不等式综合 II

2025 年 7 月 29 日

不等式的应用

1. (根的存在性定理) x_1 与 x_2 分别是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 和 $-ax^2+bx+c=0$ 的一个根, 且 $x_1 \neq x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. 证明: 方程 $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$ 有且仅有一个根介于 x_1 与 x_2 之间.

2. (和差化积、均值不等式) 已知 $x, y > 0$, 求函数 $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 的最大值.

3. (以函数值表示系数) 设正系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 证明: $\min\{a, b, c\} \leq \frac{1}{4}(a+b+c)$.

4. (绝对值不等式) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b(a, b \in \mathbf{R})$. 计 $M(a, b)$ 为 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.

(1) 证明: 当 $|a| \geq 2$ 时, $M(a, b) \geq 2$.

(2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时, 求 $|a| + |b|$ 的最大值.

5. (基本不等式) 记 $F(x,y)=x+y-a(x+2\sqrt{2xy}),x,y\in\mathbf{R}^+$

(1) 是否存在 $x_0\in\mathbf{R}^+$, 使 $F(x_0,2)=2$?

(2) 若对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^+$, 都有 $F(x,y)\geq 0$, 求 a 的取值范围.

6. (基本不等式, 三角不等式) 已知正实数 x,y 满足 $a=x+y,b=\sqrt{x^2+7xy+y^2}$.

(1) 当 $y=1$ 时, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值;

(2) 若 $c=kxy$, 若对于任意的正数 x,y, 以 a,b,c 为长度的线段恒能构成三角形, 求 k 的取值范围.

7. 设 $f(x)=x^2-2ax+2$, 当 $x\in[1,+\infty)$ 时, $f(x)\geq a$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ________.

8. 对于一切实数 a, 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<b)$ 的值恒为非负实数, 求 $M=\dfrac{a+b+c}{b-a}$ 的最小值.

9. 大圆酒杯的轴截口为函数 $y=x^4$ 的图像, 往酒杯里面放一半径为 r 的小球, 当半径 r 最大为多少时, 小球可接触到杯底的最低点?

10. 设实数 a,b,c,d 满足 $ab=c^2+d^2=1$, 则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ________________.

几个重要的不等式

平均值不等式

若 $a_i \geq 0, i=1,2,\ldots,n$, 计 $H_n=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$, $G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $Q_n=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 分别为这 n 个数的调和平均、几何平均、算术平均和平方平均, 则有:

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n$$

Cauchy 不等式

设 $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ 是实数, 则有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 时, 等号成立.

排序不等式

设两个实数列 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 和 $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, 则有

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n(\text{顺序和}) \geq a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\cdots+a_nb_{i_n}(\text{乱序和}) \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1(\text{逆序和})$$

其中 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的一个排列.

琴生不等式

设 $f(x)$ 是一个在区间 I 上连续的函数, 若对任意的 $x_1,x_2 \in I$, 有不等式 $f(x_1)+f(x_2) \geq 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立 (或 $f(x)$ 存在二阶导数且 $f''(x)<0$), 则称 $f(x)$ 是一个上凸函数.

若函数 $f(x)$ 为区间 I 上的上凸函数, 则对任意的 $x_1,x_2,\ldots,x_n \in I$, 有:

$$f(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}) \geq \frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$$

幂平均不等式

设 $p>q$, 则对任意的非负实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 有:

$$\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\frac{a_1^q+a_2^q+\cdots+a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

1. (幂平均不等式或均值不等式) 已知 $x,y,z>0, x+y+z=1$, 证明: $x^3+y^3+z^3 \geq \dfrac{1}{3}$

2. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + y + z \geq xyz$, 求 $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$ 的最小值.

3. (均值不等式) 证明: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

4. 试求正实数 A 的最大值, 使得对于任意实数 x, y, z, 不等式 $x^4 + y^4 + z^4 + x^2yz + xy^2z + xyz^2 - A(xy + yz + xy)^2 \geq 0$ 成立.

5. 求最小的正实数 k, 使得不等式 $ab+bc+ca+k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ 对任意正实数 a,b,c 成立.

6. 已知 $a,b,c \in \mathbf{R}^{+}$, 且 $abc=1$, 则 $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$ 的最小值为________________.

7. 设 $a,b,c \geq 0$, 且 $a^2+b^2+c^2=3$, 则 $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}$ 的最大值为 ________________.

8. (Cauchy 不等式) 求出所有实数 a 使得存在非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足下列关系: $\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$.

9. (均值不等式) 证明: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} > n(\sqrt[n]{2} - 1)$.

10. (排序不等式) 正实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的任一排列为 $a'_1, a'_2 \ldots a'_n$, 证明: $\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \cdots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n$.

11. 设三角形的三条边长分别为 a, b, c, 求 $\dfrac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ac}}$ 的取值范围.

12. 由排序不等式证明均值不等式.

13. (琴生不等式) 设 $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geq 2)$ 是正实数, 满足 $x_1+x_2+\ldots+x_n = 1$, 求 $\dfrac{x_1}{1-x_1} + \dfrac{x_2}{1-x_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{1-x_n}$ 的最小值.

14. (琴生不等式) 设三角形的三个内角分别为 A, B, C, 求 $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$ 的最大值.

15. (琴生不等式, 需要仔细挑选原函数) 设实数 $r_1, r_2, \ldots, r_n \geq 1$, 证明 $\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}+1}$.