Rimane da esprimere lo <u>spazio delle fasi</u> nelle variabili x_i che abbiamo introdotto.

$$d\Phi_3 = \widetilde{dp_1}\,\widetilde{dp_2}\,\widetilde{dk}\,(2\pi)^D \delta^D(p_1+p_2+k-q) = (2\pi)^{3-2D} \frac{d^{D-1}\vec{p}_1}{2E_1}\frac{d^{D-1}\vec{p}_2}{2E_2}\delta(k^2)$$

$$\widetilde{dk} \downarrow \frac{d^D k}{(2\pi)^D} 2\pi\delta(k^2)$$

Ora $k^2 = (q-p_1-p_2)^2 = q^2 - 2p_1\cdot q - 2p_2\cdot q + 2p_1\cdot p_2$

$$= s(1-x_1-x_2) + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2) = s\left[1-x_1-x_2+\frac{x_1x_2}{2}(1-\cos\theta_{12})\right]$$

NOTA: $k^2 = s(2-x_1-x_2-x_3)$ ma non posso usare x_3 perchè $\int d^{D-1}k \sim s\int dx_3$ è già stato eliminato dalla δ^D (impulso totale).

$$d^{D-1}\vec{p}_1 = E_1^{D-2}dE_1\,d\Omega_1 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^{D-1} x_1^{D-2}dx_1\,d\Omega_1$$

idem per $d^{D-1}\vec{p}_2$

$$\Rightarrow d\Phi_3 = \frac{(s\,x_1x_2)^{D-3}}{2(4\pi)^{2D-3}}dx_1\,dx_2\,d\Omega_1\,d\Omega_2\;\delta\!\left(1-x_1-x_2+\frac{x_1x_2}{2}(1-\cos\theta_{12})\right)$$

Sfruttiamo la δ per eliminare una variabile angolare. P.es., fissato Ω_1 (cioè $\hat{p}_1$) possiamo riferire l'angolo solido Ω_2 di $\hat{p}_2$ rispetto a $\hat{p}_1$, cioè usiamo come variabile angolare Ω_{21} al posto di Ω_2

$$(q-p_1)^2 = q^2 - 2q\cdot p_1 = s(1-x_1) \quad\Rightarrow\quad 2p_2\cdot k = s(1-x_1)$$
$$= (p_2+k)^2 = 2p_2\cdot k \qquad\qquad 2p_1\cdot k = s(1-x_2)$$
$$2p_1\cdot p_2 = s(1-x_3)$$

Poiché Ω_2 misura un angolo $D-2$ dimensionale, cioè parametrizza S^{D-2}, vale

$$d^{D-2}\Omega_{21} = \operatorname{sen}^{D-3}\theta_{12}\, d\theta_{12}\, d^{D-3}\varphi_{21}$$

ove $\theta_{12}\in[0,\pi]$ è l'angolo tra $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$, mentre φ_{21} è l'angolo azimutale di $\hat{p}_2$ prendendo $\hat{p}_1$ come asse polare.

Poiché $\operatorname{sen}^{D-3}\theta_{12}\, d\theta_{12} = \operatorname{sen}^{D-4}\theta_{12}\, \operatorname{sen}\theta_{12}\, d\theta_{12} = \left(1-\cos^2\theta_{12}\right)^{\frac{D-4}{2}} d(\cos\theta_{12})$

è immediato integrare in quest'ultima variabile la funzione δ, la quale produce un semplice fattore $\dfrac{2}{x_1 x_2}$

mentre $\quad 1-\cos^2\theta_{12} = \dfrac{4(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}{x_1^2 x_2^2}$; ove $x_3 = 2-x_1-x_2$.

<u>Esercizio</u>: Mostrare che l'annullarsi dell'argomento della δ con $-1\leq\cos\theta_{12}\leq 1$ implica $\begin{cases} x_1+x_2>1 \\ (1-x_1)(1-x_2)>0 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 < 1$

In conclusione abbiamo trovato $\quad (D=4-2\varepsilon)$

$$d\Phi_3 = \frac{s^{1-2\varepsilon}}{4^{5-3\varepsilon}\,\pi^{5-4\varepsilon}} (1-x_1)^{-\varepsilon}(1-x_2)^{-\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}\, dx_1\, dx_2\, d^{2-2\varepsilon}\Omega_1\, d^{1-2\varepsilon}\varphi_{21}$$

Poiché l'integrando non dipende dagli angoli, possiamo integrare anche su questi per ottenere i rispettivi volumi:

$$\int d^{D-2}\Omega_1\, d^{D-3}\varphi_{12} = 2\frac{\pi^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}{\Gamma(\frac{3}{2}-\varepsilon)}\; 2\frac{\pi^{1-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} = \frac{2^{3-2\varepsilon}\,\pi^{2-2\varepsilon}}{\Gamma(2+2\varepsilon)}$$

$$d\Phi_3 = \frac{s^{1-2\varepsilon}(1-x_1)^{-\varepsilon}(1-x_2)^{-\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}}{2^{7-4\varepsilon}\,\pi^{3-2\varepsilon}\,\Gamma(2+2\varepsilon)} \quad \underbrace{dx_1\, dx_2\, \Theta(x_1+x_2-1)}_{\int_0^1 dx_1\, dx_2\, dx_3\, \delta(x_1+x_2+x_3-2)}$$

Ricapitolando, poichè l'integrando dipende solo dalle frazioni d'energia delle 3 particelle, abbiamo potuto integrare banalmente sugli angoli, così da ottenere uno spazio delle fasi che si può esprimere in modo totalmente simmetrico rispetto alle suddette frazioni

x_1, x_2, x_3.

Adesso, per integrare ed ottenere la sezione d'urto totale, dobbiamo scegliere 2 delle 3 frazioni come variabili indipendenti. Comunque si operi la scelta, si ottiene un integrale su un dominio triangolare, ad esempio

$$\left[\prod_{i=1}^{3} \int_0^1 dx_i\right] \delta(x_1+x_2+x_3-1) = \int_0^1 dx_3 \int_{1-x_3}^{1} dx_1 = \int_{\triangle} dx_3\, dx_1$$

Questa scelta è più conveniente di altre, poichè, con il senno di poi, permette di integrare analiticamente la sezione d'urto. Come si vede, l'integrando è espresso in termini di potenze degli x_i e $(1-x_i)$, che si integrano facilmente mediante la funzione $B(p,q)$ di Eulero, se le $x_i \in [0,1]$. Tuttavia $x_1 \in [1-x_3, 1]$. Possiamo però ottenere un integrale su un dominio quadrato $[0,1]^2$ traslando x_1 e riscalando:

$$x_1 = 1 - x_3 + \xi x_3 \quad : \quad \xi \in [0,1] \qquad \Rightarrow \quad dx_1 = x_3\, d\xi$$

$$1 - x_1 = x_3(1-\xi)$$

$$1 - x_2 = x_3\, \xi$$

Si tratta quindi infine di svolgere

$$K_R \equiv \int_0^1 dx_3 \int_0^1 d\xi \; x_3 \, (1-x_1)^{-\varepsilon}(1-x_2)^{-\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon} \; \frac{x_1^2 + x_2^2 - \varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

somma di 3 termini. Il 1° termine con x_1^2 dà

$$\int_0^1 dx_3 \int_0^1 d\xi \;\; x_3 \, [x_3(1-\xi)]^{-1-\varepsilon} [x_3 \xi]^{-1-\varepsilon} (1-x_3)^{-\varepsilon} \left\{ 1 - 2x_3(1-\xi) + x_3^2(1-\xi)^2 \right\}$$

che è a sua volta la somma di 3 contributi, ciascuno della forma $\int_0^1 dx_3 \, x_3^{p-1} (1-x_3)^{q-1} \int_0^1 d\xi \, \xi^{r-1} (1-\xi)^{s-1}$

$$= B(p,q)\, B(r,s)$$

Anche il secondo (con x_2^2) ed il terzo termine (con εx_3^2) sono riconducibili a contributi con la stessa struttura. In particolare, il secondo termine è uguale al primo, in quanto si ottiene da quello scambiando $x_1 \leftrightarrow x_2$ (ricordare che $d\Phi_3$ è simmetrico nelle x_i).

Si ottiene così un risultato con vari termini, ciascuno con prodotti di 2 funzioni B, i cui argomenti hanno valori che differiscono per numeri interi. Tutti questi contributi si possono ricondurre a funzioni razionali di ε che moltiplicano lo stesso prodotto di $B(2-2\varepsilon, 1-\varepsilon)\, B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon)$, sfruttando la formula $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p,q)$ e analoghe. In conclusione

$$\sigma_{e^+e^- \to q\bar{q}g} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} N_c \sum_s Q_s^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{s}\right)^{\varepsilon} \frac{3(1-\varepsilon)^2 \Gamma(1-\varepsilon)}{(3-2\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)} \qquad \leftarrow \sigma_B$$

$$\times \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{s}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \underbrace{B(2-2\varepsilon, 1-\varepsilon)\, B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon) \left(\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{12}{\varepsilon} + 10 - 4\varepsilon \right)}_{K_R}$$

K_R → vedi pag. 10