不等式

2025 年 7 月 25 日

不等式的性质

1. 设 $a > b > c > d > 0$，且 $x = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}, y = \sqrt{ac} + \sqrt{bd}, z = \sqrt{ad} + \sqrt{bc}$，则 x, y, z 的大小关系为________________.

2. 使不等式 $\sqrt{3} + \sqrt{8} > 1 + \sqrt{a}$ 成立的正整数 a 的最大值为________________.

3. 已知二次函数 $f(x)$ 的图像过原点，且 $1 \le f(-2) \le 2$，$3 \le f(1) \le 4$，求 $f(2)$ 的范围.

4. 判断 x^2+y^2 与 $xy+x+y+1$ 的大小.

5. 已知 $a,b,c,d>0$, $A=a+d$, $B=b+c$, 且 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. 若 a 是 a,b,c,d 中最大的一个, 试比较 A 与 B 的大小.

6. 设 $0 < a < \dfrac{1}{2}$. 则 $1 - a^2$, $1 + a^2$, $\dfrac{1}{1-a^2}$, $\dfrac{1}{1+a^2}$ 按从小到大的顺序排列为 ________________.

7. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$. 则“$a > 0, b > 0, c > 0$”是“$a + b + c > 0, ab + bc + ca > 0, abc > 0$”成立的 ________________ 条件.

8. 若 $0 < b < a < \dfrac{1}{4}$. 则 $a - b, \sqrt{a} - \sqrt{b}, \sqrt{a-b}, \sqrt{a^2 - b^2}$ 中最大的是 ________________.

9. 设对于 $k = 1, 2, \ldots, n$, 存在实数 x 满足如下不等式: $2^k < x^k + x^{k+1} < 2^{k+1}$. 试求 n 的最大值.

10. 设 $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$. 证明：对任意实数 x, $f(x)$ 总大于 0.

不等式的证明

1. 设 $\triangle ABC$ 的三条边分别为 a, b, c，试证明 $ab + bc + ac \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$.

2. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$. 证明: $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)\left(b + \dfrac{1}{b}\right) \geq \dfrac{25}{4}$.

3. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$. 证明: $\sqrt{a^2 + \dfrac{1}{a}} + \sqrt{b^2 + \dfrac{1}{b}} \geq 3$.

4. 已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$. 证明: $\dfrac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} + \dfrac{1 + yz + yx}{(1 + z + x)^2} + \dfrac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} \geq 1$.

5. 已知 n 是正整数. 证明：$\dfrac{1}{\sqrt{1^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}<3$.

6. 已知 $u\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $v\in\mathbf{R}^+$. 证明：$(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\dfrac{9}{v}\right)^2\geq 8$.

7. 若 a,b,c 是符号相同的三个实数, 且 $a<b<c$, 令 $S=a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$. 则 S 与 0 的大小关系是 ________________.

8. 设 a, b 都是正数, 且 $a+b \leq 4$. 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 与 1 的大小关系是 ________________.

9. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$，在 $\triangle ABC$ 中. 证明：$x^2+y^2+z^2 \geq 2xy\cos C+2yz\cos A+2zx\cos B$.

10. 已知非负实数 a, b, c 满足 $ab+bc+ca=1$. 证明：$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{5}{2}$.

不等式的解法

1. 解不等式：$\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}<\frac{1}{x}$.

2. 解不等式 $(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2+1}<x\cdot(x^2+1)$.

3. 设 a 为实常数, 关于 x 的不等式 $\frac{1}{1+\sqrt{x}}\geq a\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ 有非零解. 求实数 a 的取值范围.

4. 解不等式 $\left|\log_2 x + \dfrac{2}{\sqrt{\log_2 x + 4}}\right| \geq 1.$

5. 解关于 x 的不等式 $2^{3x} - 2^{-3x} > \lambda(2^x - 2^{-x})$.

6. 已知不等式 $|x^2 - 4x + a| + |x - 3| \leq 5$ 的解的最大值为 3. 求实数 a 的值，并解此不等式.

7. 已知不等式 $x^4+ax^3+(a+3)x^2+ax+1>0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 a 的取值范围.

8. 不等式 $|x+\log_2 x|<x+|\log_2 x|$ 的解集为 ________________.

9. 若 $\sqrt{3-a}-\sqrt{a+1}\leq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 ________________.

10. 设 $a, b, x \in \mathbf{N}^{+}$, 且 $a \leq b$. A 为关于 x 的不等式 $\lg b - \lg a < \lg x < \lg b + \lg a$ 的解集. 已知 A 中恰好有 50 个整数解, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{50}$. 求当 ab 取最大值时, $\sqrt{a+b}$ 的值.