非完全统计量的判别方法

中科大统计系 杜传龙

一、引言：

本文取材于文献[1]中的一道习题：

设总体 $X \sim N(\sigma,\sigma^2)$，$\sigma>0$ 是求知参数，$X=(X_1,\ldots,X_n)$ 是从中抽取的简单样本，试证 $T(X)=(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2)$ 是充分统计量，但不是完全的。

下面的结论给出了一个一般性的而又简洁的否定一个统计量为完全统计量的方法。

二、结论：

设 $\{P_\theta(x),\theta\in\Theta\}$ 为样本空间 (X,β_x) 的分布族，任一 n 维统计量 T(X)，如果存在可测函数 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得 ϕ(T)为非退化的 r.v.，且其分布与参数 θ 无关，则 T（X）不是完全统计量。

证明：不妨记 ξ=ϕ(T(X)).

因为 ξ 非退化，所以存在实数 a，s.t.：

$$P(\xi<a)=p_0\in(0,1)$$

定义函数：

$$g(\xi)=\begin{cases} q_0\ ,\text{若}\ \xi<a \\ -p_0\ ,\text{若}\ \xi\geq a \end{cases}\qquad （其中：\ p_0+q_0=1）$$

则：

$$E_\theta[g(\xi)]=E_\theta[g(\phi(T(X)))]=E_\theta[g\circ\phi(T(X))]=E_\theta[h(T(X))]=0$$

（其中：$h=g^\circ\phi$）

记集合 E={x∈R:h(x)>t}.

① 如果 $t<-p_0$，则 E=R 为可测集

② 如果 $-p_0\leq t<q_0$，则 E={x∈R: $\phi(x)<a$ }. 因为 ϕ 为可测函数，所以 E 为可测集合

③ 如果 $t\geq q_0$，则 E=$\varnothing$ 为可测集

综上知 h 为可测函数。

如果 T(X)是完全统计量，则 h=0，a.e. P_θ. 然而 $h\neq0$，矛盾。所以 T(X)不是完全统计

量。

三、附注：

由充分统计量的意义显然可知，如果统计量T_1是充分的，则对任意统计量T_2，(T_1,T_2)一定是充分的；如果(T_1,T_2)非充分，则T_1和T_2都不充分。对于完全统计量由其定义可知，如果(T_1,T_2)是完全的，则T_1和T_2都是完全的。而由上结论易知，如果统计量T_1是非完全的，则对任意统计量T_2，(T_1,T_2)非完全。

参考文献

[1]数理统计习题集　科大统计与金融专业编 2003年1月，3页