$e^+e^- \to q\bar{q}g$ INTEGRATA SOLO SUL GLUONE SOFFICE

Ci proponiamo di integrare la sezione d'urto di emissione reale sullo spazio delle fasi limitato dal requisito che il gluone sia soffice, per esempio $E_3 < \mathcal{E}$ nel SDR del CM con $\mathcal{E} \ll \sqrt{S}$.

$$\Rightarrow \quad x_3 = \frac{E_3}{\sqrt{S}/2} < \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{S}/2} =: \Delta \qquad \Rightarrow \quad 0 < x_3 < \Delta \ll 1$$

mentre $\xi \in [0,1]$ è sempre esteso all'intervallo unitario.

Bisogna quindi calcolare

$$K_R(\Delta) := \int_0^\Delta dx_3\, x_3^{-1-2\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}\int_0^1 d\xi\, \xi^{-1-\varepsilon}(1-\xi)^{-1-\varepsilon}\left[2-4x_3(1-\xi)+2x_3^2(1-\xi)^2-\varepsilon x_3^2\right]$$

$$= \int_0^\Delta dx_3\, x_3^{-1-2\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}\left[(2-\varepsilon x_3^2)B(-\varepsilon,-\varepsilon) - 4x_3 B(-\varepsilon,1-\varepsilon) + 2x_3^2 B(-\varepsilon,2-\varepsilon)\right]$$

$$= 2B(-\varepsilon,-\varepsilon)\int_0^\Delta dx_3\, x_3^{-1-2\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}$$

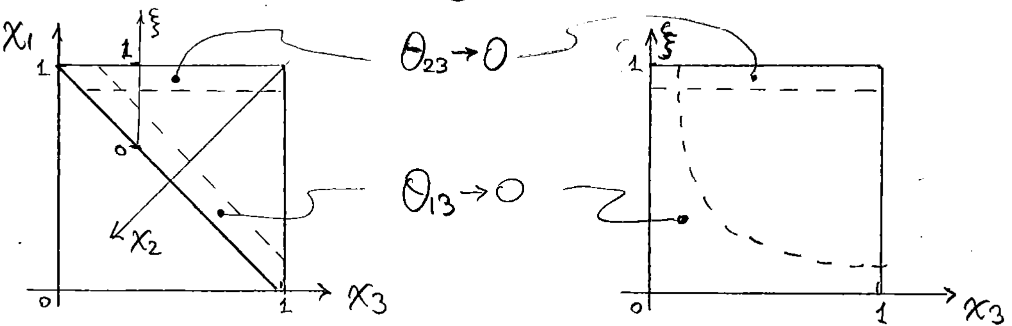
$$-4B(-\varepsilon,1-\varepsilon)\int_0^\Delta dx_3\, x_3^{-2\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}$$

$$+\left[2B(-\varepsilon,2-\varepsilon)-\varepsilon B(-\varepsilon,-\varepsilon)\right]\int_0^\Delta dx_3\, x_3^{1-2\varepsilon}(1-x_3)^{-\varepsilon}$$

in cui le $B(p,q)$ provengono dall' $\int_0^1 d\xi$. $\quad \xi \to 0,\ 1$

Tutti i termini presentano una divergenza collineare $B(-\varepsilon,\dots)$ che proviene da $\xi \to 0 \Leftrightarrow x_1 \to 1-x_3 \Leftrightarrow x_2 \to 0 \Leftrightarrow \theta_{13}\to 0$

$\xi \to 1 \Leftrightarrow x_1 \to 1 \Leftrightarrow \theta_{23} \to 0$



Gli integrali in x_3 sono della forma

$$I_n(\Delta) := \int_0^\Delta dx\ x^{n-2\varepsilon}(1-x)^{-\varepsilon} \qquad \text{con } n=-1,0,1 .$$

e a noi servono sviluppati in ε fino ad $\mathcal{O}(\varepsilon)$ compreso.

Per $n \geqslant 0$ gli integrali convergono $\forall\varepsilon$ in un qualche intorno di $\varepsilon \simeq 0$, pertanto possiamo sviluppare in ε l'integrando:

$$I_0(\Delta) = \int_0^\Delta dx\ x^{-2\varepsilon}(1-x)^{-\varepsilon} = \int_0^\Delta dx\ (1-2\varepsilon\ln x)[1-\varepsilon\ln(1-x)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$= \int_0^\Delta dx \left\{1-\varepsilon[2\ln x + \ln(1-x)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right\} = \Delta + \varepsilon[3\Delta + (1-\Delta)\ln(1-\Delta) - 2\Delta\ln\Delta] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$I_1(\Delta) = \dots = \frac{\Delta^2}{2} + \varepsilon\left[\frac{3}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1-\Delta^2}{2}\ln(1-\Delta) - \Delta^2\ln\Delta\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Per $I_{-1}(\Delta)$ non possiamo sviluppare l'integrando perchè compare un termine $\frac{1}{x}$ che non è integrabile (divergenza soffice).

Usiamo la tecnica della "sottrazione":

$$I_{-1}(\Delta) = \int_0^\Delta dx\ \frac{f(x,\varepsilon)}{x^{1+2\varepsilon}} = \int_0^\Delta dx\ \frac{f(0,\varepsilon)}{x^{1+2\varepsilon}} + \int_0^\Delta \frac{f(x,\varepsilon)-f(0,\varepsilon)}{x^{1+2\varepsilon}}$$

che è valida perchè $f(x,\varepsilon)$ sia regolare per $x\to 0$ $\forall\varepsilon$ in un intorno di $\varepsilon\simeq 0$.

Il primo integrale si fa analiticamente in modo esatto.

Il secondo integrale si può fare come prima sviluppando in serie di ε l'integrando che ora è integrabile per $x\to 0$:

$$f(x,\varepsilon) = (1-x)^{-\varepsilon} = 1-\varepsilon\ln(1-x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad ; \quad f(0,\varepsilon) = 1$$

$$\int_0^\Delta dx\ \frac{f(0,\varepsilon)}{x^{1+2\varepsilon}} = \frac{\Delta^{-2\varepsilon}}{-2\varepsilon}$$

$$\int_0^\Delta [f(x,\varepsilon)-f(0,\varepsilon)]\, x^{-1-2\varepsilon}\, dx = \int_0^\Delta [-\varepsilon \ln(1-x)+O(\varepsilon^2)]\frac{[1+O(\varepsilon)]}{x}\, dx$$

$$= -\varepsilon \int_0^\Delta \frac{\ln(1-x)}{x} + O(\varepsilon^2) = +\varepsilon\, Li_2(\Delta) + O(\varepsilon^2)$$

ove $Li_2(z) := -\int_0^z \frac{\ln(1-x)}{x}dx = z + O(z^2)$ (DILOGARITMO)

Quindi $I_{-1}(\Delta) = \frac{1}{-2\varepsilon} + \ln\Delta + \varepsilon\left[Li_2(\Delta) - \ln^2\Delta\right] + O(\varepsilon^2)$

Mettendo assieme i vari contributi e sfruttando le formule che collegano le B con argomenti consecutivi $p\pm1$, si ottiene infine

$$K_R(\Delta) = B(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\left\{\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left[-4\ln\Delta - 4 + 4\Delta - \Delta^2\right] + g(\Delta) + O(\varepsilon)\right\}$$

$$g(\Delta) = 4\ln\Delta^2 + 8\ln\Delta - 8\Delta\ln\Delta + 3\Delta + (3-4\Delta+\Delta^2)\ln(1-\Delta)$$
$$-4Li_2(\Delta) + 2\Delta^2\ln\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2$$

- Il polo doppio (che proviene da I_{-1} : div. coll $\times$ div. soff) è lo stesso di K_R, e si cancella con l'analogo virtuale.
- Il polo semplice dipende da Δ, e quindi non può essere uguale a quello di K_R, pertanto non è cancellato da K_V : sopravvive la divergenza collineare.

È pertanto indispensabile includere anche le configurazioni in cui il gluone è quasi collineare al quark o all'antiquark per cancellare completamente le divergenze collineari virtuali.

Esercizio: mostrare che $K_R(1) = K_R$

Nota: questo calcolo non ha richiesto $\Delta \ll 1$, è valido per ogni $\Delta \in]0,1]$.

Usare $Li_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$