Normalizzazioni e notazioni relativistiche

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,(2\pi)^4\,\delta^4(k-k') = 1$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,2\pi\,\delta(k^2-m^2)\,\theta(k^0) = \int_0^\infty \frac{dk^0}{2\pi}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,2\pi\,\delta\big((k^0-\omega_k)(k^0+\omega_k)\big)$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2\omega_k} =: \int \widetilde{dk} \qquad \omega_k := \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$$

$$\tilde{\delta}(k-k') := (2\pi)^3\,2\omega_k\,\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\int \widetilde{dk}\;\tilde{\delta}(k-k') = 1$$

$$\left[a_{(\lambda)}(k),\, a^{\dagger}_{(\lambda')}(k')\right] = \tilde{\delta}(k-k')\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$a = \sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_k}\;a_{can}$$

$$\langle 0|0\rangle = 1$$

$$|k\rangle = \sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_k}\;|k\rangle_{can}$$

$$|k,\lambda\rangle := a^{\dagger}_{(\lambda)}(k)\,|0\rangle$$

$$\langle k,\lambda|k',\lambda'\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\,\tilde{\delta}(k-k')$$

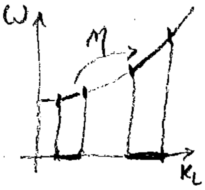
$$\sum_\lambda \int \widetilde{dk}\;|k,\lambda\rangle\langle k,\lambda| = \mathbb{1}_{1\ \text{particella}} = \sum_\lambda \int d^3\vec{k}\;|k,\lambda\rangle_{can}\langle k,\lambda|$$

$$\omega' = \operatorname{ch}\eta\,\omega + \operatorname{sh}\eta\,k_L \qquad \omega^2 - k_L^2 = k_T^2\ \text{cost} \Rightarrow \omega\,d\omega = k_L\,dk_L$$

$$k_L' = \operatorname{ch}\eta\,k_L + \operatorname{sh}\eta\,\omega \Rightarrow dk_L' = \operatorname{ch}\eta\,dk_L + \operatorname{sh}\eta\,d\omega$$

$$\overset{!}{=} \left(\operatorname{ch}\eta + \operatorname{sh}\eta\,\frac{k_L}{\omega}\right) dk_L$$

$$\omega' = \left(\operatorname{ch}\eta + \operatorname{sh}\eta\,\frac{k_L}{\omega}\right)\omega$$



$$\frac{dk_L'}{dk_L} = \frac{\omega'}{\omega} \Leftrightarrow \frac{dk_L'}{\omega'} = \frac{dk_L}{\omega}$$

$$|k_1\lambda_1, k_2\lambda_2\rangle := a^\dagger_{\lambda_1}(k_1)\, a^\dagger_{\lambda_2}(k_2)\, |0\rangle \;\; = |k_2\lambda_2, k_1\lambda_1\rangle$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{\lambda_1\lambda_2} \int \tilde{d}k_1\, \tilde{d}k_2 \; |k_1\lambda_1, k_2\lambda_2\rangle\langle k_1\lambda_1, k_2\lambda_2| \right) |k_A\lambda_A, k_B\lambda_B\rangle$$

$$= \sum_{\lambda_1\lambda_2} \int \tilde{d}k_1\, \tilde{d}k_2 \; \Big(\delta_{\lambda_1\lambda_A}\delta_{\lambda_2\lambda_B}\, \tilde{\delta}(k_1-k_A)\tilde{\delta}(k_2-k_B)$$
$$+ \delta_{\lambda_1\lambda_B}\delta_{\lambda_2\lambda_A}\, \tilde{\delta}(k_1-k_B)\tilde{\delta}(k_2-k_A) \Big) |k_A\lambda_A, k_B\lambda_B\rangle$$

$$= 2\, |k_A\lambda_A, k_B\lambda_B\rangle$$

Il proiettore sul sottospazio ad n fotoni è

$$\Pi_n = \frac{1}{n!} \prod_{l=1}^{2} \left(\sum_{\lambda_l} \int \tilde{d}k_l \right) |k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n\rangle\langle k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n|$$

Campo elettromagnetico quantistico con sorgente esterna (classica)

Consideriamo il campo e.m. quantizzato ($A^\mu(x)$ operatori) presenza di una sorgente esterna classica ($j^\mu(x)$ funzione)

Come nei tipici processi d'urto, ci chiediamo quali siano le ampiezze di probabilità che, partendo da un certo stato quantistico $|\alpha\rangle_{in}$ nel passato si veda a finire in uno stato $|\beta\rangle_{out}$ nel futuro.

Stiamo parlando di stati del campo e.m.
La sorgente è data e non viene influenzata da A^μ.

Supponiamo per semplicità (per ora) che j^μ sia accesa in un intervallo di tempo finito $[t_1, t_2]$, o che venga accesa e poi spenta adiabaticamente ($e^{-\varepsilon|t|}$)

$\boxed{t<t_1}$ Lo stato del campo e.m. è caratterizzato dalla presenza di fotoni liberi.
Una base di questo spazio di Hilbert di fotoni è la base di Fock

$$|k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n\rangle_{in} = a^\dagger_{in}(k_1,\lambda_1)\cdots a^\dagger_{in}(k_n,\lambda_n)|0\rangle_{in}$$

Costruita a partire dallo stato di vuoto : $a_{in}(k,\lambda)|0\rangle_{in}=0$ da operatori di creazione iniziali.

Questi operatori costituiscono i coefficienti dello sviluppo di un campo libero

$$A^\mu_{in}(x) = \sum_\lambda \int d\tilde{k} \left[e^{-ik\cdot x} \epsilon^\mu_\lambda(k) a_{in}(k,\lambda) + e^{ik\cdot x} \overset{*}{\epsilon}{}^\mu_\lambda(k) a^+_{in}(k,\lambda) \right]$$

che in gauge di Lorentz o di Coulomb soddisfa

$\Box A^\mu_{in}(x) = 0$. Vale $[a_{in}(k,\lambda), a^+_{in}(k',\lambda')] = \delta_{\lambda\lambda'} \tilde{\delta}(\vec{k}-\vec{k}')$

$\boxed{t > t_2}$ Lo stato del campo e.m. è di nuovo un insieme di fotoni liberi. La base di Fock conveniente ora è data dai vettori

$$|k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n\rangle_{out} = a^+_{out}(k_1,\lambda_1) \cdots a^+_{out}(k_n,\lambda_n) |0\rangle_{out}$$

con $a_{out}(k,\lambda)|0\rangle_{out} = 0$

in cui valgono analoghe regole di commutazione tra gli operatori a_{out} e a^+_{out} ed un analogo sviluppo in modi propri per A^μ_{out} che soddisfa

$$\Box A^\mu_{out}(x) = 0$$

Le ampiezze che cerchiamo $_{out}\langle\beta|\alpha\rangle_{in}$,

per esempio se partiamo da uno stato di vuoto nel passato, sono del tipo

$_{out}\langle 0|0\rangle_{in}$, $_{out}\langle k,\lambda|0\rangle_{in}$

Questo problema si risolve se si riesce a determinare l'operatore S : $_{out}\langle\beta| = {}_{in}\langle\beta| S$

In questo modo

$$ {}_{out}\langle \beta | \alpha \rangle_{in} = {}_{in}\langle \beta | S | \alpha \rangle_{in} =: S_{\beta\alpha} $$

Anticipo che per una sorgente classica j^μ

- si riesce ad esprimere $S[j^\mu]$ in forma chiusa,
- e di conseguenza si può esprimere qualsiasi elemento di matrice S tra stati di Fock esplicitamente in termini della TdF $\tilde{j}^\mu(k)$.

Noto innanzitutto che

$$ {}_{out}\langle k\lambda | = {}_{in}\langle k\lambda | S = {}_{in}\langle 0 | a(k,\lambda) S $$

$$ \| $$

$$ {}_{out}\langle 0 | a_{out}(k,\lambda) = {}_{in}\langle 0 | S\, a_{out}(k,\lambda) $$

$$ \Rightarrow \quad a_{out}(k,\lambda) = S^{-1} a_{in}(k,\lambda) S \qquad \forall k,\lambda $$

$$ \Rightarrow \quad A^\mu_{out}(x) = S^{-1} A^\mu_{in}(x) S \qquad \forall x $$

Per determinare S possiamo cercare la relazione tra A_{in} ed A_{out}

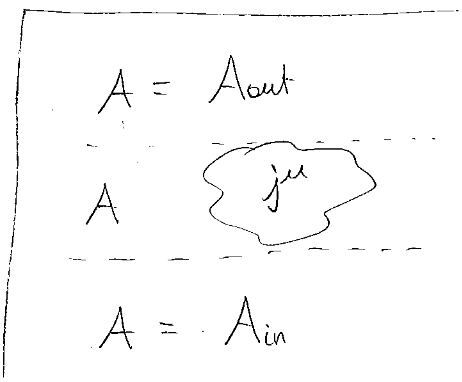
Sia $A^\mu(x)$: $\Box A^\mu = j^\mu$ il campo interagente.

$$ \Box A^\mu = 0 \qquad t < t_1 \quad \text{o} \quad t > t_2 $$

Siamo tentati di supporre che

$$ A^\mu(x) = A^\mu_{in}(x) \qquad (t < t_1) $$

$$ A^\mu(x) = A^\mu_{out}(x) \qquad (t > t_2) $$



Queste uguaglianze sono formali, cioè valgono in senso debole per opportune scelte della corrente j^μ.

$$\lim_{t\to-\infty} \langle\alpha|A^\mu_f(x)|\beta\rangle = \sqrt{Z}\,\langle\alpha|A^\mu_{in,f}(x)|\beta\rangle$$

con $\phi_f(x) = i\int d^3x\, f^*(x)\overleftrightarrow{\partial_0}\varphi(x) \quad : \quad \Box f = 0$

purché $j^\mu(x)\longrightarrow 0$ per $t\to-\infty$ "abbastanza".

Se j^μ è classica, $Z=1$. $\quad \langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = \langle\beta|\beta\rangle$.

Supponiamo valide le relazioni tra $A_{in,out}$, esatto per i tempi in cui j^μ è spenta.

Sappiamo che $A^\mu(x) = A^\mu_0(x) + \int G_{ret}(x-y)\,j^\mu(y)\,d^4y$

per un qualche campo libero A_0.

Ma per $x^0 < t_1$ il termine $G_{ret} * j = 0$

e quindi $A^\mu_0 = A^\mu = A^\mu_{in} \quad \Rightarrow A^\mu_0 = A^\mu_{in} \quad \forall x$

Analogamente $A^\mu(x) = A^\mu_{out}(x) + \int G_{adv}(x-y)\,j^\mu(y)\,d^4y$

Infine, per differenza

$$A^\mu_{out}(x) = A^\mu_{in}(x) + \underbrace{\int [G_{ret} - G_{adv}](x-y)\,j^\mu(y)\,d^4y}_{A^\mu_{cl}(x)}$$

cioè la differenza è un C-numero

Siamo arrivati a

$$S^{-1}A_{in}S = A_{in} + A_{cl}$$

La struttura è simile ad una "traslazione", del tipo $e^{iaP} X e^{-iaP} = X + a$ poichè $[X,P]=i$

La formula generale che ci serve è

$$e^{B} A e^{-B} = A + [B,A] + \frac{1}{2}[B,[B,A]] + \dots + \frac{1}{n!}[B,A]^{n} + \dots$$

che si tronca al commutatore se è un C-numero.

Per noi A è una funzione di x, così come $[B,A]$, mentre $B = -\ln S$ non dipende da x.

Il colpo di fortuna che ci presenta su un vassoio d'argento la struttura dell'operatore è il fatto che

$$[G_{ret} - G_{adv}](x) = [\theta(x^0) + \theta(-x^0)] \int d\tilde{k} \left(i e^{-ik\cdot x} + c.c.\right)$$

$$= -\Delta(x, m=0) := i[\varphi(x), \varphi(0)]$$

Commutatore di campi a massa nulla, come ogni componente (spaziale) del campo e.m. libero:

$$i[A^{\mu}_{in}(x), A^{\nu}_{in}(y)] = + g^{\mu\nu} \Delta(x-y, m=0)$$

$$\Rightarrow A^{\mu}_{cl}(x) = -g^{\mu\nu} \int \Delta(x-y) j_{\nu}(y) d^4y$$

$$= -i \int [A^{\mu}_{in}(x), A^{\nu}_{in}(y)] j_{\nu}(y) d^4y$$

$$= \int [A^{\mu}_{in}(x), -i A^{\nu}_{in} j_{\nu}(y)] d^4y \qquad -B = \ln S$$

$$= [A^{\mu}_{in}(x), -i \int A^{\nu}_{in} j_{\nu} d^4y]$$

In conclusione $S = \exp\{-i\int A_{in}(x)\cdot j(x)\, d^4x\}$

OSSERVAZIONE Dalla teoria perturbativa si ottiene

$$S = T\exp\{-i\int \mathcal{H}_I(A_{in})\, d^4x\} = T\exp\{-i\int A^\mu_{in} j_\mu\, d^4x\}$$

$$= T\exp\{-i\int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t)\, dt\} = \underbrace{e^{i\phi}}_{\text{fase}} \exp\{-i\int A^\mu_{in} j_\mu\, d^4x\}$$

La stessa espressione vale con $A_{in} \to A_{out}$

Per calcolare gli elementi della matrice S conviene scrivere S • in forma normale

• nello spazio degli impulsi

$$\int A^\mu(x) j_\mu(x)\, d^4x = \int d^4x \sum_\lambda\int d\tilde{k}\,[e^{-ikx}\epsilon^\mu_\lambda(k) a(k,\lambda) + e^{ikx}\epsilon^{*\mu}_\lambda(k) a^\dagger(k,\lambda)] \underbrace{\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{-ik'x}\tilde{j}_\mu(k')}_{}$$

$$= \sum_\lambda\int d\tilde{k}\int d^4k'\,[\delta^4(k+k')\epsilon^\mu_\lambda(k) a(k\lambda) + \delta^4(k-k')\epsilon^{*\mu}_\lambda(k) a^\dagger(k,\lambda)]\,\tilde{j}_\mu(k')$$

$$\boxed{\begin{gathered} k_\mu \tilde{j}^\mu = 0 \\ \Downarrow \\ \lambda = 1,2 \ \forall \text{gauge} \end{gathered}}$$

$$= \sum_\lambda\int d\tilde{k}\,[\epsilon^\mu_\lambda(k) a(k\lambda)\tilde{j}_\mu(-\omega,-\vec{k}) + \epsilon^{*\mu}_\lambda(k) a^\dagger(k\lambda)\tilde{j}_\mu(\omega,\vec{k})]$$

$$= \sum_\lambda\int d\tilde{k}\,[\epsilon^\mu_\lambda(k) a(k\lambda)\tilde{j}^*_\mu(k) + \text{h.c.}]$$

Sfruttiamo ora la formula (BCH)

$$e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^A e^B$$

se $[A,B]$ commuta con A e B

$\boxed{1D}$ $S = e^{ca^+ - c^* a} = e^{-\frac{1}{2}cc^*[a^+, -a]} e^{ca^+} e^{-c^* a}$

$= e^{-\frac{1}{2}|c|^2} e^{ca^+} e^{-c^* a}$

$\langle 0|S|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|c|^2} \langle 0| e^{ca^+} e^{-c^* a} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|c|^2} \leq 1$

$|\psi\rangle := S|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|c|^2} e^{ca^+} e^{-c^* a}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|c|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n a^{+n}}{n!}|0\rangle$

$= e^{-\frac{1}{2}|c|^2} \frac{c^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$

$\langle\psi|\psi\rangle = e^{-|c|^2} \sum_{nm} \frac{c^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n|m\rangle \frac{c^m}{\sqrt{m!}} = e^{-|c|^2} \sum_n \frac{|c|^{2n}}{n!} = 1$

$\boxed{\infty D}$

$S = \exp\left\{-i \sum_\lambda \int d\tilde{k} \left[\epsilon^{*\mu}_\lambda(k) \tilde{J}_\mu(k) a^+(k,\lambda) + h.c. \right]\right.$

$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[-i \sum_\lambda \int d\tilde{k}\, \epsilon^{*\mu}_\lambda(k) \tilde{J}_\mu(k) a^+(k\lambda), -i \sum_{\lambda'} \int d\tilde{k}'\, \epsilon^\nu_{\lambda'}(k') \tilde{J}^*_\nu(k') a(k'\lambda')\right]\right\}$

$\times \exp\left\{-i \sum_\lambda \int d\tilde{k}\, \epsilon^* \cdot \tilde{J}\, a^+(k,\lambda)\right\} \exp\left\{-i \sum_\lambda \int d\tilde{k}\, \epsilon \cdot \tilde{J}^* a(k\lambda)\right\}$

$\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\lambda\lambda'} \int d\tilde{k}\, d\tilde{k}'\, \delta_{\lambda\lambda'} \tilde{\delta}(k-k')\, \epsilon^{*\mu}_\lambda \tilde{J}_\mu(k)\, \epsilon^\nu_{\lambda'} \tilde{J}^*_\nu(k')\right\}$

$= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_\lambda \int d\tilde{k}\, |\epsilon^*_\lambda \cdot \tilde{J}(k)|^2\right\} = S_{00} < 1$

La probabilità che non sia emesso alcun fotone

è $P_0 = |S_{00}|^2 = \exp\left\{-\sum_\lambda \int d\tilde{k}\, |\epsilon^*_\lambda \cdot \tilde{J}(k)|^2\right\}$

La probabilità che venga emesso un solo fotone di polarizzazione e impulso qualsiasi è

$$P_1 = \sum_\lambda \int \widetilde{dk}\, |\langle k\lambda | S | 0\rangle|^2$$

$$= \sum_\lambda \int \widetilde{dk}\, \Big| S_\infty \langle k\lambda | \exp\Big\{-i\sum_{\lambda'}\int \widetilde{dk'}\, \overset{*}{\epsilon}_{\lambda'}\cdot \tilde{J}\, a^+(k',\lambda')\Big\} |0\rangle \Big|^2$$

$$\hookrightarrow \underset{\text{niente}}{\underset{\downarrow}{1}} - i \sum_{\lambda'} \int \widetilde{dk'}\, \overset{*}{\epsilon}_{\lambda'}\cdot \tilde{J}\, \underset{\delta_{\lambda\lambda'}\tilde{\delta}(k-k')}{\underset{\downarrow}{a^+(k',\lambda')}} + \dots$$

$$= \sum_\lambda \int \widetilde{dk}\, P_0\, |\overset{*}{\epsilon}_\lambda \cdot \tilde{J}(k)|^2$$

$$P_n = \sum_{\lambda_1\cdots\lambda_n} \int \widetilde{dk_1}\cdots\widetilde{dk_n}\, \frac{1}{n!}\, \Big| \underbrace{\langle k_1\lambda_1 \cdots k_n\lambda_n | \frac{(-i)^n}{n!} \prod_{\ell=1}^n \sum_{\lambda'_\ell} \int \widetilde{dk'_\ell}\, \overset{*}{\epsilon}_{\lambda'_\ell}\cdot \tilde{J}\, a^+(k'_\ell,\lambda'_\ell) |0\rangle}_{} \Big|^2$$

in $\langle ..|..|0\rangle$ ci sono $n!$ termini uguali, ciascuno pari a $\frac{(-i)^n}{n!} \prod_{\ell=1}^n \Big[\overset{*}{\epsilon}_{\lambda'_\ell} \tilde{J}(k'_\ell)\, \delta_{\lambda_\ell\lambda'_\ell}\, \tilde{\delta}(k_\ell - k'_\ell) \sum_{\lambda'_\ell} \int \widetilde{dk'_\ell} \Big]$

$$P_n = P_0\, \frac{1}{n!} \Big[\sum_\lambda \int \widetilde{dk}\, |\overset{*}{\epsilon}_\lambda \cdot \tilde{J}(k)|^2 \Big]^n = e^{-\bar{n}}\, \frac{1}{n!}\, (\bar{n})^n$$

Si ha quindi una emissione di fotoni con distribuzione Poissoniana, tipica delle emissioni scorrelate (indipendenti).

Esercizio: $\sum_n P_n = 1$; $\sum_n n P_n = \bar{n}$

Applicando questi risultati alla $\tilde{J}^\mu(k) = ie\left(\frac{p'^\mu}{p'\cdot k} - \frac{p^\mu}{p\cdot k}\right) \sim \frac{1}{\omega}$

essendo $\int \widetilde{dk} = \int \frac{\omega^2 d\omega\, d\Omega_k}{2\omega (2\pi)^3}$ $\Rightarrow \bar{n} \sim \int_0 \frac{d\omega}{\omega} \to +\infty$, $P_n = 0$!

Il fatto è che quando la corrente agisce per tempi arbitrariamente lunghi, la probabilità di emettere fotoni soffici cresce sempre di più, fino a diventare infinita. CATASTROFE INFRAROSSA

In altre parole, per sistemi con infiniti gradi di libertà non ha senso considerare una particella carica "nuda", distaccata dal suo campo di radiazione soffice.

Sperimentalmente è impossibile contare il numero di fotoni emessi con energia arbitraria.
Ciò che è misurabile è

- l'energia irraggiata
- il numero di fotoni con energia > soglia

ENERGIA IRRAGGIATA

Partendo dal vuoto iniziale $|0\rangle_{in}$
vogliamo calcolare l'energia E per $t > t_2$, alla quale ogni quanto $|k,\lambda\rangle_{out}$ contribuisce con un termine additivo ω_k:

$$E = {}_{in}\langle 0| H(A_{out}) |0\rangle_{in} = {}_{in}\langle 0| S^{-1} H(A_{in}) S |0\rangle_{in}$$

$$= {}_{in}\langle 0| S^{+} \quad \sum_{\lambda} \int d\tilde{k}\, \omega_k\, a^{+}_{in}(k,\lambda)\, a_{in}(k,\lambda) \quad S|0\rangle_{in}$$

Un modo equivalente di interpretare i calcoli è:

- la corrente eccita dei quanti e.m. descritti dallo STATO COERENTE $|\psi\rangle = S|0\rangle$ norm.
- il valore d'aspettazione dell'hamiltoniana è

$$\bar{E} = \langle\psi|H|\psi\rangle = \langle 0|\, S^{+} \sum_{\lambda}\int d\tilde{k}\; \omega_k\, a^{+}_{k\lambda} \underset{S^{+}S}{\uparrow} a_{k\lambda}\, S|0\rangle$$

$$S^{+} a(k,\lambda) S = a(k,\lambda) + i\, \epsilon^{*\mu} \tilde{J}_{\mu}(k) =: a_{k\lambda} + i J_{k\lambda}$$

$$S^{+} a^{+}(k,\lambda) S = a^{+}(k,\lambda) - i\, \epsilon^{\mu} \tilde{J}^{*}_{\mu}(k) =: a^{+}_{k\lambda} - i \tilde{J}^{*}_{k\lambda}$$

$$\bar{E} = \langle 0| \sum_{\lambda}\int d\tilde{k}\; \omega_k \left(a^{+}_{k\lambda} - i\tilde{J}^{*}_{k\lambda}\right)\left(a_{k\lambda} + i\tilde{J}_{k\lambda}\right)|0\rangle$$

$$= \sum_{\lambda}\int d\tilde{k}\; |\tilde{J}_{k\lambda}|^2\, \omega_k$$

integrabile e finito nell' IR.

RIF: Itzykson Zuber 4.1

Bjorken Drell 17.10