

# RIPASSO DI QCD

La QCD è una teoria di gauge non abeliana, ed attualmente è ritenuta la teoria fondamentale che governa le interazioni nucleari forti.

In un certo senso si può vedere la QCD come una generalizzazione della QED, tra le due teorie ci sono molte somiglianze ma anche profonde differenze.

Nel seguente schema mettiamo a confronto i campi e altri enti che prendono parte nelle due teorie.

**QED**

Gruppo di simmetria

$$U(1) = \{e^{i\alpha} : \alpha \in [0, 2\pi[ \}$$

Campo dell'elettrone

$$\psi(x) \in \mathbb{C}^4 \quad \text{spinore di Dirac}$$

**QCD**

$$SU(N_c) = \{U \in M_{N_c \times N_c}(\mathbb{C}) : UU^\dagger = \mathbb{1}, \det(U) = 1\}$$

$$N_c = 3$$

Campi dei quark (Rosso, Giallo, Blu)

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_G(x) \\ \psi_B(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^3$$

3 spinori di Dirac (3 colori)

Trasformazione di gauge (rappresentazione fondamentale)

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

un generatore:  $T = 1$

$$\psi'(x) = U(x) \psi(x)$$

$$SU(N_c) \ni U(x) = e^{i\alpha^a(x) \vec{T}^a}$$

$N_c^2 - 1$  generatori  $\vec{T}^a : a = 1 \dots 8 \in su(N_c)$

matrici hermitiane a traccia nulla

$$[\vec{T}^a, \vec{T}^b] = if^{abc} \vec{T}^c$$

# Derivata covariante (rappresentaz. fondamentale) (2)

$$D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$$

carica elettrica ↗

Campo di gauge (rappresentazione aggiunta)

$$A_\mu(x) \in \mathbb{R}$$

↓  
fotone (1 tipo)

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu$$

↑ carica di colore

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) \vec{T}^a \in su(N_c)$$

(matrice hermitiana a traccia nulla)  
→ gluoni ( $N_c^2 - 1 = 8$  colori)

Trasformazione di gauge (rappresentazione aggiunta)

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

$$A'_\mu(x) = U(x) \left[ A_\mu(x) - \frac{i}{g} \partial_\mu \right] U^\dagger(x)$$

Tensore intensità di campo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \vec{T}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu]$$

↖ invariante di gauge ↗

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

La Lagrangiana

$$L = \sum_s \bar{\Psi}_s (i \hat{D} - m_s) \Psi_s - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

↓  
 $\partial_\mu + ie_s A_\mu$

$$L = \sum_{s=1}^{n_f} \bar{\Psi}_s (i \hat{D} - m_s) \Psi_s - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

↑  $\partial_\mu + ig A_\mu$  (g non dipende da s)

ci sono diversi ( $n_f = 6$ ) tipi (sapori)  
di quark: u, d, s, c, b, t,  
con masse 0.4, 0.4, 0.5, 1.6, 4.2, 173 GeV

In più ci sono termini per fermare la gauge, ed i campi fantasma.

Propagatori liberi

$$\longrightarrow \frac{i}{\hat{p} - m}$$

$$\begin{array}{ccc} s_1 & \xleftarrow{\text{reperi}} & s_2 \\ c_2 & \xrightarrow{\text{colori}} & c_1 \end{array}$$

$$\frac{i \delta_{c_1 c_2} \delta_{s_1 s_2}}{\hat{p} - m_s}$$

$$\alpha \text{ --- } \beta$$

$$\frac{-i}{q^2} [g_{\alpha\beta} + (\text{termini di gauge})]$$

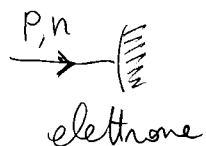
$$\begin{array}{ccc} \alpha & \text{---} & \beta \\ a & \text{---} & b \\ a & \xleftarrow{\text{colori}} & b \end{array}$$

$$\frac{-i \delta^{ab}}{q^2} [g_{\alpha\beta} + t.p.]$$

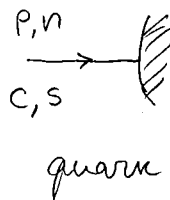
$i \delta^{ab} / p^2$

# Particelle esterne

(3)



$$U(P, n)$$

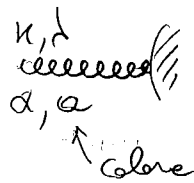


$$U(P, n, C, S)$$

↑     ↑  
colore   sapore



$$E^{\alpha}(k, l)$$



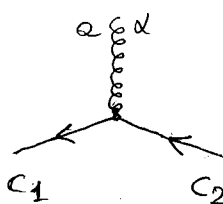
$$E^{\alpha}(k, l, a)$$

↓  
si attacca ad una  
matrice  $\frac{e}{T}$

## Vertici di interazione

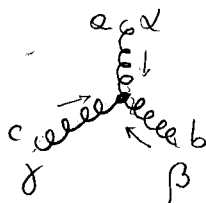


$$(-ie\gamma^{\alpha})$$

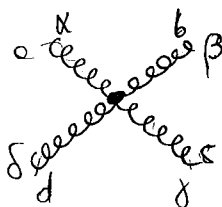


$$(-ig \frac{e}{T} \gamma^{\alpha})$$

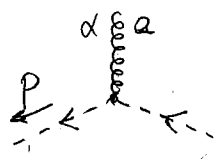
Le matrici di colore dei gluoni sono nella rappresentazione AGGIUNTA:  
 $T_{cb}^a = if^{abc}$



$$-gf^{abc} [g^{\alpha\beta} (k_a - k_b)^{\gamma} + g^{\beta\gamma} (k_b - k_c)^{\alpha} + g^{\gamma\alpha} (k_c - k_a)^{\beta}]$$


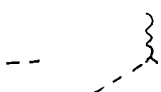


$$-ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) + \text{perm. cicl} \begin{pmatrix} b\beta \\ c\gamma \\ d\delta \end{pmatrix}]$$



$$gf^{abc} p^{\alpha}$$

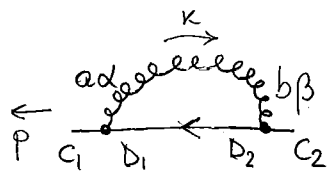
A differenza della QED, in QCD

- le particelle esterne hanno un indice di colore (cdi sapore per i quark)
- i diagrammi comuni hanno operatori di colore (e stessa parte cinematica)  
 $T_{c1c2}, T^{ab}$ , per i propagatori,  $\frac{e}{T}$  il vertice  $q\bar{q}g$
- ci sono dei diagrammi in più, necessari per preservare l'invarianza di gauge (  ) e l'unitarietà (  )

Alcuni risultati importanti li possiamo ricavare direttamente dalla QED, aggiungendo un semplice fattore di colore, p. es.

(4)

### AUTOENERGIA DEL QUARK



$$\int (-ig\gamma^\alpha T_{c_1 d_1}^a) \frac{i\delta_{d_1 d_2}}{\hat{p} + \hat{k} - m} (-ig\gamma^\beta T_{d_2 c_2}^b) \frac{-i\delta_{\alpha\beta} \delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}}{k^2}$$

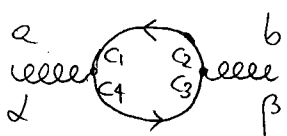
$$-i\Sigma_{c_2 c_1}(p) = \underbrace{T_{c_1 d_1}^a T_{d_2 c_2}^b}_{\substack{a \quad b \\ T \quad T}} \delta^{ab} [-i\Sigma^{QED}(p)]_{e \rightarrow g}$$

$$\left(\frac{a}{T} \frac{b}{T}\right)_{c_2 c_1} \delta^{ab} = \left(\sum_a T^a T^a\right)_{c_2 c_1} = (C_F \mathbb{1})_{c_2 c_1} = C_F \delta_{c_2 c_1}$$

$$C_F = \text{Casimir della rappresentazione fondamentale}, C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N} = \frac{4}{3}$$

$$(\text{in QED})$$

### AUTOENERGIA DEL GLUONE (CONTRIBUTO DEI QUARK)



$$= i\Pi_{\alpha\beta}^{ab}(q) = i\Pi_{\alpha\beta}^{QED}(q)|_{e \rightarrow g} \cdot \underbrace{T_{c_1 c_2}^a \delta_{c_2 c_3} T_{c_3 c_4}^b}_{\substack{a \quad b \\ T \quad T}}$$

$$T_{c_1 c_2}^a T_{c_3 c_4}^b = \text{tr}(T^a T^b) = T_R \delta^{ab}$$

$\swarrow \quad \searrow$   
 $1 \text{ in QED} \quad \quad \frac{1}{2} \text{ in QCD}$

Se ci sono  $n_f$  specie (sapori) di quark, si ha

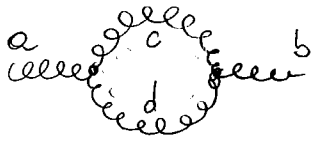
$$\Pi_{\alpha\beta}^{ab} = T_R n_f \delta^{ab} \Pi_{\alpha\beta}^{QED}|_{e \rightarrow g}$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{QED}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2), \quad \Pi(0) = -\frac{\alpha'}{3\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln \mu^2 + \dots \right) \rightarrow -\frac{e^2}{24\pi} \ln \mu$$

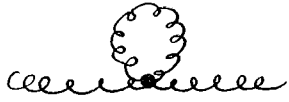
$$\beta^{QED} := \frac{d\alpha_R(\mu)}{d\ln \mu} = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5) \rightarrow \beta_{\text{QUARK}}^{QCD} := \frac{dg_R(\mu)}{d\ln \mu} = \frac{g^3 T_R n_f}{12\pi^2} + \mathcal{O}(g^5)$$

# AUTOENERGIA DEL GLUONE (GLUONI + FANTASMI) (5)

Nelle teorie non abeliane l'autoenergia del campo di gauge riceve contributo anche dai diagrammi



La struttura di colore è per tutti  
 $f^{acd} f^{bcd} = T_{ad}^c T_{db}^c = (\vec{T}^c \vec{T}^c)_{ab} = (C_A \mathbb{1})_{ab} = C_A \delta^{ab}$



Caratteristica della rappresentazione aggiunta:  $C_A = N_c = 3$



Il contributo a  $\Pi_{\alpha\beta}^{ab}$  dei gluoni + fantasmi  
 ha segno opposto a quello dei quark.

Ne risulta una funzione  $\beta$  negativa (per  $n_f < 33/2$ )

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{4\pi} \frac{11 C_A - 4 T_R n_f}{12\pi} + \dots = -\frac{g^3}{4\pi} b_0 + \dots \quad (\text{si usa anche } \beta_0 := \frac{b_0}{4\pi})$$

Si definisce  $\alpha_s := \frac{g^2}{4\pi}$

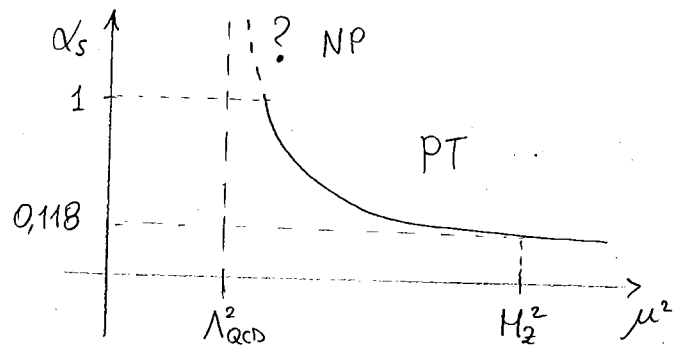
$$\frac{d\alpha_s}{d\ln\mu^2} = -b_0 \alpha_s^2$$

$$\frac{d\alpha_s}{\alpha_s^2} = -d\left(\frac{1}{\alpha_s}\right) = -b_0 \ln\mu^2$$

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} = b_0 (\ln\mu^2 - \ln\mu_0^2)$$

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \alpha_s(\mu_0^2) b_0 \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} = \frac{1}{b_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}}$$

decrecente in  $\mu^2$ .



$$\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$$

$\approx$  masse adroniche

← SCHIAVITÙ INFRAROSSA  
 ↓ CONFINAMENTO  
 → LIBERTÀ ASINTOTICA

L'andamento di  $\alpha_s(\mu^2)$  ha 2 conseguenze principali: (6)

- L'accoppiamento diminuisce con l'aumentare della scala di energia-massa del processo, ovvero con il diminuire della distanza (e dei tempi di interazione) delle particelle (LIBERTÀ ASINTOTICA).

In processi sufficientemente energetici è applicabile l'approccio perturbativo per il calcolo di osservabili.

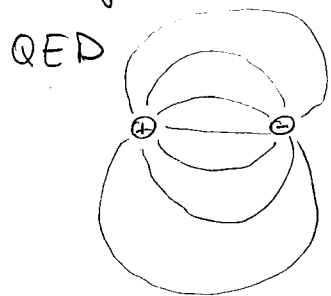
- L'accoppiamento cresce con il diminuire dell'energia, ovvero con l'aumentare della distanza tra le particelle. Quando  $\alpha_s$  diventa grande ( $\geq 1$ ) l'approccio perturbativo non è più valido. Non possiamo quindi concludere molto sul comportamento di  $\alpha_s$  per  $\mu \lesssim \Lambda_{QCD}$ .

Un approccio che dà informazioni affidabili in questo regime è dato dai CALCOLI SU RETICOLO, in cui si discretizza lo spaziotempo e si simula numericamente mediante computer la dinamica della QCD.

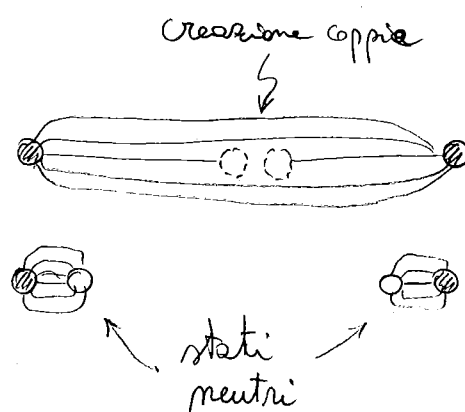
Si possono calcolare p.es. le masse degli adroni, e verificare il fenomeno del CONFINAMENTO, ossia che gli stati asintotici ad energie finite in QCD devono essere singoletti di colore (stati invarianti sotto  $SU(3)$ ).

Intuitivamente, ciò è dovuto al fatto che i gluoni, essendo essi stessi carichi (di colore), tendono a concentrare le linee di forza "cromoelettriche" in tubi di sezione circa costante, così che, per separare

una coppia di cariche di colore, serve una quantità (7 di energia sempre maggiore, che si accumula nel campo cromoelettrico, fino ad essere sufficiente ( $\Delta x \approx 1 \text{ fm}$ ) a creare dal vuoto una coppia di cariche di colore opposte, ciascuna delle quali va a neutralizzare le cariche originarie.



QCD



A partire dai quark (e antiquark) possiamo costruire stati di singoletto combinando 2 o più particelle.

Indichiamo con  $q^c$ ;  $c=1,2,3 = R, G, B$  gli stati di colore dei quark:  
 $\hookrightarrow$  indice di colore

Una trasformazione  $U \in SU(3)$  trasforma  $q \rightarrow q'$  tale che  
 $q'^c = U^c_d q^d$  ed un antiquark  $\bar{q} \rightarrow \bar{q}'$  tale che

$$\bar{q}'_c = \overline{q'_c} = \overline{(U q)_c} = (\bar{q} U^\dagger)_c = \bar{q}_d (U^\dagger)^d_c$$

È facile vedere che

$$\bar{q}'_c q'^c \rightarrow \bar{q}_d \underbrace{U^{+D}_c U^c_E}_{\delta^D_E} q^E = \bar{q}_d q^D \quad \text{è invariante}$$

$$\epsilon_{CDE} q^C q^D q^E \rightarrow \underbrace{\epsilon_{CDE} U^C_{C'} U^D_{D'} U^E_{E'}}_{\det(U) \epsilon_{C'D'E'}} q^{C'} q^{D'} q^{E'} = \epsilon_{C'D'E'} q^{C'} q^{D'} q^{E'}$$

è invariante, come anche  $\epsilon^{CDE} \bar{q}_C \bar{q}_D \bar{q}_E$

3	ringioletti	$\bar{q}q$	costituiscono i mesoni	$(\pi^{\pm}, \pi^0, \rho, \dots)$	(8)
"	"	$qqq$	"	barioni	$(p, n, \Lambda, \Delta, \dots)$
		$\bar{q}\bar{q}\bar{q}$		antibarioni	$(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda}, \bar{\Delta}, \dots)$

Poiché il metodo più efficiente, se non l'unico, che abbiamo a disposizione per indagare le strutture microscopiche delle particelle consiste nello studiare i processi di urto e diffusione ad alte energie, il fatto che gli stati asintotici sia costituito da sistemi composti e fortemente interagenti ( $\alpha_s \gg 1$ ) ci pone grosse difficoltà e limitazioni.

Buttavia, se riusciamo ad identificare degli osservabili che dipendano principalmente dalla dinamica di quark e gluoni a piccole distanze, eliminando o almeno riducendo gli effetti di lunghe distanze, allora potremo avere la possibilità di studiare quantitativamente la nostra teoria.

Gli acceleratori di particelle di alte energie permettono urti a piccole distanze.

La chiave per una descrizione perturbativa e quantitativa della QCD sta nell'identificare, calcolare e misurare opportuni osservabili che siano il meno possibile sensibili alla dinamica delle grandi distanze.

In altre parole, un buon osservabile deve

- presentare una scala d'energia "dura"  $E \gg \Lambda_{QCD}$
  - includere tutti gli stati finali adronici che possono derivare dal processo partonico che stiamo analizzando
- $\rightarrow$  partoni = quark e gluoni.