q dy = \int_C \vec{F} \cdot \vec{e}_\tau ds$ , 沿曲线  $C$  有  $\vec{F} = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$ ,  
则

$$\int_C P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t)) dx(t) + Q(x(t), y(t)) dy(t)$$

## 2.2.2 第二类曲面积分的概念

### 2.2.2.1 双侧曲面

**定义 2.3** 若点  $P$  沿曲面  $S$  上任何不越过曲面边界的连续闭曲线移动后回到起始位置时, 法向量  $\vec{n}$  保持原来的指向, 则称  $S$  为**双侧曲面**

典型的, Mobius 面不是双侧曲面

选定双侧曲面  $S$  一侧为正向, 称为**正侧**, 记为  $S^+$ , 其相反侧记作  $S^-$

### 2.2.2.2 双侧曲面定侧

若  $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ ,  $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

若选取  $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$ , 则说明  $\cos \gamma > 0$ , 选取了曲面的上侧一般的

$$\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \text{前侧} \quad \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \text{后侧}$$

$$\cos \beta > 0 \Leftrightarrow \text{右侧} \quad \cos \beta < 0 \Leftrightarrow \text{左侧}$$

$$\cos \gamma > 0 \Leftrightarrow \text{上侧} \quad \cos \gamma < 0 \Leftrightarrow \text{下侧}$$

习惯上选取曲面片的上侧为  $S^+$ ; 对于封闭曲面, 选取外侧为  $S^+$

对于向量值函数  $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C P dx dy + Q dy dz + R dz dx$$

### 2.2.2.3 第二类曲面积分的性质

第二类曲面积分与在曲面的哪一侧积分有关

$$\iint_{S^+} P dx dy + Q dy dz + R dz dx = - \iint_{S^-} P dx dy + Q dy dz + R dz dx$$

此外第二类曲面积分也具有线性性和可加性等性质



## 2.2.3 第二类曲面积分的计算

### 2.2.3.1 合一投影法

$$\iint_{S^+} P \, dx \, dy + Q \, dy \, dz + R \, dz \, dx = \iint_{D_{xy}} (-P z_x - Q z_y + R) \, dx \, dy$$

### 2.2.3.2 分面投影法

分  $P \, dx \, dy$ ,  $Q \, dy \, dz$ ,  $R \, dz \, dx$  三个部分进行积分  
常在部分曲面垂直坐标轴时进行

### 2.2.3.3 公式法

常用于参数方程确定的曲面

设  $S: \vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , 其中  $(u, v) \in D_{uv}$ , 则

$$\iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv$$

## 2.3 Green 公式及其应用

### 2.3.1 Green 公式

#### 2.3.1.1 连通区域及其边界方向

设  $D$  为平面区域, 若  $D$  内的任意一条闭曲线所围的区域都落在  $D$  内, 则称  $D$  是单连通的, 否则称  $D$  为复连通的

当点沿区域边界朝一个方向前进时, 区域总在它的左侧, 则将此方向规定为边界曲线  $C$  的正向, 记为  $C^+$ , 与  $C^+$  相反方向为  $C^-$

#### 2.3.1.2 Green 公式

**定理 2.1** 设有界闭区域  $D$  由分段光滑曲线  $C$  围成, 函数  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  在  $D$  上有一阶连续偏导数, 则

$$\oint_{C^+} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

1. 对于复连通区域  $D$ , Green 公式仍然成立, 但需将  $C$  分成若干个单连通区域  $D_i$ , 并对每个区域应用 Green 公式
2. 公式也可以记为  $\oint_{C^+} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

### 2.3.1.3 Green 公式的向量形式

### 2.3.2 线积分与路径无关的条件

**定义 2.4** 设  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  在区域  $D$  内连续, 若对  $D$  内任意两点  $A, B$  以及  $D$  内连接  $A, B$  的任意二分光滑曲线  $C_1, C_2$ , 均有

$$\int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

则称曲线积分  $\int_C P dx + Q dy$  在  $D$  内与路径无关

**定理 2.2** 设函数  $P, Q$  在单连通区域  $D$  上有连续偏导数, 则下述四命题等价

1. 在  $D$  内的任一条分段光滑闭曲线  $C$  上, 有  $\int_C P dx + Q dy = 0$
2. 曲线积分  $\int_C P dx + Q dy$  在  $D$  内与路径无关
3. 存在  $D$  上的可微函数  $u(x, y)$  使得  $du = P dx + Q dy$ , 此时称  $u(x, y)$  为  $P dx + Q dy$  的一个原函数
4.  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  在  $D$  内恒成立

### 2.3.3 全微分求积与全微分方程

设函数  $P, Q$  在单连通区域  $D$  上有连续偏导数, 且  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ , 则  $P dx + Q dy$  为某函数  $u$  的全微分, 且取定  $(x_0, y_0) \in D$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, \quad (x, y) \in D$$

从而全体函数为  $u(x, y) + C$

称求  $P dx + Q dy$  的原函数的过程为全微分求积

若  $P dx + Q dy$  是某二元函数的全微分, 称方程

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

为全微分方程

求出一个原函数  $u(x, y)$ , 则方程的通解为  $u(x, y) = C$ , 其中  $C$  是任意常数

## 2.4 Gauss 公式和 Stokes 公式

### 2.4.1 Gauss 公式

**定理 2.3** 设函数  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  在空间有界闭区域  $\Omega$  上有连续偏导数,  $\Omega$  的边界时光滑或分片光滑的闭曲面  $\Sigma$ , 则

$$\oiint_{\Sigma^+} P \, dx \, dy + Q \, dy \, dz + R \, dz \, dx = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

1. 令  $P = \frac{x}{3}$ ,  $Q = \frac{y}{3}$ ,  $R = \frac{z}{3}$ , 则可导出  $V_{\Omega} = \frac{1}{3} \oiint_{\Sigma^+} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$ , 即体积公式
2. 使用 Gauss 公式时, 注意  $\Sigma^+$  的方向应与  $\Omega$  的外侧一致

#### 2.4.1.1 向量形式的 Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

### 2.4.2 通量和散度

#### 2.4.2.1 通量

若给定向量场

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

则称曲面积分

$$\Phi = \oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma^+} P \, dx \, dy + Q \, dy \, dz + R \, dz \, dx$$

为向量场  $\vec{F}$  在通过定侧曲面  $\Sigma^+$  的**通量**

#### 2.4.2.2 散度

称

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场  $\vec{F}$  的散度  
则 Gauss 公式可写为

$$\Phi = \oiint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

## 第3章 级数

### 3.1 数项级数

#### 3.1.1 数项级数的概念

**定义 3.1** 给定数列  $\{a_n\}$ ，和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为（无穷）极数， $a_n$  称为级数的通项（或一般项）

1.  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的前  $n$  项部分和

2.  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的余项级数

**定义 3.2** 1. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列  $\{S_n\}$  收敛，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

收敛， $S$  称为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的和，记作  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

2. 若部分和数列  $\{S_n\}$  发散，则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

**注** 常用结论：

等比数列  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$  收敛于  $\frac{a}{1-q}$ ， $|q| < 1$  发散， $|q| \geq 1$

#### 3.1.2 数项级数的概念

#### 3.1.3 数项级数的基本性质

##### 3.1.3.1 基本性质

1. 若常数  $\alpha \neq 0$ ，则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$  有相同敛散性

2. 线性性：若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ ，则  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，有  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha S + \beta T$

3. 可加性: 将级数增加、删减或改换有限项, 不改变级数的敛散性
4. 结合律: 若级数收敛于  $S$ , 则将相邻若干项添加括号所成新级数仍收敛于  $S$ 
  - (a) 其本质是部分和数列收敛于  $S$ , 则子列均收敛于  $S$
  - (b) 加括号后级数收敛  $\Rightarrow$  原级数收敛
  - (c) 加括号后级数发散  $\Rightarrow$  原级数发散

### 3.1.3.2 级数收敛的必要条件

**定理 3.1** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 比如调和级数

## 3.2 正项级数敛散性

### 3.2.1 正项级数

**定义 3.3** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  满足  $a_n > 0$  ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), 则称此级数为正项级数

**定理 3.2 收敛原理:** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛  $\Leftrightarrow$  是其部分和数列  $\{S_n\}$  有上界, 即  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+ : S_n \leq M$

**注**  $p$  级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ 收敛, } p > 1 \text{ 发散, } p \leq 1$$

### 3.2.2 正项级数敛散性判别法

#### 3.2.2.1 比较判别法

**定理 3.3** 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  满足  $a_n \leq b_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ), 则  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散

1. 条件  $\forall n \in \mathbb{N}^+ a_n \leq b_n$  可改为  $\exists N, C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^+ \forall n \geq N a_n \leq C b_n$
2. 使用该判别法时需要有参照级数, 常选等比级数或  $p$  级数作参照

### 3.2.2.2 比较判别法（极限形式）

**定理 3.4** 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

1. 当  $0 < l < +\infty$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  同敛散
2. 当  $l = 0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛
3. 当  $l = +\infty$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

**注** 通常使用  $b_n = \frac{1}{n^p}$  作为参照物, 因为我们此时在分析无穷小  $a_n$  的阶

### 3.2.2.3 比值判别法（d'Alembert 判别法）

**定理 3.5** 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , 则

1. 当  $0 \leq l < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛
2. 当  $l > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散
3. 当  $l = 1$  时, 判别法失效

**注** Stirling 公式:  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \quad (n \rightarrow \infty)$

**注** 当  $a_n$  是一些乘积构成或含  $n!$  时, 可以考虑比值法

### 3.2.2.4 根值判别法（Cauchy 判别法）

**定理 3.6** 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ , 则

1. 当  $0 \leq l < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛
2. 当  $1 < l \leq +\infty$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散
3. 当  $l = 1$  时, 判别法失效

**注** 当  $a_n$  中含有  $n$  次方时, 可以考虑使用根值法

**注** 比值法和根值法实际上可看作是在将级数与等比级数作比较, 均智能判断收敛速度不满与等比级数的级数. 当所求级数存在时, 可称级数为**拟等比级数**

注 根值法优于比值法

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = l$
2.  $\sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

### 3.2.2.5 积分判别法

**定义 3.4** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为正项级数, 若非负函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 且  $a_n =$

$f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与反常积分  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  有相同的敛散性

1. 条件  $[1, +\infty)$  可改为  $[a, +\infty) \quad (a > 1)$

## 3.3 任意项级数的敛散性

任意项级数

正负项分布是任意的级数

### 3.3.1 错级数敛散性的判别法

#### 3.3.1.1 交错级数

**定义 3.5** 各项正负相间的级数称为交错级数, 其形式为

$$\pm \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (\text{其中 } a_n > 0)$$

#### 3.3.1.2 Leibniz 判别法

**定义 3.6** 若交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (a_n > 0)$  满足:

1.  $a_{n+1} \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  收敛, 且其余项级数满足

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_{n+1}$$

我们称满足定理条件的级数为 **leibniz 型级数**



### 3.3.2 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

**定理 3.7** (Abel 判别法) 若  $\{a_n\}$  单调且有界,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛

**定理 3.8** (Abel 判别法) 若  $\{a_n\}$  单调趋于 0,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  的部分和数列有界, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛

### 3.3.3 绝对收敛与条件收敛

**定义 3.7** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为任意项级数

1. 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛, 则称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为**绝对收敛**
2. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 但, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **条件收敛**

**定义 3.8** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛

**注** 常用结论:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} \begin{cases} \text{绝对收敛, } p > 1 \\ \text{条件收敛, } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

**定义 3.9** (绝对收敛与条件收敛的本质)

1. 绝对收敛的级数, 可以改变任意项的顺序, 其收敛性与和均不变 (即满足加法交换律)
2. 条件收敛的级数, 总可以适当改变项的顺序, 使其按照任意预定的方式收敛或者发散

## 3.4 函数项级数

**定义 3.10** 设函数列  $\{u_n(x)\} (n = 1, 2, \dots)$  在数集  $X$  上有定义, 则称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为**函数项级数**, 其中  $u_n(x)$  称为**通项**

**定义 3.11** 若数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  收敛, 则  $x_0$  为函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的一个**收敛点**, 否则称为**发散点**, 全体收敛点所组成的集合  $I$  称为**收敛域**

**定义 3.12** 记  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , 为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的前  $n$  项**部分和(函数)**, 记  $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$  为**余和**

**定义 3.13** 对于收敛域  $I$  中的任意一点  $x$ , 记  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的和为  $S(x)$ , 称此函数  $S(x)$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的**和函数**

显然,  $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x), \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$

## 3.5 幂级数

### 3.5.1 幂级数及其收敛半径

在函数项级数中, 最简单及最重要的级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1x + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

称为**幂级数**, 其中常数项  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  称为幂级数的**系数**

幂级数更加一般的形式为  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

#### 3.5.1.1 Abel 定理

1. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  在  $x = x_0(x \neq 0)$  收敛, 则当  $|x| < |x_0|$  时, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ 绝对收敛}$$

2. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  在  $x = x_1$  发散, 则当  $|x| > |x_1|$  时, 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  发散

**引理 3.1** (幂级数收敛域的情况) 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  的收敛域  $I$  仅有以下几种情况:

1. 仅在  $x = 0$  的情况收敛 ( $R = 0$ )
2. 在区间  $(-R, R)(R > 0)$  内绝对收敛, 在  $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$  发散
3. 在区间  $(-R, R)$  内绝对收敛 ( $R = +\infty$ )

## 3.6 幂级数收敛半径的求法

### 3.6.1 系数模比值法

**定理 3.9** 对幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ , 则收敛半径

$$R = 0, \rho = +\infty \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty + \infty, \rho = 0$$

### 3.6.2 系数模根值法

**定理 3.10** 对幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ , 则收敛半径

$$R = 0, \rho = +\infty \frac{1}{\rho}, 0 < \rho < +\infty + \infty, \rho = 0$$

## 3.7 幂级数的性质

1. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$  的收敛半径为  $R = \min\{R_1, R_2\}$
2. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$ , 在收敛区间  $(-R, R)$  内的和函数为  $S(n)$ , 则

$S(n)$  在  $(-R, R)$  上连续; 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = R$  或  $x = -R$  收敛, 则和函数  $S(n)$  在

$x = R$  左连续或  $x = -R$  处右连续, 即  $\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$

3. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$ , 在收敛区间  $(-R, R)$  内的和函数为  $S(n)$ , 则  $S(n)$  在  $(-R, R)$  上可导, 且有逐项求导公式

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

且幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  的收敛半径仍为  $R$

1. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径  $R > 0$ , 在收敛区间  $(-R, R)$  内的和函数为  $S(x)$ , 则  $S(x)$  在  $(-R, R)$  上可导, 且有逐项求积公式

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

且幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  的收敛半径仍为  $R$

### 3.7.1 幂级数的分析性质

1. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 在收敛区间  $(-R, R)$  上连续; 若  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = R$  或  $x = -R$  收敛, 则和函数  $S(x)$  在  $x = R$  左连续或  $x = -R$  处右连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

2. 若幂函数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 在收敛区间  $(-R, R)$  上的和函数为  $S(x)$ , 则  $S(x)$  在  $(-R, R)$  上可导, 且有逐项求导公式

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \end{aligned}$$

且幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  的收敛半径仍为  $R$

3. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径为  $R > 0$ , 在收敛区间  $(-R, R)$  上的和函数为  $S(x)$ , 则  $S(x)$  在  $(-R, R)$  上可导, 且有逐项求积公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t) dt &= \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

且幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  的收敛半径仍为  $R$

- 注**
1. 幂函数逐项求导, 逐项积分后, 收敛半径不变, 但是收敛域可能改变
  2. 幂函数在收敛区间内具有任意阶导数

### 3.7.2 Taylor 级数

**定义 3.14** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域内有任意阶导数, 称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

为  $f(x)$  在  $x_0$  处的 **Taylor** 级数, 记为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$x_0 = 0$  是, 称为 **Maclaurin** 级数

**定理 3.11** (唯一性) 若  $f(x)$  在  $x_0$  可展开为幂级数, 则展开式唯一, 且恰为 Taylor 级数

**定理 3.12** 设  $f(x)$  在  $x_0$  的某领域  $I$  内任意阶可导, 则在  $I$  内

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

### 3.7.3 常用的初等函数的幂级数展开式

1.  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$
2.  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$
3.  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$
4.  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (|x| < 1)$
5.  $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (|x| < 1)$
6.  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$
7.  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$
8.  $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1)$

### 3.7.4 正弦级数和余弦级数

若周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  是奇函数时, 其 Fourier 系数  $a_n = 0$ , 从而

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{正弦级数}$$

$$\text{其中 } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

若周期为  $2\pi$  的函数  $f(x)$  是偶函数, 其 Fourier 系数  $b_n = 0$ , 从而

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{余弦级数}$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

若函数  $f(x)$  定义在  $[0, \pi]$  上, 可作奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

使得  $F(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的奇函数  
也可作偶延拓

$$G(x) = \begin{cases} f(x), 0 < x < \pi \\ f(-x), -\pi < x < 0 \\ 0, x = 0, \pm\pi \end{cases}$$

使得函数  $G(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的偶函数

对于一定义在  $[0, \pi]$  上的函数  $f(x)$ , 可以对其先做奇延拓或者偶延拓, 再将其展开为正弦级数或者余弦级数

### 3.7.5 周期为 $2l$ 的 Fourier 级数

设函数  $f(x)$  在区间  $[-l, l]$  上可积, 作代换  $x = \frac{l}{\pi}t$ , 使得  $F(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$  为  $[-\pi, \pi]$  上的可积函数, 从而

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

故

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \right)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \end{aligned}$$

**定理 3.13** 若  $f(x)$  在  $[-l, l]$  上满足 Dirichlet 条件, 则 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{\pi n}{l} x \right) + b_n \sin \left( \frac{\pi n}{l} x \right) \right)$$

收敛到

$$S(n) = \begin{cases} f(x), x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点} \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, x \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点} \\ \frac{f(l^-) + f(-l^+)}{2}, x = \pm l \end{cases}$$