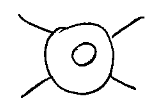
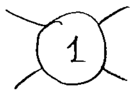
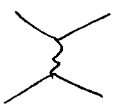
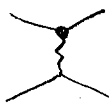
Mettendo assieme l'ampiezza di Born con le correzioni virtuali $\mathcal{O}(\alpha)$ troviamo, per $\bar{e}\nu \to \bar{e}\nu$

$\mathcal{M}_R^{el} = \sqrt{R_\psi}^{\,2} \sqrt{R_\nu}^{\,2}$ [ + ]

$= R_\psi$ {  +  +  }

$$= (1+\delta R_\psi)\, \bar{u}_2(-ig)\left[\gamma^\mu(1+\delta F_1(q^2)) - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2\right]u_1 \frac{-i}{q^2-M_Z^2}\bar{u}_B(-ig\gamma_\mu)u_A$$

$$= \underbrace{(1+\delta R_\psi)}_{\text{divergente IR}}\, \mathcal{M}^{(0)}\underbrace{[1+\delta F_1(q^2)]}_{\text{divergente IR}} + \underbrace{g^2 q_\nu F_2}_{\mathcal{O}(\alpha)} \underbrace{\frac{\bar{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1\, \bar{u}_B\gamma_\mu u_A}{q^2-M_Z^2}}_{\text{finita}} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Osserviamo che le divergenze IR (come erano le UV) sono presenti solamente mediante termini che moltiplicano $\mathcal{M}^{(0)} = \bar{u}_2(-ig\gamma^\mu)u_1 \dfrac{-ig_{\mu\alpha}}{q^2}\bar{u}_B(-ig\gamma^\alpha)u_A$ (qui tali termini sono R_ψ e $\delta F_1(q^2)$):

$$\mathcal{M}_R^{el} = \mathcal{M}^{(0)}(1+\underbrace{\delta R_\psi}_{\mathcal{O}(\alpha)})(1+\underbrace{\delta F_1(q^2)}_{\mathcal{O}(\alpha)}) + \underbrace{\mathcal{M}^{(1)}_{finita}}_{\mathcal{O}(\alpha)}$$

$$= \mathcal{M}^{(0)}\Big[1+\underbrace{\delta R_\psi + \delta F_1(q^2)}\Big] + \mathcal{M}^{(1)}_{finita} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$-\frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{\beta_{12}}\ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} - 2\right]\ln\frac{m^2}{\lambda^2} + \text{costanti}$$

da δR nello schema $\overline{MS}$
da δF_1 nello schema on-shell

La divergenza IR non dipende dallo schema di rinormalizzazione

Questa proprietà è una conseguenza diretta dell'identità di Ward:

$$\frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial p_\mu} = -\Lambda^\mu(p,p) \quad \Leftarrow \frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{1}{\hat{p}-m} = -\frac{1}{\hat{p}-m}\gamma^\mu\frac{1}{\hat{p}-m}$$

Possiamo quindi legare R_ψ a δF_1:

Esaminiamo l'inverso del propagatore rinormalizzato

$$i\left[G_{R\psi}(p)\right]^{-1} = \hat{p} Z_2 - m_R - \delta m - \Sigma(\hat{p}) = R_\psi^{-1}(\hat{p}-m_F) + \mathcal{O}(\hat{p}-m_F)^2$$

Deriviamo rispetto a p_μ:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} i\left[G_{R\psi}\right]^{-1} = \gamma^\mu Z_2 - \frac{\partial \Sigma}{\partial p_\mu} = R_\psi^{-1}\gamma^\mu + \mathcal{O}(\hat{p}-m_F)$$

$$\overset{\text{ID. WARD}}{=} \gamma^\mu Z_2 + \Lambda^\mu(p,p) \quad \Rightarrow q=0$$

Inserendo queste uguaglianze tra due spinori on-shell otteniamo $R_\psi^{-1} = Z_2 + \delta \hat{F}_1(0) \overset{\text{ID. WARD}}{=} Z_1 + \delta \hat{F}_1(0)$

da cui, ad $\mathcal{O}(\alpha)$, $\quad \delta R_\psi + \delta_1 + \delta \hat{F}_1(0) = 0$

Ricaviamo così che la correzione $\mathcal{O}(\alpha)$ al fattore virtuale infrarosso

$$IR = \delta F_1(q^2) + \delta R_\psi = \delta F_1(q^2) - \left(\delta_1 + \delta \hat{F}_1(0)\right)$$

$$= \delta F_1(q^2) - \delta F_1(0) \quad \text{o anche} = \delta \hat{F}_1(q^2) - \delta \hat{F}_1(0)$$

indipendente dallo schema di fattorizzazione.

Procediamo al calcolo della <u>sezione d'urto elastica</u> all'ordine sottodominante (next-to-leading) NLO:

$$d\sigma^{(0+1)}_{2\to 2} = \frac{1}{\mathcal{F}}\overline{|\mathcal{M}_{el}|^2}\, d\Phi_2$$

$$\overline{|\mathcal{M}_{el}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{polar.}\left|\mathcal{M}^{(0)}\left[1+\delta F_1(q^2)-\delta F_1(0)\right] + \mathcal{M}^{(1)}_{finita}\right|^2$$

$$= \overline{|\mathcal{M}^{(0)}|^2}\left\{1+2\,\mathrm{Re}\left[\delta F_1(q^2)-\delta F_1(0)\right]\right\} + \frac{1}{4}\sum_{pol} 2\,\mathrm{Re}\left[\mathcal{M}^{(0)}\mathcal{M}^{(1)}_{finita}\right]$$

$$\Rightarrow d\sigma^{(0+1)}_{2\to 2} = d\sigma^{(0)}_{2\to 2}\left\{1+\underbrace{2\,\mathrm{Re}\left[\delta F_1(q^2)-\delta F_1(0)\right]}\right\} + d\sigma^{(1)}_{2\to 2,\, finita}$$

$$K_V = -\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\beta_{12}}\ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}-2\right]\ln\frac{m^2}{\lambda^2} \quad \text{diverg. IR}$$

La sezione d'urto elastica $O(\alpha)$ si conferma pertanto divergente nel limite $\lambda\to 0$, e può essere addirittura negativa per λ sufficientemente piccoli.
Questo significa che stiamo facendo qualche errore grosso!

Dal punto di vista sperimentale, ogni rivelatore di fotoni presenta una soglia di energia Δ tale per cui fotoni di energia $\omega_k < \Delta$ non sono osservati.

Pertanto, se vogliamo calcolare la sezione d'urto del processo elastico $e\nu\to e\nu$, dobbiamo anche includere la <u>sezione d'urto ANELASTICA</u> in cui vengono prodotti fotoni di energia $\omega_k<\Delta$ (fotoni soffici):

$$d\sigma_{2\to 2+\gamma} \simeq d\sigma^{(0)}_{2\to 2}\cdot K_R \quad \text{ove} \quad K_R = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{\beta_{12}}\ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}-2\right]\ln\frac{\Delta^2}{\lambda^2}$$

In questo modo, la <u>sezione d'urto osservabile</u> NLO

$$d\sigma_{oss.} = d\sigma^{(0+1)}_{2\to 2} + d\sigma_{2\to 2+\gamma} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$= d\sigma^{(0)}_{2\to 2}\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{\beta_{12}}\ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} - 2\right)\ln\frac{\Delta^2}{m^2}\right] + d\sigma^{(1)}_{2\to 2,\ \text{finite}} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

non dipende più dalla massa fittizia λ del fotone, introdotta per regolarizzare gli integrali divergenti IR, ed è quindi IR finita, in ogni schema di rinormalizzazione, grazie all'identità di Word.

Evidentemente la sezione d'urto dipende dalla risoluzione sperimentale del rivelatore, infatti se Δ cresce stiamo includendo un maggior numero di stati finali nel nostro osservabile, e di conseguenza la sezione d'urto aumenta.

Viceversa se Δ decresce, la sezione d'urto cala.

Tuttavia, diminuendo Δ sempre di più, la sezione d'urto calcolata diventa sempre più piccola, e può diventare anche negativa, tendendo a $-\infty$ per $\Delta \to 0$. Qui il metodo perturbativo non funziona più.

Chiaramente $\Delta \to 0$ significa escludere l'emissione reale, e questo riporta a galla le divergenze IR.

Il fatto però che $\sigma < 0$ per Δ finiti (sufficientemente piccoli) è un problema serio.

La sua soluzione sta nell'includere i contributi alla sezione d'urto generati dagli ordini perturbativi superiori, come vedremo.

RIF: Peskin Schröder capp. 6,7
Weinberg capp. 10,13

DOPPIO LOG DI SUDAKOV

Consideriamo la reazione $e\nu \to e\nu$ nel limite di grande energia e momento trasferito: $s > |t| = |q^2| \gg m^2$:
quindi "grande" è inteso rispetto alla massa m.

$$\beta_{12} \sim 1 - 2\frac{m^4}{q^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta_{12}} \ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} \sim 2\ln\frac{|q^2|}{m^2}$$

cioè il coefficiente del logaritmo soffice cresce logaritmicamente in $|q^2|/m^2$.

In realtà, l'approssimazione soffice va bene fino ad energie $\omega_k^2 \lesssim |q^2|$, non solo $\omega_k^2 \lesssim m^2$

Quindi la sezione d'urto osservabile si può stimare rimpiazzando $\ln\frac{\Delta^2}{m^2} \to \ln\frac{\Delta^2}{|q^2|}$ (*)
a meno di termini sottodominanti:

$$d\sigma_{oss}^{(0+1)} \sim d\sigma_{2\to 2}^{(0)} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{|q^2|}{\Delta^2} + \mathcal{O}(\alpha \ln|q^2|)\right]$$

OSSERVAZIONE: Per $m \to 0$ $d\sigma_{oss}$ diverge a causa di singolarità collineari

(*) In pratica, la funzione finita $\mathcal{F}(\frac{q^2}{m^2})$ (che non abbiamo calcolato) cresce logaritmicamente per $|q^2| \gg m^2$ in modo da cambiare la scala del logaritmo da m^2 a $|q^2|$.

Questo comportamento doppio-logaritmico in $|q|^2$ è tipico delle teorie di gauge, ed è stato ricavato per la prima volta da Sudakov.

REGOLARIZZAZIONE DIMENSIONALE PER LE DIVERGENZE INFRAROSSE

Effettuare i calcoli in dimensione generica $D \neq 4$ ci permette, con qualche accorgimento, di regolarizzare simultaneamente sia le divergenze UV che quelle IR, senza la necessità del taglio λ (massa fittizia del fotone).

EMISSIONE REALE: $\displaystyle\int_0^{\Delta} d\tilde{k} \cdot \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\lambda}^{\Delta} \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\Omega_k}{4\pi} = \frac{1}{(2\pi)^2} \ln\frac{\Delta}{\omega}$

diventa
$$\mu^{2\varepsilon} \int_0^{\Delta} \frac{d\omega\, \omega^{D-2}\, d\Omega_{D-2}}{(2\pi)^{D-1} 2\omega} \cdot \frac{1}{\omega^2} = \frac{\int d\Omega_{2-2\varepsilon}}{2(2\pi)^{3-2\varepsilon}} \underbrace{\int_0^{\Delta} d\omega \frac{\mu^{2\varepsilon}}{\omega^{1+2\varepsilon}}}_{-\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\mu^2}{\Delta^2}\right)^{\varepsilon}}$$

integrale angolare "simile" a quello con $\varepsilon = 0$, con correzioni $[1 + \mathcal{O}(\varepsilon)]$

purchè $\varepsilon < 0$!

$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ convergenza nell'UV

$\varepsilon < 0 \Rightarrow$ convergenza nell'IR

La divergenza IR $\quad \ln\frac{\Delta^2}{\lambda^2} \longrightarrow \frac{1}{-\varepsilon}\left(\frac{\mu^2}{\Delta^2}\right)^{\varepsilon} \simeq \frac{1}{-\varepsilon} + \ln\frac{\Delta^2}{\mu^2}$

EMISSIONE VIRTUALE

$\displaystyle\int \frac{d^D k}{K^4} \to \frac{1}{\varepsilon_{UV}}$ e poi $\displaystyle\int_0^1 dx\, x^{-1-2\varepsilon} \to \frac{1}{-\varepsilon_{IR}}$

parametro di Feynman

In altri casi, quando $\int d^D k$ diverge UV e IR,

si separano $|K| \gtrless \mu$: $\displaystyle\underbrace{\int_{\mu}^{\infty} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}}}_{(\varepsilon>0)} + \underbrace{\int_0^{\mu} \frac{dk}{k^{1+2\varepsilon}}}_{(\varepsilon<0)} \sim \frac{1}{\varepsilon_{UV}} + \frac{1}{-\varepsilon_{IR}}$