三角函数

2025 年 7 月 23 日

辅助角公式和两角和、倍角公式

1. $4\cos 50^\circ - \tan 40^\circ =$________.

2. 已知函数 $f(x) = \sin x + 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$.

   (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间；

   (2) 若 $f(\alpha) = \dfrac{9}{4}, \alpha \in (\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$，求 $\sin\alpha + \sin 2\alpha$ 的值.

3. 已知角 α 的顶点在坐标原点 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，将 α 的终边按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到角 β 的终边，且经过点 $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

(1) 求 $\cos\alpha$ 的值；

(2) 求函数 $f(x) = \cos^2(x-\alpha) + \sin^2(x+\beta)$ 的值域.

4. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 将函数 $f(x)$ 分别向左、向右平移 $m(m>0)$ 个单位相应得到 $g(x)$、$h(x)$，且 $\cos m = \frac{\sqrt{3}}{3}$，求函数 $y = g(x) + h(x)$，$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域。

对称性、周期性、极值点和单调性

1. 已知函数 $f(x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

   (1) 求 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$ 的值；

   (2) 求函数 $y=f(x)$ 的最小正周期及其单调递增区间.

2. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$.

   (1) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域；

   (2) 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的增区间.

3. 设函数 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$，求其对称轴方程.

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x\,(\omega>0)$，且 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(1) 求 ω 的值；

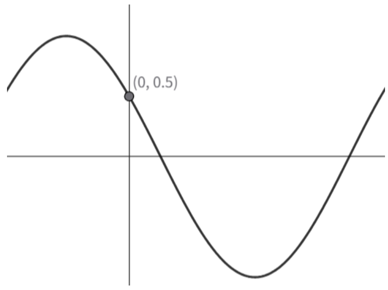
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

三角函数的图像

1. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\,(0<\varphi<\pi)$ 图象上相邻两个最高点的距离为 π.

   (1) 若 $y=f(x)$ 的图象过点 $(0,\dfrac{1}{2})$，且部分图象如右图所示，求函数 $f(x)$ 的解析式;

   (2) 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象，求函数 $y=2\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2+g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值.



2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\dfrac{\omega x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin(\omega x)-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,(\omega>0)$ 的图象如图所示，其中 A 为图象的最高点，B,C 为图象与 x 轴的交点，且 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

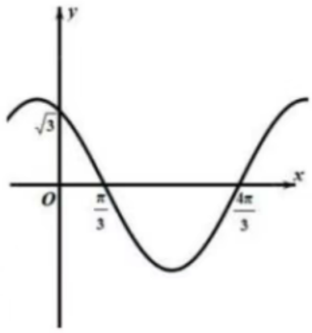
   (1) 求 ω 的值及 $f(x)$ 的单调递增区间;

   (2) 设 $g(x)=f(x)+f(x+\dfrac{1}{3})$，求函数 $g(x)$ 在 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}]$ 上的最大值及此时 x 的值.

3. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)\,(A>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$. $y=f(x)$ 的图象如图所示.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

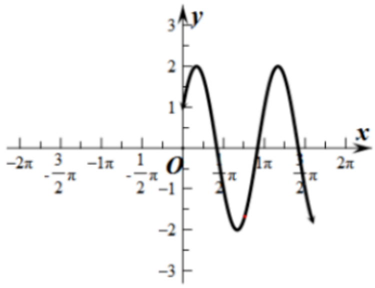
(2) 记 $g(x)=f(x)-\left|x-\dfrac{5\pi}{6}\right|$，求 $g(x)$ 的最大值.



4. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)\,(x\in\mathbf{R},A>0,\omega>0,0<\phi<\dfrac{\pi}{2})$ 的图像如图所示;

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $g(x)=f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)-f\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的单调递增区间.



ω 相关

1. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内无零点，其图像关于 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，求 $f(x)$ 的解析式.

2. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称，且在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上只有两条对称轴，求 ω 的值.

3. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}),x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 的对称轴，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调，求 ω 的最大值.

4. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有一个最高点和一个最低点，求 ω 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减，且在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有 1 个零点，求 ω 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$，$\left|f(-\frac{\pi}{6})\right|=1, f(\frac{\pi}{6})=0$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{24}\right)$ 上单调，求 ω 的取值范围.