

不等式综合 II

2025 年 7 月 29 日

不等式的应用

1. (根的存在性定理) x_1 与 x_2 分别是实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和 $-ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, 且 $x_1 \neq x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. 证明: 方程 $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ 有且仅有一个根介于 x_1 与 x_2 之间.

2. (和差化积、均值不等式) 已知 $x, y > 0$, 求函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 的最大值.

3. (以函数值表示系数) 设正系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 证明: $\min\{a, b, c\} \leq \frac{1}{4}(a + b + c)$.

4. (绝对值不等式) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$. 计 $M(a, b)$ 为 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.

(1) 证明: 当 $|a| \geq 2$ 时, $M(a, b) \geq 2$.

(2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时, 求 $|a| + |b|$ 的最大值.

5. (基本不等式) 记 $F(x, y) = x + y - a(x + 2\sqrt{2xy})$, $x, y \in \mathbf{R}^+$

(1) 是否存在 $x_0 \in \mathbf{R}^+$, 使 $F(x_0, 2) = 2$?

(2) 若对任意的 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 都有 $F(x, y) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

6. (基本不等式, 三角不等式) 已知正实数 x, y 满足 $a = x + y, b = \sqrt{x^2 + 7xy + y^2}$.

(1) 当 $y = 1$ 时, 求 $\frac{b}{a}$ 的最大值;

(2) 若 $c^2 = kxy$, 若对于任意的正数 x, y , 以 a, b, c 为长度的线段恒能构成三角形, 求 k 的取值范围.

7. 设 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$, 当 $x \in [-1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

8. 对于一切实数 a , 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a < b)$ 的值恒为非负实数, 求 $M = \frac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值.

9. 大圆酒杯的轴截面为函数 $y = x^4$ 的图像, 往酒杯里面放一半径为 r 的小球, 当半径 r 最大为多少时, 小球可接触到杯底的最低点?

10. 设实数 a, b, c, d 满足 $ab = c^2 + d^2 = 1$, 则 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最小值为 _____.

几个重要的不等式

平均值不等式

若 $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 记 $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, Q_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 分别为这 n 个数的调和平均、几何平均、算术平均和平方平均, 则有:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

Cauchy 不等式

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是实数, 则有

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ 时, 等号成立.

排序不等式

设两个实数列 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 和 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, 则有

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n (\text{顺序和}) \geq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} (\text{乱序和}) \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 (\text{逆序和})$$

其中 i_1, i_2, \dots, i_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列.

琴生不等式

设 $f(x)$ 是一个在区间 I 上连续的函数, 若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 有不等式 $2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq f(x_1) + f(x_2)$ 成立 (或 $f(x)$ 存在二阶导数且 $f''(x) \leq 0$), 则称 $f(x)$ 是一个上凸函数.

若函数 $f(x)$ 为区间 I 上的上凸函数, 则对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, 有:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

幂平均不等式

设 $p > q$, 则对任意的非负实数 a_1, a_2, \dots, a_n 有:

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

1. (幂平均不等式或均值不等式) 已知 $x, y, z > 0, x + y + z = 1$, 证明: $x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{3}$

2. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + y + z \geq xyz$, 求 $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$ 的最小值.

3. (均值不等式) 证明: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

4. 试求正实数 A 的最大值, 使得对于任意实数 x, y, z , 不等式 $x^4 + y^4 + z^4 + x^2yz + xy^2z + xyz^2 - A(xy + yz + xz)^2 \geq 0$ 成立.

5. 求最小的正实数 k , 使得不等式 $ab + bc + ca + k \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ 对任意正实数 a, b, c 成立.

6. 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, 且 $abc = 1$, 则 $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$ 的最小值为_____.

7. 设 $a, b, c \geq 0$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, 则 $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$ 的最大值为_____.

8. (Cauchy 不等式) 求出所有实数 a 使得存在非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足下列关系: $\sum_{k=1}^5 kx_k =$

$$a, \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = a^2, \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = a^3.$$

9. (均值不等式) 证明: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} > n(\sqrt[n]{2} - 1).$

10. (排序不等式) 正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 的任一排列为 a'_1, a'_2, \dots, a'_n , 证明: $\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \dots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n.$

11. 设三角形的三条边长分别为 a, b, c , 求 $\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ac}}$ 的取值范围.

12. 由排序不等式证明均值不等式.

13. (琴生不等式) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 2)$ 是正实数, 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 求 $\frac{x_1}{1-x_1} + \frac{x_2}{1-x_2} + \dots + \frac{x_n}{1-x_n}$ 的最小值.

14. (琴生不等式) 设三角形的三个内角分别为 A, B, C , 求 $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$ 的最大值.

15. (琴生不等式, 需要仔细挑选原函数) 设实数 $r_1, r_2, \dots, r_n \geq 1$, 证明 $\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \dots + \frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n} + 1}$.