

Elementi di teoria spettrale

6.1 Rappresentazione spettrale in spazi vettoriali di dimensione finita

Negli spazi vettoriali a dimensione finita è possibile esprimere in modo semplice l'azione di un dato operatore lineare, scegliendo opportunamente una base, in modo da esprimere la matrice associata all'operatore in forma canonica di Jordan. Se la matrice di un operatore è diagonalizzabile, cioè la forma canonica di Jordan si riduce ad una matrice diagonale, allora la base corrispondente è formata dagli autovettori dell'operatore. Ricordiamo la definizione di autovettori e autovalori:

Definizione 6.1 *Sia A un operatore lineare sullo spazio vettoriale X . Si chiama autovettore relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ un vettore non nullo $x \in X$ per il quale valga*

$$Ax = \lambda x \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda \mathbf{1})x = 0 \quad (x \neq 0) . \quad (6.1)$$

In pratica l'azione dell'operatore A su un suo autovettore x corrisponde alla moltiplicazione per lo scalare λ , l'autovalore corrispondente.

Si vede dalla definizione che l'esistenza di un autovettore relativo all'autovalore λ corrisponde al fatto che l'operatore $A - \lambda \mathbf{1}$ ha nucleo non banale, cioè non è invertibile, e quindi

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0 . \quad (6.2)$$

La precedente equazione si chiama *equazione caratteristica* o *equazione secolare* di A . Quindi gli autovalori si possono determinare come le radici dell'equazione caratteristica di un operatore, che è un'equazione algebrica di grado $N = \dim(X)$ nell'incognita λ , la quale ammette N soluzioni, cioè $n \leq N$ soluzioni distinte λ_k con molteplicità m_k

Noi saremo interessati (quasi) esclusivamente ad operatori diagonalizzabili, per i quali esiste una base ortogonale di autovettori per lo spazio di Hilbert \mathcal{H} . In questo caso la molteplicità dell'autovalore λ_k è anche data da $m_k = \dim \text{Ker}(A - \lambda_k \mathbf{1})$. Schematicamente:

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \quad (k = 1, \dots, n \leq N) \quad (6.3)$$

$$m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_n \quad \sum_{k=1}^n m_k = N . \quad (6.4)$$

Ad ogni autovalore λ_k è associato un *autospazio*, definito come l'insieme degli autovettori con autovalore λ_k (incluso il vettore nullo):

$$M_k := \{x \in X : Ax = \lambda_k x\} . \quad (6.5)$$

Come dice il nome, si tratta di un sottospazio vettoriale, e la sua dimensione è uguale alla molteplicità del relativo autovalore:

$$\dim(M_k) = m_k . \quad (6.6)$$

Quindi, la restrizione di un operatore ad un suo autospazio M_k equivale alla moltiplicazione per lo scalare λ_k .

Restando per ora in dimensione finita, la classe di operatori che ammettono una base ortogonale (che non è restrittivo supporre ortonormale) è quella dei cosiddetti operatori normali:

Definizione 6.2 *Sia \mathcal{H} spazio di Hilbert. Un operatore N si dice normale se commuta con il suo aggiunto:*

$$NN^\dagger = N^\dagger N . \quad (6.7)$$

Fanno parte degli operatori normali gli operatori autoaggiunti $A^\dagger = A$ e quelli unitari $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}$.

Proposizione 6.1 *Un operatore N è normale se e solo se*

$$\|Nx\| = \|N^\dagger x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{H} . \quad (6.8)$$

Dimostrazione: Se N è normale, allora

$$\|N^\dagger x\|^2 = (N^\dagger x | N^\dagger x) = (x | NN^\dagger x) = (x | N^\dagger Nx) = (Nx | Nx) = \|Nx\|^2 .$$

Viceversa, se vale l'eq. (6.8), calcolandola prima con $x = y + z$ e poi con $x = y + iz$ si ricava

$$\begin{aligned} (N^\dagger y | N^\dagger z) &= (Ny | Nz) \quad \text{per ogni } y, z \in \mathcal{H} \\ \implies (y | (NN^\dagger - N^\dagger N)z) &= 0 \quad \text{per ogni } y, z \in \mathcal{H} . \end{aligned}$$

C.V.D.

Proposizione 6.2 *Sia N un operatore normale. Allora x è autovettore di N se e solo se x è autovettore di N^\dagger , ed i rispettivi autovalori sono uno il complesso coniugato dell'altro:*

$$Nx = \lambda x \quad \iff \quad N^\dagger x = \lambda^* x . \quad (6.9)$$

Dimostrazione: Poiché $(N - \lambda \mathbb{1})^\dagger = N^\dagger - \lambda^* \mathbb{1}$, si verifica subito che se N è normale, anche $(N - \lambda \mathbb{1})$ è normale e si ha pertanto

$$\|(N^\dagger - \lambda^* \mathbb{1})x\| = \|(N - \lambda \mathbb{1})^\dagger x\| = \|(N - \lambda \mathbb{1})x\| = 0 .$$

C.V.D.

Corollario 6.3

1. Gli autovalori degli operatori autoaggiunti sono reali.
2. Gli autovalori degli operatori unitari sono numeri complessi unitari.

Dimostrazione: Sia $A = A^\dagger$ ed $x \neq 0$ autovettore di A con autovalore λ . Allora

$$\lambda x = Ax = A^\dagger x = \lambda^* x \implies \lambda = \lambda^* .$$

Sia U unitario, $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$, x autovettore di U con autovalore λ . Allora

$$x = U^\dagger Ux = U^\dagger(\lambda x) = \lambda \lambda^* x \implies |\lambda|^2 = 1 .$$

C.V.D.

Proposizione 6.4 *Sia N un operatore normale. Allora autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali:*

$$\left\{ \begin{array}{l} Nx_1 = \lambda_1 x_1 \\ Nx_2 = \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array} \right. \implies x_1 \perp x_2 . \quad (6.10)$$

Dimostrazione:

$$\lambda_2(x_1|x_2) = (x_1|Nx_2) = (N^\dagger x_1|x_2) = (\lambda_1^* x_1|x_2) = \lambda_1(x_1|x_2) ,$$

quindi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1|x_2) = 0 .$$

Siccome per ipotesi $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, allora $(x_1|x_2) = 0$.

C.V.D.

La notevole proprietà di ogni operatore normale N è quella di decomporre lo spazio di Hilbert come somma diretta ortogonale degli autospazi di N . Per la dimostrazione, premettiamo un

Lemma 6.5 *Sia M un sottospazio di \mathcal{H} invariante per l'operatore A . Allora M^\perp è invariante per l'operatore A^\dagger .*

Dimostrazione: Sia $x \in M$ ed $y \in M^\perp$. Consideriamo ora

$$(y|Ax) = (A^\dagger y|x)$$

che deve essere zero, perché $Ax \in M$ per ipotesi. Siccome questo è vero per ogni $x \in M$, allora $A^\dagger y \in M^\perp$, e questo per ogni $y \in M^\perp$.

C.V.D.

Teorema 6.6 *Sia N operatore nello spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione finita. Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una base ortonormale formata da autovettori di N è che esso sia normale.*

Dimostrazione: Necessità. Se esiste una base ortonormale $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ di autovettori di N , allora in questa base la matrice (N_{ij}) che rappresenta N è diagonale. La matrice che rappresenta N^\dagger è la matrice trasposta coniugata, quindi anch'essa diagonale. Siccome due matrici diagonali commutano, anche i rispettivi operatori commutano.

Sufficienza. Siccome assumiamo che il campo degli scalari sia \mathbb{C} , esiste sempre un autovalore λ_1 ed un autovettore x_1 per N (e non è restrittivo prendere $\|x_1\| = 1$). Se $\dim \mathcal{H} = 1$ il teorema è dimostrato. Altrimenti possiamo scomporre

$\mathcal{H} = \langle x_1 \rangle \boxplus \langle x_1 \rangle^\perp$. Siccome x_1 è autovettore, $\langle x_1 \rangle$ è invariante per N , ma anche per N^\dagger visto che x_1 è anche autovettore di N^\dagger . Ma allora per il precedente lemma, $\langle x_1 \rangle^\perp$ è invariante per $(N^\dagger)^\dagger = N$. A questo punto possiamo considerare la restrizione di N ed N^\dagger a $\langle x_1 \rangle^\perp$, individuare in questo sottospazio un secondo autovettore x_2 e decomporre $\mathcal{H} = \langle x_1 \rangle \boxplus \langle x_2 \rangle \boxplus \langle x_1, x_2 \rangle^\perp$. Procedendo ricorsivamente, si può scomporre lo spazio di Hilbert in somma diretta di spazi unidimensionali costituiti da autovettori di N . C.V.D.

Il precedente teorema ci dice che, dato un operatore normale N , possiamo decomporre lo spazio di Hilbert in somma diretta ortogonale di autospazi $(M_k)_{k=1,\dots,K}$ relativi all'autovalore λ_k , dove $\dim M_k$ rappresenta la molteplicità dell'autovalore λ_k . Ricordando la corrispondenza tra decomposizione in sottospazi ortogonali $(M_k)_{k=1,\dots,K}$ e i rispettivi proiettori ortogonali $(P_k)_{k=1,\dots,K}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= M_1 \boxplus M_2 \boxplus \dots \boxplus M_K \\ x &= P_1 x + P_2 x + \dots + P_K x \\ Nx &= \lambda_1 P_1 x + \lambda_2 P_2 x + \dots + \lambda_K P_K x \end{aligned} \tag{6.11}$$

in quanto $P_k x \in M_k$ e quindi $NP_k x = \lambda_k P_k x$. Poiché l'eq. (6.11) vale per ogni x , arriviamo alla **decomposizione spettrale** dell'operatore normale N :

$$N = \sum_{k=1}^K \lambda_k P_k. \tag{6.12}$$

Questa decomposizione ci permette di definire agevolmente le funzioni di un operatore normale N :

Definizione 6.3 Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funzione numerica ed N operatore normale sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . La funzione dell'operatore $f(N)$ è l'operatore su \mathcal{H} definito da

$$f(N) := \sum_{k=1}^K f(\lambda_k) P_k. \tag{6.13}$$

Si verifica facilmente che questa definizione coincide, negli spazi a dimensione finita che stiamo trattando in questa sezione, con quella data in termini di serie operatoriale (5.22).

Lo scopo del resto del capitolo sarà definire le funzioni di operatori normali in spazi di dimensione infinita, in particolar modo per gli operatori non limitati.

6.2 Autovalori per operatori in dimensione infinita

Gli operatori negli spazi di dimensione infinita si comportano molto diversamente da quelli in dimensione finita per quanto riguarda l'esistenza degli autovettori. Non avendo più a disposizione la nozione di determinante, molti risultati ottenuti in dimensione finita non si possono estendere direttamente in dimensione infinita. Può succedere infatti che, in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione infinita, un generico operatore A , autoaggiunto o meno, sia del tutto privo di autovalori e autovettori in senso proprio, cioè può non ammettere soluzioni per l'equazione agli autovalori. Per capire quali siano i problemi che si incontrano e come si possa arrivare ad una definizione di autovalori più generale, analizziamo esplicitamente due situazioni molto rilevanti in fisica.

6.2.1 Autovalori per l'operatore X

L'operatore di moltiplicazione X in $L^2(\mathbb{R})$ (che corrisponde all'operatore di posizione in MQ)

$$X : \mathcal{D}(X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) , \quad [Xf](x) := xf(x) \quad (6.14)$$

$$\mathcal{D}(X) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : x \mapsto xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\} , \quad (6.15)$$

non possiede autovettori in $L^2(\mathbb{R})$. Infatti h sarebbe autovettore (autofunzione) per X con autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ se

$$xh(x) = \lambda h(x) \quad \text{per (quasi) ogni } x \in \mathbb{R} . \quad (6.16)$$

Questo non può mai verificarsi se λ non è reale. Se invece $\lambda \in \mathbb{R}$ la (6.16) è verificata solo se $h(x) = 0$ per (quasi) ogni $x \neq \lambda$, e quindi h è equivalente alla funzione nulla.

In altre parole, un'autofunzione per l'operatore posizione X con autovalore λ dovrebbe essere una funzione tutta concentrata in $x = \lambda$, o più precisamente, con supporto $\text{supp}(h) = \{\lambda\}$, e questo è possibile solo se $\lambda \in \mathbb{R}$ ed in ogni caso solo per funzioni della classe di equivalenza della funzione nulla.

Tuttavia, con spirito da fisici, possiamo pensare di poter approssimare una siffatta autofunzione con funzioni il cui supporto sia concentrato in un piccolo intorno di $x = \lambda \in \mathbb{R}$, come ad esempio le funzioni caratteristiche $\chi_{[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]}$ di intervalli centrati in λ ed ampiezza $2\varepsilon > 0$. “Piccolo intorno” nel senso che questo intorno può essere reso piccolo a piacere con ε . Queste funzioni caratteristiche sono elementi di $L^2(\mathbb{R})$ e di $\mathcal{D}(X)$ con norma diversa da zero, che ovviamente *non* soddisfano $(X - \lambda)\chi_{[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]} = 0$, ma per le quali vale

$$\|(X - \lambda\mathbf{1})\chi_{[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]}\| = \left(\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} |x - \lambda|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \xi^2 d\xi \right)^{1/2} = \left(\frac{2\varepsilon^3}{3} \right)^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 .$$

In realtà il precedente limite è quasi banale, poiché la stessa norma delle funzioni caratteristiche tende a zero:

$$\|\chi_{[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]}\| = \left(\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} 1^2 dx \right)^{1/2} = (2\varepsilon)^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 .$$

Però da queste possiamo definire una famiglia di funzioni rettangolari di norma unitaria

$$\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \chi_{[\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]} , \quad \|\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)}\| = 1 , \quad (6.17)$$

che approssima la soluzione dell'equazione agli autovalori per X :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \|(X - \lambda)\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)}\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} = 0. \quad (6.18)$$

Insomma, nessun $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore proprio per X , però per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo individuare una famiglia di funzioni di norma non decrescente sulle quali l'operatore $X - \lambda \mathbf{1}$ dà un risultato arbitrariamente vicino al vettore nullo. Diciamo che λ è un autovalore generalizzato dell'operatore X , in quanto ammette una famiglia di autovettori approssimati $\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)}$.

Nel caso in cui lo spazio di Hilbert sia $L^2(I)$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo qualsiasi (limitato, illimitato, chiuso, aperto, semiaperto), è facile ripetere i precedenti ragionamenti e dimostrare che gli autovalori generalizzati di X sono tutti e soli gli elementi di \bar{I} .

6.2.2 Autovalori per l'operatore P

Per l'operatore derivata ∂ in $L^2(\mathbb{R})$, o equivalentemente per l'operatore impulso $P = -i\partial$ (in unità $\hbar = 1$) con dominio $\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(\partial)$ definito nell'eq. (5.87), vale un discorso simile a quello dell'operatore X visto sopra, ma con alcune differenze. Un'autofunzione f per P è determinata dall'equazione agli autovalori

$$Pf = \lambda f \quad \Longleftrightarrow \quad -if' = \lambda f,$$

che è risolta dalle funzioni

$$f(x) = ce^{i\lambda x}, \quad c \in \mathbb{C}^*. \quad (6.19)$$

È evidente che per nessun valore di $\lambda \in \mathbb{C}$ tali funzioni sono a quadrato sommabile, quindi non possono fare parte di $L^2(\mathbb{R})$. Tuttavia, fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, la famiglia di funzioni

$$\hat{f}_{(\lambda, \varepsilon)}(x) := c_\varepsilon e^{i\lambda x} e^{-\varepsilon x^2}, \quad c_\varepsilon = (2\varepsilon/\pi)^{1/4}, \quad (\varepsilon > 0) \quad (6.20)$$

definisce delle funzioni di $L^2(\mathbb{R})$, normalizzate ($\|\hat{f}_{(\lambda, \varepsilon)}\| = 1$), con derivata in L^2 e che sono soluzioni approssimate per l'equazione agli autovalori di P :

$$\begin{aligned} P\hat{f}_{(\lambda, \varepsilon)}(x) &= -i[i\lambda - 2\varepsilon x]\hat{f}_{(\lambda, \varepsilon)}(x) = [\lambda + i2\varepsilon x]\hat{f}_{(\lambda, \varepsilon)}(x) \\ \|(P - \lambda \mathbf{1})f\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| i2\varepsilon x c_\varepsilon e^{i\lambda x - \varepsilon x^2} \right|^2 dx = 4\varepsilon^2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-2\varepsilon x^2} dx = \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

In sintesi, anche per l'operatore P , nessun $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore proprio, però per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo individuare una famiglia di funzioni di norma non decrescente sulle quali l'operatore $P - \lambda \mathbf{1}$ dà un risultato arbitrariamente vicino al vettore nullo. Diciamo che λ è un autovalore generalizzato dell'operatore P , in quanto ammette una famiglia di autovettori approssimati, ad esempio le funzioni $\hat{f}_{(\lambda, \varepsilon)}$.

6.2.3 Lo spettro

Negli spazi di dimensione infinita conviene quindi dare una definizione più ampia di autovalore, introducendo il concetto di autovalore generalizzato.

Definizione 6.4 Sia A un operatore definito sullo spazio di Banach X . Il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice autovalore generalizzato per l'operatore A se esiste una successione $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ di vettori tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda \mathbb{1})v_n = 0, \quad \|v_n\| \geq 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \quad (6.21)$$

Si dice che $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di soluzioni approssimate del problema agli autovalori per A corrispondente all'autovalore generalizzato λ .

Ovviamente ogni autovalore proprio — nel senso della definizione (6.1) — è un autovalore generalizzato, ma non è detto il viceversa.

Definizione 6.5 L'insieme degli autovalori propri di un operatore A si chiama spettro puntuale di A e si indica con il simbolo $\sigma_p(A)$.

Definizione 6.6 L'insieme degli autovalori generalizzati non propri di un operatore A si chiama spettro continuo di A e si indica con il simbolo $\sigma_c(A)$.

6.3 L'operatore risolvente

Possiamo riscrivere l'equazione (6.21) per gli autovalori generalizzati di A nel seguente modo:

$$\lambda \in \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|(A - \lambda \mathbb{1})x\|}{\|x\|} = 0 \quad (6.22)$$

In particolare, se $\lambda \in \sigma_p(A)$ è un autovalore proprio di A , l'estremo inferiore è un minimo, in quanto $\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}$, cioè esiste $x \neq 0$ tale che $(A - \lambda \mathbb{1})x = 0$. Osserviamo che in questo caso $(A - \lambda \mathbb{1})$ non è iniettivo e quindi non è invertibile.

Se invece $\lambda \in \sigma_c(A)$ è un autovalore generalizzato ma non proprio, allora $\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) = \{0\}$, quindi $(A - \lambda \mathbb{1})$ è invertibile — la sua immagine costituisce il dominio dell'inverso: $\mathcal{D}((A - \lambda \mathbb{1})^{-1}) = \text{Im}(A - \lambda \mathbb{1})$ —, ma l'inverso non è limitato. Infatti, dalla corrispondenza biunivoca

$$(A - \lambda \mathbb{1}) : \mathcal{D}(A) \rightarrow \text{Im}(A - \lambda \mathbb{1}), \quad x \mapsto y \quad \Longleftrightarrow \quad x = (A - \lambda \mathbb{1})^{-1}y$$

l'eq. (6.22) diventa¹

$$0 = \inf_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|(A - \lambda \mathbb{1})x\|}{\|x\|} = \inf_{\substack{y \in \text{Im}(A - \lambda \mathbb{1}) \\ y \neq 0}} \frac{\|y\|}{\|(A - \lambda \mathbb{1})^{-1}y\|} = \left(\sup_{\substack{y \in \mathcal{D}(A - \lambda \mathbb{1})^{-1} \\ y \neq 0}} \frac{\|(A - \lambda \mathbb{1})^{-1}y\|}{\|y\|} \right)^{-1}. \quad (6.23)$$

Se invece $(A - \lambda \mathbb{1})^{-1}$ esiste ed è limitato, λ non appartiene allo spettro di A .

Arriviamo così a definire una caratterizzazione alternativa degli elementi dello spettro di un operatore:

¹Se $S \subset \mathbb{R}^+$ vale $\inf S = \inf_{x \in S} x = \inf_{x \in S} 1/(1/x) = 1/\sup_{x \in S} 1/x$.

Definizione 6.7 Sia A un operatore densamente definito nello spazio di Banach X . Si dice che $\lambda \in \mathbb{C}$ è un punto regolare di A se l'operatore **risolvente**

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda \mathbf{1})^{-1} \quad (6.24a)$$

$$\text{esiste:} \quad \ker(A - \lambda \mathbf{1}) = \{\mathbf{0}\} \quad (6.24b)$$

$$\text{è densamente definito:} \quad \overline{\text{Im}(A - \lambda \mathbf{1})} = \mathcal{H} \quad (6.24c)$$

$$\text{è limitato} \quad \|(A - \lambda \mathbf{1})^{-1}\| < \infty. \quad (6.24d)$$

L'insieme dei punti regolari di A si chiama insieme risolvente di A e si indica con il simbolo $\rho(A)$.

Il nome *operatore risolvente* deriva dal fatto esso che “risolve” l'equazione

$$Ax = x_0 + \lambda x \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda \mathbf{1})x = x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = (A - \lambda \mathbf{1})^{-1}x_0$$

in cui x_0 è dato ed x è incognito. Dal secondo membro di queste uguaglianze vediamo che la soluzione è possibile solo se $x_0 \in \text{Im}(A - \lambda \mathbf{1})$. Con $\lambda \in \rho(A)$, le condizioni (6.24c-6.24d) permettono che x_0 possa essere un qualsiasi vettore di X . Inoltre l'eq. (6.24b) garantisce che la soluzione sia unica, poiché la differenza tra due soluzioni sta nel nucleo di $A - \lambda \mathbf{1}$.

Definizione 6.8 Sia A un operatore densamente definito nello spazio di Banach X . Si chiama **spettro** di A l'insieme dei punti non regolari di A :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Se $\lambda \in \sigma(A)$, si dice che λ è un valore spettrale per A .

Possiamo ripartire lo spettro di un operatore a seconda delle condizioni che vengono a cadere nella definizione 6.7 di punto regolare.

Definizione 6.9 Sia A un operatore densamente definito nello spazio di Banach X .

- Si chiama **spettro puntuale** o **discreto** l'insieme dei punti dello spettro per i quali non esiste l'operatore risolvente:

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda \mathbf{1}) \neq \{\mathbf{0}\}\}; \quad (6.25)$$

- Si chiama **spettro continuo** l'insieme dei punti dello spettro per i quali l'operatore risolvente esiste, con dominio denso in X , ma non è limitato:

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda \mathbf{1}) = \{\mathbf{0}\}, \overline{\text{Im}(A - \lambda \mathbf{1})} = X, (A - \lambda \mathbf{1})^{-1} \text{ non limitato}\}; \quad (6.26)$$

- Si chiama **spettro residuo** l'insieme dei punti dello spettro per i quali l'operatore risolvente esiste, ma non ha dominio denso in X :

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda \mathbf{1}) = \{\mathbf{0}\}, \overline{\text{Im}(A - \lambda \mathbf{1})} \neq X\}. \quad (6.27)$$

Tabella 6.1: Schema dell'insieme risolvente e dello spettro

$\ker(A - \lambda \mathbb{1})$	$(A - \lambda \mathbb{1})^{-1}$	$\text{Im}(A - \lambda \mathbb{1})$	limitatezza di $(A - \lambda \mathbb{1})^{-1}$	insieme cui λ appartiene
$\{0\}$	esiste	denso	limitato	risolvente $\rho(A)$
$\{0\}$	esiste	denso	non limitato	spettro continuo $\sigma_c(A)$
$\{0\}$	esiste	non denso	qualunque	spettro residuo $\sigma_r(A)$
$\neq \{0\}$	non esiste	qualunque		spettro puntuale $\sigma_p(A)$

Evidentemente le tre componenti dello spettro sono a due a due disgiunte e si ha

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) . \quad (6.28)$$

ESEMPIO: Se X è finito dimensionale,

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) , \quad \sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset .$$

ESEMPIO: Se P è un proiettore ortogonale sul sottospazio chiuso $M < \mathcal{H}$, $\sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$. Infatti l'equazione $(P - \lambda \mathbb{1})x = y$ ammette sempre un'unica soluzione se $\lambda \notin \{0, 1\}$:

$$(P - \lambda \mathbb{1})x = y \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - \lambda)x_{\parallel} - \lambda x_{\perp} = y_{\parallel} + y_{\perp} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_{\parallel} = \frac{y_{\parallel}}{1-\lambda} \\ x_{\perp} = \frac{y_{\perp}}{-\lambda} . \end{cases}$$

Invece 0 e 1 sono gli autovalori propri di P : i vettori non nulli di M sono gli autovettori con autovalore 1, i vettori non nulli di M^{\perp} sono gli autovettori con autovalore 0.

A questo punto ci concentriamo sullo studio degli operatori normali (in particolare autoaggiunti ed unitari) che, negli spazi a dimensione finita, abbiamo visto decomporre lo spazio di Hilbert in somma diretta ortogonale di autospazi. In dimensione infinita, gli operatori autoaggiunti possono non essere continui. Sono però chiusi, come del resto anche gli operatori unitari. Richiediamo quindi questa proprietà anche per gli operatori normali.

Definizione 6.10 *Sia \mathcal{H} spazio di Hilbert. Un operatore N densamente definito si dice normale se è chiuso e commuta con il suo aggiunto:*

$$N = \overline{N} \quad e \quad NN^{\dagger} = N^{\dagger}N \quad su \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{D}(N^{\dagger}) . \quad (6.29)$$

Come appena osservato, sono normali gli operatori autoaggiunti $A^{\dagger} = A$ e quelli unitari $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = \mathbb{1}$.

Teorema 6.7 *Lo spettro degli operatori chiusi è chiuso.*

Gli operatori normali hanno la caratteristica di non avere spettro residuo:

Teorema 6.8 *Sia N operatore normale. Allora $\sigma_r(N) = \emptyset$.*

Lo spettro generalizza l'insieme discreto e finito degli autovalori che si ha negli spazi a dimensione finita. Sopravvivono però alcune proprietà fondamentali:

Teorema 6.9

1. Autovettori di un operatore normale N relativi ad autovalori propri (quindi dello spettro puntuale) distinti sono ortogonali.
2. Lo spettro di un operatore autoaggiunto A è un sottoinsieme dei numeri reali: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
3. Lo spettro di un operatore unitario U è un sottoinsieme dei numeri complessi unitari: $\sigma(U) \subset \mathbb{U}$.
4. Lo spettro di un operatore limitato T è limitato: $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$, cioè $|\lambda| \leq \|T\| \quad \forall \lambda \in \sigma(T)$.

Dimostrazione: Ci limitiamo a dimostrare l'affermazione 2. $\lambda \in \sigma(A)$ se esiste una successione $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ con $\|v_n\| \geq 1$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda \mathbf{1})v_n = 0 .$$

Ma, essendo $A = A^\dagger$, per la proposizione 6.1 (estesa ad operatori normali non limitati) vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda^* \mathbf{1})v_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda \mathbf{1})v_n\| = 0$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda^* \mathbf{1})v_n = 0 .$$

Facendo la differenza dei limiti, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda - \lambda^*)v_n = 0 ,$$

ed essendo $\|v_n\| \geq 1$, ciò è possibile solo se $\lambda = \lambda^*$.

C.V.D.

6.3.1 Lo spettro degli operatori X , P e L_z

Applichiamo le idee sopra esposte al caso di tre operatori fondamentali in meccanica quantistica.

(1) Operatore X in $L^2([a, b])$. Il risolvente agisce in questo modo:

$$\begin{aligned} [X - \lambda \mathbf{1}] & : g \mapsto f , & f(x) &= (x - \lambda)g(x) \\ \implies R_\lambda(X) &= [X - \lambda \mathbf{1}]^{-1} : f \mapsto g , & g(x) &= \frac{f(x)}{x - \lambda} . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Se $\lambda \notin [a, b]$, il risolvente è definito su tutto $L^2([a, b])$ ed è limitato, infatti, posto $c = \text{dist}([a, b], \lambda) > 0$ si ha

$$\|R_\lambda(X)f\|^2 = \|g\|^2 = \int_a^b \left| \frac{f(x)}{x - \lambda} \right|^2 dx \leq \int_a^b \left| \frac{f(x)}{c} \right|^2 dx = \frac{\|f\|^2}{c^2} \implies \|(X - \lambda \mathbf{1})^{-1}\| \leq \frac{1}{c} .$$

(In realtà vale proprio l'uguaglianza). Quindi ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ è punto regolare. Se invece $\lambda \in [a, b]$, il dominio di $(X - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ è composto solo da quelle funzioni che rimangono a quadrato integrabile una volta divise per $(x - \lambda)$, perciò è un sottospazio proprio di $L^2([a, b])$. Questo sottospazio è denso, infatti ogni $f \in L^2([a, b])$ è il limite di una successione in $\mathcal{D}(R_\lambda(X))$, basta prendere ad esempio

$$f_n(x) = f(x) \left(1 - \chi_{[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]}(x)\right) = \begin{cases} 0 & (\lambda - \frac{1}{n} < x < \lambda + \frac{1}{n}) \\ f(x) & (\text{altrove}) . \end{cases}$$

Quindi $(X - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ esiste, densamente definito, ma non è limitato:

$$g_n = \sqrt{n} \chi_{[\lambda + \frac{1}{n}, \lambda + \frac{2}{n}]} , \quad \|g_n\| = 1 , \quad \|R_\lambda(X)g_n\| = \left(\int_{\lambda + \frac{1}{n}}^{\lambda + \frac{2}{n}} \left| \frac{\sqrt{n}}{x - \lambda} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty .$$

pertanto $\sigma(X) = \sigma_c(X) = [a, b]$, mentre l'insieme risolvente è $\rho(X) = \mathbb{C} \setminus [a, b]$. Quanto esposto sopra per l'intervallo compatto $[a, b]$ vale per qualsiasi intervallo $I \subset \mathbb{R}$, anche per \mathbb{R} stesso, e si ha $\sigma(X) = \bar{I}$.

(2) Operatore P in $L^2(\mathbb{R})$. Il risolvente si determina facilmente nello spazio delle trasformate di Fourier. Ricordiamo dalla sez. 4.3.2 che la TdF è un'isometria di $L^2(\mathbb{R})$, quindi tutte e sole le TdF di $L^2_X(\mathbb{R})$ sono funzioni di $L^2_P(\mathbb{R})$. Inoltre in questo spazio l'operatore P (in unità $\hbar = 1$) è proprio l'operatore di moltiplicazione, come mostrato nell'eq. (2.86) e simbolicamente nella corrispondenza (2.88). In definitiva:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \tilde{f}(p) dp & \iff f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{f}(p) \\ [Pf](x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} p \tilde{f}(p) \\ [(P - \lambda \mathbf{1})^{-1}f](x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{g}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{p - \lambda} \end{aligned}$$

e tutto procede come nel caso dell'operatore X in $L^2_X(\mathbb{R})$: l'insieme risolvente è $\rho(P) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e lo spettro è puramente continuo, $\sigma(P) = \sigma_c(P) = \mathbb{R}$.

(3) Operatore $L_z = -i\partial$ in $L^2([-\pi, \pi])$ con condizioni al contorno periodiche (5.93). In questo caso lo sviluppo in serie di Fourier è isomorfismo tra gli spazi di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$ ed ℓ^2 che ad ogni funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ — la possiamo pensare come una funzione periodica di periodo 2π — associa la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dei coefficienti di Fourier complessi² tali che

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\phi} .$$

Poiché

$$L_z e^{in\phi} = -i\partial_\phi e^{in\phi} = n e^{in\phi} ,$$

²Siccome i coefficienti f_n sono definiti per interi positivi e negativi, per ricondursi a successioni di ℓ^2 bisogna riordinare in qualche modo i coefficienti. Siccome la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2$ converge assolutamente, l'ordine degli addendi non conta e quindi qualsiasi riordinamento degli f_n dà luogo ad una successione di ℓ^2 .

nello spazio l^2 l'operatore L_z agisce come l'operatore di moltiplicazione:

$$\begin{aligned} [L_z f](\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n f_n e^{in\phi} \\ [(L_z - \lambda \mathbb{1})^{-1} f](\phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{n - \lambda} e^{in\phi}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

È evidente come, per ogni $\lambda \notin \mathbb{Z}$, assegnata f e quindi la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, è ben definita la successione $g_n := f_n/(n - \lambda)$ che dà luogo alla serie di Fourier convergente (6.31), e di conseguenza l'operatore risolvente $(L_z - \lambda \mathbb{1})^{-1}$ è ben definito in tutto lo spazio di Hilbert ed è limitato, poiché la sua norma è maggiorata dalla costante $1/c$, ove $c = \text{dist}(\mathbb{Z}, \lambda) > 0$. Se invece $\lambda \in \mathbb{Z}$, il risolvente non è definito, poiché il termine $n = \lambda$ dell'eq. (6.31) non esiste. Infatti, la funzione $\phi \mapsto e^{i\lambda\phi}$, che appartiene a $L^2([-\pi, \pi])$, è autofunzione di L_z con autovalore λ .

In conclusione, $\rho(L_z) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e lo spettro di L_z è puramente puntuale: $\sigma(L_z) = \sigma_p(L_z) = \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO: Considerare l'equazione agli autovalori per l'operatore di traslazione a sinistra T_s introdotti nell'eq. (5.6). Verificare che $B(0, 1[\subset \sigma_p(T_s)$, cioè che tutti i numeri complessi di modulo minore di 1 sono autovalori propri e determinarne gli autovettori. Mostrare che $T_s^\dagger = T_d$ e che $\sigma_p(T_d) = \emptyset$, mentre $\sigma_r(T_d) = \{0\}$.

6.4 Ricerca di autovettori generalizzati

La definizione 6.4 degli autovalori generalizzati per gli operatori non limitati in uno spazio di Hilbert coinvolge una procedura di limite, o meglio, l'individuazione di una successione di vettori $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ che rappresenta una successione di soluzioni approssimate al problema agli autovalori; in sostanza $Av_n \rightarrow \lambda v_n$. Se questa successione converge ad un $v \in \mathcal{H}$, allora v è un autovettore proprio e λ è un autovalore proprio, cioè $\lambda \in \sigma_p(A)$. Se però tale successione non converge in \mathcal{H} , allora non possiamo più parlare di autovettore relativo all'autovalore λ . Tuttavia può succedere che la successione (v_n) converga ad un vettore $v \in V$ che sta in uno spazio vettoriale V più esteso di $\mathcal{H} < V$. In tal caso potremmo dichiarare che v è un "autovettore generalizzato" di \mathcal{H} , e trarre delle informazioni utili da questo fatto. Analizziamo quest'idea riprendendo l'analisi fatta per gli operatori X e P nelle sez. 6.2.1 e 6.2.2.

6.4.1 Autovettori generalizzati per l'operatore P

Consideriamo per primo l'operatore impulso $P = -i\partial$ definito sull'insieme (5.87) delle funzioni $L^2(\mathbb{R})$ assolutamente continue e derivabili. A meno di costanti moltiplicative, l'autofunzione f_λ per P con autovalore λ è data da

$$f_\lambda(x) = e^{i\lambda x}. \quad (6.32)$$

Essa non è a quadrato sommabile in \mathbb{R} , quindi non fa parte di $L^2(\mathbb{R})$, però fa parte di uno spazio vettoriale che contiene $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Inoltre, per $\lambda \in \mathbb{R}$, le autofunzioni approssimate (6.20), opportunamente riscalate, tendono puntualmente proprio all'autofunzione f_λ dell'eq. (6.32). Infatti,

posto $\varepsilon = 1/n$ e $c_\varepsilon = 1$ nell'eq. (6.20), le funzioni

$$g_n(x) = e^{i\lambda x - x^2/n}, \quad \|g_n\| = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^{1/4} \quad (6.33)$$

formano una successione di autofunzioni approssimate di P che converge puntualmente, per $n \rightarrow \infty$, all'autofunzione f_λ dell'eq. (6.32).

In definitiva, questo esempio mostra che la ricerca di autovettori generalizzati deve essere effettuata in uno spazio vettoriale più ampio di \mathcal{H} , che contenga però \mathcal{H} come sottospazio proprio, in modo da poter contemplare anche il caso di autovettori propri. Per l'operatore derivata in $L^2(\mathbb{R})$ è stato sufficiente considerare uno spazio di funzioni più ampio di quello delle funzioni a quadrato sommabile, nella fattispecie $C_b^1(\mathbb{R})$. Vedremo però tra poco che ciò non basta in generale, neanche per definire gli autovettori generalizzati dell'operatore di moltiplicazione X .

6.4.2 Autovettori generalizzati per l'operatore X

Nella sez. 6.2.1 abbiamo individuato una famiglia di autofunzioni approssimate $\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)}$ per l'operatore X relativamente all'autovalore generalizzato λ . Ponendo $\varepsilon = 1/n$ abbiamo una successione di autofunzioni approssimate, ma per $n \rightarrow \infty$ questa successione non converge ad alcun elemento di $L^2(\mathbb{R})$. Se cerchiamo convergenza in un altro spazio di funzioni, più ampio e con una topologia più debole della norma quadratica, per esempio in $L^1(\mathbb{R})$, troviamo che

$$\|\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)}\|_1 = \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} |1/\sqrt{2\varepsilon}| dx = \sqrt{2\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0, \quad (6.34)$$

cioè le autofunzioni approssimate convergono al vettore nullo di $L^1(\mathbb{R})$. Insomma, anche cambiando la normalizzazione delle autofunzioni approssimate, il loro limite puntuale è sempre zero per $x \neq \lambda$, quindi negli spazi di funzioni, se c'è convergenza, è alla funzione quasi ovunque nulla.

Esiste un diverso oggetto matematico a cui tendano le $\hat{h}_{(\lambda, \varepsilon)}$, opportunamente normalizzate? La risposta è affermativa, e questo oggetto matematico è un funzionale lineare: la "delta di Dirac".

Fissiamo $\lambda \in \mathbb{R}$, che sarà in seguito sottointeso come suffisso delle autofunzioni, e poniamo $\varepsilon = 1/n : n \in \mathbb{N}^*$. Usando la notazione di Dirac, consideriamo le funzioni

$$|h_n\rangle \equiv h_n := \sqrt{\frac{n}{2}} \hat{h}_{(\lambda, 1/n)} \in L^2(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{H}, \quad h_n(x) = \frac{n}{2} \chi_{[\lambda-1/n, \lambda+1/n]}(x) \quad (6.35)$$

che hanno come grafico un rettangolo con base centrata ad $x = \lambda$ di larghezza $2\varepsilon = 2/n$ ed altezza $n/2$, quindi di area 1. Gli aggiunti di questi ket, ossia i bra $\langle h_n|$ nel duale \mathcal{H}^* , sono funzionali che, applicati ad una funzione f , ne calcolano la media nell'intervallo $[\lambda - 1/n, \lambda + 1/n]$. In formule, se $|f\rangle \in \mathcal{H}$ rappresenta una funzione continua, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n | f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\lambda-1/n}^{\lambda+1/n} \frac{n}{2} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda) + o(n^0) = f(\lambda). \quad (6.36)$$

In altre parole, la successione dei bra $\langle h_n|$ tende al funzionale lineare che valuta una qualsiasi funzione (continua) nel punto $\lambda \in \mathbb{R}$. Questa è esattamente la definizione del funzionale *delta di Dirac*:

$$\delta_\lambda : C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \delta_\lambda f := f(\lambda). \quad (6.37)$$

Quello che sosteniamo, in un senso da precisare meglio in seguito, è che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle h_n | = \delta_\lambda \quad (6.38)$$

e che δ_λ è un autofunzionale dell'operatore X rispetto all'autovalore λ .

6.5 Distribuzioni

Nel resto di questo capitolo seguiremo questo filo logico:

- svolgiamo alcune considerazioni preliminari sui funzionali lineari (e continui) definiti negli spazi di funzioni (a dimensione infinita);
- motiviamo il fatto che la ricerca degli autovettori generalizzati per gli operatori non limitati X e P sia effettuata in qualche spazio di funzionali lineari;
- descriviamo lo spazio dei funzionali lineari (distribuzioni) adatto ad ospitare gli autovettori generalizzati per gli operatori di $L^2(\mathbb{R})$;
- nella sezione finale presentiamo la teoria della rappresentazione spettrale per gli operatori illimitati X e P .

Per semplicità tratteremo lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, ma è semplice generalizzare l'esposizione ed i risultati ad $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Abbiamo visto che il teorema di Riesz associa ad ogni vettore $|v\rangle$ di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} un funzionale lineare e continuo $\langle v|$. Nello spazio di funzioni $L^2(\mathbb{R})$, alla funzione $x \mapsto v(x)$ è associato il funzionale

$$v^\dagger : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} v^*(x) \phi(x) \, dx. \quad (6.39)$$

Affinché il precedente integrale abbia senso per ogni $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ bisogna che $v \in L^2(\mathbb{R})$. Però se ci limitiamo ad agire su funzioni ϕ definite in un sottospazio proprio di $L^2(\mathbb{R})$, ad esempio su funzioni continue a supporto compatto, $\phi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset L^2(\mathbb{R})$, allora la funzione v può appartenere ad una classe molto più ampia di $L^2(\mathbb{R})$, può anche divergere all'infinito, è sufficiente che sia localmente sommabile; in ogni caso definisce un funzionale lineare $v^\dagger : C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Inoltre, restando sull'esempio delle funzioni continue (a supporto compatto o meno) possiamo definire dei funzionali lineari che non sono esprimibili come l'integrale con un'altra funzione v . Ne abbiamo un semplice esempio nel funzionale “valutazione della funzione nel punto $\lambda \in \mathbb{R}$ ”, cioè la “delta di Dirac” δ_λ introdotta nell'eq. (6.37).

Si capisce quindi che, tanto più è ristretto uno spazio vettoriale V , tanto più ampio è lo spazio $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ dei funzionali lineari su V . Analogo discorso per i funzionali lineari e continui: in questo caso la continuità di un funzionale è definita in termini di una topologia su V , e tanto

più stringente, tanto più forte è la topologia su V , tanto più ampia è la classe dei funzionali lineari continui $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{C})$.³

Nel nostro studio sugli operatori in spazi di dimensione finita, abbiamo visto che la ricerca degli autovettori generalizzati ci porta al di fuori dello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Nel caso dell'operatore di moltiplicazione X , sez. 6.4.2, il limite di una successione di autofunzioni approssimate conduce proprio al funzionale “delta di Dirac”. Nel caso dell'operatore di derivazione $P = -i\partial$, sez. 6.4.1, abbiamo trovato autofunzioni f_λ al di fuori di $L^2(\mathbb{R})$, le quali però si possono anche interpretare come funzionali nel senso dato sopra con l'eq. (6.39):

$$f_\lambda^\dagger : \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_\lambda^*(x) \phi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} \phi(x) \, dx .$$

Questo integrale non esiste per ogni $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, ma esiste per ogni $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, quindi f_λ corrisponde ad un funzionale lineare su un sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$.

Questi ragionamenti ci portano a cercare gli autovalori generalizzati per gli operatori non limitati di $L^2(\mathbb{R})$ tra i funzionali lineari. Questo richiede di individuare un sottospazio V di $L^2(\mathbb{R})$ il cui duale V^* ospiti questi funzionali. Inoltre è importante richiedere che questi funzionali siano continui, quindi deve essere stabilita un'opportuna topologia su V . Lo spazio V^* che fa al caso nostro è lo spazio delle “distribuzioni temperate”, oggetto della prossima sezione.

6.5.1 Le distribuzioni temperate

Lo spazio delle distribuzioni temperate è il duale topologico dello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, insieme delle funzioni indefinitamente derivabili e che decrescono all'infinito, assieme alle loro derivate di ogni ordine, più velocemente di qualsiasi potenza inversa, vedi la definizione 2.19, che riscriviamo:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow \infty} x^r \partial^j \phi(x) = 0 \quad \forall r, j \in \mathbb{N} \} , \quad (6.40)$$

La condizione di decrescenza rapida di ϕ e delle sue derivate può anche essere espressa in modo del tutto equivalente richiedendo che $|x^p \partial^j \phi(x)|$ sia limitata per ogni coppia $p, j \in \mathbb{N}$, ossia che per ogni $p, j \in \mathbb{N}$ esista una costante $C_{pj} > 0$ tale che

$$|x^p \partial^j \phi(x)| \leq C_{pj} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} , \quad (6.41)$$

come si vede ponendo $p = r + 1$ nella precedente espressione e confrontando con l'eq. (6.40).

Quando abbiamo introdotto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ come sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ per estendere la TdF, abbiamo considerato sempre la convergenza in media quadratica, cioè la topologia indotta da L^2 su \mathcal{S} .

³Siano τ_f e τ_d due norme non equivalenti su V , con τ_f più forte di τ_d . Questo significa che gli aperti (o intorni) di τ_f sono aperti (o intorni) di τ_d , ma non necessariamente viceversa. In particolare, se una successione in V converge secondo τ_f allora converge anche secondo τ_d . Sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione convergente secondo τ_f ed S un funzionale lineare e continuo secondo τ_d . Allora $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge anche secondo τ_d , e per la continuità di S , la successione $(Su_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in \mathbb{C} . Pertanto S è continua secondo τ_f e quindi $(V, \tau_d)^* \subset (V, \tau_f)^*$.

Esistono però successioni convergenti secondo τ_d che non convergono secondo τ_f . Sia $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una tale successione, e sia T un funzionale lineare e continuo secondo la topologia τ_f , tale che la successione $(Tv_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non converga in \mathbb{C} . Allora T non può essere continua secondo τ_d , perché (v_n) converge mentre (Tv_n) no. Quindi $(V, \tau_d)^*$ è un sottoinsieme proprio di $(V, \tau_f)^*$.

Ora invece stabiliremo su \mathcal{S} una propria peculiare topologia, assai più forte della norma-2, che ci permetterà di definire uno spazio duale topologico molto ampio, e che rappresenta uno dei concetti più importanti (e di maggiore versatilità nelle applicazioni) dell'Analisi Matematica degli ultimi decenni.

A differenza di tutti i casi incontrati finora, la topologia sullo spazio vettoriale \mathcal{S} non sarà assegnata stabilendo su di esso una norma (e quindi rendendolo spazio normato), ma solamente indicando il criterio di convergenza delle sue successioni.⁴

Definizione 6.11 Una successione di funzioni $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ si dice convergente in \mathcal{S} alla funzione $\phi \in C^\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi \quad \text{in } \mathcal{S} \quad (6.42)$$

se per ogni $j \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^j \phi_n(x) = \partial^j \phi(x) \quad (6.43)$$

uniformemente rispetto ad x in ogni intervallo limitato ed inoltre le costanti C_{pj} della maggiorazione (6.41) possono essere scelte indipendentemente da n , cioè se vale

$$|x^p \partial^j \phi_n(x)| \leq C_{pj} \quad \text{per ogni } p, j \in \mathbb{N} \quad (6.44)$$

qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.

Dimostriamo che le condizioni (6.43) e (6.44) sono equivalenti a richiedere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^p \partial^j \phi_n = x^p \partial^j \phi \quad (6.45)$$

uniformemente su tutto \mathbb{R} per ogni $p, j \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: La convergenza uniforme (6.43) su tutti gli intervalli compatti implica la convergenza uniforme su tutti i compatti delle successioni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^p \partial^j \phi_n(x) = x^p \partial^j \phi(x) .$$

Questa a sua volta implica la convergenza puntuale ovunque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^p \partial^j \phi_n(x) \rightarrow x^p \partial^j \phi(x) \quad \text{puntualmente per ogni } x \in \mathbb{R} ,$$

visto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un compatto che lo contiene. Allora, dall'eq. (6.44) segue che

$$\begin{aligned} |x^p \partial^j \phi(x)| &\leq C_{pj} \quad \text{per ogni } p, j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \\ \implies |x^p \partial^j [\phi_n(x) - \phi(x)]| &\leq |x^p \partial^j \phi_n(x)| + |x^p \partial^j \phi(x)| \leq 2C_{pj} \quad \text{per ogni } p, j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e, per $p = r + 1 \geq 1$ si ha

$$|x^r \partial^j [\phi_n(x) - \phi(x)]| \leq 2C_{(r+1)j}/x \quad \text{per ogni } r, j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^* .$$

⁴Per informazione dei lettori, diciamo che lo spazio \mathcal{S} viene considerato come “spazio numerabilmente normato”, stabilendo su di esso una infinità numerabile di norme, che tale spazio è uno “spazio topologico lineare” e che può essere reso metrico; rimandiamo il lettore interessato alla letteratura (per esempio [Kolmogorov-Fomin]).

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_{rj}(\varepsilon) = 2C_{(r+1)j}/\varepsilon > 0$ tale

$$|x^r \partial^j [\phi_n(x) - \phi(x)]| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } r, j \in \mathbb{N}, |x| > x_{rj}(\varepsilon) .$$

Inoltre, dalla convergenza uniforme sui compatti, esiste $n_{rj}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|x^r \partial^j [\phi_n(x) - \phi(x)]| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } r, j \in \mathbb{N}, |x| \leq x_{rj}(\varepsilon), n \geq n_{rj}(\varepsilon) .$$

Ma queste due ultime disequazioni significano che, nel limite $n \rightarrow \infty$, la successione di funzioni $x^r \partial^j \phi_n(x)$ converge uniformemente su tutto \mathbb{R} alla funzione $x^r \partial^j \phi(x)$ per ogni $r, j \in \mathbb{N}$. C.V.D.

OSSERVAZIONE: Nella definizione 6.11 non si richiede che $\phi \in \mathcal{S}$. Questo perché, sotto le ipotesi di convergenza (6.43) e (6.44), si può dimostrare che ciò è sempre vero: $\phi \in \mathcal{S}$. Infatti, lo spazio \mathcal{S} , inteso come spazio metrico — con l'opportuna definizione di distanza che qui non è il caso di riportare —, è completo (si veda per esempio [V]).

Intuitivamente, questo si spiega perché la convergenza imposta dalla definizione (6.11) è molto più stringente della convergenza di L^2 o anche di quella uniforme, e questo fa sì che, calcolando il limite, non si esca da \mathcal{S} .

Una notevole proprietà della definizione 6.11 di convergenza in \mathcal{S} , che avrà importantissime conseguenze, è la continuità degli operatori di moltiplicazione e di derivazione.

Teorema 6.10 *Gli operatori di moltiplicazione, di derivazione e qualsiasi loro potenza e composizione sono continui in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione: Già fatta per dimostrare l'eq. (6.45), che esprime esattamente l'enunciato di questo teorema:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^p \partial^j \phi_n = x^p \partial^j \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R} .$$

C.V.D.

Quindi, diversamente che in L^2 , in \mathcal{S} tutti gli operatori di interesse fisico sono continui. Questa è forse la ragione principale per introdurre \mathcal{S} con la sua peculiare topologia.

Definizione 6.12 *Si chiama **distribuzione temperata** ogni funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Esplicitamente, diciamo che un'applicazione*

$$T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \langle T, \phi \rangle \tag{6.46}$$

è una distribuzione temperata (e usiamo il simbolo $\langle T, \phi \rangle$ per indicare il numero complesso in cui T manda la funzione $\phi \in \mathcal{S}$) se essa è lineare:

$$\langle T, \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \rangle = \alpha_1 \langle T, \phi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \phi_2 \rangle \quad \text{per ogni } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S} \tag{6.47}$$

ed è continua:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \phi_n \rangle = \langle T, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \rangle . \tag{6.48}$$

Naturalmente, nell'eq. (6.48), $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione convergente in \mathcal{S} , per cui il secondo limite è un limite nel senso della definizione 6.11, mentre il primo limite è quello di una successione in \mathbb{C} .

L'insieme dei funzionali lineari e continui su \mathcal{S} si può dotare della struttura di \mathbb{C} -spazio vettoriale.

Definizione 6.13 *Assegnati $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ e T_1, T_2 distribuzioni temperate, si definisce la distribuzione temperata $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ come quel funzionale che ad ogni funzione $\phi \in \mathcal{S}$ associa il numero complesso*

$$\langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \phi \rangle := \alpha_1^* \langle T_1, \phi \rangle + \alpha_2^* \langle T_2, \phi \rangle. \quad (6.49)$$

È immediato dimostrare che tale funzionale è lineare e continuo. La scelta di usare a secondo membro i complessi coniugati dei coefficienti $\alpha_{1,2}$ è conveniente perché rende lineare (e non antilineare) l'applicazione

$$\dagger : L^2 \rightarrow L^{2*}, \quad v \mapsto v^\dagger, \quad (6.50)$$

in particolare $(\alpha v)^\dagger = \alpha v^\dagger$. Questo segue direttamente dalle definizioni (6.39) e (6.49):

$$\langle (\alpha v)^\dagger, \phi \rangle \stackrel{(6.39)}{=} \int [\alpha v(x)]^* \phi(x) \, dx = \alpha^* \langle v^\dagger, \phi \rangle \quad (6.51)$$

$$\langle \alpha v^\dagger, \phi \rangle \stackrel{(6.49)}{=} \alpha^* \langle v^\dagger, \phi \rangle. \quad (6.52)$$

NOTA: Non ci si preoccupi se $(\alpha v)^\dagger = \alpha v^\dagger$ non coniuga lo scalare α , come fa invece l'aggiunto di un operatore: le due definizioni sono diverse. Sarebbe altrettanto lecito definire l'aggiunto di un vettore in modo da far sì che l'aggiunzione sia antilineare. È una questione di convenienza, e qui ci è più conveniente fare in modo che \dagger della (6.50) sia lineare. In particolare, se alla funzione f è associata la distribuzione f^\dagger , con la nostra convenzione alla distribuzione αf^\dagger è associata la funzione αf e non $\alpha^* f$. (Si veda anche la prossima sezione sulle distribuzioni regolari).

Definizione 6.14 *Lo spazio vettoriale dei funzionali lineari e continui su \mathcal{S} , cioè il duale topologico di \mathcal{S} , si chiama spazio delle distribuzioni temperate e si indica solitamente con il simbolo \mathcal{S}' .*

6.5.2 Le distribuzioni regolari

Ogni funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita quasi ovunque su \mathbb{R} , localmente sommabile e a *crescenza algebrica finita*, cioè tale che esistono $x_0 > 0$, $C > 0$ ed $m \in \mathbb{N}$ per cui

$$|f(x)| \leq C|x|^m, \quad \text{per ogni } x : |x| \geq x_0 \quad (6.53)$$

definisce in modo unico una distribuzione temperata f^\dagger , mediante la formula (6.39), ossia

$$\langle f^\dagger, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(x) \phi(x) \, dx \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}. \quad (6.54)$$

L'integrale a secondo membro esiste certamente poiché l'integrando è una funzione localmente sommabile e decrescente all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza; esso è effettivamente

un funzionale, poiché associa un numero complesso ad ogni $\phi \in \mathcal{S}$, lineare, per la linearità dell'integrale, e continuo, per il teorema di Lebesgue e la definizione 6.11 di limite in \mathcal{S} .

Indicheremo con \mathcal{F} l'insieme (che è spazio vettoriale) delle funzioni a crescita algebrica finita.⁵ L'integrale (6.54) assomiglia molto alla definizione del prodotto scalare in L^2 — non a caso si usa la notazione $\langle f, \phi \rangle$ che è una specie di compromesso fra una delle notazioni usate per il prodotto scalare (f, ϕ) e quella di Dirac $\langle f | \phi \rangle$ — salvo un'importante differenza: nella (6.54) i due fattori f e ϕ appartengono a spazi diversi: $\phi \in \mathcal{S} \subset L^2$ e $f \in \mathcal{F} \supset L^2$; il secondo fattore (ϕ) è costretto nello spazio \mathcal{S} , molto più piccolo di L^2 , proprio perché il primo (f) possa appartenere ad uno spazio più ampio.

L'applicazione

$$\dagger : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}', \quad f \mapsto f^\dagger, \quad (6.55)$$

oltre ad essere lineare è anche iniettiva: date due funzioni $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, se $f_1^\dagger = f_2^\dagger$, ossia se $\langle f_1, \phi \rangle = \langle f_2, \phi \rangle \forall \phi \in \mathcal{S}$, allora $f_1(x) = f_2(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, $\dagger : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$ è un isomorfismo. La (6.50) realizza quindi un'immersione dello spazio \mathcal{F} in \mathcal{S}' ; perciò possiamo, senza rischi di equivoco, identificare \mathcal{F} con la sua immagine \mathcal{F}^\dagger in \mathcal{S}' e quindi identificare ogni funzione localmente sommabile a crescita algebrica finita con la distribuzione temperata da essa individuata mediante la (6.54). Già a questo punto è utile osservare la radicale differenza rispetto alla situazione descritta dal teorema di Riesz: lo spazio \mathcal{S}' duale di \mathcal{S} , è molto più ampio di \mathcal{S} poiché contiene al suo interno lo spazio \mathcal{F}^\dagger che è già di per sé più ampio di L^2 . La fig. 6.1 riporta uno schema della situazione in esame: al piano inferiore sono rappresentati gli spazi di funzioni mentre al piano superiore sono visualizzati i duali; il morfismo \dagger connette i due piani.

In definitiva, partendo dalla catena di inclusioni

$$\mathcal{S}^\dagger \subset L^{2*} \subset \mathcal{F}^\dagger \subset \mathcal{S}', \quad (6.56)$$

e sfruttando gli isomorfismi $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\dagger$, $L^2 \cong L^{2*}$, $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}^\dagger$ indotti dal morfismo \dagger , possiamo stabilire le seguenti inclusioni:

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}' \quad (6.57)$$

e quindi pensare a \mathcal{S}' come ad un sovraspazio di L^2 ed anche di \mathcal{F} .

In effetti \mathcal{S}' è più grande di \mathcal{F}^\dagger , infatti l'applicazione $\dagger : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}'$ non è suriettiva; esistono cioè delle distribuzioni temperate che non possono essere rappresentate mediante funzioni, per mezzo dell'integrale (6.54). La delta di Dirac ne è l'esempio paradigmatico. Ammettiamo per assurdo che esista una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $f^\dagger = \delta$, ovvero tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f^*(x) \phi(x) dx = \phi(0) \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}; \quad (6.58)$$

In particolare la (6.58) dovrebbe valere per le funzioni $\phi_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\varepsilon > 0$ così definite:

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) & (|x| < \varepsilon) \\ 0 & (|x| \geq \varepsilon) \end{cases}.$$

⁵La notazione \mathcal{F} non è standard.

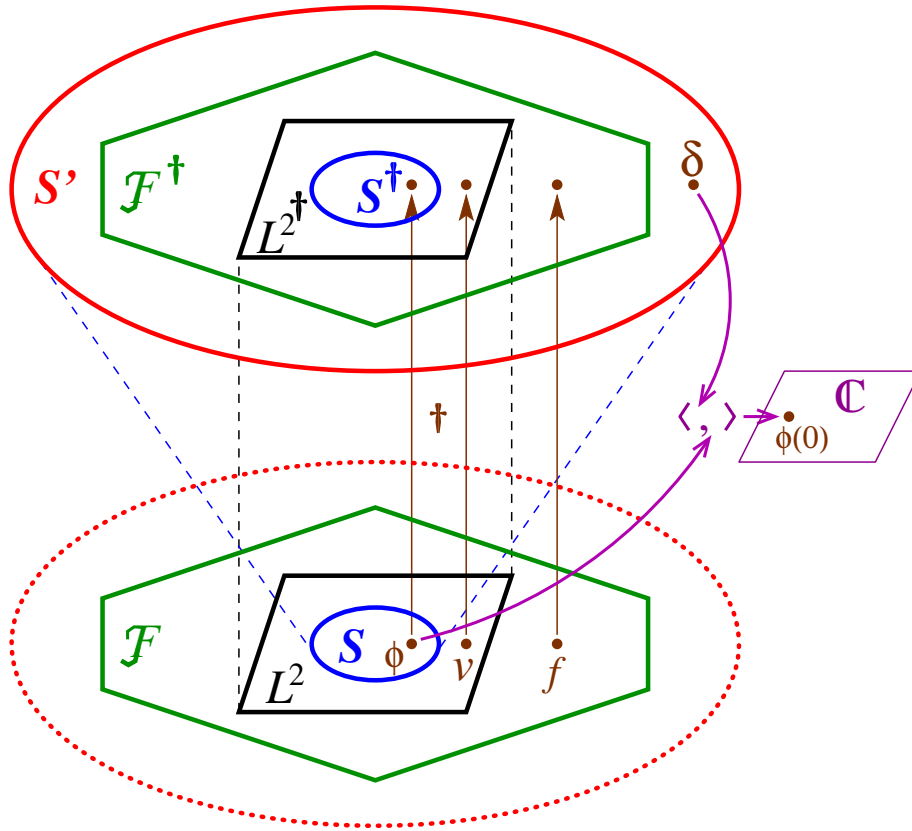


Figura 6.1: Schema degli spazi di funzioni $\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{F}$ e degli spazi di funzionali $\mathcal{S}' \supset \mathcal{F}^\dagger \supset L^{2*} \equiv L^{2\dagger} \supset \mathcal{S}^\dagger$. Le linee tratteggiate indicano dualità topologica, mentre le frecce verticali indicano l'isomorfismo “aggiunto” \dagger .

Poiché $\phi_\varepsilon(0) = 1$, la (6.58) implica

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^*(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) dx = 1. \quad (6.59)$$

Inoltre, dal fatto che $|\phi_\varepsilon(x)| \leq 1$, si ha anche

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^*(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) dx \right| \leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)| dx$$

che tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$ (l'integrale di Lebesgue è una funzione continua dei suoi estremi). Ma ciò è in contrasto con la (6.59), e quindi l'ipotesi (6.58) è assurda.

Le distribuzioni vengono spesso chiamate funzioni generalizzate poiché esse generalizzano, uscendo fuori dalla classe delle funzioni propriamente dette, il concetto di funzione localmente sommabile. Le distribuzioni che possono essere rappresentate da funzioni ordinarie mediante la (6.54) si dicono **distribuzioni regolari**, le altre (come per esempio la delta di Dirac) **distribuzioni singolari**. Per analogia al caso delle distribuzioni regolari, per ogni distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ si scrive spesso $\langle T, \phi \rangle = \int T^*(x) \phi(x) dx$, ad esempio $\langle \delta, \phi \rangle = \int \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$, come se al funzionale T corrispondesse una “funzione simbolica” $T(x)$ da collocare nella parte inferiore del diagramma di fig. 6.1 entro la grande ellisse rossa tratteggiata, controimmagine tramite \dagger di \mathcal{S}' ; non bisogna però dimenticare che $T(x)$ è una notazione simbolica e che $T(x)$ non rappresenta il valore di nessuna funzione nel punto x .

Il nome “distribuzione” nasce dall’analogia con semplici situazioni fisiche: per esempio una distribuzione continua di carica su una retta è rappresentata dalla funzione ordinaria densità $\rho(x)$; una carica q puntiforme situata nel punto $x = 0$ è rappresentata dalla distribuzione singolare $q\delta(x)$, nel senso sopra specificato.

6.5.3 La convergenza debole

Nello spazio lineare \mathcal{S}' delle distribuzioni temperate è naturale introdurre il seguente concetto di limite debole (“weak-limit” in inglese).

Definizione 6.15 *Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$ una successione di distribuzioni temperate. Si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ ne è il limite debole (o il limite nel senso delle distribuzioni) e si scrive*

$$T = \text{w-} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \quad (6.60)$$

se per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ esiste il limite della successione di numeri complessi $\langle T_n, \phi \rangle$ e vale

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}. \quad (6.61)$$

Nella scrittura con funzioni simboliche le (6.60)-(6.61) diventano

$$T(x) = \text{w-} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (6.62)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^*(x) \phi(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} T_n^*(x) \phi(x) \, dx. \quad (6.63)$$

Nel caso (molto frequente) in cui le T_n siano distribuzioni regolari mentre il limite debole T sia una distribuzione singolare, gli integrali al secondo membro della (6.63) hanno senso proprio, mentre non hanno senso proprio l’equazione (6.62) e l’integrale a primo membro della (6.63). Queste acquistano senso (ordinario) interpretando la (6.63) come loro definizione: ogni distribuzione è specificata dalla sua azione sulle funzioni di prova $\phi \in \mathcal{S}$, e $T(x) = \text{w-} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ è specificata moltiplicandola per $\phi(x)$ e integrando in x , con l’avvertenza che bisogna scambiare d’ordine il limite con l’integrale, cioè prima bisogna effettuare l’integrazione delle $T_n^*(x)$ con $\phi(x)$, e poi il limite $n \rightarrow \infty$.

Se invece si cerca di effettuare il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ nel senso della convergenza puntuale, in generale si ottiene o qualcosa che non ha senso o qualcosa che non ha nulla a che fare con la distribuzione T . La definizione 6.15 permette di dare utilissime rappresentazioni della delta di Dirac come limite debole di successioni di funzioni ordinarie. Un esempio lo abbiamo incontrato nel teorema 2.1 di convergenza puntuale delle serie di Fourier, in cui abbiamo introdotto il nucleo di Dirichlet

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \quad \text{w-} \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(x) = \delta(x) \quad \text{in } \mathcal{S}([-\pi, \pi]).$$

Un altro esempio lo abbiamo incontrato nel teorema 2.30 di convergenza puntuale della trasformata di Fourier, in cui si è dimostrato che, se f è continua (e con rapporti incrementali limitati) in x_0 , allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + h) \frac{\sin(Rh)}{h} \, dh = f(x_0)$$

il che equivale a dire che

$$\text{w-} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin(Rx)}{\pi x} = \delta(x) .$$

OSSERVAZIONE: Naturalmente esistono casi in cui le espressioni (6.62)-(6.63) esistono anche in senso ordinario, per esempio se le T_n soddisfano le ipotesi del teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

6.6 Spazi di Hilbert equipaggiati

Riassumiamo i risultati principali trovati in precedenza:

- abbiamo individuato in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ il sottospazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ il quale, dotato di un'opportuna topologia, ha come duale topologico lo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (delle distribuzioni temperate);
- abbiamo visto che $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ contiene \mathcal{H}^* , e siccome \mathcal{H}^* è isomorfo ad \mathcal{H} (per il teorema di Fischer-Riesz, \dagger è l'isomorfismo), $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$, possiamo pensare ad $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ come ad una estensione di \mathcal{H} ;
- in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ siamo riusciti ad individuare degli oggetti che rappresentano gli “autovettori” degli operatori autoaggiunti fondamentali X e P .

Ci proponiamo ora di

- Formulare in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ il problema agli autovalori per un generico operatore autoaggiunto A ;
- fornire la rappresentazione spettrale per gli operatori X e P ;
- definire le funzioni di tali operatori.

6.6.1 Operatori in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Per formulare in generale le equazioni agli autovalori nello spazio \mathcal{S}' delle distribuzioni temperate, bisogna innanzitutto definire gli operatori su \mathcal{S}' , in particolare quelli corrispondenti ad operatori (fisicamente) interessanti definiti su $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.

Partiamo da un operatore continuo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ per cui è nota l'azione sulle funzioni $f \in L^2(\mathbb{R})$. Siccome l'isomorfismo $\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ ci permette di identificare gli elementi di \mathcal{H} con quelli di \mathcal{H}^* , trasportiamo la definizione di A ad \mathcal{H}^* (e ne manteniamo il simbolo) in modo tale che

$$A : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}^* , \quad f^\dagger \mapsto Af^\dagger := (Af)^\dagger . \quad (6.64)$$

In altre parole, l'immagine tramite A del funzionale f^\dagger è l'aggiunto della funzione Af . Di conseguenza, l'azione di Af^\dagger su un generico vettore $\phi \in \mathcal{H}$ è tale che

$$\langle Af^\dagger, \phi \rangle = \langle (Af)^\dagger, \phi \rangle = (Af|\phi) = \int_{\mathbb{R}} ([Af](x))^* \phi(x) dx \quad (6.65)$$

Sfruttando il fatto che ogni operatore continuo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ha l'aggiunto A^\dagger definito su tutto \mathcal{H} , possiamo anche scrivere

$$\langle Af^\dagger, \phi \rangle = (Af|\phi) = (f|A^\dagger\phi) \quad (6.66)$$

Questa relazione è il punto di partenza per definire l'azione di opportuni operatori $A \in \text{Hom}(L^2(\mathbb{R}))$ su tutto \mathcal{S}' . Diciamo “opportuni” perché vogliamo che l'analogo dell'eq. (6.66), cioè $\langle f, A^\dagger\phi \rangle$, abbia senso (i) per ogni distribuzione temperata $f \in \mathcal{S}'$, (ii) per ogni funzione di prova $\phi \in \mathcal{S}$. Le richieste minimali da imporre sono:

- L'operatore A deve avere dominio denso in \mathcal{H} affinché si possa definire il suo aggiunto A^\dagger ;
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$;
- $A^\dagger\phi \in \mathcal{S}$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$: $A^\dagger(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$;
- A^\dagger deve essere continuo in \mathcal{S} nella topologia di \mathcal{S} , affinché $\phi \mapsto \langle f, A^\dagger\phi \rangle$ sia continua.

Arriviamo finalmente alla seguente definizione-teorema:

Teorema 6.11 (definizione di operatore in \mathcal{S}') *Sia $A \in \text{Hom}(L^2(\mathbb{R}))$ operatore densamente definito tale che $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$ e che A^\dagger sia continuo in \mathcal{S} nella topologia di \mathcal{S} . Allora A può essere esteso ad un operatore continuo in \mathcal{S}' definendo*

$$A : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}', \quad T \mapsto AT, \quad \langle AT, \phi \rangle := \langle T, A^\dagger\phi \rangle \quad (6.67)$$

per ogni funzione di prova $\phi \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione: Questa è una buona definizione in quanto dalla continuità di A^\dagger in \mathcal{S} segue che $A^\dagger\phi \in \mathcal{S}$ per ogni ϕ . È poi immediato verificare che dalla linearità di A^\dagger e di T segue la linearità di AT . Inoltre, la continuità di A^\dagger in \mathcal{S} , combinata con la continuità di T , garantisce che il funzionale AT sia continuo, ossia che appartenga ad \mathcal{S}' . Infine si può dimostrare che $A : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è continuo (secondo la topologia di \mathcal{S}' , che è la convergenza debole). C.V.D.

OSSERVAZIONE: Il precedente teorema non richiede la continuità dell'operatore A in $L^2(\mathbb{R})$, quindi si può applicare anche ad operatori non limitati.

OSSERVAZIONE: Se A è operatore autoaggiunto, definito in tutto \mathcal{S} ed ivi continuo, valgono le ipotesi del teorema precedente e quindi A può essere esteso a tutto \mathcal{S}' . In particolare il teorema 6.11 si applica agli operatori P ed X e alle loro potenze e composizioni.

Illustriamo ora i concetti appena esposti nel caso particolarmente importante dell'operatore “derivata”. Iniziamo considerando la situazione di distribuzioni associate a funzioni derivabili, per poi passare a definire la derivata di distribuzioni temperate qualsiasi.

ESEMPIO: Sia A l'operatore di derivazione, definito nel suo dominio naturale $\mathcal{D}(\partial)$ sottospazio di $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Se $f \in \mathcal{D}(\partial)$, allora a $g = \partial f \in \mathcal{H}$ è associato il funzionale $g^\dagger = (\partial f)^\dagger \in \mathcal{H}^*$. Definiamo questo funzionale come la “derivata” di $f^\dagger \in \mathcal{H}^*$:

$$\partial f^\dagger \equiv (\partial f)^\dagger. \quad (6.68)$$

L'azione di questo funzionale sulla funzione $\phi \in \mathcal{H}$ è data da

$$\langle \partial f^\dagger, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}} [\partial f(x)]^* \phi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial f^*(x) \phi(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f^*(x) \partial \phi(x) \, dx = -\langle f^\dagger, \phi' \rangle \quad (6.69)$$

in cui abbiamo integrato per parti nell'ultima uguaglianza, con i termini di bordo nulli grazie alla forte decrescenza di ϕ all'infinito.

ESEMPIO: Sempre $A = \partial$ operatore di derivazione. Ogni distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$ è derivabile e si ha

$$\langle \partial T, \phi \rangle := \langle T, \partial^\dagger \phi \rangle = \langle T, -\partial \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle, \quad (6.70)$$

in quanto ∂ nel suo dominio naturale è anti-autoaggiunto: $\partial^\dagger = -\partial$. Che questa sia una buona definizione segue dal fatto che se $\phi \in \mathcal{S}$ allora $\phi' \in \mathcal{S}$. In particolare la derivata della delta di Dirac è la distribuzione

$$\partial \delta_{x_0} : \phi \mapsto \langle \partial \delta_{x_0}, \phi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, \phi' \rangle = -\phi'(x_0) \quad (6.71)$$

che valuta la derivata (cambiata di segno) della funzione di prova su cui agisce.

È facile quindi dedurre che ogni distribuzione è infinitamente derivabile. Questo fatto può apparire sorprendente, dato che anche funzioni discontinue individuano delle distribuzioni, ma si spiega facilmente poiché la derivata di una distribuzione associata ad una funzione discontinua è una distribuzione “singolare”.

ESEMPIO: Consideriamo ancora l'operatore di derivazione. Sia $\Theta \in \mathcal{F}$ la funzione a scalino di Heaviside, e Θ^\dagger la distribuzione associata. Si ha

$$\langle \partial \Theta^\dagger, \phi \rangle = -\langle \Theta^\dagger, \phi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} \Theta(x) \phi'(x) \, dx = - \int_0^\infty \phi'(x) \, dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle,$$

in quanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$. Si dice che la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione a scalino è la delta di Dirac: $\Theta' = \delta$.

I tre esempi precedenti ci mostrano che:

- il concetto di derivata di una distribuzione coincide con la derivata ordinaria se la distribuzione è regolare e discende da una funzione derivabile (primo esempio);
- permette di estendere l'operazione di derivata a funzioni non derivabili, in particolare discontinue, purché localmente integrabili ed a crescita algebrica finita, cioè in \mathcal{F} (terzo esempio);
- permette addirittura di estendere l'operazione di derivata a distribuzioni singolari, cioè che non sono associate a funzioni di alcun tipo (secondo esempio).

Esaminiamo ora l'operatore di moltiplicazione, prima nel caso di distribuzioni regolari e poi di distribuzioni singolari.

ESEMPIO: Sia A un multiplo complesso dell'operatore di moltiplicazione: $A = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Allora, per ogni funzione $f \in \mathcal{F}$, Af è la funzione $x \mapsto [Af](x) = \alpha x f(x)$ che appartiene a

\mathcal{F} . Mostriamo che la definizione (6.67) equivale ad affermare che il trasformato tramite A della distribuzione regolare f^\dagger associata ad f è la distribuzione regolare $(Af)^\dagger$ associata alla funzione Af .⁶

$$\begin{aligned}\langle Af^\dagger, \phi \rangle &\stackrel{(6.67)}{=} \langle f^\dagger, A^\dagger \phi \rangle = \langle f^\dagger, (\alpha X)^\dagger \phi \rangle = \langle f^\dagger, \alpha^* X \phi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^*(x) \alpha^* x \phi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} [\alpha x f(x)]^* \phi(x) \, dx = \langle (Af)^\dagger, \phi \rangle.\end{aligned}$$

In particolare, αX è ora definito in tutto $L^2 \subset \mathcal{F}$, ma il vettore immagine può non appartenere ad L^2 .

ESEMPIO: Ancora A multiplo complesso dell'operatore di moltiplicazione: $A = \alpha X$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Valutiamone l'azione sulla distribuzione singolare δ_{x_0} :

$$\langle A\delta_{x_0}, \phi \rangle \stackrel{(6.67)}{=} \langle \delta_{x_0}, A^\dagger \phi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \alpha^* X \phi \rangle = \alpha^* x_0 \phi(x_0) = \alpha^* x_0 \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \langle \alpha x_0 \delta_{x_0}, \phi \rangle, \quad (6.72)$$

poiché $x_0 \in \mathbb{R}$. Quindi $(\alpha X)\delta_{x_0} = \alpha x_0 \delta_{x_0}$.

[Da completare]

A questo punto, definite le “estensioni” degli operatori su \mathcal{H} , limitati e non, ad \mathcal{S}' , non resta che

1. *Definire e risolvere le equazioni agli autovalori;*
2. *Enunciare la rappresentazione spettrale di vettori di \mathcal{H} in termini di questi autovettori generalizzati.*

Sciuto-due fa tutto benissimo, sez. 5.5 da pag 140. Io però lo farei sui bra, non subito sui ket.

SONO QUI

Abbiamo già osservato che, per gli operatori autoaggiunti, la definizione 6.11 si semplifica nella relazione

$$\langle AT, \phi \rangle := \langle T, A\phi \rangle \quad (A = A^\dagger). \quad (6.73)$$

In questo caso, la notazione di Dirac diventa particolarmente conveniente. Infatti, come essa si presta bene a rappresentare l'isomorfismo $\dagger : |f\rangle \mapsto \langle f|$ in modo tale che la notazione bra-ket unifica il prodotto scalare e l'azione di funzionali su vettori (teorema di Fischer-Riesz) secondo lo schema

$$\begin{array}{ccc} \text{come prodotto scalare} & & \\ (f|g) & = & \underbrace{\underbrace{f}_{\mathcal{H}^*}}_{\mathcal{H}} \big| \underbrace{g}_{\mathcal{H}} \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{come funzionale}} = \langle f^\dagger, g \rangle \end{array} \quad (6.74)$$

⁶Si può esprimere questa proprietà dicendo che $A_{\mathcal{F}'} : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'$ rende commutativo il diagramma $\dagger \quad A_{\mathcal{F}} \quad \dagger$
 $A_{\mathcal{F}'}$.

essa si presta altrettanto bene a rappresentare l'azione di operatori autoaggiunti sia sui vettori che sui funzionali, secondo lo schema

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{azione di } A \text{ sul vettore} & & & & \\
 (f|A\phi) & = & \underbrace{\underbrace{f}_{\mathcal{H}^*}}_{\mathcal{H}^*} |A| \underbrace{\phi}_{\mathcal{H}} & = & \langle Af^\dagger, \phi \rangle & (6.75) \\
 & & & & \text{azione di } A \text{ sul funzionale}
 \end{array}$$