# Esame di Applicazioni di Meccanica Quantistica

Prova scritta del 13/12/2006

## Problema 1

Una particella di massa $m$ e carica $q$ si trova in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ uniforme, costante e diretto lungo l'asse $z$.

a) Si consideri l'operatore velocità $\boldsymbol{v}$ definito da

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right),$$

dove $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ è il potenziale vettore. Si calcolino i commutatori fra le tre componenti $v_1$, $v_2$ e $v_3$.

b) Si consideri in particolare il moto nel piano $xy$, descritto dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}m\,(v_1^2 + v_2^2).$$

Dal risultato della domanda a) si vede che le componenti $v_1$ e $v_2$, con opportuni fattori, si possono identificare con una coppia di variabili canoniche coniugate, in modo che la hamiltoniana assuma la forma di quella di un oscillatore armonico unidimensionale. Si trovino allora gli autovalori dell'energia.

## Problema 2

Un elettrone in un atomo d'idrogeno si trova per $t < 0$ nello stato $n = 2$, $l = 1$, $j = \frac{1}{2}$, $m_j = +\frac{1}{2}$, e per $t > 0$ viene sottoposto a un campo elettrico omogeneo diretto lungo l'asse $z$ e variabile col tempo secondo la legge

$$E_z(t) = E_0 e^{-\gamma t},$$

con $\gamma$ costante positiva.

a) Si dica verso quali stati si possono avere transizioni al primo ordine perturbativo.

b) Si calcoli l'ampiezza di probabilità di transizione al primo ordine verso lo stato fondamentale per $t \to +\infty$.

## Problema 3

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ e rapporto giromagnetico $g$ è posta in un campo magnetico $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1(t)$, dove $\boldsymbol{B}_0$ è un campo omogeneo, costante e diretto lungo l'asse $z$, mentre $\boldsymbol{B}_1$ è un campo più debole, diretto lungo l'asse $x$ e la cui componente $B_1$ dipende dal tempo secondo la legge

$$B_1(t) = A\,e^{-\alpha^2 t^2},$$

dove $A$ e $\alpha$ sono costanti reali.

Se per $t \to -\infty$ la particella si trova nello stato di spin $s_z = +\frac{1}{2}$, si calcoli la probabilità di transizione verso lo stato con $s_z = -\frac{1}{2}$ per $t \to +\infty$ all'ordine perturbativo più basso in $\boldsymbol{B}_1$.

$H_1 = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ $\qquad$ $\vec{\mu} = g\,\vec{S}\,\mu_B$

$= -g\mu_B\,\vec{S}\cdot\vec{B}$