# 帕特南的一道竞赛题

中科大统计系 杜传龙　　中科大数学系 陈啸宇

**一、引言：**

本文讨论的是室友陈啸宇摘自帕特南的一道竞赛题，我们通过讨论给出一个巧妙的证法。

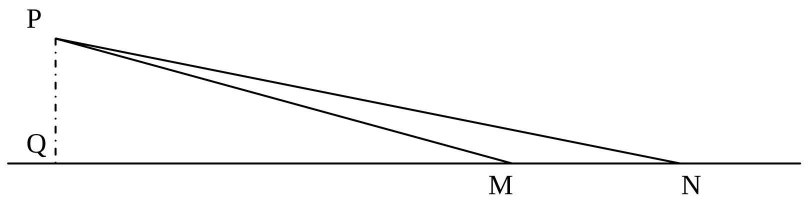
问题：平面上一个无穷点集 E，其中任意两点之间的距离都是整数，证明这些点一定位于同一直线上。

**二、问题的证明：**

**引理：**在上问题的条件下，如果有无穷个点位于同一条直线上，则所有的点都在同一直线上。

证明：不妨设有无穷个点位于直线$l$上。

假设点 P 不在直线$l$上，并不妨设 P 点到直线$l$的距离为 d，垂足为 Q。不妨设 Q 点右侧有无穷个点，取直线$l$上两点 M，N 位于 Q 右侧，连接 PM，PN，如下图示：




设线段 QM 和 QN 的长分别为 QM=x，QN=y，其中 0<x<y。则：

$$PM=\sqrt{d^2+x^2}\text{，}\ PN=\sqrt{d^2+y^2}$$

所以：

$$PN-PM=\sqrt{d^2+y^2}-\sqrt{d^2+x^2}$$
$$=\frac{y^2-x^2}{\sqrt{d^2+y^2}+\sqrt{d^2+x^2}}=\frac{(y+x)(y-x)}{\sqrt{d^2+y^2}+\sqrt{d^2+x^2}}\to y-x$$

（固定 $y-x=a\in\mathbb{N}^*$，令 $x\to+\infty$）

又显然 $\mathrm{PN}-\mathrm{PM}<\mathrm{y}-\mathrm{x}=\mathrm{a}$，所以 $PN-PM=a-\varepsilon\in(a-1,a)$，当 x 充分大时。这与 $PN-PM\in\mathbb{N}^*$ 矛盾。

下面利用这个引理证明原问题：

证明：取定平面上互异的三点 A，B，C，不妨设 $\rho(C,A)=d_1\in\mathbb{N}^*$，$\rho(C,B)=d_2\in\mathbb{N}^*$。

对任意 D∈E，不妨设 $\rho(D,A)=l_1\in\mathbb{N}^*,\rho(D,B)=l_2\in\mathbb{N}^*,\rho(D,C)=l_3\in\mathbb{N}^*$。

假设 A，C，D 三点不共线，B，C，D 三点不共线，则：

$$|l_1-l_3|<d_1\ \text{，}\ |l_2-l_3|<d_2$$

即：

$$|l_1-l_3|=0,1,\ldots,d_1-1$$

$$|l_2-l_3|=0,1,\ldots,d_2-1$$

不妨设$|l_1-l_3|=d$ ,$|l_2-l_3|=d^{'}$。

若$d\neq 0$，则点 D 在以 A，C 两点为焦点的双曲线上；若 d=0，则点 D 在直线 AC 的中垂线上，即考虑 A，C 两点的约束时，点 D 的轨迹方程为一次或二次方程。 同理，考虑 B，C 两点的约束时，点 D 的轨迹方程也一次或二次方程。并且显然知这两个方程互不相同。

点 D 的坐标为上方程组的解。由代数基本定理 n 次方程至多有 n 个根，所以上方程组至多有 4 个解。

又$\{d:|l_1-l_3|=d\}\times\{d^{'}:|l_2-l_3|=d^{'}\}$为有限集（实际上有$d_1d_2$个元素），所以点 D 可能的坐标值只有有限个（实际上少于$4d_1d_2$个）。而集合 E 是无穷点集，所以必有无穷个点在直线 AC 或直线 BC 上。利用上引理即得证。

**附注：**上题中点集 E 是无穷点集是不可少的，即对任意有穷点集 E，其中的点可以不在同一条直线上而同时保证任意两点之间的距离都是整数。实际上，设 E 中有 n 个点$M_0,M_1,\ldots M_{n-1}$。用$p_i$表示第 i 个素数，令$M_0M_1=d_1=p_2p_3\ldots p_n$，$M_k$位于直线$M_0M_1$的垂线上，并且$M_1M_k=d_k=\dfrac{(p_2\ldots p_n+p_k^2)}{2p_k}$，(k=2,3,…n-1)即可。