

不等式综合

2025 年 7 月 24 日

三角换元

三角换元的技巧

1. 出现形如 $x^2 + y^2$ 的式子时, 可以考虑使用三角换元;
 2. 出现形如 $\sqrt{1+x}$ 的式子时, 可以考虑使用 $\tan \theta$ 换元;
 3. 出现形如 $\sqrt{1-x}$ 的式子时, 可以考虑使用 $\sin \theta$ 或 $\frac{1}{\cos \theta}$ 换元;
 4. 注意, 三角函数具有有界性.
1. 设 $a \in \mathbf{R}$, 若 $a\sqrt{x} + \sqrt{1+x} \leq 1$ 对 $x > 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

2. 已知 $x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = 1 (x, y \in \mathbf{R})$, 求 $x + y$ 的取值范围

3. 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 求 $ab + c$ 的最小值.

4. 已知 $x^2 + y^2 \leq 1$, 求 $x^2 + xy - y^2$ 的最值

5. 已知实数 x, y , 满足 $x^2 + 2xy = 1$, 求 $x^2 + y^2$ 的最小值.