三角函数

2025 年 7 月 23 日

辅助角公式和两角和、倍角公式

1. $4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$________.

2. 已知函数 $f(x) = \sin x + 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

   (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间;

   (2) 若 $f(\alpha) = \dfrac{9}{4}, \alpha \in (\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$，求 $\sin\alpha + \sin 2\alpha$ 的值.

3. 已知角 α 的顶点在坐标原点 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，将 α 的终边按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到角 β 的终边，且经过点 $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

(1) 求 $\cos\alpha$ 的值；

(2) 求函数 $f(x) = \cos^2(x-\alpha) + \sin^2(x+\beta)$ 的值域.

4. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 将函数 $f(x)$ 分别向左、向右平移 $m(m>0)$ 个单位相应得到 $g(x)$、$h(x)$，且 $\cos m = \frac{\sqrt{3}}{3}$，求函数 $y = g(x) + h(x)$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域。

5. 已知函数 $f(x)=\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x+\dfrac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(\alpha)=\dfrac{2}{3}$，其中 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{8}\right)$，求 $f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{8}\right)$ 的值.

6. 已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

7. 函数 $y=\dfrac{4\sin x\cos x+3}{\sin x+\cos x}$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 的最小值是 ________.

8. $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{8}+\arcsin\dfrac{3}{4}=$________________.

9. 求函数 $y=3\sin^2 x-2\sin 2x+2\sin x-\cos x, x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的值域.

对称性、周期性、极值点和单调性

1. 已知函数 $f(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

   (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$ 的值;

   (2) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期及其单调递增区间.

2. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ $(x \in \mathbf{R})$.

   (1) 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域;

   (2) 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的增区间.

3. 设函数 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6})(\omega > 0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$，求其对称轴方程.

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x\,(\omega>0)$，且 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(1) 求 ω 的值;

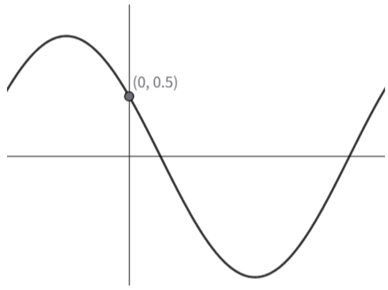
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

三角函数的图像

1. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\,(0<\varphi<\pi)$ 图象上相邻两个最高点的距离为 π.

   (1) 若 $y=f(x)$ 的图象过点 $(0,\dfrac{1}{2})$，且部分图象如右图所示，求函数 $f(x)$ 的解析式；

   (2) 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象，求函数 $y=2\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2+g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值.



2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin(\omega x)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,(\omega>0)$ 的图象如图所示，其中 A 为图象的最高点，B,C 为图象与 x 轴的交点，且 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

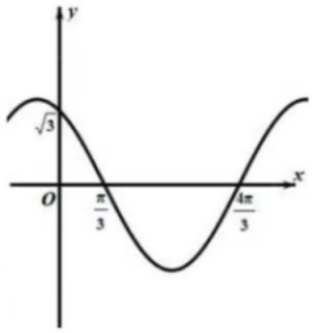
   (1) 求 ω 的值及 $f(x)$ 的单调递增区间；

   (2) 设 $g(x)=f(x)+f(x+\dfrac{1}{3})$，求函数 $g(x)$ 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}]$ 上的最大值及此时 x 的值.

3. 已知函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)\,(A > 0, \omega > 0, -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2})$. $y = f(x)$ 的图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

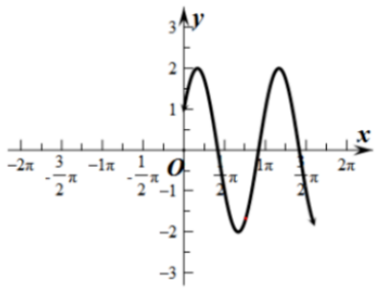
(2) 记 $g(x) = f(x) - \left|x - \dfrac{5\pi}{6}\right|$, 求 $g(x)$ 的最大值.



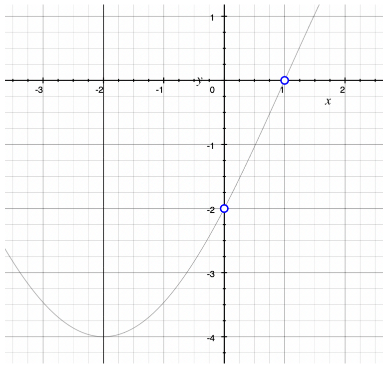
4. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)\,(x \in \mathbf{R}, A > 0, \omega > 0, 0 < \phi < \dfrac{\pi}{2})$ 的图像如图所示;

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x) = f\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right) - f\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间.



5. 已知函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\phi)\,(\omega>0, 0<\phi<2\pi)$ 的部分图像如图所示，$f(x)$ 经过 $(1,0)$，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取到最小值.



(1) 求 ω 和 ϕ 的值；

ω 相关

1. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内无零点，其图像关于 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 对称，求 $f(x)$ 的解析式.

2. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的图像关于点 $(\dfrac{\pi}{3},0)$ 对称，且在 $(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$ 上只有两条对称轴，求 ω 的值.

3. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}),x=-\dfrac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 的对称轴，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，求 ω 的最大值.

4. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有一个最高点和一个最低点，求 ω 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，且在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有 1 个零点，求 ω 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$，$\left|f(-\frac{\pi}{6})\right|=1, f(\frac{\pi}{6})=0$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{24}\right)$ 上单调，求 ω 的取值范围.

7. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中 $0<\omega<3$，且 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

(1) 求 ω;

(2) 若 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right]$，求函数 $g(x)=f^2(x)-f(x)+1$ 的最大值.

解三角形

1. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$.

   (1) 求角 A 的大小；

   (2) 求 $2\cos A+2\cos B+\cos C$ 的取值范围.

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，$b^2+c^2-a^2=2bc\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

   (I) 求角 A 的大小；

   (II) 求 $\sin B\cdot\cos C$ 的取值范围.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c 且满足 $a\cos C+c\cos A-2b\sin B=0$.

   (1) 求角 B 的大小；

   (2) 若 B 为锐角，$\sin A=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$BC$ 边上的中线 $AD=\sqrt{7}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.