函数的性质和三角函数

2025 年 7 月 20 日

函数的性质

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x-1)$ 为奇函数, $f(x+1)$ 为偶函数, 当 $x \in [1,3]$ 时, $f(x) = kx+m$, 若 $f(0) - f(3) = -2$，求 $f(2022)$ 的值。

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意实数 x，恒有 $f(x+2) = f(-x)$，$f(x) = -f(4-x)$，且当 $x \in [0,2]$ 时，$f(x) = 2x - x^2$.

    1. 当 $x \in [2,4]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式;
    2. 计算 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(2022)$ 的值;

3. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数和奇函数，$f(x)+g(x)=a^x+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)-\sin x(a>0且a\neq 1)$. 若 $\forall t\in\mathbf{R}$，函数 $F(x)=e^{|x-3t-2022|}-\mu f(x-3t-2022)-2\mu^2$ 有唯一零点，求实数 μ 的值.

4. 已知函数 $f(x)=\log_a(3-x)$，$g(x)=\log_a(3+x)(a>0,a\neq 1)$，记 $F(x)=f(x)-g(x)$. 问是否存在实数 a，使得当 $F(x)$ 的定义域为 $[a,b]$ 时，值域为 $[1-\log_a n,1-\log_a m]$.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x, & 0\leq x\leq 1,\\ 3+\log_{\frac{1}{2}}x, & 1<x\leq 32\end{cases}$，$g(x)=2x^2-x$，若 $y=g(f(x))-t$ 恰有三个零点，求实数 t 的取值范围.

三角函数

几个常见的公式

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;
2. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;
3. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;
5. $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$;
6. $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;
7. $\sin(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;
8. $\cos(\frac{\alpha}{2})=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;
9. $\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;
10. $\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;
11. $\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$;
12. $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$.

1. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，化简 $\dfrac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}$.

2. 已知 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha+\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，求 $\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，求 $\dfrac{\cos 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$ 的值.

4. 在斜三角形 ABC 中，$\sin A=-\sqrt{2}\cos B\cos C$，且 $\tan B\cdot\tan C=1-\sqrt{2}$，求角 A 的值.

5. 如图所示，已知 OPQ 是半径为 1，圆心角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 的扇形，点 A 在弧 PQ 上，且异于点 P 和点 Q，过 A 作 AB $\perp$ OP，交 OP 于点 B，过 A 作 AC $\perp$ OQ，交 OQ 于点 C，记 $\angle$AOP $= \theta$，四边形 ACOB 的周长为 l，当 θ 取何值时，l 取得最小值？求此时的最小值。