

# Indice

<b>1</b>	<b>La funzione esponenziale complessa</b>	<b>1</b>
1.1	Riassunto sui numeri complessi . . . . .	1
1.2	Richiami di topologia . . . . .	7
1.3	Serie di potenze . . . . .	10
1.4	Le serie di potenze come serie di funzioni . . . . .	14
1.4.1	Convergenza negli spazi di funzioni . . . . .	14
1.4.2	Operazioni elementari con le serie di potenze . . . . .	18
1.4.3	Derivazione di serie di potenze . . . . .	19
1.4.4	Integrazione di serie di potenze . . . . .	22
1.5	La funzione esponenziale complessa . . . . .	23
1.5.1	Considerazioni generali . . . . .	23
1.5.2	Definizione dell'esponenziale complesso . . . . .	24
1.5.3	Le funzioni trigonometriche complesse . . . . .	26
<b>2</b>	<b>La serie e la trasformata di Fourier</b>	<b>29</b>
2.1	Preambolo: equazioni differenziali a coefficienti costanti . . . . .	29
2.2	Equazione di d'Alembert e onde stazionarie . . . . .	31
2.3	Serie di Fourier . . . . .	36
2.3.1	Teoremi ulteriori sulle serie di Fourier . . . . .	43
2.4	Cenni all'integrale di Lebesgue . . . . .	44
2.4.1	Preliminari . . . . .	45
2.4.2	Definizione dell'integrale di Lebesgue . . . . .	46
2.4.3	Alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue . . . . .	48
2.4.4	Gli spazi $L^p$ ed $\mathcal{L}^p$ . . . . .	50
2.5	La trasformata di Fourier in $L^1$ . . . . .	51
2.5.1	L'antitrasformata di Fourier . . . . .	57
2.5.2	Il prodotto di convoluzione . . . . .	59
2.6	Alcune applicazioni . . . . .	61
2.6.1	I filtri lineari . . . . .	61
2.6.2	Il teorema della campionatura . . . . .	62
2.6.3	L'equazione del calore . . . . .	63
2.7	La trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	65
2.7.1	Il paradiso degli integrali di Fourier: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Strutture topologiche, metriche, vettoriali</b>	<b>73</b>
3.1	Richiami sulle strutture topologiche . . . . .	73
3.1.1	Continuità . . . . .	73
3.1.2	Densità e separabilità . . . . .	74
3.1.3	Compattezza . . . . .	75
3.1.4	Estensioni continue . . . . .	77
3.1.5	Completamento di uno spazio metrico . . . . .	79
3.2	Spazi vettoriali . . . . .	83
3.2.1	Sottospazi vettoriali . . . . .	84
3.2.2	Dipendenze lineari e basi . . . . .	85
3.2.3	Somme dirette . . . . .	87
3.2.4	Spazi normati . . . . .	88
3.2.5	Serie infinite di vettori . . . . .	90
3.2.6	Complementi sugli spazi $\mathbf{L}^p$ . . . . .	91
3.2.7	Gli spazi $\mathbf{l}^p$ . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Spazi di Hilbert</b>	<b>95</b>
4.1	Spazi prehilbertiani . . . . .	95
4.2	Ortogonalità . . . . .	101
4.3	Sistemi ortonormali . . . . .	105
4.3.1	Polinomi ortogonali . . . . .	114
4.3.2	La trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^2$ . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Operatori</b>	<b>121</b>
5.1	Applicazioni lineari tra spazi vettoriali . . . . .	121
5.2	Applicazioni lineari tra spazi normati . . . . .	124
5.2.1	Norma operatoriale . . . . .	126
5.2.2	Convergenza di operatori . . . . .	128
5.2.3	Estensione continua di applicazioni continue . . . . .	131
5.2.4	Serie operatoriali . . . . .	132
5.3	Operatori in spazi di Hilbert . . . . .	136
5.3.1	Il teorema di Fischer-Riesz . . . . .	136
5.3.2	Aggiunto di un operatore continuo . . . . .	138
5.3.3	Aggiunto di un operatore non limitato . . . . .	140
5.3.4	Operatori autoaggiunti . . . . .	142
5.3.5	Proiettori . . . . .	146
5.3.6	Operatori isometrici ed unitari . . . . .	150
5.3.7	Operatori chiusi . . . . .	153
5.3.8	L'aggiunto dell'operatore di derivazione . . . . .	154

<b>6</b>	<b>Elementi di teoria spettrale</b>	<b>159</b>
6.1	Rappresentazione spettrale in spazi vettoriali di dimensione finita . . . . .	159
6.2	Autovalori per operatori in dimensione infinita . . . . .	163
6.2.1	Autovalori per l'operatore $\mathbf{X}$ . . . . .	163
6.2.2	Autovalori per l'operatore $\mathbf{P}$ . . . . .	164
6.2.3	Lo spettro . . . . .	164
6.3	L'operatore risolvente . . . . .	165
6.3.1	Lo spettro degli operatori $\mathbf{X}$ , $\mathbf{P}$ e $\mathbf{L}_z$ . . . . .	168
6.4	Ricerca di autovettori generalizzati . . . . .	170
6.4.1	Autovettori generalizzati per l'operatore $\mathbf{P}$ . . . . .	170
6.4.2	Autovettori generalizzati per l'operatore $\mathbf{X}$ . . . . .	171
6.5	Distribuzioni . . . . .	172
6.5.1	Le distribuzioni temperate . . . . .	173
6.5.2	Le distribuzioni regolari . . . . .	176
6.5.3	La convergenza debole . . . . .	179
6.6	Spazi di Hilbert equipaggiati . . . . .	180
6.6.1	Operatori in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Forme differenziali</b>	<b>185</b>
7.1	Il differenziale . . . . .	185
7.2	Forme differenziali . . . . .	187
7.3	Integrazione su cammini . . . . .	192
7.4	Omotopia tra circuiti . . . . .	197
<b>8</b>	<b>Funzioni di una variabile complessa</b>	<b>201</b>
8.1	Funzioni olomorfe . . . . .	201
8.2	Integrazione complessa . . . . .	207
8.3	Logaritmo complesso . . . . .	211
8.4	Potenze complesse . . . . .	213
8.5	Analiticità delle funzioni olomorfe . . . . .	214
8.6	Principio di identità delle funzioni olomorfe . . . . .	217
8.7	Serie di Laurent . . . . .	219
8.8	Teorema dei residui . . . . .	223
8.8.1	Calcolo dei residui . . . . .	224
8.9	Calcolo di integrali definiti con il metodo dei residui . . . . .	225
<b>9</b>	<b>La trasformata di Laplace</b>	<b>235</b>
9.1	Introduzione . . . . .	235
9.2	Definizione della trasformata di Laplace . . . . .	236
9.3	Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	237
9.3.1	Convoluzione e sua trasformata di Laplace . . . . .	239
9.4	Inversione della trasformata di Laplace . . . . .	240

Date: 2021-02-05 00:03 +0100

Revision: 317 : a198ef63a6bd

## Definizioni e simboli

- $:=$  indica “uguale per definizione”
- $\cong$  indica equivalenza (a seconda del contesto), oppure isomorfismo tra strutture.
- $\mathbb{N}$  indica l'insieme dei numeri naturali,  $\mathbb{Z}$  gli interi (positivi e negativi),  $\mathbb{Q}$  i razionali,  $\mathbb{R}$  i reali,  $\mathbb{C}$  i complessi,  $\mathbb{I}$  gli immaginari,  $\mathbb{U}$  gli unitari. Gli stessi insiemi privati del numero 0 (zero) sono indicati con una stellina all'apice:  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}^*$ , ecc..
- Con il simbolo  $\mathbb{K}$  si indica un generico corpo di scalari, solitamente  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .
- $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  indica l'unione della retta reale con i due punti all'infinito.
- L'aggettivo *positivo* indica un numero reale maggiore o uguale a zero:  $x \geq 0$  ossia  $x \in \mathbb{R}_+$ . I numeri maggiori di zero e diversi da zero saranno chiamati *strettamente positivi*:  $x > 0$  ossia  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Analogamente *negativo* vuol dire  $x \leq 0$  ( $x \in \mathbb{R}_-$ ) mentre *strettamente negativo* vuol dire  $x < 0$  ( $x \in \mathbb{R}_-^*$ ).
- Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dirà *crescente* se  $a > b \implies f(a) \geq f(b)$ , mentre si dirà *strettamente crescente* se  $a > b \implies f(a) > f(b)$ . Analogamente per funzioni *decrescenti* e *strettamente decrescenti*.
- La notazione  $A \subset B$  indica che  $A$  è sottoinsieme di  $B$ , non necessariamente proprio, cioè può essere  $A = B$ . In alcuni testi ciò è indicato con  $A \subseteq B$ .
- C.L. indica “combinazione lineare”.
- Se  $l \in \mathbb{N}$ ,  $C^l(\mathbb{K}, Y)$  indica l'insieme delle funzioni  $\mathbb{K} \rightarrow Y$  con derivata  $l$ -esima continua.