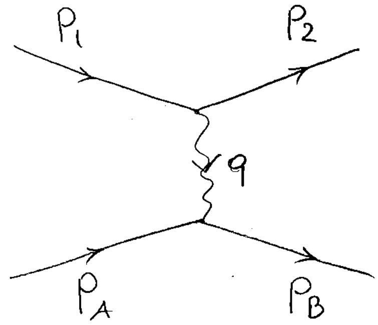
1) Sezione d'urto $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$ LO in $D = 4 - 2\varepsilon$



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} \overline{|\mathcal{M}|^2}\, d\Phi_f$$

$$\mathcal{F} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_A|\, 2E_1\, 2E_A = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_A)^2 - m_1^2 m_A^2}$$

$$d\Phi_f = (2\pi)^D \delta^D(p_1 + p_A - p_2 - p_B)\, d\tilde{p}_2\, d\tilde{p}_B$$

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_2, n_2)(-ie\gamma^\mu) u(p_1, n_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i0} \bar{u}(p_B, n_B)(-ie\gamma^\nu) u(p_A, n_A)$$

Invarianti di Mandelstam:

$$s = (p_1 + p_A)^2 = m^2 + M^2 + 2 p_1 \cdot p_A = (p_2 + p_B)^2$$
$$t = (p_1 - p_2)^2 = 2m^2 - 2 p_1 \cdot p_2 = (p_A - p_B)^2 = q^2$$
$$u = (p_1 - p_B)^2 = m^2 + M^2 - 2 p_1 \cdot p_B = (p_A - p_2)^2$$

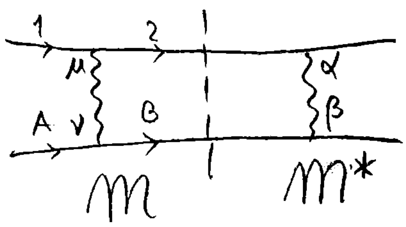
$$s + t + u = \sum_i m_i^2 = 2m^2 + 2M^2$$

$$\sum_n u(p,n)\bar{u}(p,n) = \hat{p} + m$$

$$(\bar{u}_2 \gamma^\mu u_1)^\dagger = u_1^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0^\dagger u_2 = \underbrace{u_1^\dagger \gamma^0}\, \underbrace{\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0}\, u_2 = \bar{u}_1 \gamma^\mu u_2$$

Elemento di matrice quadrato sommato (mediato) sulle polarizzazioni degli spinori:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} := \frac{1}{4} \sum_{n_1 n_2 n_A n_B}$$



$$= \frac{1}{4} \sum_{n_i} e^2\, \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1\, \bar{u}_1 \gamma^\alpha u_2\, \frac{g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}}{(q^2)^2}\, e^2\, \bar{u}_B \gamma^\nu u_A\, \bar{u}_A \gamma^\beta u_B$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\frac{e^4}{(q^2)^2} L^{\mu\nu}(p_1,p_2)\, L_{\mu\nu}(p_A,p_B)$$

$$L^{\mu\nu}(p_1,p_2) = \mathrm{Tr}\left[(\hat{p}_2+m)\gamma^\mu(\hat{p}_1+m)\gamma^\nu\right] = \mathrm{Tr}\left[\hat{p}_2\gamma^\mu\hat{p}_1\gamma^\nu\right] + m^2\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right]$$

$$= p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1\cdot p_2\, g^{\mu\nu} + 4m^2 g^{\mu\nu}$$

Esercizio : $q_\mu L^{\mu\nu} = 0$

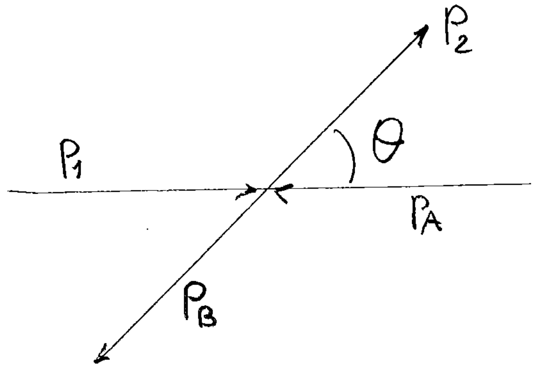
$$\frac{1}{4} L^{\mu\nu}(p_1,p_2)\, L_{\mu\nu}(p_A,p_B) = (s-u)^2 + 4(m^2+M^2)t + (\overbrace{D}^{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}-3)t^2$$

EX $D=4, \quad m=0=M$ $\qquad t = -s\,\frac{1-\cos\theta_{CM}}{2} = -s\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4t^2}\left[(2s+t)^2+t^2\right] = e^2\,\frac{1-\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sen}^4\frac{\theta}{2}}{\mathrm{sen}^4\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2s}$$

$$d\Phi_2 = \frac{1}{8\pi}\frac{d\Omega}{4\pi} \qquad d\Omega \rightarrow \mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$$



E si trova la sezione d'urto di Rutherford con correzioni quantistiche e relativistiche dovute allo spin.

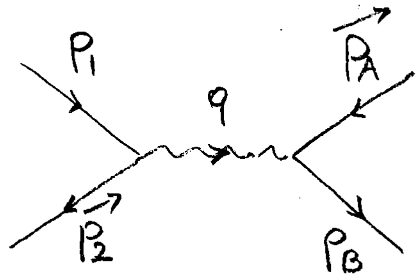
EX $\qquad$ CROSSING $\qquad p_2 \rightarrow -p_2$; $p_A \rightarrow -p_A$

$s \leftrightarrow t$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{4s^2}\left[(2t+s)^2+s^2\right]$$

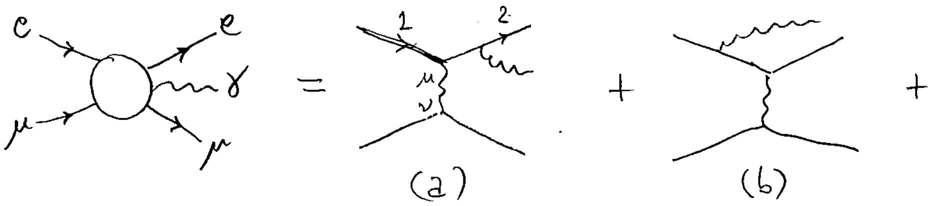
$$= \frac{e^4}{4}\left[1+\cos^2\theta\right]$$

$t = -s\,\frac{1-\cos\theta}{2}$; $\theta = \widehat{\vec{p}_1\,\vec{p}_A}$



Emissione di fotoni soffici: corrente di Weinberg

Consideriamo l'ampiezza $e^-\mu^- \to e^-\mu^-\gamma$



$+$ 2 grafici di emissione dalla linea μ-onica

$$(a):\ \bar u_2(-ie\gamma^\mu)u_1 \to \bar u(p_2)(-ie\gamma^\alpha)\overset{*}{\varepsilon}_\alpha(k)\,\frac{i(\hat p_2+\hat k+m)}{(p_2+k)^2-m^2+i0}\,(-ie\gamma^\mu)u(p_1)$$

Il propagatore del fotone virtuale e la linea μ-onica restano invariate

Approssimazione soffice: $\omega_k \ll m, \sqrt{s}, \sqrt{-t}, \sqrt{-u}$

Più rigorosamente: studiamo il limite $k^\mu = \underline{k}^\mu\cdot\xi\ :\ \xi\to 0$

Nel propagatore interno dell'elettrone

$$\frac{\hat p_2+\hat k+m}{(p_2+k)^2-m^2+i0} = \frac{\hat p_2+\hat k+m}{2p_2\cdot k+k^2+i0} \simeq \frac{\hat p_2+m}{2p_2\cdot k+i0}$$

$$\bar u(p_2)\gamma^\alpha(\hat p_2+m) = \bar u(p_2)\Big(\underbrace{-\hat p_2\gamma^\alpha}_{-m\gamma^\alpha} + \underbrace{\{\gamma^\alpha,\gamma^\beta\}}_{2g^{\alpha\beta}}p_{2\beta} + m\gamma^\alpha\Big) = \bar u(p_2)\,2p_2^\alpha$$

Rimane $\bar u_2(-ie\gamma^\mu)u_1 \cdot e\,\dfrac{p_2^\alpha\overset{*}{\varepsilon}_\alpha(k)}{p_2\cdot k+i0}$ → fattore di emissione soffice da fermione uscente

〃 entrante

$$(b):\ \bar u(p_2)(-ie\gamma^\mu)\,\frac{i(\hat p_1-\hat k+m)}{(p_1-k)^2-m^2+i0}\,(-ie\gamma^\alpha)\overset{*}{\varepsilon}_\alpha(k)u(p_1)$$

$$\simeq \bar u_2(-ie\gamma^\mu)\ e\,\frac{\hat p_1+m}{-2p_1\cdot k+i0}\gamma^\alpha u_1\,\overset{*}{\varepsilon}_\alpha = \bar u_2(-ie\gamma^\mu)u_1\cdot -e\,\frac{p_1^\alpha\overset{*}{\varepsilon}_\alpha(k)}{p_1\cdot k-i0}$$

Quindi l'ampiezza di emissione di un fotone soffice da parte della linea elettronica si fattorizza nell'ampiezza senza emissione per una "corrente":

$$\mathcal{M}_{e\mu\to e\mu\gamma} = \mathcal{M}_{e\mu\to e\mu}\cdot \underbrace{e\left(\frac{P_2^\alpha}{P_2\cdot K+i0}-\frac{P_1^\alpha}{P_1\cdot K-i0}\right)\overset{*}{\mathcal{E}}_\alpha(K,\lambda)}_{J^\alpha(K)\,\overset{*}{\mathcal{E}}_\alpha(K,\lambda)\,=:\,J_{K\lambda}\,\sim\,\frac{1}{\omega_K}} + \mathcal{O}(\omega_K^0)$$

che è proprio la TdF della corrente classica.

c)+d) Lo stesso ragionamento si ripete per l'emissione dalle gambe μ-onica.

NOTA Se nel diagramma di Feynman ci sono particelle cariche virtuali ($P_i^2 \neq m_i^2$) il fotone può essere emesso anche da quelle, ma nel limite soffice $\omega_K \to 0$ il contributo all'ampiezza non cresce con $\frac{1}{\omega_K}$:

$$\frac{\hat{P}_i+\hat{K}+m_i}{(P_i+K)^2-m_i^2} = \frac{\hat{P}_i+\hat{K}+m_i}{P_i^2-m_i^2+2P_i\cdot K+K^2} \simeq \frac{\hat{P}_i+m_i}{P_i^2-m_i^2} \sim \mathcal{O}(\omega_K^0)$$

Nel limite soffice solo l'emissione dalle gambe esterne (che durano un tempo infinito: $\omega \sim \frac{1}{T} \to 0$) dà un contributo dominante $\sim 1/\omega_K$.

$$\mathcal{M}^{(n+1)}(P_1\cdots P_n, K\lambda) = \mathcal{M}^{(n)}(P_1\cdots P_n)\cdot \boxed{\sum_{\ell=1}^{n} Q_\ell \eta_\ell \frac{P_\ell^\alpha}{P_\ell\cdot K+i\eta_\ell 0}}\;\overset{*}{\mathcal{E}}_\alpha + \mathcal{O}(\omega_K^0)$$

$\to J_W^\alpha(K)$

Corrente di Weinberg

$\eta = \begin{cases} +1 & \text{uscenti} \\ -1 & \text{entranti} \end{cases}$

- La corrente di Weinberg è <u>conservata</u>:

$$K_\alpha J^\alpha(K) = \sum_{l=1}^{n} Q_l \eta_l \frac{P_l \cdot K}{P_l \cdot K} = \sum_{l \text{ uscenti}} Q_l - \sum_{l \text{ entranti}} Q_l = 0$$

$\Rightarrow J^\alpha \varepsilon_\alpha$ non dipende dalla scelta di gauge:

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \partial_\alpha \chi \Rightarrow \varepsilon_\alpha \to \varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha + C K_\alpha \Rightarrow J^\alpha \varepsilon_\alpha = J^\alpha \varepsilon'_\alpha$$

- La fattorizzazione per le ampiezze con emissioni soffici vale per particelle di spin arbitrario.

<u>EX</u> $\boxed{\text{Gravità}}$ (spin 2)

$$\mathcal{M}^{(n+1)}(p\dots, K\lambda) \simeq \mathcal{M}^{(n)}(p\dots) \cdot J_W^{\alpha\beta}(K)\, \varepsilon_{\alpha\beta}(K,\lambda)$$

$$J_W^{\alpha\beta}(K) = \sum_{l=1}^{n} \eta_l \frac{P_l^\alpha P_l^\beta}{P_l \cdot K} \qquad \begin{matrix} \text{QED} & & \text{GR} \\ Q_l & \longrightarrow & P_l^\mu \end{matrix}$$

$$J_W^{\alpha\beta} K_\beta = \sum_{l=1}^{n} \eta_l P_l^\alpha \frac{P_l \cdot K}{P_l \cdot K} = \sum_{l \text{ uscenti}} P_l^\alpha - \sum_{l \text{ entranti}} P_l^\alpha$$

<u>conservata</u> se si conserva il 4-impulso.
(Motivo che K^α non contribuisce perchè $K^\alpha \to 0$).

- Non abbiamo supposto che il fotone fosse reale ($K^2=0$)
Quindi la fattorizzazione è <u>valida</u> anche per emissioni soffici <u>VIRTUALI</u> (lo useremo più avanti)

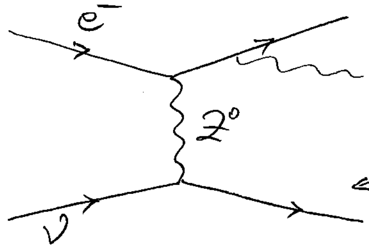
- La formula vale anche per particelle con massa (piccola) $K^2 = \lambda^2$, nella regione $\lambda^2 \ll P \cdot K$.

Integriamo il modulo quadro dell'ampiezza di produzione del fotone sullo spazio delle fasi del fotone

$\boxed{Hp}$ Per semplificare la trattazione supponiamo che il fotone sia emesso dalla sola gamba e^-.

Questa situazione corrisponde p.es. ad una reazione

$\nu e^- \to \nu e^- \gamma$



neutro, non emette fotoni

$$d\Phi_3 = (2\pi)^D \delta^D(P_1+P_A-P_2-P_B-K)\, d\tilde{P}_2\, d\tilde{P}_B\, d\tilde{k} \qquad (K \text{ soft})$$

$$\simeq d\Phi_2\, d\tilde{k}$$

$$\Rightarrow d\sigma_{2\to 2+\gamma} = \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{1}{4} \sum_{pol} |\mathcal{M}_{2\to 2+\gamma}|^2 d\Phi_3$$

$$\simeq \underbrace{\frac{1}{\mathcal{F}} \frac{1}{4} \sum_{\substack{pol\\ fermioni}} |\mathcal{M}_{2\to 2}|^2 d\Phi_2}_{d\sigma_{2\to 2}} \; \underbrace{\sum_{\lambda} |J_{\omega}^{\alpha} \varepsilon^*_{\alpha}(k,\lambda)|^2 d\tilde{k}}_{K_R}$$

K_R fattore moltiplicativo dovuto all'emissione reale, integrando in $\omega_k < \Delta$

$$\sum_\lambda \mathcal{E}^*_\alpha(k\lambda)\,\mathcal{E}_\beta(k\lambda) = -g_{\alpha\beta} + \text{termini con } k_\alpha \text{ o } k_\beta$$

$$\Rightarrow \sum_\lambda |\tilde{J}_{k\lambda}|^2 = -\tilde{J}^\alpha \tilde{J}_\alpha = e^2\left[\frac{2\,P_1\cdot P_2}{(P_1\cdot k)(P_2\cdot k)} - \frac{m^2}{(P_1\cdot k)^2} - \frac{m^2}{(P_2\cdot k)^2}\right]$$

$$= \frac{e^2}{\omega_k^2}\left[\frac{2(1-\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2)}{(1-\vec{v}_1\cdot\hat{k})(1-\vec{v}_2\cdot\hat{k})} - \frac{m^2/E_1^2}{(1-\vec{v}_1\cdot\hat{k})^2} - \frac{m^2/E_2^2}{(1-\vec{v}_2\cdot\hat{k})^2}\right]$$

$$\int d\tilde{k}\,\Theta(\Delta-\omega_k) = \int_0^\Delta \frac{d\omega_k\,\omega_k^2\,d\Omega(\hat{k})}{(2\pi)^3\,2\omega_k} \Rightarrow \text{DIVERGENZA SOFFICE} \quad \int_0 \frac{d\omega_k}{\omega_k}$$

REGOLARIZZIAMO introducendo una MASSA $\boxed{\lambda > 0}$ per il fotone.

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2+\lambda^2} \in [\lambda, \Delta]$$

$$\Rightarrow K_R(\Delta,\lambda) = \underbrace{\int_\lambda^\Delta \frac{d\omega}{\omega}}_{\ln\frac{\Delta}{\lambda}}\ \underbrace{\frac{e^2}{(2\pi)^2}}_{\frac{\alpha}{\pi}}\ \underbrace{\int \frac{d\Omega(\hat{k})}{4\pi}\left[v_1,v_2,\hat{k}\right]}_{I(\vec{v}_1,\vec{v}_2)}$$

In QED troviamo una <u>sezione</u> d'urto divergente per l'emissione di fotoni soffici!

CALCOLO DI $I(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$

- $$\int \frac{d\Omega}{4\pi}\frac{m^2/E_1^2}{(1-\vec{v}_1\cdot\hat{k})^2} = (1-v_1^2)\int_{-1}^1 \frac{d\cos\theta}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\frac{1}{(1-v_1\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1-v_1^2}{2}\int_{-1}^1 dc\,\frac{1}{(1-v_1c)^2} = \frac{1-v_1^2}{2}\,\frac{1}{v_1}\left[\frac{1}{1-v_1c}\right]_{c=-1}^{c=1} = \frac{1-v_1^2}{2v_1}\left(\frac{1}{1-v_1}-\frac{1}{1+v_1}\right) = 1$$

- Idem quello per la particella 2

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{2P_1\cdot P_2}{(P_1\cdot \frac{K}{\omega})(P_2\cdot\frac{K}{\omega})} = 2P_1\cdot P_2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^1 dx \left\{ x P_1\cdot\frac{K}{\omega} + (1-x) P_2\cdot\frac{K}{\omega}\right\}^{-2}$$

Pongo $A^\mu = x P_1^\mu + (1-x) P_2^\mu$

$$D = \{\ \} = xE_1 + (1-x)E_2 - \left[x\vec{P}_1\cdot\hat{k} + (1-x)\vec{P}_2\cdot\hat{k}\right] = A^0 - \vec{A}\cdot\hat{K} = A^0 - |\vec{A}|\cos\theta$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta}{2} \frac{1}{[A^0 - |\vec{A}|\cos\theta]^2} = \frac{1}{(A^0)^2 - \vec{A}^2} = \frac{1}{A^\mu A_\mu}$$

$$\Rightarrow 2P_1\cdot P_2 \int_0^1 dx\ 1/[xP_1 + (1-x)P_2]^2 = \left(x = \frac{1+t}{2}\ ;\ \sigma = P_1+P_2 ;\ \delta = P_1 - P_2\right)$$

$$= 4P_1\cdot P_2 \int_{-1}^{1} dt\ 1/[\sigma + t\delta]^2 = 4P_1\cdot P_2 \int_{-1}^{1} dt\ \left[\delta^2 t^2 + 2\sigma\cdot\delta t + \sigma^2\right]^{-1}$$

$$= \frac{4P_1\cdot P_2}{\delta^2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t-t_1)(t-t_2)} \qquad \text{ove } t_{1,2} = \frac{-\sigma\cdot\delta \pm\sqrt{(\sigma\cdot\delta)^2 - \sigma^2\delta^2}}{\delta^2}$$

$$= \frac{4P_1\cdot P_2}{\delta^2(t_1-t_2)} \cdot \ln\left(\frac{1-t_1}{1-t_2}\cdot\frac{1+t_2}{1+t_1}\right)$$

La formula è invariante di Lorentz!

Valutiamola nel SDR con P_1 a riposo: $P_1 = m_1(1,\vec{0})$

$P_2 = m_2\gamma(1,\vec{\beta}_{12})$

$$\longrightarrow \frac{1}{\beta_{12}} \ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$$

velocità relativa

$$\Rightarrow I(\vec{v}_1,\vec{v}_2) = \frac{1}{\beta_{12}}\ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} - 2$$

NOTA: $\vec{v}_2 \to \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \beta_{12}\to 0 \quad \Rightarrow \ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} \to 2\beta_{12}$

$$\Rightarrow I(v_1,v_1) = 0$$