AA 2022-2023 - Metodi del Calcolo Scientifico - Progetto 1 alternativo

Algebra lineare numerica
Mini libreria per sistemi lineari

Descrizione generica

Si utilizzi un linguaggio di programmazione a vostra scelta: c++, fortran, java, pyton, etc. Lo scopo del progetto è quello di implementare una mini libreria che esegua i seguenti solutori iterativi, limitatamente al caso di matrici simmetriche e definite positive:

(1) metodo di Jacobi;

(2) metodo di Gauß-Seidel;

(3) metodo del Gradiente;

(4) metodo del Gradiente coniugato.

Per la gestione della struttura dati e le operazioni elementari fra matrici è richiesto di partire da una libreria *open-source*, come Eigen, Armadillo, blas/lapack. Oppure, qualora il linguaggio di programmazione lo permetta, utilizzare vettori e matrici già implementate al suo interno.

Richieste sulla libreria

Sarà valutato positivamente che la libreria abbia un'architettura e sia ben strutturata, invece che sia una sequenza di funzioni indipendenti le une dalle altre. Inoltre, deve soddisfare i seguenti requisiti:

(a) operare con ognuno dei metodo iterativi (1)-(4) sopra menzionati. A tal proposito la libreria scelta come base deve fornire *solamente* la struttura dati di matrici e vettori NON possono essere utilizzati i metodi relativi alla risoluzione dei sistemi lineari già implementati al suo interno. Per esempio la libreria Eigen contiene già al suo interno l'implementazione del metodo di Jacobi, tale metodo NON è valido ai fini della consegna (tuttavia questi metodi possono essere usati in fase di debug).

(b) i metodi iterativi devono partire dal vettore iniziale nullo (vettore con tutte le entrate pari a zero) e arrestarsi qualora la k-esima iterata $\mathbf{x}^{(k)}$ soddisfa

$$\frac{||A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||} < \texttt{tol}\,,$$

con `tol` tolleranza assegnata dal utente. Oltre a questo controllo sulla soluzione $\mathbf{x}^{(k)}$, i metodi iterativi dovranno avere un controllo sul numero massimo di iterazioni. Più precisamente tutte le routine dovranno arrestarsi (e segnalare di non essere giunte a convergenza) se

$$k > \texttt{maxIter}\,,$$

dove `maxIter` è un numero *molto elevato* a vostra scelta (non inferiore a 20000).

(c) il codice deve avere il formato di un eseguibile che, presi come input:

- una matrice A simmetrica e definita positiva,
- un membro destro $\mathbf{b}$,
- un vettore soluzione esatta $\mathbf{x}$,
- una tolleranza `tol`,

applichi tutti quattro i metodi implementati e riporti su schermo le informazioni sui risultati ottenuti: errore relativo tra la $\mathbf{x}$ esatta e la soluzione computata dal metodo, numero di iterazioni richieste e tempo di calcolo.

La routine di cui sopra va poi applicata alle matrici sparse salvate nei file in allegato: `spa1.mtx`, `spa2.mtx`, `vem1.mtx` e `vem2.mtx`. In particolare si dovrà seguire la procedura standard spiegata a lezione per la validazione dei metodi iterativi e la valutazione dell'errore:

step 1) creare un vettore che rappresenterà la soluzione esatta che ha 1 in ogni entrata, i.e.,

$$\mathbf{x} = [1,\, 1,\, 1,\, \ldots 1]\,,$$

step 2) creare il vettore $\mathbf{b}$ soluzione del sistema

$$\mathbf{b} = A\,\mathbf{x}\,,$$

step 3) calcolare la soluzione approssimata (associata alla matrice A e il dato $\mathbf{b}$) con i *quattro* metodi iterativi,

step 4) calcolare l'errore relativo (tra la soluzione esatta $\mathbf{x}$ e la soluzione approssimata ottenuta col codice), il numero di iterazioni e il tempo di calcolo.

La procedura precedente dovrà essere fatta per diverse scelte dell'input `tol` e utilizzando sempre lo stesso calcolatore. In particolare si dovranno considerare i seguenti valori

$$\texttt{tol} = [10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}]\,.$$

Nota per il formato `.mtx`. Il formato "`.mtx`" è uno standard per lo scambio delle matrici in ambito numerico. È un file ASCII la cui descrizione è riportata nel seguente link

`https://math.nist.gov/MatrixMarket/formats.html`

Inoltre la numerazione delle entrate delle matrici parte da 1.

Esame finale

All'esame finale dovrà essere portato un computer portatile con tutti i codici. Preparare una **breve relazione** che descriva la struttura della libreria, i risultati ottenuti organizzati in tabelle o grafici, e i commenti che pensate ne conseguano. La relazione dovrà essere inviata 3 giorni (=72 ore) prima dell'esame. Potrà essere richiesto di lanciare "on-the-fly" alcuni test su nuove terne $(A, \mathbf{b}, \mathbf{x})$.

Se avete dei dubbi mandate pure una email.