函数综合 1

2025 年 7 月 22 日

函数的性质

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对于 $m, n \in \mathbf{R}$ 恒有

   (1) 证明：$f(0) = 1$.

   (2) 证明：$x \in \mathbf{R}$ 时，恒有 $f(x) > 0$.

   (3) 证明：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

   (4) 若 $f(x) \cdot f(2-x) > 1$，求 x 的取值范围.

2. (1) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$，且 $f(6) = 3f(2) + 2$，则 $f(8) =$ ________.

   (2) 对任意的实数 x, y，$f(x+y) = f(x^2) + f(2y)$ ，则 $f(2) =$ ________.

   (3) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，$f(xy) = f(x) + f(y)$，若 $f(9) = 6$，则 $f(3\sqrt{3}) =$ ________.

3. 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$，方程 $f(x)=x$ 的两个根为 x_1 和 x_2，且 $x_1-x_2>2$.

(1) 证明：x_1，x_2 也是方程 $f(f(x))=x$ 的两个根.

(2) 设 $f(f(x))=x$ 的另两个根为 x_3 和 x_4，试判断 x_1,x_2,x_3,x_4 的大小.

4. 设 $x\in\mathbf{R}$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 若存在实数 n，使得 $[t]=1,[t^2]=2,\ldots,[t^n]=n$ 同时成立，求正整数 n 的最大值.

零点问题

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x-2, & x\le 0, \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$，讨论 $y=f\left[f(kx)+1\right]+1(k\ne 0)$ 的零点个数.

2. 若至少存在一个 $x(x\ge 0)$，使得关于 x 的不等式 $x^2\le 4-|2x-m|$ 成立，求实数 m 的取值范围

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\in[0,1), \\ 2-x^2, & x\in[-1,0) \end{cases}$，且 $f(x+2)=f(x)$，则方程 $g(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}$ 在区间 $[-5,1]$ 上所有实根之和为 ________.

4. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x) = 2 - f(x)$，若函数 $y = \dfrac{x+1}{x}$ 与 $y = f(x)$ 图像的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$，则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) =$ ________.

5. 已知函数 $f(x) = a\sin x + b\cos x(a, b \in \mathbf{Z})$，且满足 $\{x|f(x) = 0\} = \{x|f(f(x)) = 0\}$，求 a 的最大值.

6. 已知 a, b, c, d 是不全为 0 的实数，函数 $f(x)=bx^2+cx+d, g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. 若方程 $f(x)=0$ 有实数根，且方程 $f(x)=0$ 的实数根都是 $g(f(x))=0$ 的根；反之，方程 $g(f(x))=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的实数根.

(1) 求 d 的值；

(2) 若 $a=0$ ，求 c 的取值范围;

(3) 若 $a=1, f(1)=0$，求 c 的取值范围.

7. 已知二次函数 $(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)=x$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x \in (0, x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称，证明 $x_0<\dfrac{x_1}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{|x+2|}+kx+b$，其中 k,b 为实数且 $k\neq 0$.

(1) 当 $k>0$ 时，根据定义证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上是单调递减；

(2) 求使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点的 b 的取值范围；

9. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $b=\dfrac{a^2+1}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式；

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在零点，$0\leq b-2a\leq 1$，求 b 的取值范围.

任意与恒成立问题

1. 已知函数 $f(x)=x^2+4|x-a|\,(x\in\mathbf{R})$.

   (1) 若存在实数 $x_1,x_2\in[-1,1]$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，求 a 的取值范围；

   (2) 若对任意实数 x_1,x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le k$ 成立，求 k 的最小值.(用 a 表示)

2. 设函数 $f(x)=x|2x-a|,g(x)=\dfrac{x^2-a}{x-1},a>0$.

   (1) 当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[3,5]$ 上的值域；

   (2) 若对任意的 $t\in[3,5],\exists x_i\in[3,5](i=1,2)$，且 $x_1\ne x_2$，使 $f(x_i)=g(t)$，求实数 a 的取值范围.

3. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq 0)$ 满足条件：

   a. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geq x$；

   b. 当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leq\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$；

   c. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

   (1) 求 $f(x)$ 的解析式；

   (2) 求最大值 m，使得 $\exists t\in\mathbf{R}$，对 $\forall x\in[1,m]$，有 $f(x+t)\leq x$.

三角函数

1. $4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$________.

2. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})(\omega > 0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$，求其对称轴方程.

3. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})(\omega > 0)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内无零点，其图像关于 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称，求 $f(x)$ 的解析式.

4. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的图像关于点 $(\dfrac{\pi}{3},0)$ 对称，且在 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 上只有两条对称轴，求 ω 的值.

5. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}),x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 的对称轴，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，求 ω 的最大值.

6. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上有一个最高点和一个最低点，求 ω 的取值范围.

7. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，且在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有 1 个零点，求 ω 的取值范围.

8. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$，$\left|f(-\frac{\pi}{6})\right|=1, f(\frac{\pi}{6})=0$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{24}\right)$ 上单调，求 ω 的取值范围.