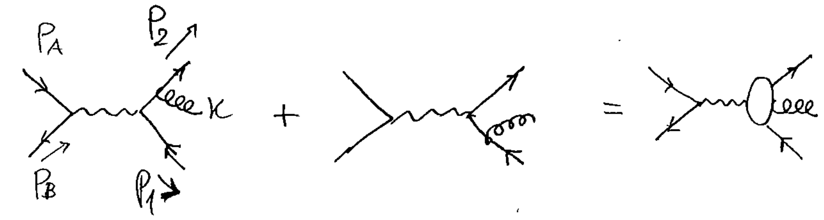
EMISSIONE DI GLUONI REALI

Teniamo ora in conto l'emissione di una particella aggiuntiva rispetto alla coppia $q\bar{q}$.

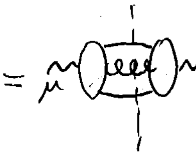
Limitatamente a particelle con interazione forte (QCD), questa non può essere che un gluone, emesso dalla linea dei quark:

$e^+e^- \to q\bar{q}g$; $iM =$ 

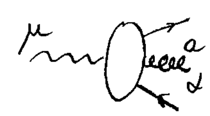
Vogliamo mostrare che la sezione d'urto totale $\mathcal{O}(\alpha_s)$, che include sia le correzioni virtuali sia quelle reali, è finita, cioè non presenta divergenze.

Vale sempre la decomposizione (ad $\mathcal{O}(\alpha^2)$ cioè per $e^+e^- \to \gamma^* \to X$)

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} L^{\mu\nu}(p_A, p_B) \frac{e^4}{(q^2)^2} H_{\mu\nu}(p_1, p_2, k)$$

$H_{\mu\nu} =$ 

$$= \sum_{c_1 c_2} T^a_{c_2 c_1} \left(T^a_{c_2 c_1}\right)^* \mathrm{Tr}\left[\hat{p}_2 \, \underbrace{S^\alpha_\mu}_{} \, \hat{p}_1 \, S^{\beta\dagger}_\nu\right] \overbrace{\sum_\lambda \overset{*}{\varepsilon}_\alpha(k,\lambda)\, \varepsilon_\beta(k,\lambda)}^{-g_{\alpha\beta} + \text{term. gauge}}$$

essendo 

$$= T^a_{c_2 c_1} \bar{u}_2 \Bigg[\underbrace{\gamma^\alpha \frac{\hat{p}_2 + \hat{k}}{(p_2+k)^2} \gamma_\mu}_{\text{parte (2)}} + \underbrace{\gamma_\mu \frac{(-\hat{p}_1 - \hat{k})}{(p_1+k)^2} \gamma^\alpha}_{\text{parte (1)}} \Bigg] v_1 \, \overset{*}{\varepsilon}_\alpha(k,\lambda)$$

Il fattore di colore è

$$\sum_{c_1 c_2} T^a_{c_2 c_1} \left(T^{a\dagger}\right)_{c_1 c_2} = \mathrm{tr}\left(T^a T^a\right) = \begin{cases} \mathrm{tr}(C_F \mathbb{1}_{N_c}) = N_c C_F \\ T_R \, \delta^{aa} = \frac{1}{2}(N_c^2 - 1) \end{cases}$$

Poiché S^α_μ è la somma di due termini, $H_{\mu\nu}$ è dato dalla somma di 4 termini:

- $$H_{\mu\nu}^{(11)} = -N_c C_F \frac{\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_2 \gamma_\mu (\hat{P}_1+\hat{K})\gamma^\alpha \hat{P}_1 \gamma_\alpha (\hat{P}_1+\hat{K})\gamma_\nu\right]}{(2P_1\cdot K)^2}$$

la cui traccia è

$$\mathrm{Tr}^{(11)} = (2-D)\,\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_2\gamma_\mu(\cancel{\hat{P}_1}+K)\hat{P}_1(\cancel{\hat{P}_1}+\hat{K})\gamma_\nu\right] = \quad (\hat{P}_1^2=0)$$

$$= (2-D)\,\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_2\gamma_\mu \underbrace{\hat{K}\,\hat{P}_1\,\hat{K}}_{\{\ ,\ \}}\gamma_\nu\right] = \quad (\hat{K}^2=0)$$

$$= (2-D)\,2P_1\cdot K\ \mathrm{Tr}\left[\hat{P}_2\gamma_\mu\hat{K}\gamma_\nu\right]$$

$$\Rightarrow H_{\mu\nu}^{(11)} = N_c C_F \frac{(D-2)\,4}{2P_1\cdot K}\left(P_{2\mu}K_\nu + K_\mu P_{2\nu} - P_2\cdot K\, g_{\mu\nu}\right)$$

- $$H_{\mu\nu}^{(22)} = H_{\nu\mu}^{(11)}\Big|_{\substack{P_1\to -P_2\\ K\to -K}} = H_{\mu\nu}^{(11)}\Big|_{P_1\to P_2}$$

- $$H_{\mu\nu}^{(12)} = +N_c C_F \frac{\mathrm{Tr}\left[\hat{P}_2\gamma_\mu(\hat{P}_1+\hat{K})\gamma^\alpha\hat{P}_1\gamma_\nu(\hat{P}_2+\hat{K})\gamma_\alpha\right]}{2P_1\cdot K\ \ 2P_2\cdot K}$$

$$= H_{\nu\mu}^{(21)}\Big|_{\substack{P_1\leftrightarrow -P_2\\ K\to -K}} = H_{\nu\mu}^{(21)}\Big|_{P_1\leftrightarrow P_2}$$

Prima di procedere al calcolo esplicito, ricordiamoci che il nostro scopo attuale è il calcolo della sezione d'urto totale, quindi dovremo integrare $L^{\mu\nu}H_{\mu\nu}$ nello spazio delle fasi di tutte le particelle finali P_1, P_2, K, a fisso q.

$L^{\mu\nu}(P_A, P_B)$ non dipende dagli impulsi finali.

Si tratta pertanto di calcolare il tensore

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(q) := \int d\Phi(p_1,p_2,k)\; H_{\mu\nu}(p_1,p_2,k)$$

che dipende solamente dall'impulso totale q.

Poiché $H_{\mu\nu}$ è conservato e simmetrico: $q^\mu H_{\mu\nu} = 0$

anche $\mathcal{H}_{\mu\nu}$ è conservato e simmetrico: $q^\mu \mathcal{H}_{\mu\nu} = 0$

Pertanto, per l'invarianza rispetto a trasf. di Lorentz

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(q) = \underbrace{\mathcal{H}(q^2)}_{\text{funzioni scalari di } q^2}\, q_\mu q_\nu + \underbrace{\tilde{\mathcal{H}}(q^2)}\, g_{\mu\nu}$$

e, per la conservazione, $\tilde{\mathcal{H}} = -q^2 \mathcal{H}$, quindi

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(q) = \left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right) \mathcal{H}(q^2)$$

È quindi sufficiente per il nostro scopo calcolare $\mathcal{H}(q^2)$, che si ottiene da $\mathcal{H}_{\mu\nu}$ contraendolo p. es. con $g^{\mu\nu}$: $\quad g^{\mu\nu}\mathcal{H}_{\mu\nu} = q^2 (1-D)\, \mathcal{H}(q^2)$

Riassumendo, la sezione d'urto totale di produzione $e^+e^- \to q\bar{q}g$ è

$$\underline{\sigma_{e^+e^-\to q\bar q g}} = \frac{1}{2S}\int d\Phi_3\, \frac{e^4}{4S^2} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{e^4}{8S^3} L^{\mu\nu}\mathcal{H}_{\mu\nu}(q)$$

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}\mathcal{H}_{\mu\nu} &= L^{\mu\nu}\left(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}\right)\mathcal{H}(q^2) \\
&= L^{\mu\nu}\left(\cancel{q_\mu q_\nu} - q^2 g_{\mu\nu}\right) \times \frac{g^{\alpha\beta}\mathcal{H}_{\alpha\beta}}{q^2(1-D)} \\
&\overset{!}{=} \frac{g_{\mu\nu}L^{\mu\nu}}{D-1} \times \int d\Phi_3\, g^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

L conservato

Il guadagno di questa manipolazione è che
$\int d\Phi_3\, g^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$ è molto più semplice di $\int d\Phi_3\, L^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$.

Per esempio $g^{\alpha\beta} H^{(11)}_{\alpha\beta} = N_c C_F \dfrac{2(D-2)}{P_1\cdot K} \; P_2\cdot K\,(2-D)$

Anche gli altri contributi si esprimono in funzione dei prodotti scalari $P_1\cdot K$, $P_2\cdot K$, $P_1\cdot P_2$.

È conveniente usare, al posto di questi prodotti scalari, le variabili adimensionali $x_i := \dfrac{2P_i\cdot q}{q^2}$

che, nel SDR del CM in cui $\longrightarrow \begin{cases} q = (\sqrt{s},0,0,0) \\ P_A = \left(\frac{\sqrt{s}}{2},0,0,\frac{\sqrt{s}}{2}\right) \\ P_B = \left(\frac{\sqrt{s}}{2},0,0,-\frac{\sqrt{s}}{2}\right) \end{cases}$

$$x_1 = \frac{2P_1\cdot q}{s} = \frac{2E_1\sqrt{s}}{s} = \frac{E_1}{\sqrt{s}/2} = \frac{E_1}{E_A}$$

$$x_2 = \frac{2P_2\cdot q}{s} = \frac{E_2}{\sqrt{s}/2} = \frac{E_2}{E_A}$$

$$x_3 = \frac{2K\cdot q}{s} = \frac{E_K}{\sqrt{s}/2} = \frac{E_3}{E_A}$$

Quindi le x_i sono le frazioni di energia delle particelle uscenti rispetto a quelle entranti

Esercizio: dimostrare che $0 \le x_i \le 1$.

" " $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ (solo 2 sono indipend.)

In termini di queste variabili si calcola (vedi pag. 5)

$$g^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} = -8 N_c C_F (1+\varepsilon)\, \frac{x_1^2 + x_2^2 + \varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$g_{\mu\nu} L^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\, 4\left(P_A^\mu P_B^\nu + P_B^\mu P_A^\nu - g^{\mu\nu} P_A\cdot P_B\right) = -4(1-\varepsilon)s$$