

# 不等式综合 II

2025 年 7 月 29 日

## 不等式的应用

1. (根的存在性定理)  $x_1$  与  $x_2$  分别是实系数一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  和  $-ax^2 + bx + c = 0$  的一个根, 且  $x_1 \neq x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ . 证明: 方程  $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$  有且仅有一个根介于  $x_1$  与  $x_2$  之间.

2. (和差化积、均值不等式) 已知  $x, y > 0$ , 求函数  $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$  的最大值.

3. (以函数值表示系数) 设正系数一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有实根, 证明:  $\min\{a, b, c\} \leq \frac{1}{4}(a + b + c)$ .

4. (绝对值不等式) 设函数  $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$ . 计  $M(a, b)$  为  $|f(x)|$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值.

(1) 证明: 当  $|a| \geq 2$  时,  $M(a, b) \geq 2$ .

(2) 当  $a, b$  满足  $M(a, b) \leq 2$  时, 求  $|a| + |b|$  的最大值.

5. (基本不等式) 记  $F(x, y) = x + y - a(x + 2\sqrt{2xy})$ ,  $x, y \in \mathbf{R}^+$

(1) 是否存在  $x_0 \in \mathbf{R}^+$ , 使  $F(x_0, 2) = 2$ ?

(2) 若对任意的  $x, y \in \mathbf{R}^+$ , 都有  $F(x, y) \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.

6. (基本不等式, 三角不等式) 已知正实数  $x, y$  满足  $a = x + y, b = \sqrt{x^2 + 7xy + y^2}$ .

(1) 当  $y = 1$  时, 求  $\frac{b}{a}$  的最大值;

(2) 若  $c^2 = kxy$ , 若对于任意的正数  $x, y$ , 以  $a, b, c$  为长度的线段恒能构成三角形, 求  $k$  的取值范围.

7. 设  $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ , 当  $x \in [-1, +\infty)$  时,  $f(x) \geq a$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

8. 对于一切实数  $a$ , 二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c (a < b)$  的值恒为非负实数, 求  $M = \frac{a+b+c}{b-a}$  的最小值.

9. 大圆酒杯的轴截面为函数  $y = x^4$  的图像, 往酒杯里面放一半径为  $r$  的小球, 当半径  $r$  最大为多少时, 小球可接触到杯底的最低点?

10. 设实数  $a, b, c, d$  满足  $ab = c^2 + d^2 = 1$ , 则  $(a-c)^2 + (b-d)^2$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

## 几个重要的不等式

### 平均值不等式

若  $a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 记  $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, Q_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$  分别为这  $n$  个数的调和平均、几何平均、算术平均和平方平均, 则有:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

### Cauchy 不等式

设  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  是实数, 则有

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

当且仅当  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$  时, 等号成立.

### 排序不等式

设两个实数列  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  和  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ , 则有

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n (\text{顺序和}) \geq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} (\text{乱序和}) \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 (\text{逆序和})$$

其中  $i_1, i_2, \dots, i_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的一个排列.

### 琴生不等式

设  $f(x)$  是一个在区间  $I$  上连续的函数, 若对任意的  $x_1, x_2 \in I$ , 有不等式  $2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq f(x_1) + f(x_2)$  成立 (或  $f(x)$  存在二阶导数且  $f''(x) \leq 0$ ), 则称  $f(x)$  是一个上凸函数.

若函数  $f(x)$  为区间  $I$  上的上凸函数, 则对任意的  $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ , 有:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

### 幂平均不等式

设  $p > q$ , 则对任意的非负实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有:

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \dots + a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

1. (幂平均不等式或均值不等式) 已知  $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ , 证明:  $x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{9}$

2. 设  $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ , 且  $x + y + z \geq xyz$ , 求  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$  的最小值.

3. (均值不等式) 证明:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ .

4. 试求正实数  $A$  的最大值, 使得对于任意实数  $x, y, z$ , 不等式  $x^4 + y^4 + z^4 + x^2yz + xy^2z + xyz^2 - A(xy + yz + xz)^2 \geq 0$  成立.

5. 求最小的正实数  $k$ , 使得不等式  $ab + bc + ca + k \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$  对任意正实数  $a, b, c$  成立.

6. 已知  $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ , 且  $abc = 1$ , 则  $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

7. 设  $a, b, c \geq 0$ , 且  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ , 则  $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$  的最大值为\_\_\_\_\_.

8. (Cauchy 不等式) 求出所有实数  $a$  使得存在非负实数  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  满足下列关系:  $\sum_{k=1}^5 kx_k =$

$$a, \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = a^2, \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = a^3.$$

9. (均值不等式) 证明:  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} > n(\sqrt[n]{2} - 1).$

10. (排序不等式) 正实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的任一排列为  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ , 证明:  $\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \dots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n.$



11. 设三角形的三条边长分别为  $a, b, c$ , 求  $\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ac}}$  的取值范围.

12. 由排序不等式证明均值不等式.

13. (琴生不等式) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n (n \geq 2)$  是正实数, 满足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , 求  $\frac{x_1}{1-x_1} + \frac{x_2}{1-x_2} + \dots + \frac{x_n}{1-x_n}$  的最小值.

14. (琴生不等式) 设三角形的三个内角分别为  $A, B, C$ , 求  $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$  的最大值.

15. (琴生不等式, 需要仔细挑选原函数) 设实数  $r_1, r_2, \dots, r_n \geq 1$ , 证明  $\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \dots + \frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n} + 1}$ .