CORREZIONI VIRTUALI AD $e^+e^- \to$ ADRONI

Ci proponiamo adesso di calcolare le correzioni virtuali al processo $e^+e^- \to q\bar{q}$ al primo ordine perturbativo in α_s.

Dalla formula LSZ si ha

$$M_R = \sqrt{R_{2,e}}^{\,2} \sqrt{R_{2,q}}^{\,2} \left(M^{(0)} + M^{(1)} + \dots \right)$$

residui al polo dei propagatori rinormalizzati

ampiezze troncate

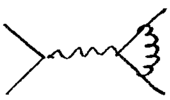
Gli elettroni non si accoppiano direttamente ai quark o ai gluoni, pertanto $R_{2,e} = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$

I quark invece si accoppiano ai gluoni e si ha

$R_{2,q} = 1 + \delta R_2$ con $\delta R_2 = \mathcal{O}(\alpha_s)$; $\delta R_2 = \left.\dfrac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}}\right|_{m_F} - \delta_2$

controtermine $Z_2 - 1$

$M^{(0)} =$ 

$M^{(1)} =$  come unico contributo.

AUTOENERGIA DEL QUARK

$-i\Sigma(\hat{p}) =$  $= C_F\, \Sigma^{QED}(\hat{p})\big|_{e\to g}$

Valutiamo l'autoenergia in regolarizzazione dimensionale, senza imporre una massa λ per il campo di gauge, e trascurando la massa del fermione: $m_R=0$.
Riprendendo il calcolo fatto in QED troviamo, dopo aver parametrizzato con Feynman il prodotto dei denominatori, e dopo aver svolto l'integrale di loop,

$$\Sigma(\hat{p}) = \frac{2C_F g^2}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\underbrace{\Gamma(\varepsilon)}_{\text{polo UV}}(-1+\varepsilon)\,\hat{p}\int_0^1 dx\,(1-x)\left[-x(1-x)p^2-i0\right]^{-\varepsilon}$$

Per $p^2<0$ l'integrale in x si esprime in termini della funzione Beta di Eulero:

$$B(p,q) := \int_0^1 dx\, x^{p-1}(1-x)^{q-1} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx\, x^{-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon} = B(1-\varepsilon,2-\varepsilon) = \frac{1}{2}B(1-\varepsilon,1-\varepsilon) = \frac{1}{2}+\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \Sigma(\hat{p}) = -\frac{C_F\alpha_s}{4\pi}\,\hat{p}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\Gamma(1+\varepsilon)B(1-\varepsilon,1-\varepsilon)(1-\varepsilon)$$

$$= -C_F\frac{\alpha_s}{4\pi}\,\hat{p}\left[\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)+1+O(\varepsilon)\right] =: \hat{p}\,\sigma(p^2)$$

Poiché $\Sigma(\hat{p})\propto\hat{p}$, il quark non riceve correzioni radiative alla massa, cioè possiamo mantenere $m_F=0$ senza neanche aver bisogno del controtermine δm.
In altre parole, se $m_R=0$ e $\delta m=0$

$$G_{R\psi} = i/[\hat{p}-\Sigma(\hat{p})+\delta_2\hat{p}] = \frac{i}{\hat{p}[1+\delta_2-\sigma(p^2)]}$$ ha polo a $\hat{p}=m_F=0$

Rimane da fissare il controtermine δ_2.

- Schema <u>ON-SHELL</u> : richiediamo $G_{2R} = \frac{i}{\hat{p} - m_F} = \frac{i}{\hat{p}}$

$\Rightarrow \delta_2^{os} = \sigma(0) \propto \frac{1}{\varepsilon}(0)^{-\varepsilon}$ mal definito se $\varepsilon > 0$.

Considerando $\varepsilon < 0$ abbiamo $\delta_2^{os} = \sigma(0) = 0$.

Ma allora $G_{2R} = \frac{i}{\hat{p}(1 - \sigma(p^2))}$ contiene la divergenza UV di $\sigma(p^2)$ non compensata da δ_2.

Morale: lo schema on-shell è inconsistente per fermioni di massa nulla

- Schema $\overline{MS}$: scegliamo δ_2 in modo da rimuovere solo il polo $\frac{1}{\varepsilon}$ ed i soliti termini costanti $\ln 4\pi - \gamma$:

$\delta_2^{\overline{MS}} = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right)$. Allora

$G_{R\psi} = i/\hat{p}\left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F\left(1 - \ln\frac{-p^2}{\mu^2}\right)\right]$ è finito per $p^2 \neq 0$,

acquista una parte immaginaria a denominatore per $p^2 > 0$, ma diverge a $p^2 = m_F^2 = 0$!

In realtà ce lo dovevamo aspettare: è la divergenza IR già incontrata, a cui si aggiunge una divergenza collineare poiché $m = 0$.

Regolarizziamo questa divergenza mediante ε, e pensiamo $\varepsilon = \varepsilon_{IR} < 0$, perché è per valori negativi di ε che guadagnamo la convergenza degli integrali divergenti IR.

Abbiamo visto che $\sigma(0)=0$ per $\varepsilon<0$.

Allora $G_{R\psi}^{\overline{MS}}(\hat{p}=m_F) = \dfrac{i}{\hat{p}\,(1+\delta_2^{\overline{MS}})}$

$$\Rightarrow \left(R_\psi^{\overline{MS}}\right)^{-1} = 1+\delta_2^{\overline{MS}} = 1-\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln 4\pi\right) = 1+\frac{\alpha_s}{4\pi}C_F\left(\frac{1}{-\varepsilon_{IR}}+\gamma-\ln 4\pi\right)$$

In pratica, la divergenza IR emerge tramite la sottrazione UV del controtermine.

Un punto di vista alternativo e forse più trasparente si ha considerando $\Sigma(\hat{p})\big|_{p^2=0}$ prima di svolgere l'integrale di loop:

$$\Sigma(\hat{p}) = i(g\mu^\varepsilon)^2 C_F\, 2(1-\varepsilon)\int_0^1 dx \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\, \frac{\overbrace{\hat{k}'}^{\text{dispari}}-(1-x)\hat{p}}{[k'^2+x(1-x)p^2]^2}$$

$$\Sigma(\hat{p})\big|_{p^2=0} = -i(g\mu^\varepsilon)^2 C_F\, 2(1-\varepsilon)\int_0^1 dx\,(1-x)\int\frac{d^D k'}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{k'^4}\,\hat{p}$$

L'integrale in k' diverge sia UV che IR per $D=4$.

L'idea è di spezzare l'integrale in $|k_E| = |(-ik^{0\prime},\vec{k}')|$ in due intervalli: $]0,M]$ e $[M,+\infty[$, e usare $\varepsilon=\varepsilon_{IR}<0$ nel 1° ed $\varepsilon=\varepsilon_{UV}>0$ nel 2°:

$$-i\int\frac{d^D k'}{k'^4} = \int\frac{d^D k_E}{k_E^4} = \int\frac{k_E^{D-1}\,dk_E\,d\Omega^{D-1}}{k_E^4} = \int d\Omega^{D-1}\int_0^\infty dk_E\, k_E^{-1-2\varepsilon}$$

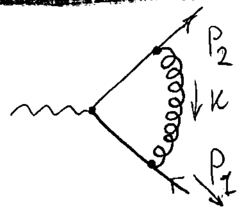
$$= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}\left\{\int_0^M dk\, k^{-1-2\varepsilon_{IR}} + \int_M^\infty dk\, k^{-1-2\varepsilon_{UV}}\right\}$$

$$= \frac{2\pi^{2+\varepsilon}}{\Gamma(2+\varepsilon)}\left\{\frac{M^{-2\varepsilon_{IR}}}{-2\varepsilon_{IR}} - \frac{M^{-2\varepsilon_{UV}}}{-2\varepsilon_{UV}}\right\} = \frac{\pi^{2+\varepsilon}}{\Gamma(2+\varepsilon)}\left\{\frac{1}{-\varepsilon_{IR}} + \cancel{\ln M^2} + \frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \cancel{\ln M^2} + O(\varepsilon)\right\}$$

che dà formalmente zero se identifichiamo $\varepsilon_{IR}=\varepsilon_{UV}$.

Se però rimuoviamo $\frac{1}{\varepsilon_{UV}}$ mediante δ_2, resta $\frac{1}{-\varepsilon_{IR}}$ come detto prima.

CORREZIONE AL VERTICE $(m=0)$

$$-ie\Lambda^\mu = $$  $$= -ie\left(C_F\delta_{c_1c_2}\Lambda^\mu_{QED}\big|_{e\to g}\right)$$

in quanto agli estremi del propagatore del gluone invece di $e\cdot e$ c'è $\quad g\,T^a_{c_1c}\,g\,T^b_{cc_2}\,\delta^{ab} = g^2\left(T^a T^a\right)_{c_1c_2} = g^2 C_F\delta_{c_1c_2}$

Abbiamo un'integrazione sull'impulso virtuale interno $\int d^Dk$, abbiamo 3 propagatori con i rispettivi denominatori che combiniamo in un unico fattore mediante la parametrizzazione di Feynman:

$$\Lambda^\mu = i g^2 C_F\int_0^1 dx\int_1^{1-x}dy\int\frac{d^Dl}{(2\pi)^D}\;\frac{\gamma^\rho\left[(1-y)\hat{p}_2+x\hat{p}_1+\hat{l}\right]\gamma^\mu\left[y\hat{p}_2+(1-x)\hat{p}_1-\hat{l}\right]\gamma_\rho}{\big[l^2+xy\underbrace{2p_1\cdot p_2}_{\to s}+i0\big]^3}$$

in cui abbiamo sostituito $k+yp_2-xp_1=l$ per avere un denominatore della forma $[l^2+A]^3 = [-l_E^2+A]^3$ dopo la rotazione di Wick $l^0 = i l_E^4$.

- Al numeratore, abbiamo termini quadratici in l, responsabili della divergenza UV: $\to \Lambda^\mu_{UV}$
- I termini lineari in l danno contributo nullo all'integrale a causa dell'antisimmetria $l\to -l$ dell'integrando.
- I termini costanti in l danno luogo a un contributo divergente IR (dopo l'integrazione in x, y): $\to \Lambda^\mu_{IR}$

Sfruttiamo $\gamma^\rho\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma_\rho = -2\left[\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha - \varepsilon\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\right]$

$$\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\alpha = -2(1-\varepsilon)\gamma^\mu$$

- Λ^μ_{UV}: usiamo $\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{l_\alpha l_\beta}{[l^2+A+i0]^3} = g_{\alpha\beta} \frac{i\, i\; \Gamma(2-\frac{D}{2})}{2(4\pi)^{D/2}\Gamma(3)} (-A-i0)^{\frac{D}{2}-2}$

$$\Lambda^\mu_{UV} = C_F \gamma^\mu (g\mu^\varepsilon)^2 \frac{(4\pi)^\varepsilon}{8\pi^2} \Gamma(\varepsilon)(1-\varepsilon)^2(-s-i0)^{-\varepsilon} \int_0^1 dx\, x^{-\varepsilon} \underbrace{\int_0^{1-x} dy\, y^{-\varepsilon}}_{\frac{(1-x)^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}}$$

$$= \gamma^\mu \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_{UV}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-s}\right)^\varepsilon (1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)\, B(1-\varepsilon, 2-\varepsilon) = \gamma^\mu \delta F_1^{UV,\Lambda}$$

presenta un polo $\frac{1}{\varepsilon}$ di origine UV.

- Λ^μ_{IR}: usiamo $\int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[l^2+A+i0]^3} = \frac{-i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-\frac{D}{2})}{\Gamma(3)} (-A-i0)^{\frac{D}{2}-3}$

In questo termine la struttura di Dirac è più complessa, e ci conviene includere gli spinori on-shell $\bar{u}_2$, v_1:

$$\bar{u}_2 \Lambda^\mu_{IR} v_1 = -\frac{2g^2 C_F (4\pi\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^2} (-s)^{-1-\varepsilon}\, \Gamma(1+\varepsilon) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\; f(x,y)(xy)^{-1-\varepsilon}$$

ove
$$f(x,y) = \bar{u}_2[y\cancel{\hat{p}_2} + (1-x)\hat{p}_1]\gamma^\mu[(1-y)\hat{p}_2 + \cancel{x\hat{p}_1}]v_1$$
$$- \varepsilon \bar{u}_2[(1-y)\cancel{\hat{p}_2} + x\hat{p}_1]\gamma^\mu[y\hat{p}_2 + \cancel{(1-x)\hat{p}_1}]v_1$$

$$= [(1-x)(1-y) - \varepsilon xy]\, \underbrace{\bar{u}_2 \hat{p}_1 \gamma^\mu \hat{p}_2 v_1} \qquad (p_2 = q - p_1)$$

$$\bar{u}_2(\hat{q} - \cancel{\hat{p}_2})\gamma^\mu(\hat{q} - \cancel{\hat{p}_1})v_1 = \bar{u}_2[\{\hat{q},\gamma^\mu\}\hat{q} - \gamma^\mu \hat{q}^2]v_1$$

$$= 2q^\mu \bar{u}_2 \cancel{(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)} v_1 - q^2 \bar{u}_2\gamma^\mu v_1 = -s\, \bar{u}_2 \gamma^\mu v_1$$

$$\Rightarrow \delta F_1^{IR,\Lambda} = -\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-s}\right)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, [(1-x)(1-y) - \varepsilon xy](xy)^{-1-\varepsilon}}_{\frac{1}{2} B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\varepsilon^2_{IR}} + 1\right)}$$

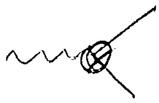
in cui è evidenziata la natura IR del polo (doppio!)

A differenza di quanto accade nella correzione al vertice per fermioni con massa $m \neq 0$, in cui si trova un polo semplice IR, quando $m=0$ si trova un polo doppio, dovuto alla sovrapposizione di singolarità soffici ($K \to 0$) e collineari ($K \parallel P_1, P_2$). Lo vedremo meglio nel calcolo dell'emissione reale.

Mettendo assieme $\Lambda^\mu_{IR} + \Lambda^\mu_{UV}$ troviamo correzioni al solo fattore di forma F_1 : $F_2 = 0$ se $m=0$.

$$\delta F_1^\Lambda(q^2 = s) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{-s}\right)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon)\, B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon) \left[-\frac{2}{\varepsilon_{IR}^2} + \frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 2\right]$$

Per ottenere la correzione al vertice completa, rimane da aggiungere a δF_1 il contributo del controtermine di vertice


$= -ie\gamma^\mu \delta_1^{QCD}$ ove $Z_1^{QCD} = 1 + \delta_1^{QCD}$

$$\Rightarrow \delta F_1(q^2) = \delta F_1^\Lambda(q^2) + \delta_1^{QCD}$$

Nello schema $\overline{MS}$, δ_1^{QCD} elimina la divergenza UV e alcuni termini finiti:

$$\delta_1^{QCD, \overline{MS}} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma + \ln 4\pi\right]$$