

函数综合 1

2025 年 7 月 22 日

函数的性质

1. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 对于 $m, n \in \mathbf{R}$ 恒有 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$, 且当 $x > 0$ 时, $0 < f(x) < 1$.

(1) 证明: $f(0) = 1$.

(2) 证明: $x \in \mathbf{R}$ 时, 恒有 $f(x) > 0$.

(3) 证明: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是减函数.

(4) 若 $f(x) \cdot f(2-x) > 1$, 求 x 的取值范围.

2. (1) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且 $f(6) = 3f(2) + 2$, 则 $f(8) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 对任意的实数 x, y , $f(x+y) = f(x^2) + f(2y)$, 则 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(xy) = f(x) + f(y)$, 若 $f(9) = 6$, 则 $f(3\sqrt{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$, 方程 $f(x) = x$ 的两个根为 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 - x_2 > 2$.

(1) 证明: x_1, x_2 也是方程 $f(f(x)) = x$ 的两个根.

(2) 设 $f(f(x)) = x$ 的另两个根为 x_3 和 x_4 , 试判断 x_1, x_2, x_3, x_4 的大小.

4. 设 $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 若存在实数 n , 使得 $[t] = 1, [t^2] = 2, \dots, [t^n] = n$ 同时成立, 求正整数 n 的最大值.

零点问题

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 讨论 $y = f[f(kx) + 1] + 1 (k \neq 0)$ 的零点个数.
2. 若至少存在一个 $x (x \geq 0)$, 使得关于 x 的不等式 $x^2 \leq 4 - |2x - m|$ 成立, 求实数 m 的取值范围
3. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1), \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$, 且 $f(x+2) = f(x)$, 则方程 $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ 在区间 $[-5, 1]$ 上所有实根之和为 _____.

4. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 则 $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x (a, b \in \mathbf{Z})$, 且满足 $\{x | f(x) = 0\} = \{x | f(f(x)) = 0\}$, 求 a 的最大值.

6. 已知 a, b, c, d 是不全为 0 的实数, 函数 $f(x) = bx^2 + cx + d, g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. 若方程 $f(x) = 0$ 有实数根, 且方程 $f(x) = 0$ 的实数根都是 $g(f(x)) = 0$ 的根; 反之, 方程 $g(f(x)) = 0$ 的实数根都是 $f(x) = 0$ 的实数根.

(1) 求 d 的值;

(2) 若 $a = 0$, 求 c 的取值范围;

(3) 若 $a = 1, f(1) = 0$, 求 c 的取值范围.

7. 已知二次函数 $(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 方程 $f(x) = x$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.

(1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 证明 $x < f(x) < x_1$;

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = x_0$ 对称, 证明 $x_0 < \frac{x_1}{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{|x+2|} + kx + b$, 其中 k, b 为实数且 $k \neq 0$.

(1) 当 $k > 0$ 时, 根据定义证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上是单调递减;

(2) 求使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点的 b 的取值范围;

9. 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $b = \frac{a^2 + 1}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式;

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在零点, $0 \leq b - 2a \leq 1$, 求 b 的取值范围.

任意与恒成立问题

1. 已知函数 $f(x) = x^2 + 4|x - a|$ ($x \in \mathbf{R}$).

- (1) 若存在实数 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 求 a 的取值范围;
- (2) 若对任意实数 x_1, x_2 , 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k$ 成立, 求 k 的最小值.(用 a 表示)

2. 设函数 $f(x) = x|2x - a|, g(x) = \frac{x^2 - a}{x - 1}, a > 0$.

- (1) 当 $a = 8$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[3, 5]$ 上的值域;
- (2) 若对任意的 $t \in [3, 5], \exists x_i \in [3, 5] (i = 1, 2)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 使 $f(x_i) = g(t)$, 求实数 a 的取值范围.

3. 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0)$ 满足条件:

a. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x-4) = f(2-x)$, 且 $f(x) \geq x$;

b. 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

c. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的最小值为 0.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求最大值 m , 使得 $\exists t \in \mathbf{R}$, 对 $\forall x \in [1, m]$, 有 $f(x+t) \leq x$.

三角函数

1. $4 \cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$ _____.

2. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$, 求其对称轴方程.

3. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \pi)$ 内无零点, 其图像关于 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 求 $f(x)$ 的解析式.

4. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图像关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 且在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上只有两条对称轴, 求 ω 的值.

5. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 的对称轴, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调, 求 ω 的最大值.

6. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有一个最高点和一个最低点, 求 ω 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减, 且在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 1 个零点, 求 ω 的取值范围.

8. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$), $|f(-\frac{\pi}{6})| = 1, f(\frac{\pi}{6}) = 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24})$ 上单调, 求 ω 的取值范围.