

三角函数

2025 年 7 月 23 日

辅助角公式和两角和、倍角公式

1. $4 \cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$ _____.

2. 已知函数 $f(x) = \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间；

(2) 若 $f(\alpha) = \frac{9}{4}, \alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin \alpha + \sin 2\alpha$ 的值.

3. 已知角 α 的顶点在坐标原点 O ，始边与 x 轴的非负半轴重合，将 α 的终边按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到角 β 的终边，且经过点 $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

(1) 求 $\cos \alpha$ 的值；

(2) 求函数 $f(x) = \cos^2(x - \alpha) + \sin^2(x + \beta)$ 的值域.

4. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 将函数 $f(x)$ 分别向左、向右平移 $m(m > 0)$ 个单位相应得到 $g(x)$ 、 $h(x)$ ，且 $\cos m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求函数 $y = g(x) + h(x)$ ， $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域。

5. 已知函数 $f(x) = \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(\alpha) = \frac{2}{3}$, 其中 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, 求 $f\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)$ 的值.

6. 已知函数 $f(x) = \cos x(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

7. 函数 $y = \frac{4 \sin x \cos x + 3}{\sin x + \cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 的最小值是 _____.

8. $\arcsin \frac{\sqrt{14} + 3\sqrt{2}}{8} + \arcsin \frac{3}{4} =$ _____.

9. 求函数 $y = 3 \sin^2 x - 2 \sin 2x + 2 \sin x - \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的值域.

对称性、周期性、极值点和单调性

1. 已知函数 $f(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$ 的值;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期及其单调递增区间.

2. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的增区间.

3. 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$, 求其对称轴方程.

4. 设函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \sin^2 \omega x - \sin \omega x \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 且 $y = f(x)$ 的图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求 ω 的值;

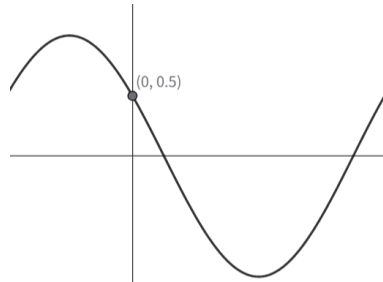
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

三角函数的图像

1. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 图象上相邻两个最高点的距离为 π .

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象过点 $(0, \frac{1}{2})$, 且部分图象如右图所示, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

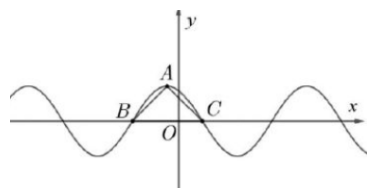
(2) 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象, 求函数 $y = 2 \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 + g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值.



2. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 \frac{\omega x}{2} - \frac{1}{4} \sin(\omega x) - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ($\omega > 0$) 的图象如图所示, 其中 A 为图象的最高点, B, C 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

(1) 求 ω 的值及 $f(x)$ 的单调递增区间;

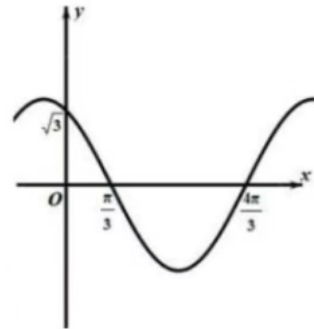
(2) 设 $g(x) = f(x) + f(x + \frac{1}{3})$, 求函数 $g(x)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$ 上的最大值及此时 x 的值.



3. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$). $y = f(x)$ 的图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

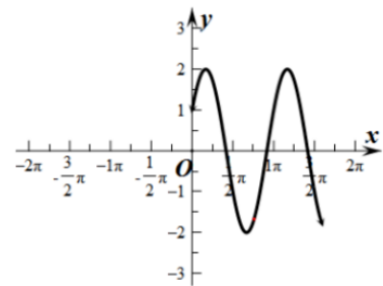
(2) 记 $g(x) = f(x) - \left|x - \frac{5\pi}{6}\right|$, 求 $g(x)$ 的最大值.



4. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$ ($x \in \mathbf{R}, A > 0, \omega > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$) 的图像如图所示;

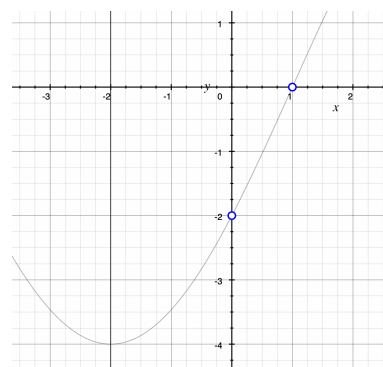
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间.



5. 已知函数 $f(x) = 4\sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0, 0 < \phi < 2\pi$) 的部分图像如图所示, $f(x)$ 经过 $(1, 0)$, 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 取到最小值.

(1) 求 ω 和 ϕ 的值;



ω 相关

1. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \pi)$ 内无零点, 其图像关于 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 求 $f(x)$ 的解析式.
2. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图像关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 且在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 上只有两条对称轴, 求 ω 的值.
3. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 的对称轴, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调, 求 ω 的最大值.

4. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有一个最高点和一个最低点, 求 ω 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减, 且在区间 $[0, \pi]$ 上有且仅有 1 个零点, 求 ω 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$), $|f(-\frac{\pi}{6})| = 1, f(\frac{\pi}{6}) = 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{24})$ 上单调, 求 ω 的取值范围.

7. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)$, 其中 $0 < \omega < 3$, 且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

(1) 求 ω ;

(2) 若 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$, 求函数 $g(x) = f^2(x) - f(x) + 1$ 的最大值.

解三角形

1. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin B - \sqrt{3}b \cos A = 0$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 求 $2 \cos A + 2 \cos B + \cos C$ 的取值范围.

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right)$.

- (I) 求角 A 的大小;
- (II) 求 $\sin B \cdot \cos C$ 的取值范围.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c 且满足 $a \cos C + c \cos A - 2b \sin B = 0$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 B 为锐角, $\sin A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, BC 边上的中线 $AD = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.