高数 2 笔记

dcldyhb

2025 年 6 月 6 日

目　录

第 1 章　重积分

1.1　重积分的概念和性质

定义 1.1　设 D 是平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 为 D 上的有界函数，I 为实数. 若对 D 的任意分割 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，任 $(\xi_i,\eta_i) \in \Delta D_i (i = 1,\ldots,n)$，作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$（$\Delta\sigma_i$ 为 D_i 的面积），总有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

其中 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le d}\{d_i\}$，$d_i$ 是小区域 ΔD_i 的直径，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，记为 $f \in R(D)$；极限值 I 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

- $\iint$ 积分号
- D 积分区域
- $f(x,y)$ 被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 面积元素（微元）
- 二重积分的几何意义
  - 当被积函数大于 0 时，二重积分是柱体体积
  - 当被积函数小于 0 时，二重积分是柱体体积的负值
  - 一般的，为曲顶柱体体积的代数和
- 可积的充分条件
  - **定理：** 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $f(x,y) \in D$.
- $f(x,y)$ 在 D 上的可积性及积分值与其在 D 内**有限条光滑曲线**上的定义无关

1.2　二重积分的性质

1. $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A_D$　(D 的面积).

2. **线性性**：设 $f, g \in R(D)$，α, β，是任意常数，则 $\alpha f + \beta g \in R(D)$，且

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\sigma = \alpha \iint_D f\,\mathrm{d}\sigma + \beta \iint_D g\,\mathrm{d}\sigma$$

3. **区域可加性**：若 $f \in R(D)$ 且积分区域 D 分为内部不相交的子区域 D_1, D_2，则

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$$

4. **保序性**：若 $f, g \in R(D)$，且当 $(x, y) \in D$ 时，$f(x, y) \le g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$$

- **推论 1**：若 $f \in R(D)$, 则 $|f(x, y)| \in R(D)$，且

$$\left| \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma \right| \le \iint_D |f(x, y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

- **推论 2**：若 $f \in R(D)$，且当 $(x, y) \in D$ 时，$m \le f(x, y) \le M$，则

$$mA_D \le \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma \le MA_D$$

- **推论 3**：若 $f \in R(D)$，且当 $(x, y) \in D$ 时，$f(x, y) \ge 0$，则

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma \ge 0$$

5. **积分中值定理**：若 $f(x, y) \in C(D)$，$g(x, y) \in R(D)$，且 g 在 D 上不变号，则 $\exists \xi, \eta \in D$，使得

$$\iint_D f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y)\,\mathrm{d}\sigma$$

- **推论**：若 $f(x, y) \in C(D)$，则存在 $(\xi, \eta) \in D$，使得

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta) A_D$$

称 $f(\xi, \eta) = \frac{\iint_D f\,\mathrm{d}\sigma}{A_D}$ 为函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的**平均值**

1.3 二重积分的计算

1.3.1 直角坐标系下的计算

当二重积分存在时，可利用平行于坐标轴的直线来划分积分区域 D，此时，面积元素

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故二重积分在直角坐标系下可表示为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.3.1.1 x 型正则区域

$$D = \left\{(x,y)\middle|\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\right\}$$

化为先 y 后 x 的二次积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &\equiv \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

1.3.1.2 y 型正则区域

$$D = \left\{(x,y)\middle|\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y), c \le y \le d\right\}$$

化为先 x 后 y 的二次积分

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &\equiv \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

1.3.1.3 一般区域的二重积分

分割成若干个正则子区域，利用积分区域可加性，分别在子区域上积分后求和

注 直角坐标计算二重积分的步骤

1. **画出积分区域** D 的草图，并**确定类型**
2. 按照所确定的类型**表示区域** D
3. **化二重积分为二次积分**（注意上下限）
4. **计算**二重积分

1.3.2 极坐标系下的计算

当积分区域的边界曲线或被积函数用极坐标表示较为简单时，可用极坐标来计算二重积分.

面积元素 $\varDelta\sigma$ 在极坐标下为

$$\boxed{\varDelta\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

从直角坐标到极坐标时的二重积分变换公式为

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\{(r,\theta)\,|r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$$

则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$$

假设 1.1 这是一个假设环境。

公理 1.1 这是一个公理环境。

猜想 1.1 这是一个猜想环境。