Capitolo 3

Date: 2021-03-31 13:05 +0200 Revision: 325 : e4130306dc3b

Strutture topologiche, metriche, vettoriali

3.1 Richiami sulle strutture topologiche

In questa sezione richiamiamo alcuni concetti di topologia che saranno usati in seguito, assumendo per note le nozioni elementari di topologia che ne stanno alla base. Lo scopo principale sarà quello di porre le basi per "completare" o "estendere" spazi e funzioni al di là della loro definizione naturale, per definirli ad ambiti più ampii.

3.1.1 Continuità

Sia $f : X \to Y$ funzione. Se $y \in Y$, indichiamo con $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ la *controimmagine* di y, che è un sottoinsieme di X. Analogamente, se $S \subset Y$, indichiamo con $f^{-1}(S) = \{x \in X : f(x) \in S\}$ la *controimmagine* di S, che è un sottoinsieme di X. La controimmagine esiste sempre, anche quando f non è invertibile. Se y non sta nell'immagine di f, o se S non interseca l'immagine di f, allora la loro controimmagine è l'insieme vuoto.

Teorema 3.1 *Siano X, Y spazi topologici e $f : X \to Y$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) f è continua.

ii) Per ogni aperto $A \subset Y$, si ha che $f^{-1}(A)$ è un aperto di X.

iii) Per ogni chiuso $C \subset Y$, si ha che $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X.

iv) Per ogni insieme $S \subset X$ si ha che $\overline{S} \subset f^{-1}\big(\overline{f(S)}\big)$, oppure, equivalentemente, che $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

Definizione 3.1 *Siano X, Y due spazi topologici. Una biiezione $f : X \to Y$ è detta un* omeomorfismo *se sia f che f^{-1} sono continue. Due spazi topologici sono detti* omeomorfi *se esiste fra loro un omeomorfismo.*

Quindi un omeomorfismo manda insiemi aperti in insiemi aperti ed insiemi chiusi in insiemi chiusi

3.1.2 Densità e separabilità

Molto spesso è difficile stabilire che tutti gli elementi di un insieme X godano di una data proprietà, mentre è più facile stabilire che tale proprietà è soddisfatta dagli elementi di un sottoinsieme $D \subset X$. Viene spontaneo chiedersi se la proprietà in esame possa essere estesa, sotto opportune condizioni, da D a tutto X.

È naturale richiedere che questa estensione sia continua, senza salti, e che quindi possa essere fatta (in modo unico) per gli elementi di X "vicini" a D, cioè per i punti di accumulazione per D. In altre parole, l'estensione appare ben definita per la chiusura $\overline{D}$ dell'insieme D. Quindi, una richiesta sensata per poter estendere ad X una proprietà di $D \subset X$ è che $X = \overline{D}$.

Definizione 3.2 *Sia X spazio topologico. Un insieme $D \subset X$ si dice* denso *in X se $\overline{D} = X$, ossia se per ogni $x \in X$, ogni intorno di x contiene degli elementi di D.*

Spesso abbiamo a che fare con spazi topologici che hanno la potenza del continuo, o cardinalità anche superiori. Se questi spazi contengono un sottoinsieme denso di cardinalità inferiore alla loro, possiamo sperare di semplificare notevolmente lo studio di tali insiemi, in particolare se la cardinalità del sottoinsieme denso è numerabile. Questo porta al concetto di *separabilità* (da non confondere con il concetto di "spazio separato", che è un sinonimo di "spazio di Hausdorff").

Definizione 3.3 *Uno spazio topologico X è detto* separabile *se esiste un sottoinsieme $D \subset X$ denso e numerabile: $D = \{d_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$.*

Sappiamo che topologicamente le basi di aperti permettono di determinare tutta la topologia dello spazio. Una base di aperti è in generale un insieme infinito e può essere comodo averla indicizzata tramite interi. Questo è strettamente connesso con la separabilità dello spazio, per lo meno in uno spazio metrico.

Teorema 3.2 *Sia X uno spazio metrico. Allora X è separabile se e solo se esiste una base di aperti numerabile.*

Riportiamo un'elenco di inclusioni o di densità tra alcuni spazi di funzioni. È inteso che la densità si intende nella topologia naturale dello spazio contenitore, ossia in norma-p per gli spazi

L^p, se non diversamente specificato.

simboli

$$
\begin{aligned}
C^l(\mathbb{R},\mathbb{C}) &\equiv \text{ funzioni con derivata } l\text{-esima continua}\\
C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\equiv \text{ funzioni continue a supporto compatto}\\
S_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\equiv \text{ funzioni a scalino a supporto compatto}\\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\equiv \text{ funzioni infinitamente derivabili a rapida decrescita}\\
C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \equiv \text{ funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto}\\
L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\equiv \text{ funzioni } p\text{-sommabili alla Lebesgue}\\
L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\equiv \text{ funzioni Lebesgue misurabili essenzialmente limitate}
\end{aligned}
$$

inclusioni

$$
\begin{aligned}
C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\subset L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \qquad (1\le p\le\infty)\\
C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \qquad (1\le p\le\infty)
\end{aligned}
$$

sottoinsiemi densi

$$
\begin{aligned}
\{\text{polinomi in } [a,b]\} &\text{ denso in } C([a,b]) \qquad \text{nella } ||\cdot||_\infty\\
C^1([a,b]) &\text{ denso in } C([a,b]) \qquad \text{nella } ||\cdot||_\infty\\
S_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\text{ denso in } L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \qquad (1\le p<\infty)\\
C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\text{ denso in } L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \qquad (1\le p<\infty)\\
C([a,b],\mathbb{C}) &\text{ denso in } L^p([a,b],\mathbb{C}) \qquad (1\le p\le\infty\ , \quad a,b\in\mathbb{R})\\
C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\text{ denso in } L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \qquad (1\le p<\infty)\\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) &\text{ denso in } L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}) \qquad (1\le p<\infty)
\end{aligned}
$$

3.1.3 Compattezza

Definizione 3.4 *Sia X uno spazio topologico e $K \subset X$. K è detto compatto se da ogni ricoprimento aperto $(A_i)_{i\in I}$ di K è possibile estrarre un sottoricoprimento finito di K:*

$$K \subset \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \Longrightarrow \qquad K \subset \bigcup_{n=0}^{N} A_{i_n}\ .$$

In particolare, se questo è vero per tutto lo spazio topologico X, diremo che X è uno spazio topologico compatto.

Teorema 3.3 *Sia X spazio topologico compatto. Allora ogni sottoinsieme chiuso $C \subset X$ è compatto.*

Consideriamo ora una importante connessione tra continuità e compattezza.

Teorema 3.4 *Siano X, Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ una funzione continua e suriettiva. Allora se X è compatto anche Y è compatto.*

Corollario 3.5 *Se $f : X \to Y$ è continua e X è compatto, allora l'immagine $f(X)$ è un insieme compatto di Y.*

OSSERVAZIONE: Le funzioni continue sui compatti trasportano le informazioni di compattezza in avanti (dallo spazio di partenza allo spazio di arrivo). Invece le proprietà di chiusura o apertura sono trasportate all'indietro: la controimmagine di un aperto (chiuso) tramite una funzione continua è un aperto (chiuso).

Nello studio dei limiti è importante poter stabilire che, quando un limite esiste, esso sia unico. Ciò succede purché ogni coppia di elementi distinti di uno spazio topologico abbia intorni disgiunti. Questa proprietà va imposta come assioma:

Definizione 3.5 (Assioma di Hausdorff) *Uno spazio topologico X è detto* spazio di Hausdorff *se per ogni coppia di elementi distinti $x, y \in X$, $x \neq y$, esistono un intorno I_x di x e un intorno I_y di y disgiunti tra loro: $I_x \cap I_y = \varnothing$.*

ESEMPIO: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$ con le usuali topologie sono spazi di Hausdorff. L^p non lo è , infatti due funzioni che differiscano per un insieme di misura nulla non hanno intorni disgiunti (nella topologia della norma-p). Invece $\mathcal{L}^p$ è di Hausdorff.

Teorema 3.6 *Sia X uno spazio di Hausdorff. Allora ogni sottoinsieme compatto $K \subset X$ risulta anche chiuso.*

Nel caso di spazi metrici, sono rilevanti le seguenti proprietà.

Proposizione 3.7 *Ogni spazio metrico è spazio topologico di Hausdorff (nella topologia indotta dalla metrica).*

Definizione 3.6 *Sia (X, d) spazio metrico. Un insieme $A \subset X$ si dice* limitato *se esiste un numero $M \geq 0$ tale che $d(x, y) \leq M$ per ogni $x, y \in A$.*

Proposizione 3.8 . *Un insieme è limitato se e solo se esiste una palla di raggio finito che lo contiene.*

Teorema 3.9 *Un insieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

OSSERVAZIONE: La nozione di limitatezza è legata alla nozione di distanza e un insieme può essere limitato in una metrica ma non in un'altra. La limitatezza è una nozione metrica e non topologica.

3.1.4 Estensioni continue

Torniamo alla questione, accennata nel paragrafo sulla densità, di quando e come sia possibile estendere una certa funzione $f : D \to Y$ da un sottoinsieme $D \subset X$ a tutto X in modo continuo. Chiaramente f dovrà essere continua in D, e D denso in X. Tuttavia, la richiesta di continuità in D è spesso troppo debole per garantirne l'estensione a $\overline{D}$. Nel caso degli spazi metrici, ci serve un concetto di continuità più raffinato.

Definizione 3.7 *Siano X e Y due spazi metrici dotati di distanze d_X e d_Y rispettivamente. Diremo che $f : X \to Y$ è* uniformemente continua *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che:*

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq \varepsilon$$

ogni volta che

$$d_X(x, y) \leq \delta_\varepsilon$$

con δ_ε indipendente dalla scelta dei punti x e y in cui si verifica la continuità.

Osservazione: Notiamo che la nozione di continuità uniforme è un concetto metrico, non topologico, in quanto esprime una proprietà della misura degli intorni coinvolti nella definizione di continuità.

Possiamo a questo punto enunciare un importante teorema che riguarda l'estensione continua di funzioni tra spazi metrici.

Teorema 3.10 *Siano X e Y due spazi metrici, D un sottoinsieme denso di X ed $f : D \to Y$. Se Y è completo ed f è uniformemente continua, allora esiste una unica applicazione $\overline{f} : X \to Y$, uniformemente continua, detta* estensione continua*, che prolunga f, cioè $f(x) = \overline{f}(x)$ per ogni $x \in D$.*

Dimostrazione: Sia $x \in X$, allora esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D convergente ad x: $x_n \to x$ (x potrebbe non appartenere a D). In particolare, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Ora, per la continuità uniforme, anche la successione degli $f(x_n)$ risulta di Cauchy in Y:

$$d_Y\big(f(x_n), f(x_m)\big) \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad d_X(x_n, x_m) \leq \delta_\varepsilon$$

(con δ_ε indipendente da x_n, x_m), che è verificata se n ed m sono abbastanza grandi. Essendo Y completo $f(x_n)$ converge ad un limite: $f(x_n) \to y \in Y$.

Questo limite è unico. Consideriamo infatti un'altra possibile successione in D convergente verso lo stesso x, $x'_n \to x$. Allora anche $f(x'_n)$ è di Cauchy e converge verso un limite $y' \in Y$. Abbiamo (per la continuità della distanza):

$$d_Y(y, y') = \lim_{n\to\infty} d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \tag{3.1}$$

Siccome $x_n \to x$, e $x'_n \to x$, la distanza $d_X(x_n, x'_n)$ può essere resa piccola a piacere e di conseguenza, per l'uniforme continuità di f, anche la distanza $d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big)$ può essere resa piccola a piacere:

$$d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad d_X(x_n, x'_n) \leq \delta_\varepsilon\ .$$

Pertanto il limite nell'eq. (3.1) è zero e quindi $y = y'$ indipendente dalla scelta della successione convergente ad x. Abbiamo definito quindi in maniera univoca una[1] funzione $\overline{f} : X \to Y$ per ogni $x \in X$:

$$\overline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \qquad \text{con} \qquad x_n \to x \ .$$

Se $x \in D$ possiamo scegliere come successione quella stazionaria $x_n = x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $\overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$, quindi $\overline{f}|_D = f$, per cui $\overline{f}$ è un'estensione di f.

Dimostriamo ora che $\overline{f}$ è uniformemente continua. Ci chiediamo se per ogni $\varepsilon > 0$, esista $\bar{\delta}_\varepsilon > 0$ tale che $d_x(x, x') \leq \bar{\delta}_\varepsilon \implies d_Y\big(\overline{f}(x), \overline{f}(x')\big) \leq \varepsilon$. Prendiamo

- una qualsiasi coppia di elementi $x, x' \in X$ tale che $d_X(x, x') \leq \frac{1}{3}\delta_\varepsilon$;
- due successioni $x_n \to x$ e $x'_n \to x'$;
- n sufficientemente grande tale che $d_X(x_n, x) \leq \frac{1}{3}\delta_\varepsilon$ e $d_X(x'_n, x') \leq \frac{1}{3}\delta_\varepsilon$.

Allora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d_X(x_n, x'_n) \leq d_X(x_n, x) + d_X(x, x') + d_X(x', x_n) \leq \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \leq \varepsilon$$

e, passando al limite per $n \to \infty$,

$$d_X(x, x') \leq \delta_\varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad d_Y\big(\overline{f}(x), \overline{f}(x')\big) \leq \varepsilon \ ,$$

per cui $\overline{f}$ risulta uniformemente continua (con $\bar{\delta}_\varepsilon = \delta_\varepsilon$).

Mostriamo infine che $\overline{f}$ è l'unica estensione continua di f. Sia $\hat{f} : X \to Y$ un'altra estensione continua di f. Preso un qualunque $x \in X$ ed una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D convergente ad x, dalla continuità di $\overline{f}$ abbiamo che $\overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ mentre dalla continuità di $\hat{f}$ abbiamo che $\hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Ma negli spazi metrici (che sono di Hausdorff) il limite è unico, quindi $\overline{f}(x) = \hat{f}(x)$ per ogni $x \in X$. C.V.D.

OSSERVAZIONE: Una applicazione non si sa estendere con continuità se Y non è completo. Sia X qualsiasi con D denso in X e prendiamo $Y = D$, con $f(x) = x$, cioè $f = \mathbb{1}_D$. Se potessimo prolungare con continuità giungeremmo ad un assurdo, malgrado l'identità sia uniformemente continua. Infatti, se esistesse $\overline{f}$, allora per ogni $x \in X \setminus D$ esiste una successione $x_n \to x$ in X e $x_n = f(x_n) = \overline{f}(x_n) \to \overline{f}(x) \in Y = D$, ma allora $x = \overline{f}(x) \in D$, che è assurdo.

OSSERVAZIONE: Se Y è completo, ma f non è uniformemente continua, può succedere che il prolungamento non esista. Si consideri il seguente esempio:

$$X = [0, 1] \ , \quad D =]0, 1] \ , \quad Y = \mathbb{R} \ , \quad f(x) = \frac{1}{x} : x \in D$$

che non può essere estesa a tutto l'intervallo $[0, 1]$.

Una condizione sufficiente per affermare che una funzione sia uniformemente continua è data dal seguente

Teorema 3.11 *Siano X e Y spazi metrici, X compatto e $f : X \to Y$ continua. Allora f è uniformemente continua.*

[1] La funzione $\overline{f}$ è ben definita da questa procedura, e vedremo tra poco che costituisce *una* estensione continua di f. Questo però non vuol dire che $\overline{f}$ sia *l'unica* estensione continua. Lo dimostreremo nella parte finale.

3.1.5 Completamento di uno spazio metrico

Legata alla questione dell'estensione è quella del completamento, in cui si vuole estendere non tanto una funzione da un insieme ad un altro che lo contiene, ma si vuole estendere l'insieme stesso, in modo da rendere convergenti tutte le successioni di Cauchy. Stiamo quindi parlando di spazi metrici, in cui abbiamo a disposizione una distanza tra punti. Se una successione di Cauchy non converge, nonostante la distanza tra i punti tenda a zero, l'idea del completamento è quella di aggiungere allo spazio metrico il punto limite di tale successione, in un senso da precisare. Più precisamente, dato uno spazio metrico (X, d) non completo, vorremmo definire un nuovo spazio metrico $(\tilde{X}, \tilde{d})$ tale che $X \subset \tilde{X}$, e nel quale la nuova distanza $\tilde{d}$ ristretta ad X coincida con la distanza d originale.

Precisiamo quest'ultimo punto introducendo il concetto di isometria.

Definizione 3.8 *Una applicazione f da uno spazio metrico (X, d_X) ad uno spazio metrico (Y, d_Y) è detta* isometrica *(o semplicemente, una* isometria*) se lascia invariate le distanze:*

$$d_Y\big(f(x_1), f(x_2)\big) = d_X(x_1, x_2) \qquad \textit{per ogni } x_1, x_2 \in X \; ; \tag{3.2}$$

due spazi sono detti isometrici *quando esiste un'applicazione isometrica tra loro.*

Chiaramente l'applicazione isometrica fra i due spazi risulta una applicazione iniettiva e continua, anzi uniformemente continua (con $\delta_\varepsilon = \varepsilon$) e, da un punto di vista metrico (e quindi anche topologico) lo spazio X e la sua immagine $f(X)$ sono perfettamente identificabili fra loro. Non è invece richiesto ad un'isometria di essere suriettiva.

Definizione 3.9 *Sia (X, d) uno spazio metrico non completo; diremo che lo spazio metrico completo $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è un completamento di (X, d), se esiste una applicazione isometrica di X in $\tilde{X}$, tale che l'immagine di X sia densa in $\tilde{X}$.*

Dimostreremo ora che ogni spazio metrico non completo ammette un unico completamento. L'idea è semplice: siccome la non completezza è dovuta all'avere successioni di Cauchy che non convergono, si prendono come elementi del completamento le successioni di Cauchy stesse. Con la clausola di introdurre una relazione di equvalenza tra successioni, in modo da considerare come un unico elemento tutte successioni di Cauchy che convergono allo stesso punto.

Teorema 3.12 *Ogni spazio metrico (X, d) non completo ammette un completamento $(\tilde{X}, \tilde{d})$. Inoltre due qualsiasi completamenti sono tra loro omeomorfi tramite una isometria, cioè il completamento è unico a meno di isometrie.*

Dimostrazione:

Unicità Siano dunque $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ due completamenti di X, con $X_1 \subset \tilde{X}_1$ e $X_2 \subset \tilde{X}_2$ i loro sottoinsiemi densi ed isometrici ad X tramite le isometrie $f_j : X \to X_j$, $j = 1, 2$. Queste ultime sono invertibili, e le funzioni

$$f_2 \circ f_1^{-1} : X_1 \to X_2$$
$$f_1 \circ f_2^{-1} : X_2 \to X_1$$

sono a loro volta isometrie, l'una inversa dell'altra. Per il teorema 3.10, $f_2 \circ f_1^{-1}$ — pensata ora come funzione da X_1 in $\tilde{X}_2$ completo — è estendibile in modo unico ad un'applicazione $F_{21} : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ continua e quindi isometrica. Analogamente $f_1 \circ f_2^{-1}$ è estendibile in modo unico ad un'applicazione $F_{12} : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ continua ed isometrica.

Stabiliamo la suriettività delle F. Sia $x \in \tilde{X}_1$, allora esiste una successione $(x_n)_{n\to\mathbb{N}}$ in X_1 con $x_n \to x$. Vale

$$[F_{12} \circ F_{21}](x_n) = [F_{12} \circ f_2 \circ f_1^{-1}](x_n) = [f_1 \circ f_1^{-2} \circ f_2 \circ f_1^{-1}](x_n) = x_n$$

e, passando al limite per $n \to \infty$, si ha $F_{12}\big(F_{21}(x)\big) = x$. Allo stesso modo di deduce che $F_{21}\big(F_{12}(x')\big) = x'$ per ogni $x' \in \tilde{X}_2$. Quindi F_{21} e F_{12} sono una l'inversa dell'altra, perciò biiettive, e ciascuna di loro fornisce l'isometria che rende i due spazi $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ omeomorfi.

Costruzione di $\tilde{X}$ Costruiamo ora un completamento per lo spazio metrico X. Si consideri l'insieme di tutte le successioni di Cauchy in X. Su questo insieme introduciamo una relazione di equivalenza:

$$(x_n) \sim (y_n) \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \, .$$

È facile dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva), che divide l'insieme delle successioni di Cauchy in classi di equivalenza. Indichiamo con $[x_n] \equiv [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ la classe di equivalenza di una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X. Sia $\tilde{X}$ l'insieme di queste classi il quale, come preannuncia la notazione, costituirà il completamento di X (una volta introdotta la struttura metrica).

Identifichiamo in $\tilde{X}$ quegli elementi che corrispondono ai punti di X: ad ogni $x \in X$ associamo la classe $f(x) \in \tilde{X}$ delle successioni equivalenti alla successione costante $x_n = x \; \forall n \in \mathbb{N}$. Simbolicamente scriviamo $f(x) = [x_n = x]$. In altre parole, $f(x)$ è la classe di tutte le successioni che convergono ad x. $f : X \to \tilde{X}$ è iniettiva, poiché

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') \quad &\Longrightarrow \quad [x_n] = [x'_n] \quad \Longrightarrow \quad (x_n) \sim (x'_n) \quad \Longrightarrow \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = x' \\ &\Longrightarrow \quad x = x' \, . \end{aligned}$$

Metrica $\tilde{d}$ Dotiamo ora $\tilde{X}$ di una metrica, in modo tale che f sia isometrica. Si pone

$$\tilde{d}([x_n], [y_n]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \, . \tag{3.3}$$

Chiaramente se $x_n \to x \in X$ e $y_n \to y \in X$, allora per la continuità della distanza, $\tilde{d}([x_n], [y_n]) = d(x, y)$ e quindi f è isometrica. Mostriamo che, in generale, il limite nell'eq. (3.3) esiste. Si ha infatti che, date due successioni di Cauchy $(x_n), (y_n)$ in X,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \quad \Longrightarrow \quad |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \, .$$

Essendo le successioni $(x_n), (y_n)$ di Cauchy, anche la successione $\big(d(x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ è di Cauchy, e converge poiché $\mathbb{R}$ è completo. Esiste quindi $\tilde{d}$.

Mostriamo che la definizione di distanza (3.3) non dipende dalla scelta delle successioni all'interno delle classi di equivalenza. Siano pertanto $(x_n) \sim (x'_n)$ e $(y_n) \sim (y'_n)$. Allora

$$\begin{aligned} & d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \\ \Longrightarrow \quad & |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) \ , \end{aligned}$$

per cui $\tilde{d}$ è indipendente da tale scelta.

Verifichiamo le proprietà M1, M2, M3 della metrica $\tilde{d}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_0: \quad d(x_n, y_n) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{d}([x_n], [y_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \geq 0 \\ &\mathrm{D}_1: \quad \tilde{d}([x_n], [y_n]) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n) \sim (y_n) \quad \Longleftrightarrow \quad [x_n] = [y_n] \\ &\mathrm{D}_2: \quad \tilde{d}([x_n], [y_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \tilde{d}([y_n], [x_n]) \\ &\mathrm{D}_3: \quad \tilde{d}([x_n], [z_n]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = \tilde{d}([x_n], [y_n]) + \tilde{d}([y_n], [z_n]) \end{aligned}$$

Densità Vediamo ora che $f(X)$ è denso in $\tilde{X}$. Sia $[x_n] \in \tilde{X}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ per ogni $n, m \geq n_\varepsilon$. Quindi la distanza $\tilde{d}$ tra la classe $[x_n]$ e l'elemento $x_m \in X$, o meglio, la classe della successione costante $f(x_m)$, è data da

$$\tilde{d}\big([x_n], f(x_m)\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \ .$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ vale $\tilde{d}\big([x_n], f(x_m)\big) \leq \varepsilon$ per ogni $m \geq n_\varepsilon$. Questo significa che ogni intorno di $[x_n]$ contiene elementi di $f(X)$.

Completezza Rimane da verificare la completezza di $\tilde{X}$. Sia $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $\tilde{X}$. Grazie alla densità, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere un elemento $y_n \in X$ tale che

$$\tilde{d}\big(\tilde{x}_n, f(y_n)\big) \leq \frac{1}{n} \ .$$

Gli elementi y_n formano essi stessi una successione di Cauchy:

$$d(y_n, y_m) = \tilde{d}\big(f(y_n), f(y_m)\big) \leq \tilde{d}\big(f(y_n), \tilde{x}_n\big) + \tilde{d}\big(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m\big) + \tilde{d}\big(\tilde{x}_m, f(y_m)\big) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \tilde{d}\big(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m\big)$$

che possiamo rendere arbitrariamente piccolo per ogni $m, n \geq N_\varepsilon$ pur di scegliere N_ε sufficientemente grande. Quindi $[y_n] \in \tilde{X}$. Affermo che $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = [y_n]$. Infatti

$$\tilde{d}(\tilde{x}_n, [y_n]) \leq \tilde{d}\big(\tilde{x}_n, f(y_n)\big) + \tilde{d}\big(f(y_n), [y_n]\big) \leq \frac{1}{n} + \lim_{k\to\infty} d(y_n, y_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ .$$

Essendo $(\tilde{x}_n)$ una successione di Cauchy di $\tilde{X}$ arbitraria, $\tilde{X}$ è completo. C.V.D.

Esempio: Lo spazio metrico $\big(C([a,b]), ||\cdot||_\infty\big)$ è completo.

Esempio: Lo spazio metrico $\big(C([a,b]), ||\cdot||_2\big)$ non è completo. Per esempio, in $C([-a,a])$ la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ nx & (0 \le x \le 1/n) \\ 1 & (x > 1/n) \end{cases}$$

è successione di Cauchy nella norma-2 ma converge alla funzione discontinua $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$.
Notare che questa successione di funzioni non è neanche di Cauchy nella sup-norma.

Il completamento di $\big(C([a,b]), ||\cdot||_2\big)$ è $L^2([a,b])$. Lo spazio $L^2([a,b])$ è separabile, poiché l'insieme di tutti i polinomi a coefficienti razionali, che è numerabile, è denso in $L^2([a,b])$. In modo simile anche $L^2(\mathbb{R})$ è separabile.

Esercizio: Si consideri lo spazio delle successioni limitate

$$l^\infty = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty\} \ .$$

(a) Dimostrare che l^∞ è uno spazio metrico completo con la distanza

$$d(x,y) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k| \ , \qquad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty \ .$$

(b) Si consideri il sottoinsieme $S \subset l^\infty$ formato dalle successioni che assumono solo i valori interi $0, 1, \ldots, K$. Si calcoli la minima e la massima distanza tra due punti distinti di S e si dimostri che S non è denso in l^∞.
(c) Mostrare che l^∞ non è separabile.

Svolgimento:

(a) Verifichiamo le proprietà della metrica:
D_0: ovviamente d assume valori positivi, essendo il sup di insiemi di numeri positivi.
D_1: Affinché la distanza tra due successioni sia nulla, tale sup deve essere zero, quindi $x_k = y_k$ per ogni k, cioè x e y sono la stessa successione.
D_2: La simmetria segue dal fatto che $|x_k - y_k| = |y_k - x_k|$.
D_3: per ogni $x, y, z \in l^\infty$ si ha

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sup_k |x_k - z_k| = \sup_k |x_k - y_k + y_k - z_k| \\ &\le \sup_k |x_k - y_k| + \sup_k |y_k - z_k| = d(x,y) + d(y,z) \ . \end{aligned}$$

Per dimostrare che l^∞ è completo consideriamo in esso una successione di Cauchy $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ove $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ — che è quindi una successione di successioni — è tale che

$$d(x^{(n)}, x^{(m)}) \le \varepsilon \quad \text{se} \quad n, m \ge n_\varepsilon \in \mathbb{N}$$

con n_ε che dipende solo da ε. Per ogni k fissato, la successione di numeri (complessi) $n \mapsto x_k^{(n)} = (x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in quanto

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \le \sup_k |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| = d(x^{(n)}, x^{(m)}) \le \varepsilon \qquad \text{per ogni } n, m \ge n_\varepsilon \ .$$

Siccome $\mathbb{C}$ è completo, esiste per ogni k il limite

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} =: y_k \ ,$$

che definisce una successione $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Inoltre, prendendo il limite per $n \to \infty$, abbiamo anche che

$$|y_k - x_k^{(m)}| \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni } m \geq n_\varepsilon$$

e, prendendo l'estremo superiore al variare di $k \in \mathbb{N}$,

$$d(y, x^{(m)}) \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni } m \geq n_\varepsilon \ .$$

Questo comporta che y è una successione limitata ($y \in l^\infty$) e che la successione $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge ad y nella topologia della sup-norma di l^∞.

(b) Consideriamo ora il sottoinsieme S. Se $x, y \in S$, ovvero $(x_k), (y_k)$ possono assumere solo un numero finito di valori, lo stesso vale per le differenze $x_k - y_k$ e per i loro moduli, pertanto il sup è sicuramente un max, cioè deve esistere almeno un $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x, y) = \sup_k |x_k - y_k| = |x_{\bar{k}} - y_{\bar{k}}| \ .$$

Se $x \neq y$, allora $d(x, y) \neq 0$ ed il valore minimo che può assumere è 1. Invece il valore massimo che può assumere è K

Ricordiamo che S è denso in X se e solo se ogni intorno di un punto arbitrario $x \in X$ contiene almeno un punto di S. Il fatto che la distanza minima tra i punti di S distinti sia finita, comporta che S non può essere denso in l^∞: prendiamo ad esempio $x = (1/2, 0, 0, \dots)$ e come intorno la palla $B(x, 1/4]$ che non contiene alcun punto di S.

Notiamo, per inciso, che S è un insieme con cardinalità infinita e non numerabile in quanto i suoi elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'intervallo reale $[0, 1]$ (scrivendo il numero reale in base-K, la sequenza delle cifre dopo la virgola definisce una successione in S).

(c) Rivestiamo ogni elemento di S con una palla di raggio $1/3$. Poiché la distanza tra due elementi qualsiasi di S vale almeno 1, queste palle non si intersecano. Ogni insieme $D \subset l^\infty$ denso deve contenere almeno un punto in ciascuna di queste palle disgiunte, le quali formano un insieme non numerabile. Quindi D non può essere numerabile e pertanto l^∞ non è separabile.

3.2 Spazi vettoriali

Moltissimi insiemi rilevanti per la matematica e la fisica sono dotati di una struttura di spazio vettoriale, basti pensare a $\mathbb{C}$, ad $\mathbb{R}^n$, agli spazi di funzioni, ecc.. Molte proprietà di questi insiemi sono condivise, discendendo unicamente dall'essere spazi vettoriali, e non dal particolare significato che attribuiamo ai suoi enti. Altre proprietà possono invece essere diverse, in particolare tra gli spazi a dimensione finita e quelli a dimensione infinita. Infine, altre proprietà si possono aggiungere se alla struttura vettoriale si aggiunge una struttura topologica, o altro ancora. Scopo dello studio seguente sarà quello di analizzare le proprietà principali degli spazi vettoriali in generale, e poi di quelli con sovrastrutture topologiche (spazi normati, completi, di Hilbert) in particolare.

Si assumono note le caratteristiche principali degli spazi vettoriali. Tuttavia, per completezza, ricordiamo brevemente la loro definizione.

Definizione 3.10 *Un insieme V è detto* spazio vettoriale *sul corpo K (detto* corpo degli scalari*) se*

- *in V è definita un'operazione binaria $+ : V \times V \to V$ (detta* somma*) rispetto alla quale V sia gruppo commutativo;*
- *è definita un'operazione $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ detta* moltiplicazione per scalari *associativa e distributiva rispetto alla somma per scalari e alla somma per vettori:*

$$k \cdot (v_1 + v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2 \qquad \forall\, k \in \mathbb{K}\,, \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \tag{3.4}$$

$$(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{K}\,, \quad \forall\, v \in V \tag{3.5}$$

$$(k_1 k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 \cdot v) \qquad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{K}\,, \quad \forall\, v \in V \tag{3.6}$$

$$1_K \cdot v = v \qquad \forall\, v \in V\,. \tag{3.7}$$

NOTA: Solitamente il segno di moltiplicazione per scalari viene sottointeso, per cui al posto di $k \cdot v$ si scriverà kv oppure anche vk, se dal contesto è chiaro chi è il vettore e chi è lo scalare.

3.2.1 Sottospazi vettoriali

La struttura di spazio vettoriale può trasferire le sue proprietà anche su un sottoinsieme, il quale può divenire spazio vettoriale se strutturato con le medesime operazioni, e per il quale si parla di sottospazio vettoriale. Non è però necessario verificare tutte le proprietà di spazio vettoriale per il sottoinsieme: è sufficiente garantire la chiusura dell'insieme rispetto alle operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione per uno scalare. Tutte le proprietà di spazio vettoriale risultano automaticamente verificate in quanto valide per lo spazio totale. Possiamo allora dare la seguente definizione equivalente di sottospazio:

Definizione 3.11 *Un sottoinsieme U di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ è un* sottospazio vettoriale *se verifica le proprietà :*

1. *chiusura (algebrica) rispetto alla addizione fra vettori:*

$$x, y \in U \quad \Longrightarrow \quad x + y \in U \tag{3.8}$$

2. *chiusura (algebrica) rispetto alla moltiplicazione per uno scalare:*

$$\alpha \in \mathbb{K}\,, \quad x \in U \quad \Longrightarrow \quad \alpha x \in U\,. \tag{3.9}$$

Useremo la notazione $U < V$ per indicare che U è sottospazio di V (anche nel caso in cui $U = V$). Indicheremo con sottospazio proprio *un sottospazio diverso dallo spazio totale ($U \neq V$) e diverso dal sottospazio nullo $U \neq \{0\}$.*

Osservazione: La chiusura algebrica di cui sopra non è da confondere con la chiusura in senso topologico. Non abbiamo ancora introdotto alcuna topologia in uno spazio vettoriale.

È immediato verificare che, se abbiamo due sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di un medesimo spazio vettoriale V, la loro intersezione (non vuota in quanto contiene almeno il vettore nullo) risulta un sottospazio. Al minimo l'intersezione contiene solo il vettore nullo, nel qual caso diremo che i due sottospazi sono disgiunti, ma risulta in ogni caso un sottospazio. Per quanto riguarda l'unione, in generale l'unione di sottospazi non è più un sottospazio, ma si può sempre costruire un sottospazio che la contenga (vedi def. 3.14).

3.2.2 Dipendenze lineari e basi

Tramite le operazioni definite nello spazio vettoriale si possono costruire combinazioni lineari di vettori, generando nuovi vettori dipendenti dai precedenti. Sorge allora il problema di determinare dei criteri per stabilire se un vettore può essere o non essere esprimibile come combinazione lineare di altri vettori assegnati. Questo porta alla definizione rigorosa del concetto di dipendenza o indipendenza tra vettori.

Definizione 3.12 *Sia X uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Un insieme non vuoto $I \subset X$ di vettori non nulli è detto* linearmente indipendente *se l'annullarsi di una combinazione lineare* finita *di vettori arbitrari di I implica che i corrispondenti coefficienti della combinazione sono nulli:*

$$x_k \in I\ , \quad c_k \in \mathbb{K}\ , \quad k = 1, \cdots, n \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \quad \Longrightarrow \quad c_k = 0 \quad \forall\, k = 1, \cdots, n\ . \tag{3.10}$$

In altre parole, un insieme I di vettori è linearmente indipendente se non è possibile esprimere alcun vettore di I come C.L. finita di altri vettori di I.

Un insieme di vettori che non sia linearmente indipendente è detto *linearmente dipendente.*

Osservazione: Notiamo che non abbiamo posto alcuna condizione sulla cardinalità dell'insieme I: questo può quindi essere finito, infinito, numerabile o non numerabile, ma in ogni caso la verifica della dipendenza o indipendenza lineare coinvolge sempre un numero finito n di vettori.

Considerando i possibili sistemi di vettori linearmente indipendenti possiamo distinguere due situazioni:

- ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è limitato, cioè il numero massimo n di vettori linearmente indipendenti è finito. In questo caso si dice che lo spazio vettoriale ha dimensione finita pari a n;

- oppure esistono degli insiemi di vettori linearmente indipendenti formati da un numero arbitrariamente grande di elementi. In questo caso di parla di spazio vettoriale a infinite dimensioni.

Definizione 3.13 *Sia X uno spazio vettoriale. Un insieme di vettori $B \subset X$ è detto una* base (di Hamel) *se è un insieme linearmente indipendente massimale, ovvero tale che non può essere ingrandito con l'aggiunta di ulteriori vettori (senza perdere la proprietà di indipendenza lineare).*

Teorema 3.13 *Un sistema di vettori B è una base per uno spazio vettoriale X se e solo se B è formato da vettori linearmente indipendenti ed ogni $x \in X$ è esprimibile in modo univoco come combinazione lineare finita di elementi di B.*

Dimostrazione: Sia $B = \{e_\alpha \in X : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Se B è base, allora l'aggiunta di un qualsiasi vettore $x \in X$ a B rende l'insieme linearmente dipendente, quindi esistono degli scalari d e $d_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}$ non tutti nulli ed in numero finito tali che $dx + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} d_\alpha e_\alpha = 0$. Inoltre $d \neq 0$ altrimenti tutti i $d_\alpha = 0$. Vale allora

$$x = \sum_\alpha \frac{-d_\alpha}{d} e_\alpha =: \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha \, . \tag{3.11}$$

Si lascia per esercizio verificare che tale decomposizione è unica, ed anche verificare che dall'unicità della decomposizione (3.11) segue che B è base. C.V.D.

I coefficienti scalari c_α dello sviluppo (3.11) sono detti *componenti* di x lungo e_α.

OSSERVAZIONE: Notiamo che, in base alle definizioni poste, lo sviluppo (3.11) è una somma finita, quindi senza problemi di convergenza. Non possiamo considerare somme infinite, cioè serie, fino a quando non introduciamo una topologia nello spazio mediante la quale poter stabilire la convergenza. In seguito, dopo avere introdotto una topologia, potremo modificare il concetto di base (detta *di Schauder*), ammettendo anche un numero infinito di termini nelle somme.

Nel caso di spazi vettoriali finito-dimensionali, si dimostra che tutte le basi hanno la stessa cardinalità. Nel caso infinito dimensionale le cose si complicano. L'esistenza di una base è ancora garantita, ma trovarla può non essere semplice.

Teorema 3.14 *Ogni spazio vettoriale non nullo X ammette una base. Ogni sistema di vettori linearmente indipendenti, se non forma una base, può essere completato in modo da formare una base.*

Sia ora S un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale X. Se S non ha la struttura di spazio vettoriale, cioè S non è un sottospazio vettoriale, possiamo ricercare il minimo sottospazio vettoriale di X che contenga S

Definizione 3.14 *Sia $S \subset X$, con X spazio vettoriale. Definiamo* sottospazio vettoriale generato *da S l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali contenenti S:*

$$\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{U \supset S \\ U < X}} U \, . \tag{3.12}$$

Il sottospazio generato $\langle S \rangle$ è il minimo sottospazio vettoriale contenente S.

Una definizione alternativa è quella di definire $\langle S \rangle$ come l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di S:

$$\langle S \rangle = \Big\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^{n} c_k s_k \, , \quad c_k \in \mathbb{K} \, , \quad s_k \in S \, , \quad n \in \mathbb{N} \Big\} \tag{3.13}$$

Infatti l'insieme delle combinazioni lineari finite è sicuramente un sottospazio lineare contenente S e rientra tra i sottospazi U di cui si opera l'intersezione. D'altra parte ogni sottospazio contenente

S deve (essendo algebricamente chiuso) contenere una qualsiasi combinazione lineare finita di elementi di S. La caratterizzazione (3.13) risulta quindi il minimo sottospazio contenente S. Se l'insieme S è finito e contiene n elementi, allora è ovvio che $\langle S \rangle$ risulta finito-dimensionale e contiene al più n vettori linearmente indipendenti. Se S è infinito, ma in S possiamo trovare al più un numero finito n di vettori linearmente indipendenti, allora $\langle S \rangle$ risulta ovviamente a dimensione finita $\leq n$.

Per mettere in evidenza la generazione del sottospazio mediante combinazioni lineari di elementi di S si usa anche la notazione $\mathrm{Span}(S)$ per l'insieme (3.13). È facile dimostrare il seguente

Teorema 3.15 *Siano $S, T \subset X$. Allora:*

1. $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$
2. $S \subset T \implies \langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.

3.2.3 Somme dirette

In $\mathbb{R}^2$ (ed in $\mathbb{R}^3$) è molte volte comodo rappresentare un generico vettore come somma di due (o di tre) vettori appartenenti a direzioni prefissate, ad esempio i versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ diretti lungo gli assi x ed y (e z) di un riferimento cartesiano. E questa rappresentazione è unica, una volta fissate queste direzioni. Per spazi vettoriali generici possiamo definire un concetto sostanzialmente equivalente.

Definizione 3.15 *Sia X uno spazio vettoriale, ed $A, B < X$ due suoi sottospazi. Diremo che X è la* somma diretta *di A ed B, scrivendo*

$$X = A \oplus B \ , \tag{3.14}$$

se ogni elemento $x \in X$ può esprimersi univocamente come somma di un elemento $a \in A$ e di un elemento $b \in B$:

$$\forall x \in X \quad \exists!\, a \in A\ , \quad \exists!\, b \in B \quad : \quad x = a + b\ . \tag{3.15}$$

Il fatto che a e b debbano essere univocamente determinati da x implica che i due sottospazi siano disgiunti: $A \cap B = \{0\}$. Infatti se avessimo un vettore $x \neq 0$ nell'intersezione, allora potremmo rappresentarlo in infiniti modi, ad esempio con $a = \lambda x$, $b = (1 - \lambda)x$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.

Viceversa, se i due sottospazi sono disgiunti, la decomposizione è unica. Infatti se $x = a + b = a' + b'$ allora $a - a'$ (appartenente ad A) deve essere uguale a $b - b'$ (appartenente a B), e pertanto entrambi uguali a zero, da cui $a = a'$ e $b = b'$.

Due sottospazi ad intersezione nulla sono anche detti *linearmente indipendenti*.

La decomposizione di uno spazio nella somma diretta di due sottospazi può essere estesa alla somma diretta di più sottospazi $A_1, \cdots, A_n$

$$X = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n = \bigoplus_{k=1}^{n} A_k \tag{3.16}$$

qualora ogni vettore $x \in X$ possa essere decomposto univocamente come somma di vettori nei sottospazi:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \;, \qquad x_k \in A_k \;, \quad k = 1, \cdots, n \;. \tag{3.17}$$

In questo caso i sottospazi devono essere a due a due disgiunti: $A_k \cap A_m = \{0\}$ per ogni $k, m \in \{1, \cdots, n\}$, $k \neq m$.

Esempio: Sia $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale formato dalle funzioni reali di variabile reale, e definiamo i sottospazi

$$A_p = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\} \qquad\qquad A_d = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$$

costituiti dalle funzioni pari e dispari rispettivamente. Essi sono chiaramente disgiunti, poiché solo la funzione nulla è contemporaneamente pari e dispari. Ora, se f è una funzione arbitraria, possiamo decomporla come

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} =: f_p + f_d \;,$$

ottenendo la decomposizione $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = A_p \oplus A_d$.

Dato uno spazio vettoriale X ed un suo sottospazio proprio $A < X$ ($A \neq X$, $A \neq \{0\}$), ci si può chiedere se esista sempre un altro sottospazio $B < X$ tale che X sia la somma diretta di A e B. La risposta è affermativa:

Teorema 3.16 *Sia X spazio vettoriale e $A < X$ un suo sottospazio proprio. Allora esiste un sottospazio proprio $B < X$ tale che $X = A \oplus B$.*

Dimostrazione: Non la presentiamo per esteso, ne diamo le idee principali.
1) Si introduce in X la relazione di equivalenza per cui $x \sim x'$ se $x - x' \in A$.
2) Si considera l'insieme delle classi di equivalenza e lo si dota della struttura di spazio vettoriale nel modo naturale: ad esempio la somma di due classi di equivalenza è la classe di equivalenza della somma di due elementi delle classi. Questo spazio vettoriale si chiama *spazio vettoriale quoziente* e si indica con X/Y.
3) Si sceglie una base in X/Y (un insieme Λ di classi di equivalenza) e per ogni classe $\lambda \in \Lambda$ si sceglie un vettore $b_\lambda \in X$. Questi vettori sono linearmente indipendenti.
4) Il sottospazio generato dai b_λ è uno dei possibili sottospazi "supplementari": $B = \langle\{b_\lambda \in X : \lambda \in \Lambda\}\rangle$.
C.V.D.

3.2.4 Spazi normati

Abbiamo già definito nella sez. 1.2 il concetto di norma e spazio normato. In particolare, la condizione N_1 che stabilisce che $||x|| = 0 \iff x = 0$ è essenziale per poter definire una topologia di Hausdorff e quindi una metrica in cui valga D_1. Se tale condizione è eliminata, cioè se possono esistere vettori diversi da 0 con "norma" nulla, allora la funzione $|| \cdot ||$ è detta *seminorma* (e la indicheremo con $|| \cdot ||_{\mathrm{sn}}$).

ESEMPIO: Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si può definire una seminorma nel modo seguente:

$$||x||_{\mathrm{sn}} := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,.$$

È chiaro che tutti i vettori del tipo $(0, 0, x_3)$ hanno seminorma nulla.

ESEMPIO: Lo spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$ è seminormato, ed abbiamo accennato come, introducendo lo spazio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ delle classi di equivalenza di funzioni uguali quasi ovunque, si ottenga in tal modo uno spazio normato. Questa procedura è generalizzabile ad ogni spazio dotato di una seminorma.

Teorema 3.17 *Se $||\cdot||_{\mathrm{sn}}$ è una seminorma in uno spazo vettoriale X, l'insieme N dei vettori x tali che $||x||_{\mathrm{sn}} = 0$ forma un sottospazio vettoriale. È possibile definire una norma nello spazio vettoriale quoziente X/N assegnando ad ogni classe di equivalenza $[x]$ la funzione numerica*

$$||[x]|| := ||x||_{\mathrm{sn}}\,, \quad x \in [x]\,. \tag{3.18}$$

Dimostrazione: Anche per questo teorema, elenchiamo le idee principali della dimostrazione che lasciamo come esercizio.
1) Si dimostra che N è sottospazio vettoriale di X.
2) Si mostra che la definizione (3.18) è una buona definizione, cioè non dipende dal rappresentante x della classe $[x]$.
3) Si fa vedere che la norma sulle classi eredita le proprietà N_0, N_2 e N_3 della seminorma.
4) Si verifica che solo la classe di equivalenza $[0]$ dell'elemento nullo ha norma 0. C.V.D.

Avendo introdotto una topologia tramite la norma dei vettori, sorge ora immediata la questione della completezza di tale spazio. La proprietà per uno spazio vettoriale normato di essere completo è così importante da meritare un nome tutto particolare: quello di un matematico polacco che viene considerato il fondatore dell'analisi funzionale.

Definizione 3.16 *Uno spazio vettoriale normato completo è detto* spazio di Banach.

ESEMPIO: Abbiamo visto che $C([a, b])$ con la sup-norma è spazio metrico completo. Essendo anche spazio normato, esso è di Banach. Invece lo stesso spazio di funzioni con la p-norma è normato ma non completo.

Abbiamo visto che uno spazio metrico non completo può sempre essere completato considerando l'insieme delle successioni di Cauchy. Uno spazio normato risulta metrico, per cui esiste un completamento anche per uno spazio normato. In più , essendo lo spazio originale normato, è possibile rendere normato anche il completamento.

Teorema 3.18 *Uno spazio normato non completo X ammette sempre come completamento uno spazio di Banach $\tilde{X}$.*

Dimostrazione: La costruzione del completamento avviene nello stesso modo del completamento come spazio metrico. Per completare la dimostrazione basta mostrare che
1) $\tilde{X}$ è spazio vettoriale;
2) la norma in X può essere estesa ad una norma in $\tilde{X}$ (la quale induce la distanza estesa a $\tilde{X}$);
3) $\tilde{X}$ è spazio normato completo rispetto alla nuova norma.

3.2.5 Serie infinite di vettori

Mediante una topologia abbiamo ovviamemente ben definito il concetto di convergenza, ed in particolare possiamo definire la convergenza di una serie infinita di vettori in uno spazio normato:

Definizione 3.17 *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di vettori nello spazio normato $(X, ||\cdot||)$. Diciamo che la* serie *di vettori della successione (x_n), che indichiamo con*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots \ , \tag{3.19}$$

converge in norma ad $s \in X$ se converge ad s (nella topologia indotta dalla norma) la successione delle ridotte:

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} x_n \ , \qquad ||S_N - s|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ . \tag{3.20}$$

Ovviamente, quando siamo in uno spazio di Banach, se la successione delle ridotte è di Cauchy, la serie converge.

Per una serie possiamo anche parlare di convergenza assoluta:

Definizione 3.18 *Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è detta* assolutamente convergente *se è convergente in $\mathbb{R}$ la serie delle norme dei vettori x_n:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| < \infty \ . \tag{3.21}$$

Se ci troviamo in uno spazio di Banach, la disuguaglianza triangolare garantisce che una serie assolutamente convergente converge in norma. Infatti se consideriamo il criterio di Cauchy per la serie, abbiamo (assumendo $n > m$):

$$||S_n - S_m|| = \left|\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{m} x_k\right|\right| = \left|\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{n} ||x_k||$$

che tende a zero in $\mathbb{R}$ per $n, m \to \infty$.

Il legame tra la convergenza assoluta e la convergenza in norma per le serie di vettori può in realtà costituire un criterio di convergenza alternativo a quello di Cauchy:

Teorema 3.19 *Uno spazio normato X è completo, cioè di Banach, se e solo se ogni serie assolutamente convergente risulta convergente.*

Su un medesimo spazio vettoriale possiamo introdurre diverse norme, ognuna delle quali determina una propria metrica e una corrispondente topologia. Se le due topologie sono uguali (ogni aperto di una topologia è un aperto anche dell'altra) allora le due norme sono dette equivalenti.

Definizione 3.19 *Sia X uno spazio vettoriale. Due norme su X sono dette* equivalenti *se inducono la medesima topologia.*

Ci si può porre il problema di individuare un criterio per stabilire se due norme sul medesimo spazio vettoriale X siano equivalenti.

Teorema 3.20 *Due norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$, definite sul medesimo spazio vettoriale X, sono equivalenti se e solo se esistono due costanti $a, b > 0$ tali che*

$$a||x||_1 \leq ||x||_2 \leq b||x||_1 \qquad \textit{per ogni } x \in X \ . \tag{3.22}$$

Teorema 3.21 *In uno spazio vettoriale finito-dimensionale X è sempre possibile definire una norma, e tutte le norme sono equivalenti tra loro.*

Esercizio: Si considerino in $\mathbb{R}^n$ le seguenti norme per il generico vettore $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||x||_1 &:= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ ||x||_2 &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \\ ||x||_\infty &:= \max_k |x_k| \ . \end{aligned}$$

Per ogni coppia di norme, si calcolino le costanti a, b menzionate nel teorema 3.20. In $\mathbb{R}^2$ si mostri graficamente che ogni palla in una data norma contiene una palla in un'altra norma.

3.2.6 Complementi sugli spazi L^p

Nella sezione 2.4.4 abbiamo introdotto gli spazi L^p costituiti dalle funzioni per le quali esiste l'integrale della potenza p-esima del modulo, ed abbiamo affermato che gli spazi per $1 \leq p \leq \infty$ sono normati rispetto alla p-norma. In questa sezione dimostreremo questo fatto.

Proposizione 3.22 *Per ogni $p > 0$ lo spazio L^p è spazio vettoriale.*

Dimostrazione: L'insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ è spazio vettoriale, di cui L^p costituisce un sottoinsieme proprio. Per dimostrare che è un sottospazio vettoriale, è sufficiente dimostrare che L^p è chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari (il che è ovvio) e che è chiuso rispetto alla somma, cosa che ora dimostriamo. Siano quindi $f, g \in L^p$, e consideriamo prima il caso $p \geq 1$. La sommabilità di $f + g$ è evidente dalla disuguaglianza

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1}\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) \qquad (p \geq 1) \ , \tag{3.23}$$

conseguenza della convessità della funzione $t \mapsto t^p$ per $t \geq 0$. Infatti, se a, b sono numeri positivi, la convessità della potenza p-esima implica che tale funzione nel punto medio sia inferiore (o al più uguale) alla media dei valori agli estremi:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{2} \qquad (p \geq 1) \ ,$$

da cui la disequazione (3.23).

Una disuguaglianza meno stringente, ma valida anche per $0 < p < 1$, e utile allo stesso scopo è

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big) \ ,$$

conseguenza della monotonicità della potenza p-esima:

$$\frac{a+b}{2} \leq \max\{a,b\} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \big(\max\{a,b\}\big)^p \leq a^p + b^p \; .$$

In quanto segue saremo interessati principalmente al caso $p \geq 1$, per il quale L^p risulta uno spazio di Banach. Per dimostrare che la $||\cdot||_p$ è effettivamente una norma, premettiamo il

Lemma 3.23 *Siano a, b, p, q numeri reali positivi tali che $a, b \geq 0$ e*

$$1 < p, q < \infty \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \; . \tag{3.24}$$

Allora vale la disuguaglianza

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{3.25}$$

e l'uguaglianza vale solo se $a^p = b^q$.

Dimostrazione: Osserviamo preliminarmente che l'eq. (3.24) è equivalente a $q = \frac{p}{p-1}$. Consideriamo poi la funzione

$$a \mapsto f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \; ,$$

con b, p, q fissi ed a variabile indipendente. Da un rapido studio di questa funzione ricaviamo che

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{b^q}{q} > 0 \\
f'(a) &= a^{p-1} - b \qquad \Longrightarrow \qquad f'(a) = 0 \iff b = a^{p-1} \iff b^q = a^p \\
f''(a) &= (p-1)a^{p-2} \geq 0 \qquad \text{per ogni } a \geq 0 \\
f_{\min} &= f\big(b^{q/p}\big) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) b^q - b^{\frac{q}{p}+1} = b^q - b^q = 0 \; ,
\end{aligned}$$

per cui $f(a) \geq 0$ per ogni a positivo e risulta dimostrata la disuguaglianza (3.25) con il particolare caso di uguaglianza.

Teorema 3.24 (disuguaglianza di Hölder) *Siano p, q reali con $1 \leq p, q \leq \infty$ tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \; .$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ allora il prodotto $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q \; . \tag{3.26}$$

Dimostrazione: Per il lemma precedente 3.23 sappiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \; ,$$

se $1 < p < \infty$. Questa disuguaglianza implica la sommabilità di fg, visto che l'integrale del secondo membro esiste per ipotesi. Integrando su $\mathbb{R}^n$ otteniamo

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \int |f|^p + \frac{1}{q} \int |g|^q \quad \Longrightarrow \quad ||fg||_1 \leq \frac{||f||_p^p}{p} + \frac{||g||_q^q}{q}$$

che possiamo applicare alle funzioni normalizzate a uno $f/||f||_p$ e $g/||g||_q$

$$\left|\left|\frac{f}{||f||_p}\frac{g}{||g||_q}\right|\right|_1 \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

da cui la disuguaglianza di Hölder (3.26).

Se $p=1$ e quindi $q=\infty$, abbiamo che fg è il prodotto di una funzione sommabile per una funzione (essenzialmente) limitata:

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\,||g||_\infty \quad \text{quasi ovunque} \quad \Longrightarrow \quad ||fg||_1 = \int |fg| \leq ||g||_\infty \int |f| = ||g||_\infty ||f||_1$$

e analogamente nel caso $p=\infty$ e quindi $q=1$. C.V.D.

Osservazione: Nel caso $p=2=q$ la disuguaglianza di Hölder è nota anche col nome di *disuguaglianza integrale di Schwarz*, e generalizza al caso infinito-dimensionale l'omonima disuguaglianza in $\mathbb{R}^n$.

Siamo ora in grado di mostrare la disuguaglianza triangolare che ci permette di affermare che la funzione $||\cdot||_p$ è effettivamente una norma:

Teorema 3.25 (disuguaglianza di Minkowski) *Per ogni $f,g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1\leq p\leq\infty$ vale*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p\,. \tag{3.27}$$

Dimostrazione: Se $p=1$ oppure $p=\infty$, la disuguaglianza è banale e deriva dal fatto che il modulo della somma di due numeri è minore o uguale alla somma dei due moduli.

Sia pertanto $1<p<\infty$, $f,g\in L^p$ e quindi $f+g\in L^p$. Vale

$$\int |f+g|^p = \int |f+g|\,|f+g|^{p-1}\,.$$

Ora, se $|f+g|\in L^p$, allora $|f+g|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}=L^q$ con $q=p/(p-1)$ ossia $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Quindi possiamo applicare la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned}
||f+g||_p^p &\leq \int |f|\,|f+g|^{p-1} + \int |g|\,|f+g|^{p-1} \leq ||f||_p\,||\,|f+g|^{p-1}||_q + ||g||_p\,||\,|f+g|^{p-1}||_q \\
&= \big(||f||_p+||g||_p\big)\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = \big(||f||_p+||g||_p\big)\left(\int |f+g|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \big(||f||_p+||g||_p\big)||f+g||_p^{p-1}\,.
\end{aligned}$$

Dividendo per $||f+g||_p^{p-1}$ otteniamo la disuguaglianza di Minkowski (3.27), cioè la disuguaglianza triangolare per la norma-p. C.V.D.

Teorema 3.26 *Sia p reale con $1\leq p<\infty$. Allora lo spazio $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ è separabile.*

Dimostrazione: Lo spazio delle funzioni a scalino a supporto compatto $S_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, e lo spazio delle funzioni a scalino a valori razionali $S_c(\mathbb{Q}^n,\mathbb{Q})$ i cui punti di discontinuità hanno coordinate razionali è denso in $S_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Ma $S_c(\mathbb{Q}^n,\mathbb{Q})$ è un insieme numerabile, quindi $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ è separabile. Un ragionamento del tutto analogo vale per $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$. C.V.D.

3.2.7 Gli spazi l^p

Accanto agli spazi di funzioni L^p sommabili in modulo alla p, sono spesso considerati gli spazi di successioni l^p sommabili in modulo alla p:

$$l^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\} . \tag{3.28}$$

Questo insieme diviene uno spazio normato completo con la norma

$$||x||_p := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p} , \qquad (x_n) \in l^p . \tag{3.29}$$

Infatti, possiamo pensare ad una successione in l^p come ad una funzione che nell'intervallo reale $[n, n+1[$ assume il valore costante x_n. In questo caso la condizione (3.28) coincide con la (2.69), e la norma (3.29) coincide con quella dell'eq. (2.70).

Pertanto, possiamo estendere tutte le proprietà valide per le funzioni L^p alle successioni l^p, in particolare la disuguaglianza di Hölder, la disuguaglianza di Minkowski e la completezza.

Inoltre, se $1 \leq p < \infty$, gli spazi l^p sono separabili.

Riferimenti ed approfondimenti

Gli argomenti di questo capitolo sono generalmente esposti in testi di analisi matematica (p.es. [DM1]), geometria (p.es. [Rub]) e analisi funzionale (p.es. [BaNa]). Si consiglia anche la lettura di [Cic] e delle dispense [Ort, Mar].