

不等式综合 II

2025 年 7 月 27 日

不等式的应用

1. (根的存在性定理) x_1 与 x_2 分别是实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 和 $-ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根, 且 $x_1 \neq x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. 证明: 方程 $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$ 有且仅有一个根介于 x_1 与 x_2 之间.

2. (和差化积、均值不等式) 已知 $x, y > 0$, 求函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 的最大值.

3. (以函数值表示系数) 设正系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 证明: $\min\{a, b, c\} \leq \frac{1}{4}(a + b + c)$.

4. (绝对值不等式) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$. 计 $M(a, b)$ 为 $|f(x)|$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值.

(1) 证明: 当 $|a| \geq 2$ 时, $M(a, b) \geq 2$.

(2) 当 a, b 满足 $M(a, b) \leq 2$ 时, 求 $|a| + |b|$ 的最大值.