

1 Teoria dei gruppi

1.1 Classificazione delle particelle elementari: le rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincaré

Cosa vuol dire, in una teoria quantistica, che una particella è “elementare”? Perché, a dispetto del principio di sovrapposizione, le particelle elementari hanno massa e spin ben definiti? Perché i fotoni hanno solo due stati di elicità?

La definizione teorica formale è questa: una particella si dice “elementare” se l'insieme dei suoi stati è sede di una rappresentazione irriducibile del gruppo di simmetria dello spazio in cui si trova. Per particelle non relativistiche tale gruppo è quello Euclideo, per particelle relativistiche è il gruppo di Poincaré. Da questi presupposti, è possibile rispondere alle precedenti domande.

Dopo aver acquisito i concetti di rappresentazioni di un gruppo, si applica il metodo delle rappresentazioni indotte al gruppo di Poincaré e si classificano le sue possibili rappresentazioni irriducibili.

Si scopre così, per via puramente algebrica, che una particella elementare deve avere massa e spin ben definiti (come ci è stato detto). Si scopre che i valori di spin possono essere solo semi-interi in dimensioni spaziali maggiori o uguali a 3, ma che possono essere qualunque in dimensione pari a 2. Si scopre anche che, per le particelle a massa nulla, le proiezioni dello spin lungo un asse non possono assumere tutti i valori (quantizzati) intermedi come le particella con massa, ma solo i due valori estremi. Seguendo questa strada si vede inoltre che potrebbero esistere particelle di tipo luce con proprietà molto strane, ma che ancora non si sono osservate. . .

Parole chiave: Teoria dei gruppi. Rappresentazioni. Particelle elementari.

Libro consigliato:

- Wu-Ki Tung, “Group theory in physics” (World Scientific) in particolare il cap.10.

1.2 Classificazione degli adroni:

Le rappresentazioni irriducibili dei gruppi $SU(N)$

L'interazione forte, la più intensa delle forze descritta dal modello standard delle particelle, permette l'esistenza di numerose particelle (chiamate adroni), le cui proprietà si dispongono in una struttura ordinata, per certi versi analoga alle proprietà degli elementi atomici nella tavola periodica.

È sorprendente, ad esempio, che il protone ed il neutrone abbiano massa quasi identica, nonostante siano due particelle totalmente differenti dal punto di vista

elettrico, così come hanno simile massa i pioni carichi e neutri. Ci possiamo aspettare altre particelle con proprietà simili ai nucleoni, o ai pioni?

Il primo modello soddisfacente che ha permesso di descrivere le proprietà più importanti degli adroni assume che questi siano composti da quark di diversi tipi (sapori), tra i quali appunto agisce l'interazione forte che li lega. Assumendo che l'interazione forte sia invariante per un opportuno gruppo di trasformazioni nel "sapore" dei quark, si può mostrare come gli adroni si possano riunire in famiglie (multipletti) di membri con uguale massa e spin, spiegando la natura degli adroni scoperti e prevedendo l'esistenza di quelli non ancora osservati.

Lo strumento chiave per la comprensione di queste strutture è la decomposizione in rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria $SU(N)$ dell'interazione forte sugli stati a due, tre o più quark (e antiquark).

Infine, considerando anche la presenza dell'interazione elettromagnetica che rompe la simmetria dell'interazione forte, è possibile, con metodi perturbativi, dare delle stime approssimate delle differenze di massa tra i membri di un multipletto, ed anche tra i vari multipletti.

Parole chiave: Teoria dei gruppi. Decomposizione in rappresentazioni irriducibili. Particelle adroniche.

Riferimenti consigliati:

- Halzen e Martin: "Quarks and Leptons" (Wiley and Sons) in particolare il cap.2
- Greiner e Mueller: "Quantum Mechanics" vol.2 'Symmetries' (Springer-Verlag) in particolare i capp. 6,7,8,9
- H.F.Jones: "Groups, representations and physics", (Taylor & Francis Group)

2 Meccanica quantistica

2.1 Diffusione in MQ, risonanze e poli di Regge

Quando due particelle vengono fatte interagire in modo opportuno, si possono creare stati metastabili, cioè uno stato quasi legato a lunga vita media, prima del successivo allontanamento delle particelle stesse. In MQ questo fenomeno può essere verificato ed analizzato considerando la diffusione di una particella da parte di un potenziale prevalentemente attrattivo.

In particolare, oltre ad uno studio di carattere generale, si possono prendere in considerazione casi particolari di potenziali in cui si può risolvere analiticamente l'equazione di Schroedinger stazionaria.

Interessante è anche un eventuale simulazione numerica al computer dell'evoluzione di pacchetti d'onda in questi potenziali, che visualizzano chiaramente come il pacchetto resti intrappolato per lungo tempo nella regione in cui è localizzato il potenziale.

Come variante, o ulteriore sviluppo, per gli appassionati di funzioni in campo complesso, ci sarebbe lo studio dei poli di Regge: promuovendo il numero quantico intero l di momento angolare ad una variabile continua complessa, si può osservare che l'ampiezza di diffusione $A(E, l)$ presenta dei poli in l , la cui posizione dipende dall'energia. Per energie negative ($E < 0$) questi poli attraversano valori di l interi in corrispondenza degli stati legati. Per energie positive tali poli non possono trovarsi sull'asse reale, ma se qualche polo si avvicina ad un intero, allora ecco che si presenta una risonanza.

Lo studio dei fenomeni di diffusione è particolarmente adatto a chi è interessato a proseguire nella fisica delle particelle degli acceleratori oppure a fenomeni di diffusione in generale, anche a basse energie.

Parole chiave: Teoria della diffusione. Risonanze. Pacchetti d'onda. Poli di Regge.

Libri consigliati: Molti testi di MQ introducono la teoria della diffusione. Le risonanze sono trattate, p.es. in

- Landau e Lifshitz: "Meccanica Quantistica, teoria non relativistica" (Editori riuniti) al cap. 17
- J.J.Sakurai: "Modern quantum mechanics" (Addison-Wesley) al cap. 7.
- A.Messiah: "Quantum mechanics" (North Holland) al cap. 10.

I poli di Regge sono trattati in

- Landau e Lifshitz: "Meccanica Quantistica, teoria non relativistica" (Editori riuniti) al par. 141.

2.2 L'integrale funzionale di Feynman

L'integrale funzionale (o integrale sui cammini) di Feynman costituisce un'interpretazione profondamente diversa della meccanica quantistica, ed al tempo stesso uno strumento di calcolo fondamentale, specialmente per le teorie di campo quantistiche più moderne.

In sostanza, invece di considerare le ampiezze quantistiche in termini di elementi di matrice di operatori, Feynman rappresenta una data ampiezza come somma (integrale) delle ampiezze corrispondenti a tutte le possibili traiettorie continue classiche,

ove l'ampiezza di ciascuna traiettoria è determinata dall'esponenziale dell'azione classica di quella traiettoria. Un'immediata conseguenza è quella di non fare alcun ricorso a stati e operatori in spazi di Hilbert, limitandosi a grandezze di tipo classico (ma con "somme integrali" non ben definite); un'altra è quella di passare da una formulazione hamiltoniana ad una lagrangiana, covariante a vista nel caso relativistico.

Lo studio dell'integrale funzionale (in MQ) si può sviluppare in diverse direzioni:

1. si possono calcolare gli operatori di evoluzione dei sistemi quantistici più semplici, come la particella libera, l'oscillatore armonico e più in generale i sistemi con lagrangiane quadratiche;
2. si può approfondire dal punto di vista matematico:
 - con la formulazione nello spazio degli stati coerenti, utile anche come introduzione agli spazi di Fock a molte particelle;
 - con la continuazione analitica a tempi immaginari, dove è suscettibile di una buona definizione matematica in termini della misura di Wiener (misura in uno spazio di funzioni continue infinito dimensionale) e diventa strumento applicabile alla meccanica statistica classica;
 - con l'estensione a variabili di Grassmann (numeri con moltiplicazione anticommutativa), preludio alla descrizione di particelle fermioniche in teoria dei campi;
3. il metodo dell'integrale funzionale si applica perfettamente allo studio di fenomeni come:
 - la Fase di Berry;
 - l'effetto Aharonov-Bohm;
 - gli istantoni e l'effetto tunnel attraverso una barriera;

argomenti discussi in altrettante proposte di tesi;

Parole chiave: Integrale funzionale, metodo lagrangiano, stati coerenti, azione euclidea, fase di Berry, effetto Aharonov-Bohm, istantoni, effetto tunnel

Libri consigliati:

- Feynman e Hibbs: "Quantum Mechanics and Path Integrals" (McGraw-Hill)
- Grosche e Steiner: "Handbook of Feynman Path Integrals" (Springer-Verlag) in particolare le prime pagine
- R.Shankar: "Principles of quantum mechanics" (Plenum Press) i capp. 8 e 21.

2.3 L'effetto Aharanov-Bohm

I fenomeni elettromagnetici si possono anche descrivere in termini del potenziale (quadri-)vettore. Un dato campo elettromagnetico però, per invarianza di gauge, può essere descritto da infinite configurazioni di potenziale vettore. Ma allora il potenziale vettore ha una qualche “realtà fisica”?

Aharanov e Bohm hanno escogitato un esperimento di interferenza da una doppia fenditura di particelle cariche. Tra le due fenditure è posto, in una regione praticamente inaccessibile alle particelle, un solenoide che genera un campo magnetico al suo interno, mentre al suo esterno, dove “passano” le particelle, il campo magnetico (ma non il potenziale vettore!) è nullo. La MQ prevede che la presenza del potenziale vettore provochi uno spostamento delle frange di interferenza, cosa inspiegabile se solo il campo magnetico avesse realtà fisica.

Questo fenomeno, che va ai fondamenti della meccanica quantistica, si può affrontare in modo “euristico” semplice, concentrandosi sugli aspetti concettuali, ed eventualmente approfondendo lo studio sperimentale (molto delicato) nel tentativo di dare una risposta concreta al dilemma.

Alternativamente può essere analizzato in dettaglio a livello teorico mediante l'integrale sui cammini di Feynman. Un metodo alternativo di indagine teorica prevede la risoluzione del problema di Schroedinger per una particella carica in presenza di un tubo di campo magnetico, riconducibile ad un problema di diffusione 2-dimensionale da un potenziale esterno. Per chi ha passione di soluzioni esatte, funzioni di Bessel...

Parole chiave: Potenziale vettore, interferenza quantistica, proprietà topologiche

Libri consigliati:

- R.Shankar: “Principles of quantum mechanics” (Plenum Press) in particolare il cap. 18
- Sakurai: “Modern quantum mechanics” (Addison-Wesley) in particolare la sez.2.6 e supplemento 1
- M. Nakahara “Geometry, topology and physics” (Adam Hilger)

2.4 La fase di Berry

In visuale di Schrödinger, un'autostato di un'hamiltoniana indipendente dal tempo non cambia: il suo vettore di stato acquista solamente una fase lineare nel tempo. Se l'hamiltoniana dipende dal tempo ma varia molto lentamente (in un senso da precisare) per poi tornare com'era all'inizio, l'autostato iniziale si ritrova ad essere autostato (con la stessa energia) anche alla fine (teorema adiabatico). Tuttavia,

rispetto alla solita fase dovuta all'integrale dell'energia nel tempo, lo stato ha acquistato una fase aggiuntiva, la cosiddetta "fase di Berry". Questa fase dipende in modo cruciale dalla topologia dello spazio dei parametri da cui l'hamiltoniana dipende, e non dalla dinamica del problema. In altre parole è una fase geometrica, che ha oltretutto conseguenze osservabili, contrariamente a quanto si possa pensare a prima vista.

Questo è un argomento ideale per l'introduzione del concetto dei fasci fibrati nei quali le teorie di gauge si inquadrano nel linguaggio "intrinseco" della geometria differenziale. Per gli appassionati della connessione tra topologia, geometria e fisica.

Parole chiave: invarianti adiabatici, proprietà topologiche, geometria differenziale

Libri consigliati:

- *R.Shankar: "Principles of quantum mechanics" (Plenum Press) in particolare il cap. 18*
- *Sakurai: "Modern quantum mechanics" (Addison-Wesley) in particolare il supplemento 1*
- *M. Nakahara "Geometry, topology and physics" (Adam Hilger)*

2.5 La disuguaglianza di Bell

Una tesi sui fondamenti della MQ. Uno dei postulati fondamentali della MQ afferma che il risultato di una misura è generalmente casuale, e solo la sua probabilità può essere predetta dalla teoria. Questo assunto, per alcuni non è solo sconcertante, ma anche inaccettabile, e fa ritenere che la MQ sia una teoria incompleta, ovvero che esista una teoria sottostante, più fondamentale, che possa spiegare completamente il risultato delle misure.

Einstein è sempre stato tra questi sostenitori, ed ha escogitato esperimenti concettuali, il più famoso con Podolsky e Rosen (paradosso EPR), con l'intenzione di dimostrare l'incompletezza della MQ. I due principi che EPR affermano sono:

1. completezza: una teoria completa deve determinare ogni elemento di realtà (leggi: ogni risultato di misura)
2. località: un evento non può influenzare istantaneamente un altro evento molto distante, in altri termini, non è possibile trasmettere segnali o qualsiasi informazione a velocità superiore a quella della luce.

Su questa base EPR argomentano che la MQ non può essere una teoria completa.

Bell dimostra invece che una teoria basata sui principi di EPR è incompatibile con la MQ. In altri termini, Bell dimostra che: Se esiste una teoria fondamentale che soddisfa i principi EPR, la MQ deve essere in disaccordo con un esperimento ideato da Bell; di converso: Se la MQ è in accordo con l'esperimento ideato da Bell, non può esistere una teoria locale e completa nel senso di EPR. L'esperimento ideato da Bell, e realizzato a partire dagli anni '80, permette di risolvere il dilemma...

Parole chiave: Fondamenti della MQ, paradosso EPR, correlazioni quantistiche, entanglement

Libri, articoli e documenti consigliati:

- Sakurai: "Modern quantum mechanics" (Addison-Wesley) in particolare la sez. 3.9
- J.S.Bell: "On the Einstein Podolski Rosen paradox", *Physics* 1, 195-200 (1964)
- EPR paradox, Bell inequalities
https://ocw.mit.edu/courses/nuclear-engineering/22-51-quantum-theory-of-radiation-interactions-fall-2012/lecture-notes/MIT22_51F12_epr_bell.pdf

2.6 Istantoni in MQ

Pochi sistemi si sanno risolvere esattamente in MQ, e molti problemi sono affrontati con metodi perturbativi. Ci sono però situazioni in cui le caratteristiche essenziali sfuggono all'approccio perturbativo. Un caso paradigmatico è quello di una particella confinata in una doppia buca di potenziale, e si vogliano stimare i livelli energetici e le probabilità di tunneling al variare dell'altezza (molto grande) della barriera tra le due buche.

Continuando analiticamente l'integrale di cammino di Feynman a tempi immaginari, il problema si riconduce al moto di una particella in un potenziale invertito, cioè tra due picchi separati da una valle. L'istantone è una soluzione dell'equazione del moto euclidea con azione finita. L'azione di questo moto è strettamente collegata all'ampiezza di attraversamento della barriera ed alla separazione ΔE dei livelli energetici più bassi del sistema. Queste quantità non hanno uno sviluppo di Taylor in funzione dell'inverso dell'altezza della barriera $x \sim 1/V_0$, bensì una dipendenza esponenziale $\Delta E \sim \exp(-1/\hbar x)$ (\hbar è la costante di Planck).

Questo argomento si presta anche all'analisi semiclassica in termini dell'approssimazione WKB, nonché a studi numeriche per chi è attirato dalle simulazioni al computer.

Parole chiave: Istantoni, effetti non perturbativi, azione euclidea, approssimazione semiclassica

Articoli e documenti consigliati:

- *Instantons in QM*
<http://www.weizmann.ac.il/particle/perez/Courses/QMII16/TA4.pdf>
- *Instantons in QM*
<http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/QFT/instanton2.pdf>
- *QM tutorial to instantons*
<http://www.weizmann.ac.il/particle/perez/Courses/QMII20/TA%205.pdf>

3 Relatività

3.1 Il campo gravitazionale di particelle a massa nulla

Volete sapere qual è il campo gravitazionale prodotto da un fotone? Oppure di un buco nero ultrarelativistico? Si può fare.

Una soluzione esatta delle equazioni di Einstein è rappresentata dal campo gravitazionale, o meglio dalla metrica, generata da una particella di massa nulla. Partendo dalla soluzione di Schwarzschild, con una trasformazione di Lorentz si determina la metrica di una sorgente (con massa) in movimento. Tuttavia il limite $v \rightarrow c$ (a fissa energia $E = mc^2\gamma$) è molto delicato, e richiede un'opportuna analisi fisica e conseguente cambio di coordinate.

Il risultato è un fronte d'onda tutto concentrato su un piano che segue la particella, descritto da una distribuzione a delta di Dirac, ed è perpendicolare alla sua velocità. Nei semispazi delimitati da questo piano lo spazio è piatto, ma quando degli oggetti sono attraversati da questa onda d'urto, le loro relazioni spaziali e temporali sono alterate in modo non lineare. In altre parole, lo spazio-tempo è costituito da due semispazi a metrica piatta, incollati tra loro da un iperpiano in cui i punti alle due facce sono identificati da una mappa non lineare, causa di effetti molto peculiari.

Situazione: un osservatore si trova ad una distanza b dalla traiettoria della particella che genera questo campo. Ad un certo punto è attraversato dall'onda d'urto metrica. Se osserva altri oggetti che si trovano più vicini alla particella, vede che essi rimangono congelati entro il fronte d'onda per un certo tempo, tanto maggiore quanto più vicini alla particella. Se si volta indietro e osserva oggetti più lontani dalla particella, si accorge che sono usciti dal fronte d'onda già da un po', e sono invecchiati più di lui, oltre ad essere stati traslati in direzione longitudinale.

Altra situazione: una famiglia di rette parallele (linee universo di particelle di prova) attraversano il fronte d'onda. Quando escono esse vengono focalizzate verso la traiettoria della particella che genera il campo.

Se a subire l'effetto di questo campo gravitazionale è una particella quantistica di energia piccola rispetto a quella della particella che genera il campo gravitazionale, si può calcolarne esattamente l'ampiezza di diffusione, e dimostrare che, ad altissime energie, l'interazione gravitazionale domina su tutte le altre interazioni note.

Adatto per chi voglia affrontare l'interazione gravitazionale ad altissime energie.

Parole chiave: Particelle ultrarelativistiche, soluzioni esatte dell'eq.di Einstein, distribuzioni, geodetiche, matrice di scattering

Non ci sono libri di testo su questo argomento. Consiglio alcuni articoli per farsi un'idea dell'argomento:

- P.C.Aichelburg e R.U.Sexl: "On the Gravitational Field of a Massless Particle", *Gen. Rel. and Grav.*, Vol. 2, No. 4 (1971).
- T.Dray and G.'t Hooft: "The gravitational effect of colliding planar shells of matter", *Class. Quantum Grav.* 3 825–840 (1986).
- G. 't Hooft: "Graviton dominance in ultra-high-energy scattering", *Phys. Lett. B*198 (1987) 61.
- ed anche la prima parte della tesi di laurea magistrale di Luca Simone Giovanni Betti: "Effective gravitational fields in transplanckian scattering" e-Print: 1411.2523 [hep-th]

3.2 Urto gravitazionale tra particelle ultrarelativistiche

Strettamente connesso con l'argomento precedente, praticamente un suo sviluppo, è l'analisi della diffusione tra due particelle di massa nulla. Per quanto descritto in precedenza, prima dell'istante di massimo avvicinamento delle particelle la situazione fisica è nota esattamente: due fronti d'onda in avvicinamento immersi in uno spazio piatto. Dall'istante in cui questi fronti collidono, non c'è ancora una soluzione esatta, a causa dei fenomeni non lineari della gravità. Si possono però descrivere i destini delle due particelle, dei loro fronti d'onda e di qualsiasi particella di prova in modo approssimato, studiando il comportamento delle geodetiche.

Cercando di "incollare con continuità" la famiglia delle geodetiche che attraversano prima il fronte d'onda proveniente da sinistra con quella delle geodetiche che attraversano prima il fronte proveniente da destra, si possono avere indicazioni sullo spaziotempo futuro alla collisione.

Questo studio può essere svolto sia in modo totalmente analitico, oppure può prevedere una parte di studio numerico al computer del comportamento delle geodetiche.

Parole chiave: diffusione gravitazionale ultrarelativistica, incollamento di mappe, metodi approssimati in relatività generale

Oltre agli articoli ed alla tesi consigliati per il campo gravitazionale di una particella di massa nulla, può essere utile la prima parte dell'articolo:

- *P.D.D'Eath and P.N.Payne: "Gravitational radiation in black-hole collisions at the speed of light", Phys. Rev. D, Vol. 46, No. 2 (1992).*