不等式综合

2025 年 7 月 24 日

三角换元

三角换元的技巧

1. 出现形如 x^2+y^2 的式子时，可以考虑使用三角换元；
2. 出现形如 $\sqrt{1+x}$ 的式子时，可以考虑使用 $\tan^2\theta$ 换元；
3. 出现形如 $\sqrt{1-x}$ 的式子时，可以考虑使用 $1-\sin^2\theta$ 或 $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ 换元；
4. 注意，三角函数具有有界性.

1. 设 $a\in\mathbf{R}$，若 $a\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\le 1$ 对 $x>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

2. 已知 $x^2+y^2-\sqrt{3}xy=1(x,y\in\mathbf{R})$，求 $x+y$ 的取值范围.

3. 已知实数 a, b, c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$，求 $ab+c$ 的最小值.

4. 已知 $x^2+y^2 \leq 1$，求 x^2+xy-y^2 的最值

5. 已知实数 x, y，满足 $x^2+2xy=1$，求 x^2+y^2 的最小值.

基本（均值）不等式

基本不等式链:

对于 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，且 $x_1, x_2 > 0$，有

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$$

当且仅当 $x_1 = x_2$ 时，等号成立.

均值不等式链:

对于 $n \in \mathbf{N}^+$，$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ 且 $x_i > 0$，有

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

1. 非零实数 a, b, c，若 $\dfrac{bc}{a}, \dfrac{ca}{b}, \dfrac{ab}{c}$ 成等比数列，证明 $|b| \leq \dfrac{|a|+|b|}{2}$.

2. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\sqrt{ab}$, 求 a^2+b^2 的最小值.

3. 已知 $x, y \in (0, +\infty)$, 若不等式 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} \leq a\sqrt{\dfrac{x}{2} + y}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

4. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + xy + 4y^2 = 1$, 则 xy 的最大值是 __________; $x^2 - xy + y^2$ 的最小值是 __________.

5. 已知 $a > 0, b > -1$, 且 $a + b = 1$, 求 $\dfrac{a^2 + 3}{a} + \dfrac{b^2}{b + 1}$ 的最小值.