

三角函数、不等式

2025 年 7 月 24 日

三角函数

1. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x + a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期, 单调递减区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上最大值为 3, 锐角 α 满足 $f(\alpha) = \frac{5}{3}$, 求 $\sin 2\alpha$ 的值.

2. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 若 $f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 x_0 的值;

(2) 设 $\omega > 0$, 若 $f(\omega x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调函数, 求 ω 的最大值.

3. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x - \frac{1}{2} \cos 2x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[-20, 20]$ 内的零点个数.

三角换元

三角换元的技巧

1. 出现形如 $x^2 + y^2$ 的式子时, 可以考虑使用三角换元;
 2. 出现形如 $\sqrt{1+x}$ 的式子时, 可以考虑使用 $\tan^2 \theta$ 换元;
 3. 出现形如 $\sqrt{1-x}$ 的式子时, 可以考虑使用 $1 - \sin^2 \theta$ 或 $\frac{1}{\cos^2 \theta}$ 换元;
 4. 注意, 三角函数具有有界性.
-
1. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $a\sqrt{x} + \sqrt{1+x} \leq 1$ 对 $x > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

2. 已知 $x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = 1 (x, y \in \mathbf{R})$, 求 $x + y$ 的取值范围.

3. 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求 $ab + c$ 的最小值.

4. 已知 $x^2 + y^2 \leq 1$, 求 $x^2 + xy - y^2$ 的最值

5. 已知实数 x, y , 满足 $x^2 + 2xy = 1$, 求 $x^2 + y^2$ 的最小值.

基本（均值）不等式

基本不等式链：

对于 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ，且 $x_1, x_2 > 0$ ，有

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

当且仅当 $x_1 = x_2$ 时，等号成立.

均值不等式链：

对于 $n \in \mathbf{N}^+$ ， $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ 且 $x_i > 0$ ，有

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

1. 非零实数 a, b, c ，若 $\frac{bc}{a}, \frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}$ 成等比数列，证明 $|b| \leq \frac{|a| + |c|}{2}$.

2. 若 $a > 0, b > 0$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$ ，求 $a^2 + b^2$ 的最小值.

3. 已知 $x, y \in (0, +\infty)$, 若不等式 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} \leq a\sqrt{\frac{x}{2} + y}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

4. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + xy + 4y^2 = 1$, 则 xy 的最大值是 _____; $x^2 - xy + y^2$ 的最小值是 _____.

5. 已知 $a > 0, b > -1$, 且 $a + b = 1$, 求 $\frac{a^2 + 3}{a} + \frac{b^2}{b + 1}$ 的最小值.

含绝对值的不等式

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

1. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $|f(x)| \leq 1$.

(1) 证明: $|b| \leq 1$;

(2) 证明: $-2 \leq ac \leq \frac{1}{4}$.

2. 已知 $|5x + 6y| + |9x + 11y| \leq 1$, 求满足条件的点 (x, y) 组成的面积.