

函数的性质和三角函数

2025 年 7 月 20 日

函数的性质

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x-1)$ 为奇函数, $f(x+1)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = kx + m$, 若 $f(0) - f(3) = -2$, 求 $f(2022)$ 的值。
2. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 对任意实数 x , 恒有 $f(x+2) = f(-x)$, $f(x) = -f(4-x)$, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = 2x - x^2$.
 1. 当 $x \in [2, 4]$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;
 2. 计算 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(2022)$ 的值;

3. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, $f(x) + g(x) = a^x + \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \sin x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$). 若 $\forall t \in \mathbf{R}$, 函数 $F(x) = e^{|x-3t-2022|} - \mu f(x-3t-2022) - 2\mu^2$ 有唯一零点, 求实数 μ 的值.

4. 已知函数 $f(x) = \log_a(3-x)$, $g(x) = \log_a(3+x)$ ($a > 0, a \neq 1$), 记 $F(x) = f(x) - g(x)$. 问是否存在实数 a , 使得当 $F(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ 时, 值域为 $[1 - \log_a n, 1 - \log_a m]$.

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3 + \log_{\frac{1}{2}} x, & 1 < x \leq 32 \end{cases}$, $g(x) = 2x^2 - x$, 若 $y = g(f(x)) - t$ 恰有三个零点, 求实数 t 的取值范围.

三角函数

几个常见的公式

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$2. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$3. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$5. \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$6. \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$7. \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$8. \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$9. \sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right);$$

$$10. \cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right);$$

$$11. \sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$12. \cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

1. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 化简 $\frac{(1 + \sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})}{\sqrt{2 + 2 \cos \alpha}}$.

2. 已知 $\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha + \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 求 $\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{\cos 2\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}$ 的值.

4. 在斜三角形 ABC 中, $\sin A = -\sqrt{2}\cos B\cos C$, 且 $\tan B \cdot \tan C = 1 - \sqrt{2}$, 求角 A 的值.

5. 如图所示，已知 OPQ 是半径为 1，圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形，点 A 在弧 PQ 上，且异于点 P 和点 Q ，过 A 作 $AB \perp OP$ ，交 OP 于点 B ，过 A 作 $AC \perp OQ$ ，交 OQ 于点 C ，记 $\angle AOP = \theta$ ，四边形 $ACOB$ 的周长为 l ，当 θ 取何值时， l 取得最小值？求此时的最小值。

