第一章：弦振动方程、热传导方程、拉普拉斯方程的导出

方言

上海交通大学

fangyan_pj@sjtu.edu.cn

2025 年 8 月 29 日

Overview

1. 弦振动方程
   - 弦振动方程的导出
   - 弦振动方程的定解问题
2. 热传导方程
   - 热传导方程的导出
   - 热传导方程的定解问题

弦振动方程

一条弦固定在区间 $[0, L]$ 上，密度为 ρ，在平衡处附近做微小的振动，记 $u(t, x)$ 为弦在时刻 t 处于位置 x 的位移，满足以下的微分方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

(1) 式中 a 为待定的弦的波速，若 $F \equiv 0$，则称为齐次方程，否则为非齐次方程。

弦振动方程的证明

任取一段弦 $[x, x+\Delta x]$，这段弦的长度为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}x.$$

其中 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，则 $\Delta s \approx \Delta x$，则其弹力与时间无关，设为 $T(x)$。

弦振动方程的证明

我们分别在水平方向和竖直方向上对这段弦进行受力分析:

- 水平方向上速度为 0，则其受力平衡

$$T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) - T(x)\cos\theta(x) = 0,$$

- 在竖直方向（u^-）上进行受力分析

$$\rho\Delta s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(\sin\beta - \sin\alpha) + F(t,x)\Delta s$$

其中 $\lim\limits_{\theta\to 0}\sin\theta = \lim\limits_{\theta\to 0}\tan\theta$，再将 $\Delta s = \Delta x$ 代入上式，得到:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)) + F(t,x)\Delta x$$

再令 $\Delta x \to 0$，得到:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x)$$

我们令 $a^2 = \frac{T}{\rho}, F(t, x) = \frac{f(t, x)}{\rho}$，则得到弦振动方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

初值条件

当一条弦足够长并且需要研究远离两端的点的振动情况时，可以假设弦无限长。

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(t, x), \\ u(0, x) = \varphi(x), \\ u_t(0, x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2}$$

(2) 式的三个条件分别表示了方程本身、初始位移和初始速度。

这个问题被称为弦振动方程的**初值问题**或者 **Cauchy 问题**。

边界条件

当我们要考虑的弦在一个有限的区间 $I = [0, L]$ 上的振动情况时，需要给出边界条件，即弦在端点处的条件。

我们以一个端点 $x = a$ 为例，常见的边界条件有以下三种：

1. Dirichlet 边界条件：
$$u(t, a) = \varphi(t), \forall t > 0$$
2. Neumann 边界条件：
$$u_x(t, a) = \mu(t), \forall t > 0$$
这表示了端点处的力。

   特别的，当 $\mu(t) = 0$ 时，表示端点处没有力的作用，称为自由条件。

3. Robin 边界条件：

$$
T\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) - ku(t,a) = 0
$$

$$
\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma u\right)\Big|_{x=a} = 0
$$

其中 $\sigma = \dfrac{k}{T}$ 表示弦的一端与一线性弹簧连接。

若弹簧为非线性的，则有：

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma(u)\right)\Big|_{x=a} = 0
$$

热传导方程

温度分布与时间的关系为热传导方程，同样的物质的浓度分布与时间的关系也满足热传导方程。
物体的温度为 $u(t,x)$，则热传导方程为：

$$u_t - a^2 \Delta u = \tilde{f} \tag{3}$$

其中 $\Delta = \nabla^2 = \sum \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}$ 为 Laplace 算子

热传导方程的证明

三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的物体 Ω，设其温度分布函数为 $u(t, x_1, x_2, x_3)$，比热容均匀为 c

我们取 Ω 上的一个子区域 D，分析其在时间 t_1 到 t_2 之间的热量变化

D 上温度变化需要的热量为

$$Q = \int_D c\rho(u(t_2, x_1, x_2, x_3) - u(t_1, x_1, x_2, x_3))\,\mathrm{d}V$$

Q 的来源有两个

1. D 的边界 ∂D 处流入的热量 Q_1
2. D 内部的热源提供的热量 Q_2

热传导方程的证明

热量的传导满足 Fourier 实验定律：对给定 Ω 内的任意一个界面，从界面的一侧传导到另一侧的热量与温度沿该界面的法向的导数大小、界面的面积、传导的时间段成正比

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

则 D 的边界 ∂D 处流入的热量 Q_1 为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial D} k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

物体内部热源产热量 Q_2 为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{D} f(t, x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}ts$$

其中 $f(t, x_1, x_2, x_3)$ 为单位体积在单位时间内产生的热量

热传导方程的证明

在 t_1 到 t_2 之间，热量守恒定律告诉我们

$$Q = Q_1 + Q_2$$

即

$$\int_D c\rho(u(t_2,x_1,x_2,x_3)-u(t_1,x_1,x_2,x_3))\,\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial D} k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_D f(t,x$$

变换得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_D \mathrm{div}(k\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_D f(t,x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

即

热传导方程的证明

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + f(t, x_1, x_2, x_3)$$

令 $a^2 = \frac{k}{c\rho}, \tilde{f} = \frac{f}{c\rho}$，并用 Laplace 算子代替 ∇^2 则得到热传导方程

$$u_t - a^2\Delta u = \tilde{f}$$

初值条件

只需要给出初始的温度分布：

$$u(0, x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3) \tag{4}$$

边界条件

为了由热传导方程及其初值条件得到温度分布函数，还需要给定在边界 $\partial\Omega$ 上的边界条件

1. Dirichlet 边界条件：

$$u(t, x_1, x_2, x_3)|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x_1, x_2, x_3), \forall t > 0, x \in \partial\Omega,$$

   这表明了边界上的温度变化情况

2. Neumann 边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x_1, x_2, x_3)|_{\partial\Omega} = \mu(t, x_1, x_2, x_3), \forall t > 0, x \in \partial\Omega,$$

   这表明了边界上热量的传递情况
   特别的，当 $\mu(t, x_1, x_2, x_3) \equiv 0$ 时，表示边界上没有热量传递，称为绝热条件

边界条件

3. Robin 边界条件：当物体处在一个温度为 u_0 的介质中，物体与介质的热传导符合 Newton 交换律，物体 Ω 在边界与介质交换的热流量与物体表面的温度 u 与介质在物面的温度 u_0 之差成正比，也与物面面积及交换的时间成正比，从物体表面流出的热量是

$$\mathrm{d}Q = -k_1(u - u_0)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

在边界上流入的热量必须等于流出的热量，则

$$-k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = k_1(u - u_0)$$

整理得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \sigma u\right)|_{\partial\Omega} = \varphi(t, x_1, x_2, x_3)$$