高数 2 笔记

dcldyhb

2025 年 6 月 6 日

目　录

第 1 章　重积分

1.1　重积分的概念和性质

定义 1.1　设 D 是平面上的有界闭区域，$f(x,y)$ 为 D 上的有界函数，I 为实数. 若对 D 的任意分割 $\varDelta D_1, \varDelta D_2, \cdots, \varDelta D_n$，任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \varDelta D_i (i = 1, \ldots, n)$，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\varDelta\sigma_i$（$\varDelta\sigma_i$ 为 D_i 的面积），总有

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\varDelta\sigma_i = I$$

其中 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le d}\{d_i\}$，$d_i$ 是小区域 $\varDelta D_i$ 的直径，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上**可积**，记为 $f \in R(D)$；极限值 I 称为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**，记作

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

1. $\iint$ 积分号
2. D 积分区域
3. $f(x,y)$ 被积函数
4. $\mathrm{d}\sigma$ 面积元素（微元）
5. 二重积分的几何意义
    (a) 当被积函数大于 0 时，二重积分是柱体体积
    (b) 当被积函数小于 0 时，二重积分是柱体体积的负值
    (c) 一般的，为曲顶柱体体积的代数和
6. 可积的充分条件
    (a) 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $f(x,y) \in D$
7. $f(x,y)$ 在 D 上的可积性及积分值与其在 D 内**有限条光滑曲线**上的定义无关

1.2　二重积分的性质

1. $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A_D$　(D 的面积).

2. ** 线性性：** 设 $f, g \in R(D)$，α, β，是任意常数，则 $\alpha f + \beta g \in R(D)$，且

$$\iint\limits_{D} (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\sigma = \alpha \iint\limits_{D} f\,\mathrm{d}\sigma + \beta \iint\limits_{D} g\,\mathrm{d}\sigma$$

假设 1.1　这是一个假设环境。

公理 1.1　这是一个公理环境。

猜想 1.1　这是一个猜想环境。