Capitolo 8

Date: 2021-03-31 13:05 +0200 Revision: 325 : e4130306dc3b

Funzioni di una variabile complessa

8.1 Funzioni olomorfe

Tratteremo in questo capitolo la teoria delle funzioni di variabile complessa a valori complessi, cioè le $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Siccome il campo dei complessi $\mathbb{C}$ è spazio topologico e normato con la norma del modulo, come il campo dei reali $\mathbb{R}$, molte definizioni e proprietà stabilite per le funzioni reali si mantengono valide per le funzioni complesse. In particolare le definizioni di continuità, derivabilità e integrale sono formalmente analoghe al caso reale, così come alcune delle proprietà delle operazioni di derivazione ed integrazione. Tuttavia, la natura bidimensionale di $\mathbb{C}$ pensato come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale comporta delle condizioni molto stringenti sulle possibili funzioni differenziabili, ed al tempo stesso induce su tali funzioni delle proprietà assai notevoli, come vedremo.

Sia quindi $D \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ nel quale è definita la funzione $f : D \to \mathbb{C}$. Possiamo scomporre un qualsiasi punto del dominio $z \in D$ nella somma delle sue parti reale ed immaginaria: $z = x + \mathrm{i}y$, e quindi scrivere $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) =: F(x, y)$ ove $F : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Allo stesso modo possiamo scomporre il valore $f(z)$ del codominio nelle sue parti reale ed immaginaria, e scrivere

$$f(z) = F(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \ , \qquad u, v : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ . \tag{8.1}$$

È facile verificare che la funzione f è continua in $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ se e solo se è continua la funzione complessa F in (x_0, y_0) e questo vale se e solo se sono continue le funzioni u e v in (x_0, y_0).

Le identità di Cauchy-Riemann

Analizziamo ora la derivabilità in senso complesso, che abbiamo già definito nella sez. 1.4.3, eq. (1.34), e che qui riportiamo in forma diversa ma equivalente, specializzandoci al caso in cui il dominio D di f sia un insieme aperto.

Definizione 8.1 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ e $z \in D$. La* derivata *di f in z è definita come il limite*

$$f'(z) := \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad \in \mathbb{C} \tag{8.2}$$

se tale limite esiste in $\mathbb{C}$.

Esempio: Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = z$. Il rapporto incrementale è

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = 1\ ,$$

pertanto f è derivabile in ogni $z \in \mathbb{C}$ e $f'(z) = 1$.

Esempio: Sia $n \in \mathbb{N}$ ed $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = z^n$. Si ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + \mathcal{O}\left(|\Delta z|^2\right) - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}\ ,$$

pertanto f è derivabile in ogni $z \in \mathbb{C}$ e $f'(z) = nz^{n-1}$, esattamente come nel caso reale.

Esempio: Sia $f = \mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(x + \mathrm{i}y) = x$. Indichiamo con $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$ l'incremento. Allora il rapporto incrementale è dato da

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

che non ammette limite: facendo il limite con la restrizione a Δz reali ($\Delta y = 0$) il rapporto incrementale vale 1; con la restrizione a Δz immaginari ($\Delta x = 0$) il rapporto incrementale vale 0. Quindi la funzione Re non è derivabile in senso complesso in alcun punto di $\mathbb{C}$. Lo stesso vale per Im.

Esempio: Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ funzione a valori reali. Il numeratore del rapporto incrementale è dato dalla differenza $f(z + \Delta z) - f(z)$ che è un numero reale per ogni $z, \Delta z$. Il denominatore del rapporto incrementale invece è un numero complesso, che può essere puramente reale se $\Delta z = \Delta x \in \mathbb{R}$ o puramente immaginario se $\Delta z = \mathrm{i}\Delta y \in \mathbb{I}$. Quindi l'unica possibilità affinché f sia derivabile in $z \in \mathbb{C}$ è che $f'(z) = 0$. Lo stesso ragionamento vale per funzioni a valori immaginari puri.

Vediamo quindi come ci siano funzioni derivabili in senso complesso ed altre no, queste ultime essendo caratterizzate da un diverso comportamento della loro variazione nelle diverse direzioni del piano complesso. Studiamo sistematicamente questo aspetto.

Prendiamo $(1, \mathrm{i})$ come $\mathbb{R}$-base ordinata di $\mathbb{C}$. Indicheremo con ∂_x la derivazione rispetto al vettore 1 e con ∂_y quella rispetto al vettore i:

$$\partial_x f(z) := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x \in \mathbb{R}^*}} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} = \partial_x F(x,y) \tag{8.3}$$

$$\partial_y f(z) := \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta y \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z+\mathrm{i}\Delta y) - f(z)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta y \in \mathbb{R}^*}} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y} = \partial_y F(x,y) \tag{8.4}$$

Vediamo subito che $\partial_x f(z)$ è la restrizione ai reali ($\Delta z = \Delta x \in \mathbb{R}$) del limite nell'eq. (8.2), mentre la restrizione ai numeri immaginari ($\Delta z = \mathrm{i}\Delta y \in \mathbb{I}$) dello stesso limite dà

$$\lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta y \in \mathbb{R}^*}} \frac{f(z+\mathrm{i}\Delta y) - f(z)}{\mathrm{i}\Delta y} = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_y f(z)\ . \tag{8.5}$$

Siccome se un limite esiste allora esistono (uguali) i limiti delle restrizioni, deduciamo che f è derivabile in z solo se vale

$$\partial_x f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_y f(z) \qquad \text{ovvero} \qquad \partial_x f(z) + \mathrm{i}\partial_y f(z) = 0\ . \tag{8.6}$$

La precedente equazione è la condizione necessaria fondamentale affinché f sia derivabile in z, e prende il nome di *identità di Cauchy-Riemann.*

In termini delle funzioni

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) \ , \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y) \tag{8.7}$$

già introdotte nell'eq. (8.1), le derivate parziali reali diventano

$$\partial_x f(z) = \partial_x u(x,y) + \mathrm{i}\partial_x v(x,y) \ , \qquad \partial_y f(z) = \partial_y u(x,y) + \mathrm{i}\partial_y v(x,y)$$

e l'eq. (8.6) diventa

$$\begin{aligned} 0 = \partial_x[u+\mathrm{i}v] + \mathrm{i}\partial_y[u+\mathrm{i}v] &= \partial_x u - \partial_y v + \mathrm{i}[\partial_y v + \partial_y u] \\ \iff \qquad & \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_x v = -\partial_y u \end{cases} \end{aligned} \tag{8.8}$$

che sono le identità di Cauchy-Riemann in forma reale.

In effetti, le identità di Cauchy-Riemann diventano anche condizioni sufficienti, se assumiamo la $\mathbb{R}$-differenziabilità di f. Analizziamo in dettaglio la differenziabilità di f. Trattandosi di funzione di una sola variabile, f è derivabile in senso complesso se e solo se è differenziabile in senso complesso, ed in questo caso il differenziale $\mathrm{d}f(z)$ è l'operatore lineare di moltiplicazione per $f'(z)$, ossia[1]

$$\mathrm{d}f(z) = f'(z)\,\mathrm{d}z \quad \in \mathcal{L}(\mathbb{C}\to\mathbb{C}) \ , \qquad \mathrm{d}f(z).\Delta z = f'(z)\Delta z \quad \text{per ogni } \Delta z \in \mathbb{C} \ , \tag{8.9}$$

quindi

$$f(z+\Delta z) = f(z) + \mathrm{d}f(z).\Delta z + o(|\Delta z|) \ . \tag{8.10}$$

Invece, con il termine "differenziale reale" di f intendiamo propriamente il differenziale della funzione di 2 variabili reali $F(x,y)$: $\mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z) := \mathrm{d}F(x,y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$, cioè un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$, che comunque si può pensare come un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ identificando il dominio $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Insomma, f è $\mathbb{R}$-differenziabile se

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) &= f(z) + \mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z).\Delta z + o(|\Delta z|) \\ &= F(x,y) + \mathrm{d}F(x,y).(\Delta x, \Delta y) + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}) \ . \end{aligned}$$

Facciamo ora la seguente considerazione generale: se X ed Y sono $\mathbb{C}$-spazi vettoriali normati, ed $f: X \to Y$, ha senso chiedersi se f sia differenziabile in $x \in X$ in senso complesso. Ma ogni $\mathbb{C}$-spazio normato è anche $\mathbb{R}$-spazio normato, mediante restrizione ad $\mathbb{R}$ degli scalari, e quindi ha senso chiedersi se f sia differenziabile in x in senso reale. Ora, ogni applicazione $T: X \to Y$ che sia $\mathbb{C}$-lineare (e continua) è anche $\mathbb{R}$ lineare (e continua), ma il viceversa non è sempre vero:

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,Y) \quad &\Longrightarrow \quad T.(xu) = x\,(T.u) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \ , \quad u \in X \\ T \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,Y) \quad &\Longrightarrow \quad T.(zu) = z\,(T.u) \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \ , \quad u \in X \end{aligned}$$

[1] Per funzioni f di una variabile, è usuale denotare con il simbolo f' la derivata e con $\mathrm{d}f$ il differenziale.

È chiaro allora che $T \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(X,Y)$ sta in $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,Y)$ se e solo se

$$T.(\mathrm{i}u) = \mathrm{i}\,(T.u) \qquad \text{per ogni } u \in X \ .$$

Insomma, tutto ciò che c'è da sapere sui legami tra $\mathbb{R}$-differenziabilità e $\mathbb{C}$-differenziabilità è espresso dalla semplice

Proposizione 8.1 *Siano X, Y $\mathbb{C}$-spazi vettoriali, D aperto di X ed $f : D \to Y$. f è $\mathbb{C}$-differenziabile in $x \in D$ se e solo se è ivi $\mathbb{R}$-differenziabile ed il differenziale è $\mathbb{C}$-lineare.*

Dimostrazione: Fatta sopra, tenendo conto dell'unicità del differenziale. C.V.D.

Esplicitiamo i concetti appena esposti nel caso in esame, con $X = Y = \mathbb{C}$. Nel seguito di questa sezione indicheremo in grassetto i "vettori" di $\mathbb{C}$ sui cui operano i differenziali, per distinguerli dagli "scalari" (reali o complessi). Nella $\mathbb{R}$-base $(\mathbf{1}, \mathbf{i})$, le coordinate reali (x, y) di $\mathbb{C}$ (ed i loro differenziali) tali che $(x, y) \mapsto z = \mathbf{1}x + \mathbf{i}y$ sono le funzioni

$$x = \mathrm{Re}\,(z) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \mathrm{Re}$$

$$y = \mathrm{Im}\,(z) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \mathrm{Im}$$

$$\mathrm{d}x.(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b) = a \ , \qquad \mathrm{d}y.(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b) = b \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{8.11}$$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y \ , \qquad \mathrm{d}z.(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b) = a + \mathrm{i}b \ . \tag{8.12}$$

È chiaro dall'eq. (8.11) che sia $\mathrm{d}x$ che $\mathrm{d}y$ sono $\mathbb{R}$-lineari (cioè lineari in a, b), e perciò anche qualsiasi loro combinaizione lineare, anche complessa, come $\mathrm{d}z$ nell'eq. 8.12. Però né $\mathrm{d}x$ né $\mathrm{d}y$ sono $\mathbb{C}$-lineari. Abbiamo infatti, per ogni $h \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{d}x.(\mathrm{i}h) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{i}h) = -\mathrm{Im}\,(h) = -\mathrm{d}y.h \tag{8.13a}$$

$$\mathrm{d}y.(\mathrm{i}h) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{i}h) = \mathrm{Re}\,(h) = \mathrm{d}x.h \tag{8.13b}$$

È invece $\mathbb{C}$-lineare il differenziale $\mathrm{d}z$:

$$\mathrm{d}z.(\mathrm{i}h) = (\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y).(\mathrm{i}h) \overset{(8.13)}{=} -\mathrm{d}y.h + \mathrm{i}\mathrm{d}x.h = \mathrm{i}(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y).h = \mathrm{i}\mathrm{d}z.h \ , \tag{8.14}$$

come del resto era già evidente dall'eq. (8.12).

Ora, il differenziale reale di f in z (se esiste) si scrive

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z) = \mathrm{d}F(x,y) = \partial_x F(x,y)\,\mathrm{d}x + \partial_y F(x,y)\,\mathrm{d}y = \partial_x f(z)\,\mathrm{d}x + \partial_y f(z)\,\mathrm{d}y \tag{8.15}$$

che è $\mathbb{C}$ lineare se e solo se, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z).\big(\mathrm{i}(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b)\big) = \mathrm{i}\big(\mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z).(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b)\big) \\
\iff \quad & \mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z).(\mathbf{i}a - \mathbf{1}b) = \mathrm{i}\big(\mathrm{d}_{\mathbb{R}}f(z).(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b)\big) \\
\iff \quad & \partial_y f(z)a - \partial_x f(z)b = \mathrm{i}\partial_x f(z)a + \mathrm{i}\partial_y f(z)b \\
\iff \quad & \partial_y f(z) = \mathrm{i}\partial_x f(z) \ ,
\end{aligned}$$

cioè se e solo se vale l'identità di Cauchy-Riemann. Possiamo concludere questi ragionamenti con il

Teorema 8.2 *Se una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ è derivabile in senso complesso nel punto $z = x+\mathrm{i}y \in D$ allora in z valgono le identità di Cauchy-Riemann* (8.6) *e* (8.8).

Viceversa, se le derivate parziali di due funzioni $u, v : E \to \mathbb{R}$ soddisfano in $(x, y) \in E$ le identità di Cauchy-Riemann (8.8) *e sono continue in (x, y), allora $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ è differenziabile in senso complesso in $z = x + \mathrm{i}y$.*

In entrambi i casi vale

$$f' = \partial_x u + \mathrm{i}\partial_x v = \partial_y v - \mathrm{i}\partial_y u \ . \tag{8.16}$$

Dimostrazione: La prima proposizione è stata dimostrata in precedenza.

La seconda sfrutta il teorema del differenziale totale 7.3: se le derivate parziali di u e v sono continue in un intorno di (x, y), allora $f(z)$ è differenziabile in senso reale. Le identità di Cauchy-Riemann garantiscono allora la $\mathbb{C}$-differenziabilità che coincide con la derivabilità in senso complesso. C.V.D.

Esempio: Consideriamo la funzione di coniugazione complessa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z^*$; scriviamo $z = x + \mathrm{i}y$ e sia $h = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, l'incremento dal punto z:

$$\begin{aligned} &g(z + h) = (z + h)^* = z^* + h^* = g(z) + \mathrm{d}g(z).\boldsymbol{h} \\ &\mathrm{d}g(z).\boldsymbol{h} = h^* \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{d}g(z) = g \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \ ; \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}g(z).(\mathbf{1}a + \mathbf{i}b) = a - \mathrm{i}b \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \mathrm{d}g(z).\mathbf{1} = 1 \\ \mathrm{d}g(z).\mathbf{i} = -\mathrm{i} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}g(z) = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y$$

Quindi $\mathrm{d}g(z)$ è un'applicazione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, ed è $\mathbb{R}$-lineare, cioè lineare nei coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ rispetto alla base $(1, \mathrm{i})$, ma non è $\mathbb{C}$-lineare. Per esprimere il differenziale in termini delle derivate parziali è conveniente sostituire $z = x + \mathrm{i}y$:

$$g(x + \mathrm{i}y) = x - \mathrm{i}y \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \partial_x g(x + \mathrm{i}y) = 1 \\ \partial_y g(x + \mathrm{i}y) = -\mathrm{i} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}g(z) = \partial_x g\, \mathrm{d}x + \partial_y g\, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y$$

Operatore di Cauchy-Riemann

Per capire meglio il significato delle relazioni (8.8) di Cauchy-Riemann, si usa spesso un ulteriore punto di vista. Consideriamo le relazioni

$$\begin{cases} z = x + \mathrm{i}y \\ \bar{z} = x - \mathrm{i}y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\mathrm{d}\bar{z} \\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}z - \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}\bar{z} \ . \end{cases} \tag{8.17}$$

Le precedenti relazioni si possono interpretare formalmente come un cambio algebrico di variabili nel piano $\mathbb{R}^2$ — abbiamo indicato $x - \mathrm{i}y$ con $\bar{z}$ per pensarla come una variabile indipendente da z — ma non come un vero cambio di coordinate, a causa dei fattori complessi $\propto \mathrm{i} \in \mathbb{C}$. Tuttavia le 1-forme $\mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}\bar{z}$ sono oggetti ben definiti: la 1-forma $\mathrm{d}z$ è l'identità di $\mathbb{C}$, mentre la 1-forma $\mathrm{d}\bar{z}$ è il coniugio: $\mathrm{d}\bar{z}.(a + \mathrm{i}b) = a - \mathrm{i}b$. In termini di queste 1-forme, il differenziale reale della funzione f (non necessariamente derivabile in senso complesso) si scrive

$$\mathrm{d}_{\mathbb{R}} f = \frac{1}{2}[\partial_x f - \mathrm{i}\partial_y f]\, \mathrm{d}z + \frac{1}{2}[\partial_x f + \mathrm{i}\partial_y f]\, \mathrm{d}\bar{z} = \partial_z f\ \mathrm{d}z + \partial_{\bar{z}} f\ \mathrm{d}\bar{z} \ , \tag{8.18}$$

in cui abbiamo introdotto gli operatori differenziali

$$\partial_z := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y) \tag{8.19a}$$

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)\ , \tag{8.19b}$$

che si chiamano rispettivamente "operatore di derivazione complessa" (∂_z) ed "operatore di Cauchy-Riemann" ($\partial_{\bar{z}}$), e che formalmente sono ottenibili anche mediante il cambio di variabili (8.17).

Pertanto, la condizione di derivabilità si può esprimere formalmente in forma compatta come

$$\partial_{\bar{z}} f = 0\ . \tag{8.20}$$

Insomma, affinché una funzione sia un buon candidato per essere derivabile, non deve dipendere esplicitamente da $\bar{z}$, ma solo da z. In altri termini le variabili reali x e y devono comparire esplicitamente solo nella combinazione $z = x + \mathrm{i}y$.

Definizione 8.2 *Sia D aperto di $\mathbb{C}$; $f : D \to \mathbb{C}$ si dice* olomorfa *se è $\mathbb{C}$-derivabile in D e la derivata complessa $f' : D \to \mathbb{C}$ è continua in D. In questo caso si scrive $f \in H(D)$.*

OSSERVAZIONE: In realtà l'ipotesi di continuità di f' è superflua, cioè se f è derivabile in tutti i punti dell'aperto D, si può dimostrare (ma non è facile) che f' è continua in D. Solamente per giungere più rapidamente ai risultati di interesse si inserisce questa proprietà nella definizione.

Dalla definizione di derivata complessa si può dimostrare, in modo totalmente analogo a quanto fatto per la derivata reale, che la somma ed il prodotto di due funzioni olomorfe è olomorfa, con le stesse regole di derivazione. Il rapporto di due funzioni olomorfe è olomorfa su tutti i punti del dominio in cui il divisore non si annulla. Anche la composizione di funzioni olomorfe è olomorfa, così come è olomorfa l'inversa di una funzione olomorfa invertibile, e valgono le regole di derivazione del caso reale: se $f, g : D \to \mathbb{C}$ sono olomorfe,

$$\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(fg)' &= f'g + fg' \\
(f/g)' &= (f'g - fg')/g^2 && (g \neq 0) \\
(f \circ g)' &= (f' \circ g)g' && \big(\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathcal{D}(f)\big) \\
(f^{-1})' &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}} && (f' \neq 0)\ .
\end{aligned}$$

I polinomi nella variabile z sono funzioni olomorfe in tutto il piano complesso. Le funzioni razionali lo sono in tutto il piano complesso eccetto nell'insieme finito di punti in cui si annulla il polinomio divisore.

Nella sez. 1.4.3 abbiamo visto che anche le serie di potenze definiscono, all'interno del cerchio di convergenza, funzioni derivabili, anzi C^∞, quindi olomorfe.

Funzioni armoniche

Indichiamo con $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$ l'operatore differenziale *laplaciano* in $\mathbb{R}^2$.

Se le funzioni reali u e v sono derivabili due volte in D aperto di $\mathbb{C}$ ed $f = u + iv$ è olomorfa, derivando le identità di Cauchy-Riemann (8.8) si ottiene

$$\partial_x^2 u = \partial_x \partial_y v = \partial_y \partial_x v = -\partial_y^2 u \quad \Longrightarrow \quad \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \tag{8.21a}$$

$$\partial_x^2 v = \partial_x(-\partial_y u) = -\partial_y \partial_x u = -\partial_y^2 v \quad \Longrightarrow \quad \Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0 \; , \tag{8.21b}$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che le derivate parziali miste commutano. Quindi le funzioni u e v soddisfano l'equazione di Laplace, ossia sono *funzioni armoniche*.

Se due funzioni armoniche u e v definite in un aperto D soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann (8.8), allora v è detta l'*armonica coniugata* di u.[2] Si vede subito che v è armonica coniungata di u se e solo se $-u$ è armonica coniugata di v.

Definizione 8.3 *Una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ si dice* antiolomorfa *se è $\mathbb{R}$-differenziabile e se $\partial_z f = 0$ in D.*

Esercizio: Mostrare che f è antiolomorfa se e solo se la sua complessa coniugata è olomorfa.

Esercizio: Osservare che $4\partial_z \partial_{\bar{z}} = \Delta$ operatore laplaciano. Dedurre che se $f \in C^2(D, \mathbb{C})$ (in senso reale), ed f è olomorfa o antiolomorfa, allora f è armonica, ed anche u e v sono armoniche.

8.2 Integrazione complessa

Dopo aver definito la derivata di una funzione complessa ed averne analizzato alcuni aspetti, ci proponiamo di definire un'operazione di integrazione. Partiamo dalla definizione di integrale definito in $\mathbb{R}$: se $D \subset \mathbb{R}$ è aperto, $f : D \to \mathbb{R}$ è continua e $[a, b] \subset D$, l'espressione

$$I = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \tag{8.22}$$

si può interpretare come integrale di cammino della 1-forma $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ sul cammino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $\gamma(t) = t$. Infatti

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \; . \tag{8.23}$$

La generalizzazione al campo complesso ricalca la stessa idea.

Definizione 8.4 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $\gamma : [a, b] \to D$ cammino e $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Si definisce* integrale *della funzione f sul cammino γ come l'integrale su γ della 1-forma differenziale complessa $\omega(z) = f(z)\,\mathrm{d}z$:*

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \, \mathrm{d}t \; . \tag{8.24}$$

[2] In realtà v è determinata a meno di una costante additiva, quindi l'articolo determinativo, anche se tradizionale, strettamente parlando non è accurato.

Questa definizione si basa quindi sull'integrazione della funzione di variabile reale e a valori complessi

$$g : [a, b] \to \mathbb{C} \ , \qquad g(t) = f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$$

ottenuta dal prodotto dei numeri complessi $f\big(\gamma(t)\big)$ e $\gamma'(t)$. Quindi si può inserire nel contesto dell'integrazione alla Lebesgue che abbiamo visto nei capitoli precedenti.

Possiamo interpretare questa definizione nel seguente modo: assegnata una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$ dell'intervallo $[a, b]$ e quindi del sostegno di γ nei punti $z_j = \gamma(t_j)$, per $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$ infinitesimo vale $\gamma(t_j)'\Delta t_j = z_j - z_{j-1} + o(|\Delta t_j|) =: \Delta z_j + o(|\Delta z_j|)$. Moltiplicando Δz_j per $f(z_j)$, sommando tutti i contributi per $j = 1, \ldots, N$ e facendo il limite per $N \to \infty$ otteniamo

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \lim_{\substack{||\Delta z_j|| \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=1}^{N} f(z_j)\Delta z_j \tag{8.25}$$

analogamente alla costruzione degli integrali delle 1-forme nell'eq. (7.21).

Esercizio: Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto z_1 + (z_2 - z_1)t$ il cammino rettilineo che ha origine in z_1 ed estremità in z_2. Calcolare $\int_\gamma 1\ \mathrm{d}z$ e $\int_\gamma z\ \mathrm{d}z$.

Esercizio: Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $\gamma : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ il cammino circolare di centro z_0 e raggio r. Calcolare, al variare di $r \in \mathbb{R}^*_+$ ed $n \in \mathbb{Z}$ l'integrale $\oint_\gamma (z - z_0)^n\ \mathrm{d}z$.

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\oint_\gamma (z - z_0)^n\ \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \big((z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - z_0\big)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\ \mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{i}r^{n+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\ \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\ \delta_{n,-1}\ .\end{aligned}$$

Infatti, per $n + 1 \neq 0$, cioè per $n \neq -1$, l'ultimo integrale fa 0, mentre per $n = 1$ fa 2π. In ogni caso sparisce la dipendenza da r. Vedremo che questo fatto, cioè l'indipendenza (entro certe ipotesi) dell'integrale dal cammino di integrazione, è generico per gli integrali delle funzioni olomorfe.

Relativamente al precedente esercizio, è chiaro che se prendiamo un cammino che aggira M volte il punto z_0 in senso antiorario — quindi $\gamma : [0, 2\pi M] \to \mathbb{C}$ con la stessa dipendenza da θ di prima — allora otteniamo un risultato pari a M volte il precedente, ossia $2\pi\mathrm{i}M\ \delta_{n,-1}$. Se invece prendiamo un cammino che aggira M volte il punto z_0 in senso opposto, cioè orario, allora otteniamo $-2\pi M\ \delta_{n,-1}$. Questo numero intero $\pm M$ che indica quante volte (ed in quale verso) un circuito γ gira attorno ad un punto z_0 viene chiamato *indice di avvolgimento* di γ rispetto a z_0, e si indica con il simbolo $w(\gamma, z_0)$ — in inglese "indice di avvolgimento" si dice "winding number".

In effetti, identificando $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, è naturale pensare all'integrale della 1-forma differenziale complessa $f(z)\ \mathrm{d}z$ come all'integrale delle 1-forme differenziali reali associate $\omega_R, \omega_I : E \to \mathbb{R}^{2*}$ definite nell'aperto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \mathrm{i}y \in D\}$ in modo tale che $f\ \mathrm{d}z = \omega_R + \mathrm{i}\omega_I$. Scrivendo al solito $f = u + \mathrm{i}v$ abbiamo

$$f\ \mathrm{d}z = (u+\mathrm{i}v)\ (\mathrm{d}x+\mathrm{i}\ \mathrm{d}y) = (u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y) = \omega_R + \mathrm{i}\omega_I\ , \qquad \begin{cases} \omega_R := u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y \\ \omega_I := v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y\ . \end{cases} \tag{8.26}$$

Pertanto

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \omega_R + \mathrm{i} \int_\gamma \omega_I \ . \tag{8.27}$$

A questo punto sorge spontanea la domanda: sotto quali condizioni l'integrale complesso non dipende dal cammino γ ma solo dall'origine e dall'estremità? Possiamo subito dire che ciò avviene se e solo se le 1-forme reali associate sono esatte. In particolare, se esse sono differenziabili, devono essere chiuse. Siccome

$$\begin{aligned} \partial_y \omega_{Rx} - \partial_x \omega_{Ry} &= \partial_y u + \partial_x v \\ \partial_y \omega_{Ix} - \partial_x \omega_{Iy} &= \partial_y v - \partial_x u \end{aligned} \tag{8.28}$$

vediamo che la condizione di chiusura corrisponde alle identità di Cauchy-Riemann, ossia al fatto che f sia olomorfa.

Teorema 8.3 *Sia f di classe C^1 in senso reale su $D \subset \mathbb{C}$. f è olomorfa se e solo se le 1-forme reali associate sono entrambe chiuse, ossia localmente esatte.*

Dimostrazione: Fatta sopra. C.V.D.

Ne segue il seguente risultato, su cui si basa l'intera teoria delle funzioni olomorfe:

Teorema 8.4 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa in D. Se β e γ sono circuiti omotopi in D, allora*

$$\int_\beta f \, \mathrm{d}z = \int_\gamma f \, \mathrm{d}z \ .$$

Dimostrazione: Se f è olomorfa, allora sono soddisfatte le identità di Cauchy-Riemann in D. Allora le 1-forme associate ad $f \, \mathrm{d}z$ sono chiuse e quindi localmente esatte. Pertanto, dal teorema 7.11, segue che l'integrale di tali 1-forme (e quindi di $f \, \mathrm{d}z$) è lo stesso su circuiti omotopi. C.V.D.

ESEMPIO: Determiniamo le forme reali associate alla 1-forma $(1/z)\,\mathrm{d}z$ definita in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Con $z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{z^*}{zz^*} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} \\ u(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \ , \qquad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \omega_R(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} = \mathrm{d}\ln r \\ \omega_I(x,y) &= \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\theta \\ f(z)\,\mathrm{d}z &= \omega_R + \mathrm{i}\omega_I = \mathrm{d}\ln r + \mathrm{i}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}(\ln r + \mathrm{i}\theta) \ . \end{aligned} \tag{8.29}$$

Si vede così che ω_R è esatta in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (ha come primitiva $\ln r$), mentre ω_I è solo localmente esatta, come visto nell'esempio della sez. 7.2, in quanto $\theta(x,y) = \arg(z)$ non si può definire con continuità in tutto il piano complesso privato dell'origine.

Sfruttando il risultato del teorema 7.11, vediamo subito che se due circuiti β e γ in D sono omotopi, allora

$$\oint_\beta f \, \mathrm{d}z = \oint_\gamma f \, \mathrm{d}z$$

e l'integrale vale 0 per circuiti nullomotopi. Di conseguenza, se β e γ sono cammini con la stessa origine e la stessa estremità , e sono deformabili con continuità uno nell'altro in D (cioè se $\overleftarrow{\beta}.\gamma$ è nullomotopo), allora

$$\int_\beta f \, \mathrm{d}z = \int_\gamma f \, \mathrm{d}z \; .$$

Dalla teoria delle 1-forme, sappiamo anche che l'integrale di $f \, \mathrm{d}z$ dipende solo dagli estremi di un cammino se e solo se entrambe le 1-forme reali associate sono esatte. Questo significa che esistono $F_R, F_I : \mathbb{R}^2 \supset E \to \mathbb{C}$ differenziabili in senso reale e tali che $\mathrm{d}F_R = \omega_R$ e $\mathrm{d}F_I = \omega_I$ (cioè primitive di $\omega_{R,I}$). Quindi

$$\begin{aligned} \partial_x F_R &= \omega_{Rx} = u \; , \quad & \partial_y F_R &= \omega_{Ry} = -v \\ \partial_x F_I &= \omega_{Ix} = v \; , \quad & \partial_y F_I &= \omega_{Iy} = u \end{aligned} \tag{8.30}$$

ma allora la funzione $F = F_R + \mathrm{i}F_I : D \to \mathbb{C}$ soddisfa

$$\partial_x F = \partial_x(F_R + \mathrm{i}F_I) = u + \mathrm{i}v = f \; , \quad \partial_y F = \partial_y(F_R + \mathrm{i}F_I) = -v + \mathrm{i}u = \mathrm{i}(u + \mathrm{i}v) = \mathrm{i}\partial_x F \tag{8.31}$$

ossia soddisfa l'identità di Cauchy-Riemann (8.6), quindi è $\mathbb{C}$-differenziabile. Inoltre vale $F' = f$, cioè F è una primitiva in senso complesso di f.

Definizione 8.5 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto ed $f : D \to \mathbb{C}$ continua; si dice che $F \in H(D)$ è una* primitiva *di f in D se $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in D$.*

Teorema 8.5 (della primitiva) *Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa in un aperto $D \subset C$. Sono equivalenti:*

1. *f ammette primitiva in D.*
2. *Se β e γ sono cammini in D con la stessa origine e la stessa estremità, allora $\int_\beta \omega = \int_\gamma \omega$.*
3. *Per ogni circuito γ di D, $\oint_\gamma \omega = 0$.*

Dimostrazione:

2 $\Leftrightarrow$ *3* coincide con la corrispondente coimplicazione nel teorema 7.9.

2 $\Rightarrow$ *1* è stata fatta sopra.

1 $\Rightarrow$ *2* Se $F' = f$ e $\gamma : [a, b] \to D$ allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale (in campo reale!)

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}z = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b [F \circ \gamma]'(t) \, \mathrm{d}t = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

che dipende solo dagli estremi di γ (con il loro ordine) e non dal percorso tra di essi, qualunque esso sia in D. C.V.D.

Definizione 8.6 *Si definisce* lunghezza *del cammino* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *il numero reale*

$$L_\gamma := \int_{[a,b]} |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \,. \tag{8.32}$$

È facile rendersi conto, con i ragionamenti geometrici basati sulle suddivisioni che abbiamo presentato, che L_γ rappresenta proprio l'idea intuitiva di lunghezza del sostegno di γ, somma della lunghezza dei segmenti infinitesimi che approssimano tale sostegno:

$$L_\gamma = \lim_{\substack{||\Delta z_j|| \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=1}^{N} |\Delta z_j| \,. \tag{8.33}$$

Teorema 8.6 (disuguaglianza di Darboux)

$$\left| \int_\gamma f \,\mathrm{d}z \right| \leq \sup_\gamma |f| \; L_\gamma \tag{8.34}$$

Dimostrazione: Dalla disuguaglianza

$$\left| \int_{[a,b]} g(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{[a,b]} |g(t)| \,\mathrm{d}t$$

valida per gli integrali di variabile reale, segue che

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f \,\mathrm{d}z \right| &\leq \left| \int_{[a,b]} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_{[a,b]} \left| f\big(\gamma(t)\big) \right| \, |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \sup_\gamma |f| \int_{[a,b]} |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t \leq \sup_\gamma |f| \; L_\gamma \,. \end{aligned}$$

C.V.D.

8.3 Logaritmo complesso

In questa sezione definiremo e studieremo l'inversa (o meglio, le possibili inverse) della funzione esponenziale complessa $\exp : w \mapsto \mathrm{e}^w = z$ introdotta nella sez.1.5 del cap. 1.

Come abbiamo visto, exp è definita su tutto $\mathbb{C}$ ed è periodica di periodo $\mathrm{i}2\pi$, quindi non è iniettiva e pertanto non invertibile, a meno di restringere il suo dominio ad insiemi tali per cui la sua restrizione sia iniettiva.

Se limitiamo l'estensione di questi "domini di iniettività" a strisce la cui ampiezza lungo la direzione immaginaria sia inferiore a 2π, raggiungiamo lo scopo. Sia quindi $\alpha \in \mathbb{R}$. Definiamo la striscia aperta

$$\begin{aligned} S_\alpha &:= \{ w \in \mathbb{C} : \alpha - \pi < \mathrm{Im}\,(w) < \alpha + \pi \} \\ &= \{ w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R} \,,\; b \in \,]\alpha - \pi, \alpha + \pi[\, \} \,. \end{aligned} \tag{8.35}$$

Siccome in questa striscia non esistono due punti w_1, w_2 tali che $w_1 - w_2 = \mathrm{i}\,2\pi\,k$ per qualche k intero, allora, dalla relazione (1.53), è immediato vedere che $\mathrm{e}^{w_1} \neq \mathrm{e}^{w_2}$ per ogni $w_1, w_2 \in S_\alpha$. L'immagine tramite exp di S_α è

$$T_\alpha := \{ z \in \mathbb{C} : z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b} \,,\; a \in \mathbb{R} \,,\; b \in \,]\alpha - \pi, \alpha + \pi[\, \} = \mathbb{C} \setminus \{ -r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} : r > 0 \} \,, \tag{8.36}$$

cioè il piano complesso privato della semiretta che parte dall'origine e prosegue ad angolo α rispetto al semiasse reale negativo.

Teorema 8.7 *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato. Allora* exp *induce un omeomorfismo tra la striscia S_α ed il piano tagliato T_α.*

Dimostrazione: Abbiamo visto che exp è iniettiva se il suo dominio è ristretto a S_α. Inoltre exp è continua e manda aperti in aperti — ad esempio rettangoli aperti in settori di corone circolari aperte (fare il disegno) —, quindi la sua inversa è continua. Pertanto $\exp : S_\alpha \to \exp(S_\alpha)$ è omeomorfismo.

Verifichiamo che è anche suriettiva su T_α, cioè che $\exp S_\alpha = T_\alpha$. Fissato $z \in T_\alpha$ cerchiamo $w = a + \mathrm{i}b \in S_\alpha$ tale che $\mathrm{e}^w = z$. possiamo scrivere $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $r = |z| > 0$ e $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi]$ argomento principale. Esiste un unico $k \in \mathbb{Z}$ tale che $b = \theta + 2\pi\, k \in]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$: infatti

$$\begin{aligned}
& \alpha - \pi < \theta + 2\pi\, k < \alpha + \pi && \iff && 0 < \theta + 2\pi\, k + \pi - \alpha < 2\pi \\
\iff \quad & 0 < \frac{\theta - \alpha}{2\pi} + k + \frac{1}{2} < 1 && \iff && \frac{\alpha - \theta}{2\pi} - \frac{1}{2} < k < \frac{\alpha - \theta}{2\pi} + \frac{1}{2} \\
\iff \quad & k = \left[\frac{\alpha - \theta}{2\pi} - \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

ove $[x]$ denota la parte intera di $x \in \mathbb{R}$, cioè $[x] \le x < [x] + 1$. Osserviamo che l'uguaglianza $\frac{\alpha-\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} = k$ non è possibile, perché corrisponderebbe a

$$\begin{aligned}
& \alpha - \theta = 2\pi(k + 1/2) && \iff && \theta = \alpha - 2\pi(k + 1/2) = \alpha - 2\pi\, k - \pi \\
\iff \quad & z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha - 2\pi\, k - \pi)} = -r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \notin T_\alpha
\end{aligned}$$

contrariamente all'ipotesi. Allora, posti $x = \ln(r)$, logaritmo reale, e $y = \theta + 2\pi\, k$ e $z = x + \mathrm{i}y \in S_\alpha$ si ha

$$\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{\ln(r) + \mathrm{i}(\theta + 2\pi\, k)} = \mathrm{e}^{\ln(r)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\, k} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z\ .$$

Siccome $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è continua, lo è anche qualsiasi sua restrizione. Indichiamo l'inversa di $\exp : S_\alpha \to T_\alpha$ con

$$\ln_{(\alpha)} : T_\alpha \to S_\alpha\ , \qquad \ln_{(\alpha)}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln(r) + \mathrm{i}(\theta + 2\pi\, k) \quad : \quad \theta + 2\pi\, k \in]\alpha - \pi, \alpha + \pi[\tag{8.37}$$

e rappresenta una "determinazione" del logaritmo complesso. Si verifica facilmente che la parte immaginaria di $\ln_{(\alpha)}$ ha una discontinuità nei punti del taglio con un salto pari a 2π.

Il caso $\alpha = 0$ definisce *la determinazione principale* del logaritmo complesso, che si indica con le usuali notazioni

$$\ln \equiv \log := \ln_{(0)} : T_0 \to S_0\ , \qquad \operatorname{Im} \ln z \in]-\pi, \pi[\ , \quad z \notin \mathbb{R}^- \tag{8.38}$$

ed è definito per tutti i numeri complessi che non siano reali negativi.

Un modo alternativo di vedere la questione è quello di considerare exp definito su tutto $\mathbb{C}$ e di considerare la sua inversa come quella funzione che, ad ogni $z \in \mathbb{C}$ associa l'insieme di tutti i valori $w_k = \ln z + \mathrm{i}2\pi\, k : k \in \mathbb{Z}$ tali per cui $\mathrm{e}^{w_k} = z$, cioè tutti i logaritmi di z. In questo caso stiamo considerando un'estensione della definizione di funzione, in cui ad ogni elemento del dominio possono essere associati più elementi del codominio. Si parla in questo caso di funzioni *polidrome*.

A causa della polidromia del logaritmo, per la determinazione principale (ed anche per ogni altra determinazione) vale la formula

$$\ln(z_1) + \ln(z_2) = \ln(z_1 z_2) + \mathrm{i}2\pi\, k : k \in \mathbb{Z} \tag{8.39}$$

ma in generale $k \neq 0$.

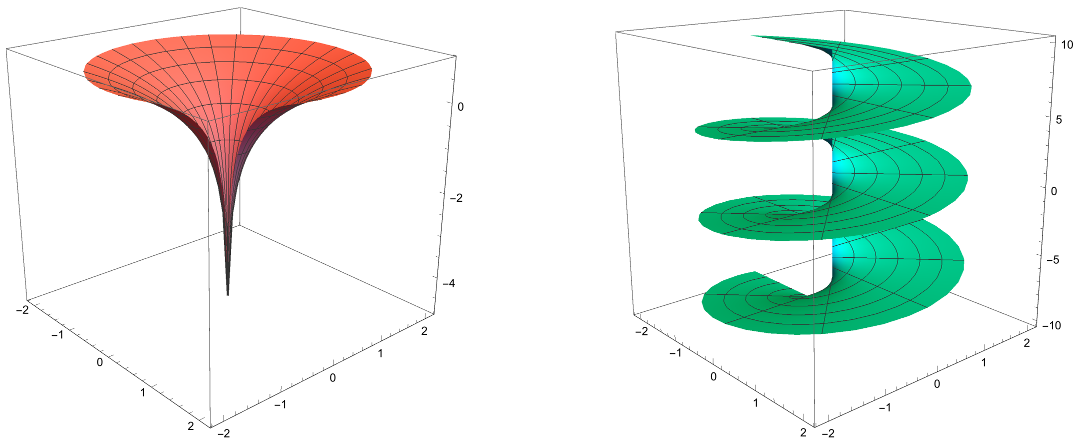

Figura 8.1: Grafico della parte reale (sinistra) e parte immaginaria (destra) della funzione (polidroma) logaritmo complesso.

La fig. 8.1 mostra la parte reale e la parte immaginaria del logaritmo complesso nella versione di funzione polidroma. La figura che si ottiene unendo tutti i grafici delle parti immaginarie delle determinazioni $\ln_{(\alpha)}$ forma il cosiddetto *elicoide*, che è uno dei modi migliori per visualizzare il logaritmo complesso.

8.4 Potenze complesse

Partendo dalla formula polare del numero complesso $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, per ogni $p \in \mathbb{C}$ è naturale definire la potenza p-esima di z mediante

$$z^p := (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^p = r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta p}\,. \tag{8.40}$$

Se $p \in \mathbb{Z}$, questa definizione è non ambigua, e coincide con quella del cap. 1.

Se $p \in \mathbb{R}$ invece la definizione si basa in modo essenziale sulla scelta dell'argomento $\theta = \arg(z)$. Infatti, se $\theta' = \theta + 2\pi\, k$ con $k \in \mathbb{Z}$ si ha

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\, k} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z \qquad \text{ma} \qquad r^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta' p} = r^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\, kp} \neq r^p\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\theta}\,, \tag{8.41}$$

poiché $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\, kp} \neq 1$. Insomma, dopo un giro di 2π attorno all'origine della variabile $z \in \mathbb{C}$, la potenza p-esima non si raccorda con continuità al valore di partenza. Bisogna quindi definire la potenza p-esima in un semipiano tagliato T_α, come per il logaritmo. In effetti, possiamo definire in modo equivalente la potenza p-esima proprio in termini del logaritmo:

$$z_{(\alpha)}^p := (\mathrm{e}^{\ln_{(\alpha)} z})^p = \mathrm{e}^{p \ln_{(\alpha)} z} = \mathrm{e}^{p[\ln(r)+\mathrm{i}(\theta+2\pi k)]} = r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta p+2\pi kp)} \,. \tag{8.42}$$

Poiché $\ln_{(\alpha)}$ è ben definito in T_α, per la stessa ragione è ben definita la determinazione-α della potenza p-esima. Si chiama *determinazione principale* della potenza p-esima la potenza definita in termini della determinazione principale del logaritmo, con dominio T_0, il piano complesso privato della semiretta $\mathbb{R}_-$.

Se $p = a + ib \in \mathbb{C}$ si ha anche in questo caso la necessità di definire la potenza su un piano tagliato T_α. Se $\theta \in]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$ si ha

$$z^p := \mathrm{e}^{p \ln_{(\alpha)} z} = r^{a+ib}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(a+ib)} = r^a \mathrm{e}^{-b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta a+b\ln r)} \,. \tag{8.43}$$

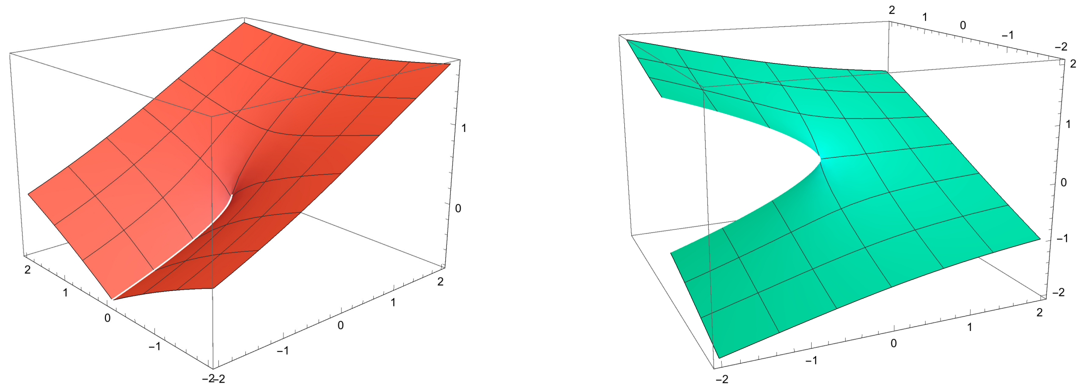

Figura 8.2: Grafico della parte reale (sinistra) e parte immaginaria (destra) della determinazione principale della potenza $z^{2/3}$. Si nota la discontinuità della parte immaginaria al taglio $\mathbb{R}_-$.

8.5 Analiticità delle funzioni olomorfe

Nel cap. 1 abbiamo visto che ogni serie di potenze definisce una funzione olomorfa (addirittura C^∞) all'interno del cerchio di convergenza. Ci proponiamo di indagare se valga anche l'inverso, cioè se ogni funzione olomorfa sia sviluppabile in serie di potenze. Il punto di partenza è il seguente teorema che ci dà una utile rappresentazione integrale per la generica funzione olomorfa.

Teorema 8.8 (formula di Cauchy per il circolo) *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa in D; se $a \in D$ ed $r > 0$ è tale che il disco (chiuso) $B(a, r] \subset D$, si ha, per ogni $z \in B(a, r[$ (aperto),*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \tag{8.44}$$

dove γ è il circolo di centro a e raggio r che percorre la frontiera del disco una volta in senso positivo: $\gamma : [0, 2\pi] \to B(a, r]$, $\gamma(\theta) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Dimostrazione: Fissato $z \in B(a, r[$, sia

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & (\zeta \in D \setminus \{z\}) \\ f'(z) & (\zeta = z) \; ; \end{cases} \tag{8.45}$$

g è continua in D, ed olomorfa in $D \setminus \{z\}$. Per ogni $\lambda \in [0, 1]$ indichiamo con $\gamma_\lambda : \theta \mapsto z + \lambda\big[\gamma(\theta) - z\big]$ l'omotetico di γ con l'omotetia di centro z e rapporto λ. È facile vedere (fig. 8.3) che γ e γ_λ sono omotopi in $D \setminus \{z\}$ per ogni $\lambda > 0$, quindi

$$\int_{\gamma_\lambda} g = \int_\gamma g \qquad (\lambda > 0) \; .$$

Inoltre

$$\lambda \mapsto \int_{\gamma_\lambda} g = \int_0^{2\pi} g\big(z + \lambda(\gamma(\theta) - z)\big)\gamma'_\lambda(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

è funzione continua per $\lambda \in [0, 1]$, data la continuità di g,[3] e chiaramente $\int_{\gamma_0} g = 0$, poiché γ_0 è un circuito costante. Si ha allora

$$0 = \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta - \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - 2\pi \mathrm{i} f(z)$$

che equivale all'eq. (8.44). C.V.D.

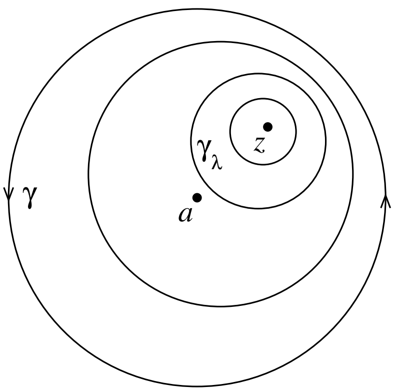

Figura 8.3: Circuiti omotopi nella dimostrazione della formula di Cauchy per il circolo.

Nella formula di Cauchy possiamo derivare sotto il segno di integrale, ottenendo

Corollario 8.9 *Ogni funzione olomorfa è C^∞ e si ha, per $|z - a| < r$ e $n \in \mathbb{N}$,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \tag{8.46}$$

dove γ è il circolo di centro a e raggio r.

Molto di più è vero: le funzioni olomorfe sono sviluppabili in serie di potenze attorno ad ogni punto del loro dominio, sono cioè analitiche.

[3] Se $[a, b]$ è limitato ed $h(\theta, \lambda)$ è continua rispetto a λ per ogni $\theta \in [a, b]$ fissato, allora $\lambda \mapsto \int_a^b h(\theta, \lambda) \, \mathrm{d}\theta$ è continua.

Definizione 8.7 *Una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ si dice* analitica *in $z_0 \in D$ se esiste $r > 0$ tale che f è sviluppabile in serie di potenze di $(z - z_0)$ per ogni $z \in B(z_0, r[$. f si dice analitica in D se è analitica in ogni punto di D.*

Teorema 8.10 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ cammino, sia $u : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ continua sul sostegno di γ. La formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta \tag{8.47}$$

definisce una funzione olomorfa ed analitica in $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$;
se $z_0 \notin \gamma([a, b])$ e quindi $r = \operatorname{dist}\big(z_0, \gamma([a, b])\big) > 0$, si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \textit{per ogni } z \in B(z_0, r[\ , \ \textit{dove} \tag{8.48}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \ . \tag{8.49}$$

Dimostrazione: Innanzitutto osserviamo che $r > 0$, perchè $\gamma([a, b])$ è compatto, quindi chiuso, e $z_0 \notin \gamma([a, b])$. Poi scriviamo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \ ;$$

se $z \in B(z_0, r[)$ e $\zeta \in \gamma([a, b])$ si ha $|z - z_0| < r$ e $|\zeta - z_0| \geq r$, per cui $|(z - z_0)/(\zeta - z_0)| < 1$. Ne segue che (serie geometrica)

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

e quindi l'integrando nella formula (8.47) che definisce f diventa

$$\frac{u(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \ .$$

La serie a secondo membro, pensata come funzione nella variabile ζ, converge totalmente su $\gamma([a, b])$, dato che il suo termine generale è maggiorato da $(||u||_\infty / r)\delta^n$ dove $||u||_\infty = \max\{|u(\zeta)| : \zeta \in \gamma([a, b])\}$ e $\delta = |z - z_0|/r < 1$. Si può quindi integrare la serie termine a termine e si conclude. C.V.D.

Corollario 8.11 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, f olomorfa in D. Per ogni $z_0 \in D$ e per ogni $r > 0$ tale che $B(z_0, r[\subset D$, la serie di Taylor di f di punto iniziale z_0*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots \qquad (z \in B(z_0, r[) \tag{8.50}$$

converge ad f su $B(z_0, r[$.

Dimostrazione: Formula di Cauchy 8.8 con i teoremi 8.10 e 8.9. C.V.D.

NOTA: Questo teorema è tutt'altro che banale. In campo reale, esistono funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinitamente derivabili in ogni punto ma la cui serie di Taylor in qualche punto non converge, oppure converge ma non alla funzione f data (all'interno dell'insieme di convergenza). Non è facile scrivere un esempio di funzione indefinitamente derivabile la cui serie di Taylor in un punto non converge. È invece classico il seguente esempio di una funzione indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ ma la cui serie di Taylor in $x = 0$ non converge alla funzione: $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Le derivate di f in $x = 0$ sono tutte nulle, quindi la serie di Taylor converge (con raggio di convergenza infinito) alla funzione identicamente nulla.

Se D è aperto di $\mathbb{C}$, indicheremo con $H(D)$ l'insieme delle $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfe in D. $H(D)$ è una $\mathbb{C}$-algebra di funzioni rispetto alla somma e al prodotto di funzioni e al prodotto per scalari (complessi), e contiene l'algebra delle funzioni polinomiali. Le funzioni $H(\mathbb{C})$ sono dette *intere*. Dal teorema 8.11 segue che f è intera se e solo se la serie di Taylor di f attorno ad un qualsiasi suo punto ha raggio di convergenza infinito. $\exp, \sin, \cos, \cosh, \sinh$ sono funzioni intere.

Invece se una funzione olomorfa ha raggio di convergenza finito attorno a z_0, allora c'è almeno un punto sulla circonferenza di convergenza in cui f non è olomorfa.

Dal teorema 8.9 segue subito il

Teorema 8.12 *Se $f \in \mathbb{C}^0(D, \mathbb{C})$ ammette una primitiva, allora è olomorfa.*

Dimostrazione: Sia F la primitiva di f. Allora F è derivabile ed ha derivata f continua per ipotesi, quindi F è olomorfa. Ma allora $F \in C^\infty(D, \mathbb{C})$, quindi anche $F' = f \in C^\infty(D, \mathbb{C})$, in particolare f è olomorfa in D. C.V.D.

Dal teorema 8.3 segue che se f è olomorfa, allora la 1-forma associata $f\,\mathrm{d}z$ è localmente esatta, pertanto f ha localmente primitive. Possiamo quindi concludere con il seguente

Teorema 8.13 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto ed $f : D \to \mathbb{C}$ continua. Sono equivalenti:*

1. *f è olomorfa;*
2. *$f\,\mathrm{d}z$ è localmente esatta;*
3. *f ammette localmente primitive;*
4. *Per ogni circuito γ nullomotopo in D vale $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

8.6 Principio di identità delle funzioni olomorfe

Data una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ indichiamo con $Z_D(f) := \{z \in D : f(z) = 0\}$ il luogo degli zeri di f in D. Se f è continua, allora $Z_D(f)$ è un insieme chiuso nella topologia di D e quindi contiene tutti i suoi punti di accumulazione che stanno in D.

Definizione 8.8 *Diciamo che $a \in Z_D(f)$ è* zero isolato *di f se a è zero di f ma non è di accumulazione per $Z_D(f)$.*

In altre parole, a è zero è isolato se esiste un intorno $I \subset D$ di a in D tale che $I \cap Z_D(f) = \{a\}$.

Proposizione 8.14 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $a \in D$. Sono equivalenti:*

1. *a è zero isolato per f;*

2. *$f(a) = 0$ ma esiste $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $f^{(n)}(a) \neq 0$;*

3. *esistono $m \in \mathbb{N}^*$ e $g \in H(D)$ con $g(a) \neq 0$ tale che*

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \textit{per ogni } z \in D \,.$$

Dimostrazione:

1 ⇒ 2. Per il teorema (8.11) possiamo scrivere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

su ogni disco $B(a, r[$ centrato in a e contenuto in D. Se fosse $f^{(n)}(a) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, f sarebbe identicamente nulla in tale disco, e quindi a sarebbe interno a $Z_D(f)$, in particolare di accumulazione, contrariamente all'ipotesi che a sia zero isolato.

2 ⇒ 3. Sia m il minimo numero naturale tale che $f^{(m)}(a) \neq 0$. Si scrive allora

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(m+j)}(a)}{(m+j)!}(z-a)^j \;;$$

La serie nella precedente equazione converge su $B(a, r[$ e definisce pertanto su $B(a, r[$ una funzione olomorfa g, con $g(a) = f^{(m)}(a)/m! \neq 0$, e tale che $f(z) = (z-a)^m g(z)$ per $z \in B(a, r[$; per $z \in D \setminus \{a\}$ si definisce $g(z) := f(z)/(z-a)^m$; è ovvio che $g \in H(D)$ è come richiesto.

3 ⇒ 1. Se $g(a) \neq 0$, per la continuità di g esiste un intorno $B(a, r[$ nel quale $g(z) \neq 0$; ma siccome $(z-a)^m$ per $m \in \mathbb{N}^*$ si annulla solo a $z = a$, in $B(a, r[$ la funzione f si annulla solo a $z = a$, e quindi tale zero è isolato. C.V.D.

Corollario 8.15 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $a \in D$. $a \in D$ è di accumulazione per $Z_D(f)$ se e solo se è interno a $Z_D(f)$.*

Dimostrazione: Se $a \in D$ è di accumulazione per $Z_D(f)$, allora esiste una successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Z_D(f)$ tale che $z_n \to a$. Allora, per la continuità di f, $f(a) = f(\lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$, quindi $a \in Z_D(f)$. Quindi a non è zero isolato di f in D, e rivedendo la dimostrazione del teorema precedente esiste un disco centrato in a nel quale f si annulla. Pertanto a è interno a $Z_D(f)$. C.V.D.

Definizione 8.9 *Il numero naturale $m > 0$ di cui alla precedente definizione è ovviamente unico, e si chiama* molteplicità *di a come zero per f, o anche* ordine *di f in a e si scrive*

$$\mathrm{ord}_a(f) \quad \textit{oppure} \quad \mathrm{ord}(f, a) \,.$$

Quindi a è zero di ordine m per f se

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \,, \quad f^{(m)}(a) \neq 0 \,.$$

Questa definizione include anche il caso in cui a non sia zero di f; in tal caso si pone $\mathrm{ord}_a(f) = 0$.

Teorema 8.16 (principio di identità per le funzioni olomorfe) *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto connesso. Due funzioni $f, g \in H(D)$ coincidono su D se e solo se coincidono su un sottoinsieme di D che ha almeno un punto di accumulazione in D.*

Dimostrazione: Banalmente se due funzioni coincidono su un aperto D, coincidono su ogni sottoinsieme di D. Per dimostrare l'implicazione inversa, usando $h = f - g$ basta dimostrare che $h \in H(D)$ è identicamente nulla in D se $Z_D(f)$ ha un punto di accumulazione in D. Con questa ipotesi, dal teorema 8.15 vediamo subito che h si annulla in un disco centrato in a e contenuto in D. Per dimostrare che h si annulla in tutto D sfruttiamo la topologia. Consideriamo $\mathrm{Int}_D\big(Z_D(f)\big)$, l'interno di $Z_D(f)$, che è aperto (per definizione) in D munito della topologia indotta da $\mathbb{C}$. Ma ogni punto di accumulazione di $\mathrm{Int}_D\big(Z_D(f)\big)$ è anche di accumulazione per $Z_D(f)$, e quindi, per il teorema 8.15, sta in $\mathrm{Int}_D\big(Z_D(f)\big)$. Ne segue che $\mathrm{Int}_D\big(Z_D(f)\big)$ è sia aperto che chiuso, in quanto contiene tutti i suoi punti di accumulazione, e siccome non è vuoto (contiene un disco di raggio $r > 0$) è connesso e coincide con D. C.V.D.

Il principio di identità è molto importante per poter estendere in maniera ben definita una funzione olomorfa su un dominio più vasto quando questa, per motivi tecnici, è definita originariamente su una regione limitata (ad esempio, tramite uno sviluppo in serie all'interno di un disco di raggio finito).

Un'interessante conseguenza del principio di identità delle funzioni olomorfe è il fatto che, se una serie di potenze ha raggio di convergenza finito, allora c'è almeno un punto nella circonferenza di convergenza in cui f è singolare.

8.7 Serie di Laurent

Cominciamo ora lo studio di funzioni olomorfe che presentano singolarità in punti all'interno dell'aperto in cui sono definite. Esempi che abbiamo già incontrato sono le funzione $\zeta \mapsto 1/(z - z_0)^n : n \in \mathbb{N}$. Viene quindi spontaneo considerare, oltre alle serie di potenze positive con $n \in \mathbb{N}$, anche serie di potenze negative e, più in generale, serie bilatere, cioè con $n \in \mathbb{Z}$, come fatto per le serie di Fourier. Però, mentre per le serie di Fourier richiedevamo la convergenza della ridotta N-esima definita dalla somma degli n compresi tra $-N$ ed N, ora richiediamo la convergenza indipendente della serie dei termini positivi e di quella dei termini negativi.

Definizione 8.10 *La* serie bilatera *di numeri complessi di punto iniziale z_0 e coefficienti $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ è la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n \; . \tag{8.51}$$

La convergenza (semplice, uniforme, assoluta, totale) di tale serie è intesa, per definizione, come la convergenza di entrambe le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{8.52}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m} \; . \tag{8.53}$$

Sia r_2 il raggio di convergenza della serie delle potenze positive (8.52) ed $r_1 = 1/\rho$, ove ρ è il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} w^m \; .$$

Abbiamo in generale che $0 \leq \rho, r_1, r_2 \leq \infty$. Siccome la serie (8.52) converge per $|z - z_0| < r_2$ e diverge per $|z-z_0| > r_2$, mentre la serie (8.53) converge per $|z-z_0| > r_1$ e diverge per $|z-z_0| < r_1$, abbiamo i seguenti casi:

- Se $r_1 > r_2$ la serie bilatera non converge mai.
- Se $r_1 = r_2 < \infty$ la serie bilatera può convergere in qualche punto della circonferenza $\{z : |z - z_0| = r_1 = r_2\}$.
- Se $r_1 < r_2$, indicando con $B(z_0,]r_1, r_2[:= \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ la corona circolare aperta di raggio z_0, raggio interno r_1 e raggio esterno r_2, risulta:
  (a) per ogni $z \in B(z_0,]r_1, r_2[$, la serie (8.51) è assolutamente convergente;
  (b) per ogni corona circolare compatta $B(z_0, [r, r']$ contenuta in $z \in B(z_0,]r_1, r_2[$ $(r_1 < r < r' < r_2)$ la serie (8.51) è totalmente convergente.

Teorema 8.17 (sviluppo in serie di Laurent) *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $f \in H(D)$ e sia $B(z_0,]r_1, r_2[\subset D$ con $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ (non necessariamente in D). Si ha allora, per ogni $z \in B(z_0,]r_1, r_2[$,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \; , \tag{8.54}$$

la convergenza di tale serie essendo assoluta. I coefficienti a_n sono dati dalle formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta \; , \tag{8.55}$$

dove γ_r è un qualsiasi circolo di centro z_0 e raggio r con $r_1 < r < r_2$.

La convergenza della serie (8.54) è anche totale su ogni corona circolare compatta contenuta in $B(z_0,]r_1, r_2[$. Tale sviluppo in serie è inoltre unico.

Si noti che la serie dei termini con $n \geq 0$ — chiamata *parte regolare* di f — definisce una funzione olomorfa in $B(z_0, r_2[$ mentre la serie dei termini con $n < 0$ — chiamata *parte singolare* (o anche *parte principale* di f — definisce una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus B(a, r_1]$.

Il teorema di Laurent permette di sviluppare funzioni olomorfe il cui dominio accerchia completamente una regione nella quale la funzione non è definita, quindi con domini non semplicemente connessi, purché tale dominio contenga una corona circolare aperta. Il caso più semplice e per molti casi più significativo è quello di un dominio in cui manca un punto interno, come nel caso delle potenze intere negative $1/(z - z_0)^m : m \in \mathbb{N}^*$.

Definizione 8.11 *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto ed $a \in D$. Se $f \in H(D \setminus \{a\})$ si dice che a è* singolarità isolata *per f.*

Se D contiene un disco aperto di raggio $r > 0$ centrato in a, $B(a, r[\subset D$, allora $D \setminus \{a\}$ contiene la corona circolare aperta $B(a,]0, r[= B(a, r[\ \setminus\{a\}$, e quindi f può essere sviluppata in serie di Laurent su tale corona circolare. In questo caso il raggio interno della corona circolare è $r_1 = 0$, quindi la serie relativa alla parte singolare — cioè la serie dei termini con $n < 0$ — converge per tutti gli $z \neq a$.

La parte singolare di f classifica la singolarità isolata in tre classi:

- a si dice **singolarità eliminabile** se la parte singolare è identicamente nulla, ossia se $c_n = 0$ per ogni $n < 0$. In questo caso f si può prolungare ad una funzione olomorfa $\tilde{f} \in H(D)$ ponendo $\tilde{f}(0) = c_0$.

- a si dice **polo** di ordine $m > 0$ se $c_{-m} \neq 0$ e $c_{-n} = 0$ per $n > m$, cioè la parte singolare di f è la funzione razionale

$$Q_a(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}\ , \qquad c_{-m} \neq 0\ . \tag{8.56}$$

  In questo caso si dice che f ha ordine $-m$ ad a, ossia $\operatorname{ord}_a(f) = \operatorname{ord}(f, a) = -m$.

- a si dice **singolarità essenziale** per f negli altri casi, cioè se ci sono infiniti coefficienti c_{-n} diversi da 0.

Il comportamento di una funzione in prossimità di una singolarità eliminabile è regolare, come mostra la seguente

Proposizione 8.18 *Sia a singolarità isolata per la funzione olomorfa f. Sono equivalenti*

1. *a è eliminabile;*

2. *$\lim_{z\to a} f(z)$ esiste in $\mathbb{C}$;*

3. *f è limitata in un intorno di a (privato di a).*

Invece in prossimità di un polo (ma non di una singolarità essenziale) il comportamento di f è divergente, cioè il modulo di f cresce in modo illimitato.

Proposizione 8.19 *Sia a singolarità isolata per f. Allora a è un polo se e solo se*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty\ . \tag{8.57}$$

Inoltre a è polo di ordine m se e solo se $f(z)$ è infinito dello stesso ordine di $1/(z-a)^m$, e ciò accade se e solo se $1/f$ ha in a una singolarità eliminabile con uno zero di ordine m.

Il comportamento in prossimità di una singolarità essenziale è invece molto bizzarro, come illustra il seguente

Teorema 8.20 (di Casorati-Weierstrass) *Il punto a è singolarità essenziale per f se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ tale che $B(a, \delta[\subset D$, $f\big(B(a, \delta[\setminus\{a\}\big)$ è denso in $\mathbb{C}$.*

Un polo di ordine 1, 2, 3, ecc. si chiama anche polo semplice, doppio, triplo, ecc..

Esempio: Le funzioni

$$\frac{\sin z}{z}\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}\,, \qquad \frac{1-\cos z}{z^2}\,, \qquad \frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z}$$

hanno 0 come singolarità eliminabile. Un buon esercizio è trovare la parte regolare di queste funzioni (la parte singolare è nulla).

Esempio: La funzione $f(z) = 1/(1-\cos z)$, definita in $\mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, ha poli di ordine 2 ad ogni $z \in 2\pi\mathbb{Z}$. Infatti $1 - \cos z$ ha zeri di ordine 2 in tali punti. Per trovare la parte singolare di f in questi punti basta sviluppare f in serie di Laurent attorno a $z = 0$; per periodicità è poi facile estendere il risultato negli altri poli. Dunque

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + R(z)\,,$$

dove $R(z)$ è la parte regolare. Chiaramente

$$c_{-2} = \lim_{z\to 0} z^2 \frac{1}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\sin z} = 2$$

in cui abbiamo usato la regola di de l'Hôpital. Per calcolare c_{-1} sottraiamo il polo doppio ad $f(z)$, in modo che rimanga solo il polo semplice, ed effettuiamo l'opportuno limite:

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \lim_{z\to 0} z \left(\frac{1}{1-\cos z} - \frac{2}{z^2} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 - 2(1-\cos z)}{z(1-\cos z)} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{z^2 - 2[z^2/2 - z^4/4! + o(z^4)]}{z[z^2/2 - z^4/4! + o(z^4)]} = \lim_{z\to 0} \frac{2z^4/4! + o(z^4)}{z^3/2 + o(z^4)} = 0\,. \end{aligned}$$

La parte singolare in $a = 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$ è quindi

$$\frac{2}{(z-2\pi k)^2}\,.$$

Un modo alternativo per determinare i primi K coefficienti dello sviluppo di Laurent di una funzione con un polo di ordine m è questo: determinato che il polo di f in a è di ordine m, si sviluppa la funzione $1/f(z)$ (che ha uno zero di ordine m in a) in serie di Taylor fino all'ordine $m + K$:

$$\frac{1}{f(z)} = w^m \left[\sum_{j=0}^{K} b_j w^j + o(w^{K+1}) \right]\,, \qquad (w = z - a)\,.$$

Dato che

$$f(z) = \frac{1}{w^m} \left[\sum_{k=0}^{K} c_k w^k + o(w^{K+1}) \right]$$

è sufficiente determinare i c_k in funzione dei b_k in modo che

$$1 = \frac{1}{f(z)} f(z) = \left(\sum_{j=0}^{K} b_j w^j \right) \left(\sum_{k=0}^{K} c_k w^k \right) + o(w^{K+1}) = 1 + o(w^{K+1})$$

Esempio: Le funzioni $\mathrm{e}^{1/z}$, $\sin(1/z)$, $\cos(1/z)$ hanno tutte $z = 0$ come singolarità essenziale. Si può vedere che $\lim_{z\to 0} f(z)$ non esiste per nessuna di tali funzioni, né finito né infinito, ma è facile trovare la parte singolare a 0 per ciascuna di queste funzioni, sostituendo $1/z = w$ e sviluppando in serie di Taylor nella variabile w. Per l'esponenziale si ha

$$e^{1/z} = 1 + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots \right) .$$

Abbiamo definito l'ordine di una funzione in un punto a nel caso in cui a sia uno zero isolato, nel caso in cui esista $f(a) \neq 0$ ed anche nel caso in cui a sia un polo. Restano escluse le due situazioni in cui f si annulla identicamente in un intorno di a, oppure a è singolarità essenziale.

Allora si può vedere che valgono le sequenti operazioni per gli ordini di due funzioni $f, g \in H(D \setminus \{a\})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_a(fg) &= \mathrm{ord}_a(f) + \mathrm{ord}_a(g) \\ \mathrm{ord}_a(f/g) &= \mathrm{ord}_a(f) - \mathrm{ord}_a(g) \\ \mathrm{ord}_a(f+g) &\geq \min\{\mathrm{ord}_a(f), \mathrm{ord}_a(g)\} \qquad (f \neq -g) \\ \mathrm{ord}_a(f+g) &= \min\{\mathrm{ord}_a(f), \mathrm{ord}_a(g)\} \qquad \big(\mathrm{ord}_a(f) \neq \mathrm{ord}_a(g)\big) \end{aligned}$$

Queste operazioni si estendono al caso in cui f è nulla in un intorno di a, ponendo $\mathrm{ord}_a(f) = +\infty$, e frequentemente permettono una valutazione rapida della natura di un punto di zero o di singolarità isolata.

8.8 Teorema dei residui

In questa sezione svilupperemo un metodo molto potente per effettuare integrali definiti, sia in campo reale che in campo complesso, di funzioni olomorfe. Sarà perciò sempre inteso che tratteremo di funzioni olomorfe definite in un aperto $D \subset \mathbb{C}$, eccetto al più un numero finito di punti isolati, da considerare singolarità isolate di f.

Definizione 8.12 *Sia $a \in D$ una singolarità isolata per f. Il numero*

$$c_{-1} := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z \, , \tag{8.58}$$

dove γ è un circolo centrato in a, bordo di un disco contenuto in D che non contiene altre singolarità di f, è detto **residuo** *di f ad a, e si indica con*

$$\mathrm{Res}_a(f) = \mathrm{Res}(f, a) \, .$$

$\mathrm{Res}_a(f)$ è quindi il coefficiente di $1/(z-a)$ nello sviluppo di Laurent di f attorno ad a. Esso è di fondamentale importanza nel calcolo degli integrali, grazie al seguente

Teorema 8.21 (dei residui) *Sia $D \subset \mathbb{C}$ aperto, $N \subset D$ sottoinsieme discreto (non necessariamente finito), $f \in H(D \setminus N)$. Se γ è un circuito in $D \setminus N$, nullomotopo in D, si ha*

$$\oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{a \in N} w(\gamma, a)\, \mathrm{Res}(f, a) \tag{8.59}$$

dove $w(\gamma, a)$ è l'indice di avvolgimento di γ rispetto ad a.

Dimostrazione: Ci limitiamo al caso in cui N sia finito. Per ogni $a \in N$, sia $Q_a : \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ la parte singolare di f ad a. Si può allora considerare la funzione $g = f - \sum_{a\in N} Q_a$ che è olomorfa in D. Essendo per ipotesi γ nullomotopo in D, si ha

$$0 = \oint_\gamma g = \oint_\gamma \left(f - \sum_{a\in N} Q_a \right) \quad \Longrightarrow \quad \oint_\gamma f = \sum_{a\in N} \oint_\gamma Q_a \ .$$

Siccome la serie (eventualmente infinita)

$$Q_a(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots$$

converge assolutamente in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ e totalmente sul sostegno $\gamma([a,b])$ (compatto) di γ — infatti $a \notin \gamma([a,b])$ —, essa può essere integrata termine a termine.

Abbiamo visto in un esercizio a pag. 8.2 che l'integrale attorno ad un circolo centrato in a di $(z-a)^n$ vale 0, a meno che $n = -1$ nel qual caso l'integrale vale $2\pi\mathrm{i}$. Pertanto, se $w(\gamma, a)$ è l'indice di avvolgimento di γ rispetto ad a, abbiamo che

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^k}\, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & (k \neq 1) \\ 2\pi\mathrm{i}\, w(\gamma, a) & (k = 1) \end{cases}$$

e quindi

$$\oint_\gamma Q_a = 2\pi\mathrm{i}\ w(\gamma, a)\, \mathrm{Res}(f, a) \ .$$

C.V.D.

Osservazione: Per ipotesi γ non passa attraverso alcuna singolarità di f, ma l'omotopia che lo contrae ad un punto (circuito costante) può passare per tali singolarità .

Osservazione: L'estensione al caso di N infinito si basa sul fatto che l'indice di avvolgimento di γ è non nullo solo rispetto ad un insieme finito di punti di N.

Un'importante conseguenza del teorema dei residui è la seguente:

Corollario 8.22 *Nelle stesse ipotesi del teorema dei residui, con in più D semplicemente connesso, si ha che f ha una primitiva in $D \setminus N$ se e solo se* $\mathrm{Res}_a(f) = 0$ *per ogni* $a \in N$.

8.8.1 Calcolo dei residui

Esponiamo di seguito alcuni metodi utili per calcolare i residui di una funzione in una singolarità isolata a.

(i) Se f ha in a un polo di ordine 1, cioè semplice, allora

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) \ . \tag{8.60}$$

(ii) Se $f = h/g$ con $h, g \in H(D)$, $h(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, allora f ha in a un polo di ordine 1 e vale

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{h(a)}{g'(a)} \ . \tag{8.61}$$

(iii) Se $f(z) = h(z)/(z-a)^m$ con $m \geq 1$ intero e $h(a) \neq 0$, allora f ha in a un polo di ordine m e

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{h^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \ . \tag{8.62}$$

(iv) Se a è un polo di ordine m per f,

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-a)^m f(z)] \ . \tag{8.63}$$

Dimostrazione:

(i) La serie di Laurent di una funzione con un polo di ordine 1 è

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \mathcal{O}\,(z-a)$$

quindi

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \left[c_{-1} + c_0(z-a) + \mathcal{O}\left((z-a)^2\right)\right] = c_{-1} = \operatorname{Res}(f, a) \ .$$

(ii) Usando il precedente risultato, e ricordando che $g(a) = 0$, si ha

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{\dfrac{g(z) - g(a)}{z-a}} = \frac{h(a)}{g'(a)} \ .$$

(iii) Sviluppando h in serie di Taylor e dividendo per $(z-a)^m$, il coefficiente del polo semplice $1/(z-a)$ è il coefficiente $(m-1)$-esimo dello sviluppo di Taylor di h, che è $h^{(m-1)}(a)/(m-1)!$. C.V.D.

(iv) Conseguenza diretta di (iii) ponendo $h(z) = (z-a)^m f(z)$ che ha a come singolarità eliminabile. C.V.D.

8.9 Calcolo di integrali definiti con il il metodo dei residui

Ci proponiamo ora di calcolare alcuni integrali definiti senza determinare una funzione primitiva della funzione integranda, ma deducendo il valore dell'integrale tramite una somma di residui relativi ai punti singolari di una funzione olomorfa scelta in maniera opportuna. Non esiste un metodo generale che permetta di trattare il problema; ci limiteremo a considerare alcune classi di integrali, indicando per ciascuna il procedimento che permette di ricondurre l'integrazione ad un calcolo di residui.

Primo tipo

Sono integrali della forma

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\ \mathrm{d}\theta \tag{8.64}$$

ove $R(x, y) = p(x, y)/q(x, y)$ è funzione razionale (rapporto di due polinomi p e q) delle variabili indipendenti x, y, definita sul cerchio unitario $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ e ivi priva di singolarità (per non avere singolarità lungo il cammino di integrazione), ossia $q(x, y) \neq 0$ in $\mathbb{S}^1$. È essenziale che l'integrazione in θ si estenda su un intervallo di ampiezza 2π (o multipli). Ponendo

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \gamma(\theta) \in \mathbb{C} ,$$

al variare di $\theta \in [0, 2\pi]$ la variabile z percorre la circonferenza unitaria nel piano complesso, quindi $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ è un circuito, per la precisione è il circolo unitario centrato nell'origine. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} \\
\sin\theta &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2\mathrm{i}} \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}\theta \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} .
\end{aligned}$$

Quindi I_1 si riconduce all'integrale di contorno sul circolo unitario γ di una funzione razionale $\widetilde{R}(z)$ della variabile complessa z:

$$I_1 = \oint_\gamma R\Big(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2\mathrm{i}}\Big)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \oint_{|z|=1} \widetilde{R}(z)\,\mathrm{d}z \tag{8.65}$$

Applicando il teorema dei residui, l'integrale è determinato dalla somma dei residui dei poli di $\widetilde{R}$ all'interno del cerchio unitario:

$$I_1 = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{a \in Z(\widetilde{R}) \\ |a|<1}} \mathrm{Res}(\widetilde{R}, a) . \tag{8.66}$$

Secondo tipo

Sono integrali della forma

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.67}$$

in cui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione senza singolarità per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è la restrizione all'insieme dei reali di una funzione $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa il cui dominio contiene almeno uno dei due semipiani $\mathrm{Im}\,(z) \geq 0$ o $\mathrm{Im}\,(z) \leq 0$. Se I_2 esiste, o se esiste il limite

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x , \tag{8.68}$$

l'idea è quella di aggiungere all'intervallo $[-r, r]$ un semicerchio centrato nell'origine e di raggio r, come in fig. 8.4, in modo da definire un cicuito nel piano complesso, così che l'integrale di circuito si possa calcolare con il metodo dei residui. Se nel limite $r \to +\infty$ il contributo del semicerchio tende a zero, l'integrale di circuito corrisponde all'integrale I_2 sull'asse reale.

Vediamo più in dettaglio questo metodo nel caso di una funzione razionale $f(x) = p(x)/q(x)$ con $q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'integrale in $\mathbb{R}$ esiste se $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$, quindi se il grado di q è più alto di quello di p di almeno 2 unità : $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$. La funzione integranda f è evidentemente la restrizione ad $\mathbb{R}$ della corrispondente funzione razionale $f(z) = p(z)/q(z)$ con

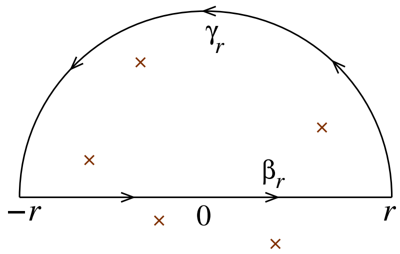

Figura 8.4: Circuito per integrali del secondo tipo. Le crocette rappresentano le singolarità dell'integrando.

$z \in \mathbb{C} \setminus Z(q)$. Indicando con $\beta_r : [-r, r] \to \mathbb{C}$, $\beta(x) = x + \mathrm{i}0$ il cammino con sostegno $[-r, r]$, si ha

$$I_2 = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{r \to +\infty} \int_{\beta_r} f(z)\, \mathrm{d}z \tag{8.69}$$

Costruiamo un circuito chiuso giustapponendo a β_r il cammino γ_r lungo la semicirconferenza di raggio r nel semipiano superiore: $\gamma_r : [0, \pi]$, $\gamma_r(\theta) = r e^{\mathrm{i}\theta}$. Poichè f ha un numero finito di singolarità tutte isolate, non più di $\deg(q)$, esiste sicuramente un $\bar{r} > 0$ tale che, per $r > \bar{r}$, il circuito $\beta_r.\gamma_r$ circonda tutte le singolarità di f che si trovano nel semipiano superiore. Si ha quindi, per $r > \bar{r}$,

$$\oint_{\beta_r.\gamma_r} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\beta_r} f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_r} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{a \in Z(q) \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res}(f, a)\ .$$

Il punto chiave è che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

e quindi otteniamo il valore dell'integrale cercato come somma di residui:

$$I_2 = \lim_{r \to +\infty} \int_{\beta_r} f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{a \in Z(q) \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname{Res}(f, a)\ . \tag{8.70}$$

L'annullarsi dell'integrale di f sulla semicirconferenza γ_r è di facile verifica. Infatti, evidenziando i termini di grado più elevato dei polinomi p e q, abbiamo

$$\begin{aligned}
& p(z) = p_K z^K + \mathcal{O}\left(z^{K-1}\right)\ , \quad q(z) = q_M z^M + \mathcal{O}\left(z^{M-1}\right)\ , \quad (M \geq K + 2) \\
& f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p_K / q_M}{z^L}\ , \quad L := M - K \geq 2 \\
& \lim_{z \to \infty} z f(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \hat{r} > 0 : |z| = r > \hat{r} \quad \Longrightarrow \quad |z f(z)| < \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

E quindi, per la disuguaglianza di Darboux 8.6,

$$\left| \int_{\gamma_r} f \right| \leq L(\gamma_r) \sup_{z \in \gamma_r} |f(z)| \leq (\pi r) \frac{\varepsilon}{r} = \pi \varepsilon$$

che può essere reso piccolo a piacere.

Possiamo estendere i risultati sopra esposti per trattare situazioni più generali. Per dimostrare l'annullarsi di integrali su archi di raggio tendente ad infinito abbiamo il

Lemma 8.23 (del cerchio grande) *Siano $\theta_1 < \theta_2$ reali con $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ gli angoli che individuano il settore circolare*

$$A(\theta_1, \theta_2) := \{z \in \mathbb{C}^* : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\} \ . \tag{8.71}$$

In questo settore sia definita la funzione $f : A(\theta_1, \theta_2) \to \mathbb{C}$. Sia C_r l'arco di circonferenza di raggio r in tale settore:

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\} \ . \tag{8.72}$$

Se $zf(z)$ tende a 0 in tale settore per $z \to \infty$, uniformemente rispetto all'angolo θ:

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{z \in C_r} |zf(z)| = 0 \ ,$$

allora l'integrale di f sull'arco di circonferenza C_r tende a 0 per $r \to +\infty$:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{C_r} f = 0 \ .$$

(Più precisamente, si dovrebbe dire "l'integrale sul cammino $\beta_r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$, $\beta_r(\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$", ma visto che l'integrale tende a 0, non conta il verso di percorrenza).

Dimostrazione: Posto $M(r) = \sup_{z \in C_r} |f(z)|$ l'estremo superiore di $|f|$ su C_r, per la disuguaglianza di Darboux

$$\left| \int_{C_r} f \right| \leq L(C_r) M(r) = |\theta_2 - \theta_1| r \ M(r) \ ,$$

ma per ipotesi $r\,M(r) \to 0$ per $r \to 0^+$, da cui il risultato. C.V.D.

Notiamo che non abbiamo richiesto che la funzione f sia olomorfa, per cui il lemma è valido in condizioni molto generali. Possiamo così estendere il risultato (8.70) a funzioni non solo razionali, contemplando anche il completamento del circuito sul semipiano negativo:

Teorema 8.24 *Sia f olomorfa in un aperto contenente il semipiano chiuso $\{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ eccetto un insieme finito di singolarità non su $\mathbb{R}$; sia inoltre*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \mathrm{Im}\, z \geq 0}} zf(z) = 0 \ .$$

Allora

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x) \,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum \{\mathrm{Res}(f, a) : a \text{ singolarità di } f, \, \mathrm{Im}\, a > 0\} \ . \tag{8.73}$$

Analogo enunciato per il semipiano $\mathrm{Im}\, z \leq 0$, con risultato di segno opposto:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x) \,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum \{\mathrm{Res}(f, a) : a \text{ singolarità di } f, \, \mathrm{Im}\, a < 0\} \ . \tag{8.74}$$

Terzo tipo

Questi integrali si incontrano nel calcolo delle trasformate integrali di Fourier e di Laplace, e sono della forma
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}x\ , \tag{8.75}$$
dove $\alpha > 0$ è reale positivo e f ammette un'estensione olomorfa in un aperto contenente il semipiano $\{\mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$, eccetto al più un insieme finito di singolarità che non stanno sull'asse reale (in seguito tratteremo anche il caso di funzioni con poli semplici sull'asse reale). Se $\alpha = 0$ si rientra negli integrali del secondo tipo. Se $\alpha < 0$ bisogna riformulare il discorso sul semipiano inferiore $\{\mathrm{Im}\,(z) \leq 0\}$, come apparirà chiaro in seguito. L'idea è sempre quella di completare il cammino di integrazione in un circuito aggiungendo un semicerchio, e di assicurarsi che il contributo all'integrale dal tratto semicircolare tenda a 0. A questo scopo è utilissimo il

Lemma 8.25 (di Jordan) *Sia $f : A(\theta_1, \theta_2) \to \mathbb{C}$ una funzione definita nel settore circolare di angoli $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Sia $\gamma_r : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$, $\gamma_r(\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ l'arco di circonferenza di raggio $r > 0$ in $A(\theta_1, \theta_2)$. Se*
$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in A(\theta_1,\theta_2)}} f(z) = 0$$
(uniformemente rispetto all'angolo) ed $\alpha > 0$, allora
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Dimostrazione: Abbiamo che
$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha r\cos\theta-\alpha r\sin\theta}|\,|\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,r\,\mathrm{d}\theta\ .\end{aligned}$$

Poniamo
$$M(r) = \sup_{z\in\mathrm{Im}\,\gamma_r} |f(z)| = \sup\{|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| : \theta\in[\theta_1,\theta_2]\}$$
estremo superiore di $|f|$ (che è un massimo se f è continua) nel sostegno dell'arco γ_r. Abbiamo allora che
$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z\right| \leq rM(r)\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\ .$$
Quest'ultimo integrale si può maggiorare con
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
sfruttando la positività e la simmetria rispetto all'asse $\theta = \pi/2$ dell'integrando. Ricordando poi che la funzione sin è concava in $[0, \pi]$ (ha $-\sin$ per derivata seconda, negativa in tale intervallo), si ha $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ per $\theta\in]0, \pi/2[$ (vedi fig. 8.5) da cui (essendo $\alpha r > 0$) si ottiene
$$\begin{aligned} &-\alpha r\sin\theta \leq -\alpha r2\theta/\pi \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta} \leq \mathrm{e}^{-\alpha r2\theta/\pi} \\ \Longrightarrow\quad &\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\alpha r\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\alpha r2\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2\alpha r}(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})\ .\end{aligned}$$

Ne segue

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi}{\alpha} M(r)(1-\mathrm{e}^{-\alpha r})$$

ed essendo $\lim_{r\to+\infty} M(r) = 0$ ed $\alpha > 0$ per ipotesi, si conclude. C.V.D.

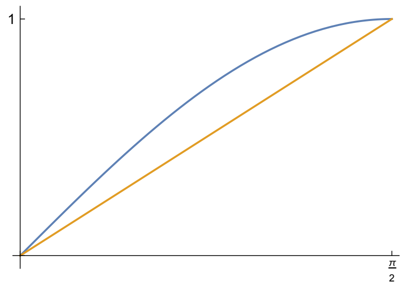

Figura 8.5: Grafici di $\sin\theta$ (blu) e $2\theta/\pi$ (arancione).

Osservazione: È facile vedere che si ha un enunciato interamente analogo al lemma di Jordan con $\alpha < 0$, purché sia $-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 0$.

Teorema 8.26 *Sia f olomorfa in un aperto contenente il semipiano chiuso $\{\mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ eccetto al più un insieme finito di singolarità non su $\mathbb{R}$; sia inoltre*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z \geq 0}} f(z) = 0\ .$$

Allora si ha, per ogni $\alpha > 0$,

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum\left\{\mathrm{Res}(z\mapsto f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}, a) : a \textit{ singolarità di } f,\ \mathrm{Im}\, a > 0\right\}\ . \tag{8.76}$$

Analogo enunciato per $\alpha < 0$ ed f olomorfa nel semipiano $\{\mathrm{Im}\, z \leq 0\}$, con risultato di segno opposto:

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}\sum\left\{\mathrm{Res}(z\mapsto f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}, a) : a \textit{ singolarità di } f,\ \mathrm{Im}\, a < 0\right\}\ . \tag{8.77}$$

Quarto tipo

Sia R una funzione razionale priva di poli sul semiasse reale positivo $\mathbb{R}_+$. Integrali del tipo

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}R(t)\,\mathrm{d}t \tag{8.78}$$

vengono ricondotti, con il cambiamento di variabile $t = \mathrm{e}^x$, ad integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha x}R(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\ . \tag{8.79}$$

Questi integrali, quando esistono finiti, possono essere calcolati complessificando l'integrando ed usando circuiti rettangolari γ_r di vertici $-r, r, r+\mathrm{i}2\pi, -r+\mathrm{i}2\pi$, come in fig. 8.6

Sotto opportune condizioni — che sono in generale quelle che assicurano la convergenza degli integrali (8.78) e (8.79)) — gli integrali sui lati verticali tendono a 0; la periodicità dell'esponenziale permette poi di esprimere l'integrale sul lato superiore in termini di quello sul lato inferiore; si ottiene una formula da cui si ricava l'integrale di partenza.

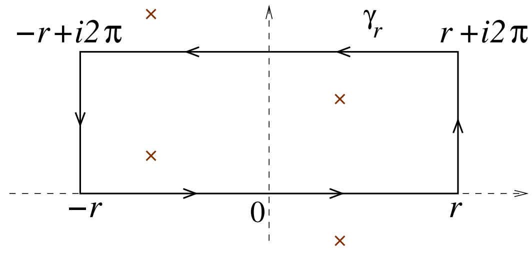

Figura 8.6: Circuito rettangolare per gli integrali del quarto e quinto tipo.

Quinto tipo

Integrali come

$$I_n := \int_0^{+\infty} \log^n t\, R(t)\ \mathrm{d}t \tag{8.80}$$

dove R è funzione razionale priva di poli su R_+ ed $n \in \mathbb{N}^*$ è intero ≥ 1, con il cambiamento di variabile $t = \mathrm{e}^x$ si riconducono a

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n R(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \tag{8.81}$$

(può anche essere accettato per R un polo di ordine minore o uguale a n a $t = 1$). Per calcolare l'integrale (8.81) si integra la funzione

$$\int_{\gamma_r} z^{n+1} R(\mathrm{e}^z)\mathrm{e}^z\ \mathrm{d}z$$

sul solito circuito rettangolare γ_r di vertici $-r, r, r + \mathrm{i}2\pi, -r + \mathrm{i}2\pi$ rappresentato in fig. (8.6). Gli integrali sui lati verticali tendono a 0 (se I_n esiste finito). L'integrale sul lato inferiore tende a I_{n+1}, mentre quello sul lato superiore dà $-I_{n+1} + \sum_k c_k I_k$. Nella somma gli I_{n+1} si cancellano e resta una combinazione lineare degli integrali $I_k : k \leq n$. Procedendo per ricorrenza su $k = 0, 1, \cdots, n$, si può calcolare I_n. Per $n = 1$ la situazione può essere anche più semplice, in quanto se gli integrali I_n sono reali, può accadere che I_0 ed I_1 siano rispettivamente la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario dell'integrale di contorno.

Poli semplici in prossimità del cammino di integrazione

Capita a volte che la funzione integranda f possieda un punto singolare lungo il cammino di integrazione. In questo caso bisogna evitare la singolarità, cioè aggirarla con un percorso che le passi "vicino". Se la singolarità è eliminabile o sufficientemente "debole", il tratto di cammino ad essa vicino dà un contributo nullo:

Lemma 8.27 (del cerchio piccolo) *Sia $f : A(\theta_1, \theta_2) \to \mathbb{C}$ definita in un settore circolare $A(\theta_1, \theta_2)$ e sia C_r l'arco di circonferenza di raggio r in questo settore. Se $zf(z)$ tende a 0 in tale settore per $z \to 0$, uniformemente rispetto all'angolo θ:*

$$\lim_{r\to 0^+} \sup_{z\in C_r} |zf(z)| = 0\ ,$$

allora l'integrale di f sull'arco di circonferenza C_r tende a 0 per $r \to 0^+$:

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{C_r} f = 0\ .$$

Dimostrazione: Esattamente analoga a quella del lemma del cerchio grande: posto $M(r) = \sup_{z\in C_r} |f(z)|$ l'estremo superiore di $|f|$ su C_r, per la disuguaglianza di Darboux

$$\left| \int_{C_r} f \right| \leq L(C_r)M(r) = |\theta_2 - \theta_1| r\, M(r) \ ,$$

ma per ipotesi $r\, M(r) \to 0$ per $r \to 0^+$, da cui il risultato. C.V.D.

Questo lemma non è applicabile quando la singolarità di f sia un polo semplice. In questo caso però esiste una formula generale per dedurre il contributo all'integrazione dall'arco che aggira il polo:

Lemma 8.28 *Sia $a \in D$, $f \in H(D \setminus \{a\})$ con a polo semplice per f. Siano $\theta_1 < \theta_2$ reali e $\gamma_r : [\theta_1, \theta_2] \to D$, $\gamma_r(\theta) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ cammino con supporto un arco di circonferenza di raggio $r > 0$ centrato in a. Si ha*

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{\gamma_r} f(z)\, \mathrm{d}z = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)\mathrm{Res}(f, a) \ .$$

Dimostrazione: Posto $c_{-1} = \mathrm{Res}(f, a)$, per ipotesi si ha

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - a} + R(z)$$

dove $R \in H(D)$, in particolare R non è singolare in a. Ne segue

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, \mathrm{d}z = c_{-1} \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - a} + \int_{\gamma_r} R(z)\, \mathrm{d}z \ .$$

Per il lemma del cerchio piccolo, l'integrale di R tende a zero per $r \to 0^+$. Invece è

$$\int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\, \mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1) \ .$$

C.V.D.

Notare che, se il polo è di ordine maggiore di 1, allora tale limite è infinito per angoli generici.

Una funzione che abbia uno o più poli sull'asse reale non è certamente integrabile in $\mathbb{R}$ o in intervalli che contengano almeno una di tali singolarità . Ad esempio, se $a < 0 < b$ non esiste

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \ .$$

Un modo per definire integrali di funzioni con poli semplici sull'asse reale è quello di togliere dal dominio di integrazione degli intervalli simmetrici centrati sulle singolarità , della forma $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ per ogni polo $p \in \mathbb{R}$, ed effettuare poi il limite per $\varepsilon \to 0^+$. Questa procedura definisce il **valore principale** di un integrale. Se il dominio di integrazione non è limitato si stabilisce anche di togliere un intorno simmetrico del punto all'infinito: $]-\infty, R] \cup [R, +\infty[$. In definitiva, il valore principale dell'integrale di f in $[a, b]$ è dato dal limite (se esiste)

$$\mathrm{vp}\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}} \int_{I(\varepsilon,R)} f(x)\, \mathrm{d}x \tag{8.82}$$

$$I(\varepsilon, R) := \Big([a, b] \cap [-R, R]\Big) \setminus \bigcup_{j\in J} [p_j - \varepsilon, p_j + \varepsilon] \ ,$$

dove $\{p_j : j \in J\}$ denota i poli di f sull'asse reale. Ad esempio, nel caso di un unico polo $p \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathrm{vp} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ R \to +\infty}} \left(\int_{-R}^{p-\varepsilon} + \int_{p+\varepsilon}^{R} \right) f(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

Evidentemente, se $f \in L^1([a,b])$, allora il suo valore principale esiste e coincide con l'integrale ordinario di f in $[a,b]$, mentre il viceversa non è vero in generale.

La linearità di integrali e limiti si traduce nella linearità dei valori principali: se $\mathrm{vp} \int_I f$, $\mathrm{vp} \int_I g$ esistono entrambi finiti e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora esiste finito

$$\mathrm{vp} \int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha\, \mathrm{vp} \int_I f + \beta\, \mathrm{vp} \int_I g \,. \tag{8.83}$$

Inoltre, se $f : I \to \mathbb{C}$, allora $\mathrm{vp} \int_I f$ esiste se e solo se esistono $\mathrm{vp} \int_I \mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{vp} \int_I \mathrm{Im}\, f$. In tal caso si ha

$$\mathrm{vp} \int_I f = \mathrm{vp} \int_I \mathrm{Re}\, f + \mathrm{i}\, \mathrm{vp} \int_I \mathrm{Im}\, f \,. \tag{8.84}$$

Il metodo di calcolo dei valori principali si basa ancora sul teorema dei residui: i punti singolari vengono evitati con piccoli archi di cerchio, il cui raggio si fa tendere a zero.