第一章：弦振动方程、热传导方程、拉普拉斯方程的导出

方言

上海交通大学

fangyan_pj@sjtu.edu.cn

2025 年 8 月 28 日

Overview

1. 弦振动方程
   - 弦振动方程的导出
   - 弦振动方程的定解问题

弦振动方程

一条弦固定在区间 $[0, L]$ 上，密度为 ρ，在平衡处附近做微小的振动，记 $u(t, x)$ 为弦在时刻 t 处于位置 x 的位移，满足以下的微分方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

(1) 式中 a 为待定的弦的波速，若 $F \equiv 0$，则称为其次方程，否则为非齐次方程。

弦振动方程的证明

任取一段弦 $[x, x+\Delta x]$，这段弦的长度为

$$\Delta s = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

其中 $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，则 $\Delta s \approx \Delta x$，则其弹力与时间无关，设为 $T(x)$。

弦振动方程的证明

我们分别在水平方向和竖直方向上对这段弦进行受力分析:

- 水平方向上速度为 0，则其受力平衡

$$T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) - T(x)\cos\theta(x) = 0,$$

- 在竖直方向（ u^- ）上进行受力分析

$$\rho\Delta s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(\sin\beta - \sin\alpha) + F(t,x)\Delta s$$

其中 $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = \lim_{\theta\to 0}\tan\theta$，再将 $\Delta s = \Delta x$ 代入上式，得到:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)) + F(t,x)\Delta x$$

弦振动方程的证明

再令 $\Delta x \to 0$，得到:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t,x)$$

我们令 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}, F(t,x) = \dfrac{f(t,x)}{\rho}$，则得到弦振动方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t,x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

当一条弦足够长并且需要研究远离两端的点的振动情况时，可以假设弦无限长。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t,x), \\ u(0,x) = \varphi(x), \\ u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2}$$

(2) 式的三个条件分别表示了方程本身、初始位移和初始速度。

这个问题被称为弦振动方程的**初值问题**或者 **Cauchy 问题**。

边界条件

当我们要考虑的弦在一个有限的区间 $I=[0,L]$ 上的振动情况时，需要给出边界条件，即弦在端点处的条件。

我们以一个端点 $x=a$ 为例，常见的边界条件有以下三种：

1. Dirichlet 边界条件：

$$u(t,a)=\varphi(t),\forall t>0$$

2. Neumann 边界条件：

$$u_x(t,a)=\mu(t),\forall t>0$$

这表示了端点处的力。

特别的，当 $\mu(t)=0$ 时，表示端点处没有力的作用，称为自由条件。

3. Robin 边界条件:

$$T\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) - ku(t,a) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma u\right)\Big|_{x=a} = 0$$

其中 $\sigma = \dfrac{k}{T}$ 表示弦的一端与一线性弹簧连接。

若弹簧为非线性的，则有:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma(u)\right)\Big|_{x=a} = 0$$