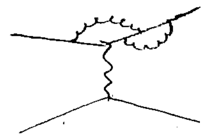
Correzioni virtuali :

Consideriamo le correzioni virtuali al processo $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ oppure $e^-\nu \to e^-\nu$ (così ci possiamo limitare alla gamba elettronica).



Le correzioni virtuali alterano l'interpretazione fisica dei parametri della Lagrangiana (m, e, ψ, A):

$m_f \neq m$; $e_f \neq e$ ecc.

La procedura di riduzione LSZ tiene in conto di questo fatto e dimostra che

$$S_{fi} = \left(\prod_{l\in\{i,f\}} \sqrt{R_l}\right) G^t_R(p_i, p_f)$$

↳ TdF delle funzioni di Green amputate (troncate) rinormalizzate

residuo al polo del propagatore rinormalizzato

SI RICAVANO DA

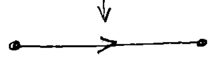
$$\mathcal{L}_{QED} = \bar\psi_0(i\hat\partial - e_0\hat A_0 - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu}$$

$$= Z_2\,\bar\psi_R(i\hat\partial - Z_e\sqrt{Z_3}\,e_R\hat A_R - m_R - \delta m)\psi_R - \frac{Z_3}{4}F_R^2$$

$$= \bar\psi_R(i\hat\partial - m_R)\psi_R - e_R\bar\psi_R\hat A_R\psi_R - \frac{1}{4}F_R^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_0 &= \sqrt{Z_2}\,\psi_R \\ A_0 &= \sqrt{Z_3}\,A_R \\ e_0 &= Z_e\, e_R \\ m_0 &= \frac{m_R + \delta m}{Z_2} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &:= Z_2 Z_e \sqrt{Z_3} \\ \delta_1 &= Z_1 - 1 \\ \delta_2 &= Z_2 - 1 \\ \delta_3 &= Z_3 - 1 \end{aligned}$$

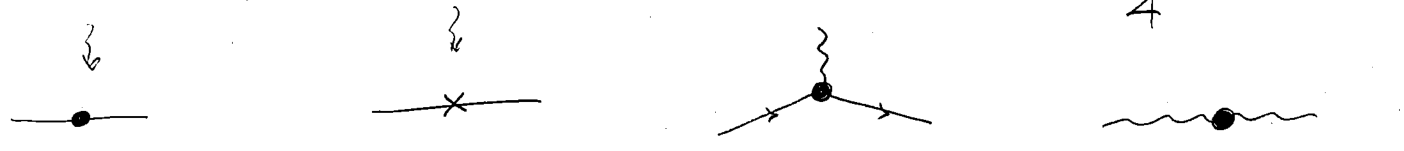


$\dfrac{i}{\hat p - m_R}$

$-ie_R\gamma^\mu$

$\dfrac{-i(g^{\mu\nu} + \text{t.g.})}{k^2}$

$$+\,\delta_2\,\bar\psi_R\, i\hat\partial\,\psi_R \quad -\,\delta m\,\bar\psi_R\psi_R \quad -\,\delta_1\, e_R\,\bar\psi_R\hat A_R\psi_R \quad -\,\frac{\delta_3}{4}F_R^2$$



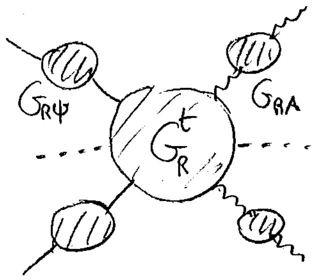
$$i\delta_2\hat p \qquad -i\delta m \qquad \delta_1(-ie_R\gamma^\mu) \qquad -i\delta_3(k^2 g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)$$

Le funzioni di Green rinormalizzate si calcolano mediante le regole di Feynman, fissando i controtermini $\delta_{1,2,3,m}$ in modo da assorbire le divergenze UV, in modo che $Z^{-\frac{n}{2}}G_R(p_1\cdots p_n;\, m_R, e_R)$ siano funzioni ben definite nel limite $\Lambda\to+\infty$ o $\varepsilon\to 0$.

Regolarizzatori

Sono importanti le funzioni a 2 punti

$G_{R\psi}(p) =$  e $G_{RA}(k) =$ 

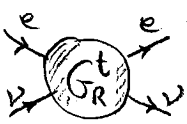
$G_R(p_1\cdots k_n) =$ 

$= \left[G_{R\psi}(p_l)\right]^{N_F}\left[G_{RA}(k_l)\right]^{N_B}$ 

$$G_{R\psi}(p) \simeq \frac{iR_\psi}{\hat p - m_F} + \text{reg} \quad ; \quad G_{RA}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}R_A}{k^2} + \text{reg}$$

massa fisica

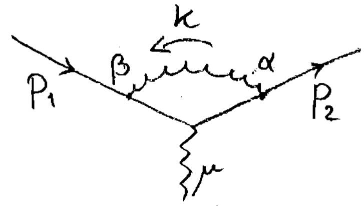
Quindi, per calcolare S_{fi} dobbiamo:

- calcolare 

- calcolare $R_{e,\nu}$ da 

Correzione al vertice: UV → ε ; IR → λ

$\boxed{V1}$



$$-ie\Lambda^\mu(P_2,P_1) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\, \frac{-i g_{\alpha\beta}}{k^2-\lambda^2+i0}\, (-ie\gamma^\alpha)\, \frac{i(\hat{P}_2+\hat{k}+m)}{(P_2+k)^2-m^2+i0}$$

$$(-ie\gamma^\mu)\; i\,\frac{\hat{P}_1+\hat{k}+m}{(P_1+k)^2-m^2+i0}\,(-ie\gamma^\beta)$$

$$\boxed{\begin{aligned} e &= e_R\mu^\varepsilon \\ m &= m_R \end{aligned}}$$

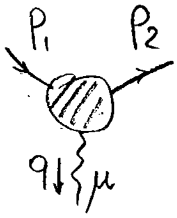
- $D = 4-2\varepsilon$ regolarizza la divergenza UV
- $\lambda > 0$ regolarizza la divergenza IR affice $k^0 \to 0$

  $$d^4k\, \frac{1}{k^2}\, \frac{1}{P_2\cdot k}\, \frac{1}{P_1\cdot k} \sim dk\,\frac{k^3}{k^4}$$

- $m > 0$ evita la divergenza collineare $\vec{k} \parallel \vec{P}_{1,2}$

Inserendo i due spinori dell'elettrone entrante e uscente otteniamo un oggetto vettoriale (che si può esprimere in termini di due funzioni scalari di q^2 chiamate

FATTORI DI FORMA dell'elettrone:



$$= \bar{u}(P_2)\Gamma^\mu(P_2,P_1)\bar{u}(P_1) = \bar{u}_2\left[\gamma^\mu + \Lambda^\mu(P_2,P_1)\right]u_1$$

$$= \bar{u}_2\left[\gamma^\mu F_1(q^2) - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)\right]$$

Infatti abbiamo 3 vettori a disposizione: $\gamma^\mu, P_1^\mu, P_2^\mu$ con cui costruire il vettore γ^μ. Equivalentemente $\gamma^\mu, q^\mu, (P_1+P_2)^\mu$

Identità di Gordon: $\bar{u}_2\gamma^\mu u_1 = \bar{u}_2\left[\frac{(P_1+P_2)^\mu}{2m} - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}\right]u_1$

ci permette di esprimere $(P_1+P_2)^\mu$ in termini di γ^μ e q^μ.

L'invarianza per parità della QED esclude γ_5.

All'ordine più basso c'è solo il vertice  : $\Gamma^\mu_{(0)} = \gamma^\mu$

$$\Rightarrow F_1^{(0)}(q^2) = 1 \qquad F_2^{(0)}(q^2) = 0$$

Le correzioni $O(e^2)$ relative da  + 

$\downarrow -ie\Lambda^\mu$ $\qquad \downarrow -ie\gamma^\mu \delta_1$ controtermine

introducono correzioni $O(\alpha)$ a

$$F_1(q^2) = 1 + \delta F_1(q^2) \quad ; \quad F_2(q^2) \neq 0$$

$\delta F_1^\Lambda(q^2) + \delta_1$ $\qquad$ finita UV e IR

$\delta F_1^\Lambda(q^2)$: divergente UV, " IR $\qquad$ δ_1: cancella la div UV

Oggi ci limitiamo all'analisi della divergenza IR.

Trascuriamo i $\hat{k}$ nei numeratori dei propagatori fermionici

k^2 " denominatori " "

$$\bar{u}_2 \Lambda^\mu_{IR} u_1 = -ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\alpha (\hat{P}_2 + m)\gamma^\mu (\hat{P}_1 + m)\gamma^\beta u_1}{(k^2-\lambda^2)(2P_2 \cdot k)(2P_1\cdot k)} g_{\alpha\beta}$$

si ha: $\bar{u}_2 \gamma^\alpha(\hat{P}_2 + m) = \bar{u}_2\left[\{\gamma^\alpha, \hat{P}_2\} - \cancel{\hat{P}_2\gamma^\alpha + m\gamma^\alpha}\right] = \bar{u}_2 \, 2P_2^\alpha$

$$(\hat{P}_1 + m)\gamma^\beta u_1 = \left[\{P_1, \gamma^\beta\} - \cancel{\gamma^\beta \hat{P}_1 + \gamma^\beta m}\right]u_1 = 2P_1^\beta u_1$$

$$\Rightarrow \bar{u}_2 \Lambda^\mu_{IR} u_1 = \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \underbrace{\left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2-\lambda^2} \frac{eP_2^\alpha}{P_2\cdot k} \frac{eP_1^\beta}{P_1 \cdot k}\right]}_{\delta F_1^{IR}}$$

In δF_1^{IR} abbiamo i tipici fattori di inserzione soffice incontrati nell'emissione reale.

Per svolgere l'integrale con 3 denominatori usiamo la parametrizzazione di Feynman

$$\frac{1}{ABC} = 2\int_0^1 dx\,dy\,dz\, \frac{\delta(x+y+z-1)}{[xA+yB+zC]^3}$$

$$A = k^2-\lambda^2+i0$$
$$B = 2P_2\cdot k+k^2+i0$$
$$C = 2P_1\cdot k+k^2+i0$$

(Rimettiamo il k^2 altrimenti $\int d^Dk$ divergerebbe ultravioletto)

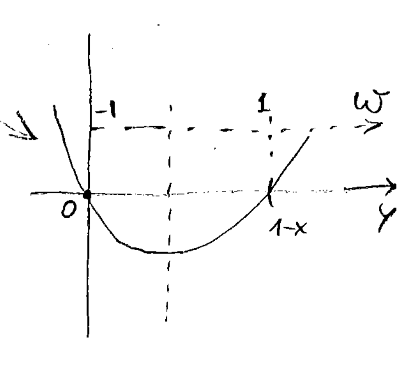
$$\delta F_1^{IR} = -ie^2\cdot 4\, P_1\cdot P_2 \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\, 2\int d(xyz)\, \frac{1}{D^3}$$

$$D := xA+yB+zC = k^2+i0-x\lambda^2+y\,2P_2\cdot k+z\,2P_1\cdot k$$
$$= \underbrace{k^2+2k\cdot(yP_2+zP_1) \pm (yP_2+zP_1)^2}-x\lambda^2+i0$$
$$= k'^2-\Delta \quad : \quad k' = k+yP_2+zP_1$$
$$\Delta := (yP_2+zP_1)^2+x\lambda^2-i0$$
$$= m^2(1-x)^2-\underbrace{y(1-x-y)}\,q^2+x\lambda^2-i0$$

$\boxed{\varepsilon\to 0}$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(k'^2-\Delta)^3} = -\frac{i}{2(4\pi)^2\Delta}$$

$$\delta F_1^{IR} = -\frac{e^2\,4P_1\cdot P_2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\ \Delta^{-1}$$



Δ è quadratico in y : $\int dy$ è elementare

Poniamo $x' := 1-x$ e $y := \frac{1+b}{2}x'$

$$\Rightarrow \int_0^{1-x} dy\, \Delta^{-1} = \int_{-1}^{1} db\, \frac{x'}{2}\left[m^2 x'^2 - \frac{x'^2 q^2}{4}(1-b^2) + \lambda^2(1-x')\right]^{-1}$$

Estraiamo il coefficiente m^2 di b^2 che è $\frac{x'^2}{\rho}$ ove $\rho := \frac{4m^2}{-q^2} > 0$

$$= \frac{x}{2}\frac{-\rho}{m^2 x^2} 2\int_0^1 db\left[b^2 - b_0^2(x)\right]^{-1} \quad \text{ove } b_0^2 := 1+\rho\left[1+\frac{\lambda^2}{m^2}\frac{(1-x)}{x^2}\right]$$

$$= \frac{4}{xq^2}\cdot\frac{-1}{2b_0}\ln\frac{b_0+1}{b_0-1} \qquad \text{da integrare } \int_0^1 dx.$$

Poiché per noi $\lambda^2 \ll m^2$, vediamo che b_0 quasi non dipende da x e rimane pressoché costante: $b_0 \sim \sqrt{1+\rho} =: b$ a meno che x non sia così piccolo per cui

$$\frac{\lambda^2}{m^2}\frac{1-x}{x^2} \simeq \frac{\lambda^2}{m^2 x^2} \gtrsim 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \lesssim \frac{\lambda}{m} \ll 1.$$

Se $x \ll \frac{\lambda}{m}$ $\qquad b_0 \sim \frac{\sqrt{\rho}}{x} \longrightarrow +\infty$,

$\frac{1}{2b_0}\ln\frac{b_0+1}{b_0-1} \overset{*}{\sim} x^2 \to 0$ e sopprime il fattore $\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \delta F_1^{IR} \simeq -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\underbrace{4P_1P_2}_{2(2m^2-q^2)}\frac{2}{-q^2}\underbrace{\int_{\lambda/m}^{1}\frac{dx}{x}}_{\ln\frac{m}{\lambda}}\left[\frac{1}{b_0}\ln\frac{b_0+1}{b_0-1}\right]_{b_0=b} = \sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}$$

è quindi una funzione scalare di q^2 che diverge logaritmicamente per $\frac{\lambda}{m}\to 0$.

La struttura logaritmica ci fa sospettare che questo abbia qualcosa in comune con $I(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

$$\delta F_1^{IR} \simeq -\frac{\alpha}{4\pi}\left(b+\frac{1}{b}\right) \ln\frac{b+1}{b-1} \ln\frac{m^2}{\lambda^2}$$

$$\frac{1}{\beta_{12}} \ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$$

$v_1(2)$ $\qquad v_1(CM)$ $\quad v_{CM}(2)$

$$\beta_{12} = \text{vel relativa} = \frac{\beta+\beta}{1+\beta\cdot\beta} = 2\left[\beta+\frac{1}{\beta}\right]^{-1}$$

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{4m^2}{(p_1+p_2)^2}} < 1$$

crossing: $p_2 \to -p_2$ $\quad s \leftrightarrow t$

Invece in δF_1^{IR} abbiamo $b = \sqrt{1-\frac{4m^2}{(p_1-p_2)^2}} > 1$

Esercizio: $\beta = \frac{1}{b}$

$$\left(b+\frac{1}{b}\right) \ln\left(\frac{b+1}{b-1}\right) = \left(\frac{1}{\beta}+\beta\right) \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{\beta_{12}} \ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}}$$

Riusciamo così a scrivere δF_1^{IR} in termini di β_{12}:

$$\delta F_1^{IR}(q^2) = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{\beta_{12}} \ln\frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} \ln\frac{m^2}{\lambda^2}$$

Oppure (Mandl Shaw 9.7) $\quad \frac{1}{k^2-\lambda^2+i0} = P\frac{1}{k^2-\lambda^2} - i\pi\delta(k^2-\lambda^2) = \underbrace{P\frac{1}{k^2-\lambda^2}}_{\text{IR finito}} \underbrace{-\frac{i\pi}{2\omega_k}\left[\delta(k_0-\omega_k)+\delta(k_0+\omega_k)\right]}_{\text{IR divergente}}$

$$\delta F_1^{IR}(q^2) = \frac{-e^2}{(4\pi)^2}\int d\tilde{k}\, \frac{p_1\cdot p_2}{(p_1\cdot k)(p_2\cdot k)}$$

Per quanto riguarda la divergenza UV della correzione al vertice, questa si calcola tenendo solamente i $\hat{k}$ nei numeratori dei propagatori fermionici:

$$\bar{u}_2 \Lambda^{\mu}_{UV} u_1 = -ie^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\bar{u}_2 \gamma^\alpha \hat{k} \gamma^\mu \hat{k} \gamma_\alpha u_1}{k^2 (2p_2\cdot k + k^2)(2p_1\cdot k + k^2)}$$

in cui λ^2 può essere rimosso perché qui non c'è diverg. IR.

Parametrizzando alla Feynman come prima, ed integrando in $d^D k$ in $D = 4-2\varepsilon$ dimensioni,

e usando $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha = -2(1-\varepsilon)\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = 4(1-\varepsilon)^2 \gamma^\mu$

si trova che $\delta F_1^{\Lambda}(q^2)$ diverge UV mentre $F_2(q^2)$ è finito:

$$\delta F_1^{\Lambda, UV} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon}$$

La correzione al vertice completa, tenendo in conto anche del controtermine δ_1, dà infine

$$\delta F_1^{reg}(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \Big[\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{UV} - \gamma - \underbrace{\frac{1}{\beta_{12}} \ln \frac{1+\beta_{12}}{1-\beta_{12}} \ln \frac{m^2}{\lambda^2}}_{IR,\ q^2\ dip.} + \underbrace{\ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2}}_{\mu\text{-DIP}} + \underbrace{\mathcal{F}_1\left(\frac{q^2}{m^2}\right)}_{finita} \Big] + \delta_1$$

Lo <u>SCHEMA DI RINORMALIZZAZIONE</u> consiste nello scegliere δ_1

$\delta_1^{MS} := -\dfrac{\alpha}{4\pi\varepsilon}$ rimuove solo $\dfrac{1}{\varepsilon}$; $\delta_1^{\overline{MS}} := -\dfrac{\alpha}{4\pi}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right)$

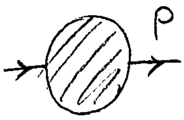
Nello schema on-shell si richiede che

$$\delta F_1^{os}(q^2=0) = 0 \quad \Rightarrow \delta_1^{os} = -\frac{\alpha}{4\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - 2\ln\frac{m^2}{\lambda^2} + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2} + \mathcal{F}_1(0)\right]$$

<u>NOTA</u> Quindi δ_1 può contenere una div. IR, ma non tutta!

Autoenergia dell' elettrone

A1

Dobbiamo ora calcolare $G_R(p, e_R, m_R) =$  $\sim \dfrac{i R_\psi}{\not{p} - m_F}$

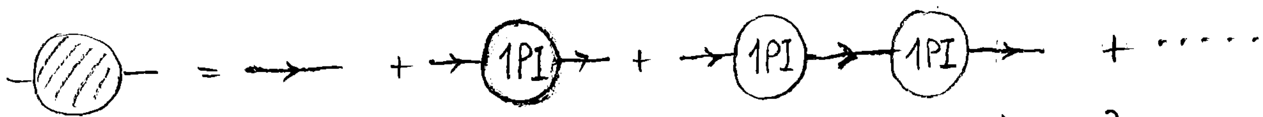
per determinare
- il residuo R_ψ
- la relazione tra m_R e m_F

m_R: parametro usato nei calcoli; m_F: osservabile

▨ Sia R_ψ che m_R (m_F) dipendono dallo schema di rinormalizzazione (perchè divergono UV)

▨ R_ψ presenta anche una divergenza IR.

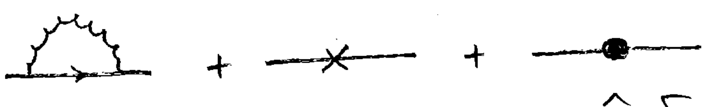
Calcoliamo G_R off-shell: $p^2 \neq m_F^2$. Ci ricordiamo che



$$= \frac{i}{\hat{p} - m_R}\left\{1 + B(\hat{p})\frac{i}{\hat{p}-m_R} + \left[B(\hat{p})\frac{i}{\hat{p}-m_R}\right]^2 + \cdots [\ ]^n + \cdots\right\}$$

$$= \frac{i}{\hat{p} - m_R}\left\{1 - B(\hat{p})\frac{i}{\hat{p}-m_R}\right\}^{-1} = i\left\{\left[1 - B\frac{i}{\hat{p}-m_R}\right](\hat{p}-m_R)\right\}$$

$$= \frac{i}{\hat{p} - m_R - i B(\hat{p})} = \frac{i}{\hat{p}(1+\delta_2) - (m_R + \delta m) - \Sigma(\hat{p})}$$

Ad $\mathcal{O}(\alpha)$: $B(\hat{p}) =$ 

$-i\Sigma(\hat{p}) \qquad -i\delta m \qquad +i\hat{p}\,\delta_2$

Sviluppiamo $\Sigma(\hat{p})$ in serie attorno a $\hat{p} = m_F$

Se non vi è chiaro cosa voglia dire sviluppare o derivare rispetto a $\hat{p}$, ne discutiamo dopo.

$$\Sigma(\hat{p}) = \underbrace{\Sigma(m_F)}_{\Sigma_F \mathbb{1}_4} + \underbrace{\frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}}}_{\Sigma'_F}\bigg|_{\hat{p}=m_F} (\hat{p}-m_F) + \mathcal{O}(\hat{p}-m_F)^2$$

numeri

$$G_{R\psi} = i \Big/ \left[\hat{p}\left(1+\delta_2-\Sigma'_F\right) - \left(m_R + \delta m + \Sigma_F - m_F \Sigma'_F\right) + \mathcal{O}(\hat{p}-m_F)^2\right]$$

$$= \frac{i}{(1+\delta_2-\Sigma'_F)(\hat{p}-m_F)} + (\text{regolare a } \hat{p}=m_F)$$

perchè $\quad (1+\delta_2-\Sigma'_F)\, m_F = m_R + \delta m + \Sigma_F - m_F \Sigma'_F$

cioè $\quad m_F = \dfrac{m_R+\delta m+\Sigma_F}{1+\delta_2}$

- δ_2 compensa la divergenza UV in Σ'_F
- δm " " " " " $\Sigma_F - m_F \Sigma'_F$

in modo che, assunte finite e_R, m_R, risultino finiti: $\quad m_F$

$$R_\psi = \frac{1}{1+\delta_2-\Sigma'_F}$$

NOTA In seguito, ove non specificato, $e \equiv e_R$
$m \equiv m_R$

Calcoliamo quindi (in gauge di Feynman)

$$-i\Sigma(\hat{p}) = \int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}(-ie\mu^\varepsilon\gamma^\mu)\frac{i(\hat{p}+\hat{k}+m)}{(p+k)^2-m^2}(-ie\mu^\varepsilon\gamma^\nu)\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2-\lambda^2}$$

$$= -(e\mu^\varepsilon)^2\int_0^1 dx\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\gamma^\mu(\hat{p}+\hat{k}+m)\gamma_\mu}{[k^2+x(p^2+2p\cdot k-m^2)-(1-x)\lambda^2]^2}$$

$$k' = k+xp \quad ; \quad \gamma^\mu\gamma_\mu = 4-2\varepsilon \; ; \; \gamma^\mu\hat{k}\gamma_\mu = -2(1-\varepsilon)\hat{k}$$

$$= -(e\mu^\varepsilon)^2\int_0^1 dx\int\frac{(4-2\varepsilon)m-2(1-\varepsilon)[\overset{\text{dispari}}{\hat{k}'}-(1-x)\hat{p}]}{[k'^2+\underbrace{x(1-x)p^2-xm^2-(1-x)\lambda^2}_{-\Delta}]^2}\frac{d^Dk'}{(2\pi)^D}$$

$$\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{(k^2-\Delta)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Delta^\varepsilon}$$

$$\Sigma(\hat{p}) = \frac{2e^2}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\,[(2-\varepsilon)m-(1-\varepsilon)(1-x)\hat{p}]\times$$
$$\times[xm^2-x(1-x)p^2+(1-x)\lambda^2]^{-\varepsilon}$$

$$\Sigma_F = \Sigma(\hat{p}=m)+O(\lambda^2) = \frac{\alpha}{2\pi}(4\pi\mu^2)^\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\,m\int_0^1 dx[1+(1-\varepsilon)x]\ln[m^2x^2]$$

$$\boxed{\int_0^1 x^n\ln x = -\frac{1}{(n+1)^2}} \qquad = \frac{\alpha}{\pi}m\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)+1\right]$$

divergente UV, finito IR

$$\Sigma'_F = \Sigma'(\hat{p}=m)+O(\lambda^2) = \frac{\alpha}{2\pi}(4\pi\mu^2)^\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\Big\{$$

$$-(1-\varepsilon)(1-x)\left[1-\varepsilon\ln(m^2x^2)\right]$$

$$+[2-\varepsilon-\underset{\uparrow\,\text{trascurabile}}{(1-\varepsilon)}(1-x)]m(-\varepsilon)\left[x^2m^2+(1-x)\lambda^2\right]^{-1}(-2m)x(1-x)\Big\}$$

L'integrale nella prima riga è elementare e dà

$$\frac{1}{2}\left[-1+\varepsilon\left(\ln m^2-2\right)\right]$$

Quello nella seconda riga diverge IR $\int dx\, \frac{x}{x^2}$ se non si tiene $\delta>0$.

Essendo globalmente di $\mathcal{O}(\varepsilon)$ (con $\Gamma(\varepsilon)$ in fronte) trascuriamo gli $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e restiamo con:

$$\int_0^1 dx\,\Big|_{2^\circ\,\text{pezzo}} = 2\varepsilon m^2 \int_0^1 dx\, \frac{x(1-x)(1+x)}{x^2 m^2+(1-x)\delta^2} = 2\varepsilon \int_0^1 \frac{(x-x^3)\,dx}{x^2+(1-x)\frac{\delta^2}{m^2}}$$

$$\simeq 2\varepsilon\left\{\int_0^1 dx\, \frac{x}{x^2+\frac{\delta^2}{m^2}-\frac{\delta^2}{m^2}x} - \underbrace{\int_0^1 dx\, x}_{\to\frac{1}{2}}\right\}$$

$\frac{\delta^2}{m^2}\ll 1$ è molto piccolo, e fa sentire la sua presenza solo quando $x^2 \lesssim \frac{\delta^2}{m^2} \ll 1$ è molto piccolo

In questa regione $\frac{\delta^2}{m^2}x \ll \frac{\delta^2}{m^2}$, quindi il termine $-\frac{\delta^2}{m^2}x$ si può trascurare uniformemente in x.

Allora $\int_0^1 dx\, \frac{x}{x^2+\frac{\delta^2}{m^2}} = (x^2=:t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t+\frac{\delta^2}{m^2}}$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\delta^2}{m^2}\right)-\ln\frac{\delta^2}{m^2}\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{m^2}{\delta^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{m^2}\right)$$

Mettendo tutto assieme

$$\Sigma'_F = \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)-1+\frac{1}{2}\ln\frac{m^2}{\delta^2}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{\delta^2}{m^2}\right)$$

divergente UV e IR

Il residuo del propagatore fermionico è pertanto A5

$$R_\psi = \left\{ 1 + \delta_2 - \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{m^2}{\lambda^2} \right] \right\}^{-1}$$

A questo punto si fissa il controtermine δ_2 in modo da eliminare la divergenza UV $\sim \frac{1}{\varepsilon}$

La forma precisa dei controtermini, che ne definisce la parte finita, è detta SCHEMA DI RINORMALIZZAZIONE.

I due schemi più usati sono:

SCHEMA $\overline{MS}$

$$\delta_2^{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) = \delta_1^{\overline{MS}}$$

$$R_\psi^{\overline{MS}} = 1 + \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\ln\frac{\mu^2}{m^2} - 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{m^2}{\lambda^2}\right] + O(\alpha^2)$$

dipende da μ, è divergente IR

ID. WARD

SCHEMA ON-SHELL: $R_\psi^{OS} \equiv 1$

$$\delta_2^{OS} = \Sigma'_F = \delta_1^{OS}$$

si inserisce una divergenza IR nel controtermine.

Analogamente si procede per δm: a meno di $O(\alpha^2)$

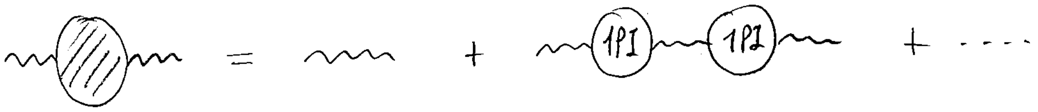
SCHEMA $\overline{MS}$: $$\delta m^{\overline{MS}} = m_F \Sigma'_F - \Sigma_F \Big|_{\text{polo } \frac{1}{\varepsilon}} = -\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right)$$

$$m_F = m_R\left[1 + \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{3}{4}\ln\frac{\mu^2}{m_R^2} + 1\right)\right]$$

SCHEMA ON-SHELL: $m_F \equiv m_R$

$$\delta m^{OS} = \delta_2 m_R - \Sigma_F$$

Infine abbiamo l'autoenergia del fotone, chiamato anche "polarizzazione del vuoto":



$+\mathcal{O}(\alpha^2)$

$$\left[\; i\Pi(q^2) \qquad -i\delta_3 \qquad + \cdots \;\right](q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$$

$\Rightarrow G_{RA}(K) =$  $= \dfrac{-i(g^{\mu\nu} + t.g.)}{q^2\left[1+\delta_3 - \Pi(q^2)\right]}$

$$= \frac{-i(g_{\mu\nu} + t.g.)}{q^2} R_A \quad + \text{ regolare a } q^2 = 0$$

$$R_A = \left[1 + \delta_3 - \Pi(0)\right]^{-1}$$

$\Pi(q^2)$ è divergente UV, non è divergente IR.
(se i fermioni hanno massa)

Scegliendo opportunamente δ_3 (p.es. $\delta_3 = \Pi(0)$) si rimuove la divergenza UV.