

Capitolo 2

Date: 2021-10-13 14:29 +0200

Revision: 346 : 70975734981b

La serie e la trasformata di Fourier

2.1 Preambolo: equazioni differenziali a coefficienti costanti

La funzione esponenziale è di importanza fondamentale in moltissimi campi della matematica e della fisica. Uno di questi è lo studio delle equazioni differenziali lineari. Ce ne rendiamo subito conto se cerchiamo di risolvere un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti, come quella che governa il circuito oscillante in fig. 2.1. La tensione in uscita $y(t)$ è legata dalla alla tensione di ingresso $f(t)$ dall'equazione del secondo ordine

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t) \quad (2.1)$$

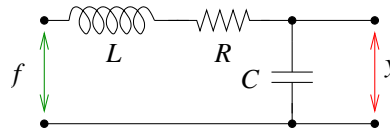


Figura 2.1: Circuito oscillante costituito da un'induttanza L , una resistenza R ed una capacità C .

Consideriamo innanzitutto il comportamento del circuito con tensione di ingresso nulla: $f(t) = 0$. Più in generale consideriamo l'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti del secondo ordine:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y' := \frac{dy}{dt} \quad (2.2)$$

con $a, b, c \in \mathbb{K}$ costanti ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) ed $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ funzione incognita. Se cerchiamo una soluzione del tipo $y(t) = Ne^{\lambda t}$ con $N, \lambda \in \mathbb{K}$ e sostituiamo quest'espressione nell'eq. (2.2), otteniamo l'equazione algebrica

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2.3)$$

nell'incognita λ , la quale ammette come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.4)$$

È chiaro come, anche nel caso di equazioni a coefficienti reali, sia conveniente lavorare in campo complesso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dal momento che le due soluzioni $\lambda_{1,2}$ sono complesse se $b^2 - 4ac < 0$; più

in generale, il teorema fondamentale dell'algebra 1.1 ci assicura che un'equazione di ordine n ammette sempre n soluzioni in campo complesso.

Il fatto di aver trasformato un'equazione differenziale in un'equazione algebrica è una semplificazione enorme. In questo caso ci permette di scrivere subito la soluzione generale dell'equazione omogenea (2.2):

$$y_{\text{om}}(t) = N_1 e^{\lambda_1 t} + N_2 e^{\lambda_2 t}, \quad N_1, N_2 \in \mathbb{K}, \quad (2.5)$$

ossia come una combinazione lineare (C.L.) delle due soluzioni indipendenti appena trovate.¹ Questo perché l'equazione differenziale (2.2) si può scrivere come

$$\mathcal{L}y = 0, \quad \mathcal{L} := aD^2 + bD + c, \quad D := \frac{d}{dt} \quad (2.6)$$

ed $\mathcal{L} : C^2(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ è un operatore lineare.

NOTA: Ricordiamo che un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine $n \in \mathbb{N}^*$ ha come insieme delle soluzioni un \mathbb{K} -spazio vettoriale n -dimensionale di funzioni che si scrivono come C.L. arbitrarie di n soluzioni indipendenti.

Le due costanti $N_{1,2}$ possono essere determinate da altrettante condizioni sulla funzione $y_{\text{om}}(t)$, ad esempio, in un problema di Cauchy, dai valori $y_{\text{om}}(\bar{t})$ ed $y'_{\text{om}}(\bar{t})$ ad un istante \bar{t} specificato. Nel caso in cui i coefficienti a, b, c siano reali, possiamo chiaramente restare nel campo dei numeri reali anche con le soluzioni:

- se $\lambda_{1,2}$ sono reali, le soluzioni sono C.L. di esponenziali reali;
- se $\lambda_{1,2}$ sono complesse coniugate, le soluzioni sono C.L. di esponenziali reali moltiplicate per seni e coseni.

Passiamo ora a considerare il problema non omogeneo

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t). \quad (2.7)$$

Sappiamo dalla teoria che la sua soluzione generale è data da una soluzione particolare più la soluzione generale (2.5) del problema omogeneo associato (2.2). Sappiamo anche che, se $y_1(t)$ è soluzione di (2.7) con termine non omogeneo $f_1(t)$ ed $y_2(t)$ è soluzione di (2.7) con termine non omogeneo $f_2(t)$, allora $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ è soluzione di (2.7) con termine non omogeneo $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$. Queste proprietà sono una diretta conseguenza della linearità dell'operatore differenziale \mathcal{L} , eq. (2.6). In formule:

$$\mathcal{L}y_1 = f_1, \quad \mathcal{L}y_2 = f_2 \quad \implies \quad \mathcal{L}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 f_1 + c_2 f_2. \quad (2.8)$$

Visto che cominciamo a fare amicizia con la funzione esponenziale, proviamo a trovare una soluzione per un "termine noto", o "forzante" $f(t) = Fe^{\mu t}$ con $F, \mu \in \mathbb{C}$ assegnati. Siccome le derivate di esponenziali sono ancora esponenziali, cerchiamo una soluzione della forma $y(t) = Ye^{\mu t}$ con $Y \in \mathbb{C}$. Anche in questo caso l'equazione differenziale (2.7) si trasforma in un'equazione algebrica,

$$(a\mu^2 + b\mu + c)Y = F \quad (2.9)$$

¹Escludiamo in questa presentazione introduttiva il caso particolare in cui le due radici siano uguali: $\lambda_1 = \lambda_2$.

nell'incognita Y , che ha per soluzione

$$Y = \frac{F}{a\mu^2 + b\mu + c} \quad (2.10)$$

Tenendo conto della proprietà di linearità (2.8) di \mathcal{L} , questa soluzione, ci permette di risolvere subito un caso fisicamente interessante per il nostro circuito: la risposta ad una tensione d'ingresso sinusoidale

$$\begin{aligned} f(t) &= V_0 \cos(\omega t) = \frac{V_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (V_0, \omega \in \mathbb{R}) \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{V_0}{2} \left[\frac{e^{i\omega t}}{a(i\omega)^2 + b(i\omega) + c} + \frac{e^{-i\omega t}}{a(-i\omega)^2 + b(-i\omega) + c} \right] = U_0 \cos(\omega t + \phi_0), \end{aligned} \quad (2.11)$$

puramente reale, essendo $a := LC$, $b := RC$ e $c := 1$ reali.

ESERCIZIO: Determinare l'ampiezza U_0 e lo sfasamento ϕ_0 della tensione di uscita in funzione dei parametri del circuito e di ω .

In modo analogo possiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale (2.7) nel caso in cui il termine noto sia una qualsiasi C.L. finita di esponenziali complessi:

$$\mathcal{L}y = f, \quad f(t) = \sum_n F_n e^{\mu_n t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_n Y_n e^{\mu_n t} \quad \text{ove} \quad Y_n = \frac{F_n}{a\mu_n^2 + b\mu_n + c}. \quad (2.12)$$

Ecco che, se “in qualche modo” si riesce a scrivere un dato termine noto $f(t)$ come C.L. di funzioni esponenziali, allora si riesce a risolvere la corrispondente l'equazione differenziale (2.7), come indicato nell'eq. (2.12).

Lo scopo di buona parte del corso sarà proprio quello di trovare il modo per esprimere un'ampia classe di funzioni come C.L. di funzioni esponenziali. Questo studio va sotto il nome di *analisi armonica*.

2.2 Equazione di d'Alembert e onde stazionarie

L'utilità e la potenza della funzione esponenziale complessa si manifesta in modo ancora più evidente nella soluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari. Lo vedremo studiando il movimento di un importante sistema fisico che è il prototipo di molti sistemi più complessi governati da fenomeni ondulatori: la corda vibrante. Più precisamente consideriamo come sistema una corda elastica, omogenea, perfettamente flessibile, tesa fra i suoi due estremi tenuti in posizione fissata.

Si può pensare che la corda sia costituita da una successione di moltissime particelle uguali e vicinissime legate tra loro da forze elastiche. Nell'ipotesi di piccole perturbazioni dalla posizione di equilibrio, si possono generalmente trascurare i moti longitudinali: gli spostamenti dalla posizione di equilibrio sono soprattutto trasversali. Indichiamo con $u(x, t)$ tale spostamento nel punto x della corda al tempo t . La funzione u obbedisce ad un'equazione differenziale alle derivate parziali, detta *equazione delle onde* o *equazione di d'Alembert*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

dove v è una costante che dipende dalle caratteristiche fisiche della corda ($v = \sqrt{\tau/\rho}$ se τ è la tensione della corda e ρ la sua densità lineare).

Studiamo il caso in cui gli estremi della corda siano tenuti fissi, diciamo ad $x = 0$ ed $x = L$. Questo si traduce nelle condizioni, per ogni t ,

$$u(0, t) = 0 = u(L, t) \quad (2.14)$$

che sono dette *condizioni di bordo* o anche *condizioni agli estremi* o anche *condizioni al contorno*.

Cerchiamo innanzitutto soluzioni particolari dell'equazione di d'Alembert. Siccome le derivate spaziali e temporali si trovano in termini distinti, proviamo con il metodo della *separazione delle variabili*, cioè con soluzioni del tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.15)$$

in cui X dipende solo dalla variabile x mentre T solamente da t . Sostituendo l'espressione (2.15) nell'eq. (2.13) e dividendo tutto per u , otteniamo

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T} . \quad (2.16)$$

In questa equazione, il primo membro dipende solo da x , mentre il secondo solo da t . In altri termini, il primo membro non può dipendere da t , mentre il secondo non può dipendere da x . Siccome i due membri devono essere identicamente uguali, l'unica possibilità è che siano uguali ad una costante C , detta *costante di separazione*. Riusciamo così a ottenere due equazioni disaccoppiate:

$$\begin{cases} X'' - CX = 0 \\ T'' - Cv^2T = 0 . \end{cases} \quad (2.17)$$

che come si vede sono equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti.

La più generale soluzione dell'equazione per X è, come abbiamo visto,

$$X(x) = Ae^{\sqrt{C}x} + Be^{-\sqrt{C}x} . \quad (2.18)$$

Le condizioni al contorno (2.14) diventano

$$X(0) = 0 = X(L) \implies \begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\sqrt{C}L} + Be^{-\sqrt{C}L} = 0 \end{cases} \implies e^{\sqrt{C}L} = e^{-\sqrt{C}L} . \quad (2.19)$$

Quindi \sqrt{C} non può essere reale, e ricordando che

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + i2\pi n : n \in \mathbb{Z} , \quad (2.20)$$

ne risulta che deve essere

$$2\sqrt{C}L = i2\pi n \implies \sqrt{C} = ik_n \quad \text{ove} \quad k_n := \frac{n\pi}{L} . \quad (2.21)$$

Le soluzioni possibili per X sono dunque

$$X(x) = A(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) = \alpha_n \sin(k_n x) , \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (2.22)$$

in cui α_n è una costante moltiplicativa arbitraria per ogni n , ed abbiamo limitato n agli interi strettamente positivi, in quanto $n = 0$ corrisponde alla soluzione banale, mentre due soluzioni con n opposti differiscono solo per il segno e sono quindi linearmente dipendenti.

L'equazione (2.17) per T non è corredata da condizioni al contorno, quindi la generica soluzione sarà

$$T(t) = A'_n e^{i\omega_n t} + B'_n e^{-i\omega_n t} = a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t), \quad \omega_n := vk_n \quad (2.23)$$

con A'_n, B'_n, a_n, b_n le solite costanti arbitrarie, per ciascun n .

Siccome la costante di separazione $C = -k_n^2$ dipende da n , bisogna combinare la soluzione (2.22) per X con la soluzione (2.23) per T avente lo stesso n . Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ abbiamo una soluzione per la corda vibrante data da

$$u(x, t) = \sin(k_n x) [a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)] \quad (2.24)$$

Ma essendo il sistema lineare, vale il principio di sovrapposizione, quindi ogni C.L. finita delle soluzioni (2.24) è soluzione dell'equazione di d'Alembert (2.13) con condizioni al contorno (2.14).

Vediamo così che la soluzione generale del problema differenziale della corda elastica si esprime come una serie di funzioni trigonometriche:

$$u(x, t) = \sum_n \sin(k_n x) [a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)] \quad (2.25)$$

in cui i coefficienti a_n, b_n sono reali per questo sistema fisico.

- Prima domanda: possiamo considerare anche serie infinite di queste soluzioni, cioè considerare un numero infinito di a_n o b_n diversi da zero?
- Seconda domanda: da cosa dipendono i coefficienti a_n e b_n ?

Le due domande sono intimamente legate. Cominciamo dalla seconda. Come nel caso di equazioni differenziali ordinarie, le “costanti arbitrarie” della soluzione generale sono determinate dalle condizioni iniziali (nel caso di un problema di Cauchy). Anche nel caso della corda vibrante, se noi sappiamo lo stato della corda ad un certo istante — diciamo $t = 0$ —, dovremmo essere in grado di determinarne lo stato per tutti i tempi successivi (e precedenti), visto che la sua evoluzione è governata sempre dalle equazioni (2.13), (2.14). Infatti, dato che il sistema è del secondo ordine nel tempo, è necessario e sufficiente conoscere la posizione $u(x, 0)$ e la velocità $\partial_t u(x, 0)$ di ciascun punto della corda a $t = 0$ per sapere il suo stato ad ogni istante. Supponendo note queste due funzioni di $x \in [0, L]$, i coefficienti a_n e b_n devono essere tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$u(x, 0) = \sum_n b_n \sin(k_n x) \quad (2.26a)$$

$$\partial_t u(x, 0) = \sum_n a_n \omega_n \sin(k_n x). \quad (2.26b)$$

Consideriamo la prima equazione. È chiaro che una deformazione $u(x, 0)$ generica, ottenuta per esempio con una martellata alla corda, non sarà così fortunata da essere uguale ad una C.L. di sinusoidi, quindi assai probabilmente la risposta alla prima domanda sarà che *dovremo* considerare serie infinite di soluzioni. Siamo perciò di fronte ad un'alternativa:

- o una generica funzione “fisicamente sensata” per questa corda, cioè continua in $[0, L]$ e nulla agli estremi, si può rappresentare come serie (probabilmente infinita) di seni con numeri d’onda k_n
- oppure quello che abbiamo fatto in questa sezione è inutile e dobbiamo ricominciare da capo, cercando un nuovo metodo.

Ebbene, come vedremo, sotto opportune ipotesi ed in un senso da precisare, è vera la prima situazione: possiamo rappresentare una generica funzione continua in $[0, L]$ e nulla agli estremi mediante una serie di funzioni sinusoidali, come nell’eq. (2.26a). Per questo scopo bisogna determinare i coefficienti dello sviluppo, i b_n . Il metodo lo troviamo pensando alle funzioni come elementi di uno spazio vettoriale: dobbiamo scrivere un vettore noto ($u(\cdot, 0)$) come C.L. di vettori noti ($\sin(k_n \cdot)$). Per i vettori usuali, troviamo le componenti dello sviluppo di un vettore \vec{u} proiettandolo sui vettori $(\vec{e}_n)_{n=1,2,3}$ della base scelta. Se tale base è ortonormale, i coefficienti dello sviluppo si ottengono dal prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$ di \vec{u} con i vettori di base corrispondenti:

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^3 c_n \vec{e}_n \quad \text{se} \quad c_n = (\vec{e}_n | \vec{u}) \quad \text{e} \quad (\vec{e}_n | \vec{e}_m) = \delta_{nm} := \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}. \quad (2.27)$$

Naturalmente, affinché valga questa decomposizione, non è solo necessario che gli \vec{e}_n siano un insieme di vettori ortonormali, ma anche che siano un insieme completo, cioè che generino tutto lo spazio vettoriale. Anche l’insieme $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ è ortonormale, ma non genera tutto lo spazio 3D, e quindi non è sufficiente per la decomposizione dei vettori nello spazio.

Si tratta quindi di

- definire un opportuno prodotto scalare in spazi di funzioni;
- generalizzare i metodi dell’algebra lineare e della geometria euclidea a questi spazi di funzione, che hanno dimensione infinita.

La definizione di prodotto scalare tra due funzioni continue (per ora ci interessa questo caso) lo motiviamo generalizzando l’espressione analoga per i vettori di \mathbb{R}^N : dati $f, g \in \mathbb{R}^N$ si definisce prodotto scalare (o prodotto interno) di f con g il numero reale $(f|g) := \sum_{k=1}^N f_k g_k$. Ma se per specificare un vettore in \mathbb{R}^N ci vogliono N numeri reali (le sue componenti f_k), per specificare una funzione $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ bisogna specificare tutti i valori $f_x := f(x)$ che essa assume per ogni $x \in [0, L]$. Siamo così portati a pensare che un prodotto scalare tra due funzioni reali f e g possa essere qualcosa del tipo $(f|g) \sim \sum_{x \in [0, L]} f_x g_x$. Chiaramente questa somma non ha senso, poiché x varia in un insieme non numerabile. Ma noi conosciamo bene l’operazione che ci permette di sommare su variabili continue: è l’integrale $\int_0^L dx$.

Definizione 2.1 *Il prodotto scalare tra due funzioni continue $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ è il numero reale*

$$(f|g) := \int_0^L f(x)g(x) dx. \quad (2.28)$$

Per il momento è sufficiente considerare come integrale quello di Riemann, infatti essendo f e g continue lo è anche il loro prodotto; e siccome stiamo integrando sull'intervallo compatto $[0, L]$, l'integrale di Riemann nella precedente definizione esiste sempre (finito).

Osserviamo poi che, per poter chiamare tale operazione con il nome di “prodotto scalare”, dobbiamo essere sicuri che soddisfi le proprietà del prodotto scalare. Questo è garantito dalla linearità dell'integrale, e si lascia come esercizio.

A questo punto, il compito di trovare i coefficienti b_n della (2.26a) sarebbe facile se i vettori di base, cioè le funzioni $f_n(x) \mapsto \sin(k_n x)$ fossero ortogonali (cioè $(f_n|f_m) = 0$ per ogni $n \neq m$) e normalizzate (cioè $(f_n|f_n) = 1$ per ogni n). Controlliamo: per $n \neq m$ abbiamo

$$\begin{aligned} (f_n|f_m) &= \int_0^L f_n(x) f_m(x) dx = \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) = \int_0^L \frac{1}{2} [\cos((k_n - k_m)x) - \cos((k_n + k_m)x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k_n - k_m)L) - \sin(0)}{k_n - k_m} - \frac{\sin((k_n + k_m)L) - \sin(0)}{k_n + k_m} \right] \quad (m \neq n) \end{aligned} \quad (2.29)$$

in quanto $n \neq m$ implica $k_n \pm k_m \neq 0$. Poiché $\sin((k_n \pm k_m)L) = \sin((n \pm m)\frac{\pi}{L}L) = 0$, effettivamente tutti gli integrali sono nulli, e quindi le funzioni f_n sono a due a due ortogonali. Per $n = m$ abbiamo $k_n - k_m = 0$, quindi $\cos((k_n - k_m)x) = \cos(0) = 1$, ed il suo integrale in $[0, L]$ vale L (mentre l'integrale di $\cos((k_n + k_m)x)$ vale sempre 0). Troviamo così che

$$(f_n|f_n) = \frac{L}{2}. \quad (2.30)$$

Le funzioni non sono “normalizzate”, ma è facile “normalizzarle”, moltiplicandole per $\sqrt{2/L}$. Abbiamo così individuato un insieme di funzioni ortonormali

$$e_n : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x), \quad (e_n|e_m) = \delta_{nm} \quad (2.31)$$

Adattando l'eq. (2.27) alle nostre funzioni, avanziamo l'ipotesi di poter scrivere

$$u = \sum_n c_n e_n, \quad c_n = (e_n|u) \quad \implies \quad u = \sum_n (e_n|u) e_n = \sum_n \frac{2}{L} (f_n|u) f_n \quad (2.32)$$

in cui abbiamo usato $e_n = \sqrt{2/L} f_n$ nell'ultimo passaggio. Quindi u è scritta come C.L. delle f_n , proprio come richiesto dall'eq. (2.26a) che riscriviamo: $u = \sum_n b_n f_n$. Confrontandola con la (2.32) ricaviamo finalmente i coefficienti

$$b_n = \frac{2}{L} (u|f_n) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin(k_n x) dx \quad (2.33)$$

che esistono finiti per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, essendo l'integrando continuo ed integrato su un compatto.

ESERCIZIO: Ricavare i coefficienti a_n .

Fino a qui abbiamo proceduto in modo formale, cioè non ci siamo preoccupati delle questioni di convergenza, che sono due:

- 1) La serie (infinita: $n \in \mathbb{N}^*$) di funzioni nell'eq. (2.32) (è scritta tre volte ma sempre della stessa somma si tratta) converge ad una qualche funzione? E rispetto a quale topologia?

- 2) In caso di convergenza, converge alla funzione u ? In altre parole: l'insieme delle f_n è completo? Ed i b_n forniti dall'eq. (2.33) sono quelli giusti?

La risposta a queste domande dipende dallo spazio di funzioni che consideriamo e dalla topologia che adottiamo in questo spazio. Sarà l'argomento della prossima sezione.

2.3 Serie di Fourier

Ricapitoliamo i punti principali della sezione precedente:

- abbiamo trovato la soluzione ad un problema alle derivate parziali come C.L. di funzioni trigonometriche f_n , tutte con periodo (o lunghezza d'onda) $\lambda_n = \lambda/n$ sottomultipla di un dato $\lambda = 2L$;
- tale soluzione richiede di poter esprimere una generica funzione u (la condizione iniziale) come serie di funzioni trigonometriche con opportuni coefficienti b_n ;
- Sfruttando l'ortogonalità delle funzioni f_n abbiamo trovato una formula per determinare i coefficienti b_n ;
- Si presentano due domande: 1) la serie di funzioni converge? 2) Se converge, converge alla funzione u ?

Vogliamo quindi affrontare la questione se sia possibile esprimere una data funzione come serie di funzioni trigonometriche. Per una maggiore efficacia e generalità del metodo, tratteremo non solo funzioni a valori reali ma anche a valori complessi. Inoltre, alle funzioni “seno” affiancheremo le relative funzioni “coseno”. Questo perché la serie di seni (2.26a) definisce una funzione periodica dispari; un'analogia serie di coseni definisce una funzione periodica pari, quindi con seni e coseni dovremmo poter scomporre una qualsiasi funzione periodica. Infine, adotteremo l'integrale di Lebesgue, che permette di trattare una classe più ampia di funzioni, e che comunque negli intervalli compatti si riduce all'integrale di Riemann per funzioni limitate e continue a tratti.²

Definizione 2.2 Una serie trigonometrica in forma reale di periodo $\lambda = 2\pi/k$ è una serie del tipo

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)] \quad (2.34)$$

dove gli a_n, b_n sono reali o complessi.

Il termine a_0 corrisponde al termine in coseno con $n = 0$ e quindi con numero d'onda $k_0 = 0$, che a differenza dell'analogo termine in seno, non si annulla e si riduce ad una costante, che abbiamo messo in evidenza fuori dalla sommatoria.

Con le formule di Eulero (1.54) possiamo riscrivere la precedente serie trigonometrica in termini di esponenziali complessi:

²Sia $D \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ si dice *continua a tratti* se in ogni intervallo limitato di D presenta al più un numero finito di discontinuità, e nei punti di discontinuità esistono finiti i limiti destro e sinistro.

Definizione 2.3 Una serie trigonometrica in forma complessa di periodo $\lambda = 2\pi/k$ è una serie bilatera del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inkx} \quad (2.35)$$

dove i c_n sono reali o complessi.

Le due forme di serie trigonometriche coincidono se

$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \quad (2.36)$$

per ogni $n > 0$. Si possono quindi usare le due forme indifferentemente. La forma complessa generalmente è più maneggevole dal punto di vista matematico.

NOTA: Mentre la ridotta N -esima di una serie standard $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ è la somma $\sum_{n=0}^N$, la ridotta N -esima di una serie bilatera $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ è la somma $\sum_{n=-N}^N$, che definisce la serie bilatera nel limite $N \rightarrow +\infty$.

Le funzioni di base che abbiamo introdotto godono ancora della proprietà di essere ortogonali:³ poste

$$C_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C_n(x) = \cos(nkx) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.37a)$$

$$S_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad S_n(x) = \sin(nkx) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (2.37b)$$

$$E_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad E_n(x) = e^{inkx} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (2.37c)$$

$$(f|g) \equiv \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f^*(x)g(x) \, dx \quad (2.37d)$$

abbiamo che $(C_n|C_m) = (S_n|S_m) = (E_n|E_m) = 0$ se $n \neq m$, e $(C_n|S_m) = 0$ per ogni m, n . Quindi l'insieme delle funzioni trigonometriche reali $\{C_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{S_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ forma un insieme di funzioni ortogonali in $[-\lambda/2, +\lambda/2]$ (ed in ogni “intervallo periodo” $[x_0, x_0 + \lambda]$). Allo stesso modo, $\{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un insieme di funzioni ortogonali.

Procedendo come nella sezione precedente, ci aspettiamo che i coefficienti della serie trigonometrica che decompone una funzione periodica siano dati da prodotti scalari con le funzioni di base:

³Avendo a che fare con uno spazio vettoriale sui complessi, per definire un prodotto interno definito positivo si rimpiazza il prodotto scalare euclideo con quello hermitiano, in cui si coniuga uno dei due fattori (nell'uso dei fisici, quello di sinistra).

Definizione 2.4 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica di periodo $\lambda = 2\pi/k$ e localmente integrabile. I coefficienti di Fourier di f sono i numeri complessi

$$a_0 = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \, dx \quad (2.38a)$$

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos(nkx) \, dx \quad (n > 0) \quad (2.38b)$$

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \sin(nkx) \, dx \quad (2.38c)$$

per la forma reale, e

$$c_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-inkx} \, dx \quad (2.39)$$

per la forma complessa.

Definizione 2.5 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica di periodo $\lambda = 2\pi/k$ e localmente integrabile. La serie di Fourier di f in forma reale è la serie trigonometrica in forma reale (2.34) con coefficienti dati dai coefficienti di Fourier (2.38). La serie di Fourier di f in forma complessa è la serie trigonometrica in forma complessa (2.35) con coefficienti dati dai coefficienti di Fourier (2.39).

Possiamo a questo punto enunciare il teorema di convergenza delle serie di Fourier:

Teorema 2.1 (di convergenza puntuale) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica di periodo λ e localmente integrabile. Supponiamo che in $x_0 \in \mathbb{R}$ esistano finiti i limiti destro $f(x_0^+)$ e sinistro $f(x_0^-)$ di f , e che inoltre i rapporti incrementali destro e sinistro

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h}, \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0^-)}{-h}$$

si mantengano limitati per h abbastanza piccolo, $h \in]0, \delta]$. Allora la serie di Fourier di f converge, nel punto x_0 , alla media dei valori dei limiti destro e sinistro:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inkx_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, allora la serie di Fourier di f converge ad $f(x_0)$.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema un importante

Lemma 2.2 (di Riemann-Lebesgue) Per ogni intervallo $[a, b]$ finito o infinito e per ogni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ integrabile vale⁴

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b e^{ikx} f(x) \, dx = 0. \quad (2.40)$$

Lo stesso vale con $\sin(kx)$ o $\cos(kx)$ al posto di e^{ikx} .

⁴Con “integrabile” possiamo intendere sia come integrale di Riemann (eventualmente generalizzato), sia come “sommabile” alla Lebesgue. Se $a = -\infty$, intendiamo $f(a) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Analogamente se $b = +\infty$. In pratica stiamo assumendo che f ammetta limite in entrambi gli estremi di integrazione.

Dimostrazione: Ci limitiamo a dimostrare il lemma per funzioni C^1 , cioè con derivata continua e per di più assolutamente integrabile: $\int_a^b |f'(x)| dx < \infty$. In tal caso è lecito integrare per parti e si ha

$$\int_a^b e^{ikx} f(x) dx = \left[\frac{e^{ikx} f(x)}{ik} \right]_a^b - \int_a^b \frac{e^{ikx}}{ik} f'(x) dx = \frac{1}{ik} \left[e^{ikb} f(b) - e^{ika} f(a) - \int_a^b e^{ikx} f'(x) dx \right]$$

da cui

$$\left| \int_a^b e^{ikx} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{k} \left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right].$$

Ora il termine entro le parentesi quadre non dipende da k , quindi il secondo membro tende a 0 per $k \rightarrow \infty$, e di conseguenza anche il primo. Allo stesso modo si procede se invece di e^{ikx} c'è $\sin(kx)$ o $\cos(kx)$. C.V.D.

Il precedente risultato è un caso particolare del più generale

Lemma 2.3 (di Riemann-Lebesgue 2) *Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzione limitata, periodica di periodo λ , localmente integrabile. Allora, per ogni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrabile vale*

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) p(kx) dx = \mu \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \quad (2.41)$$

ove $\mu := \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda p(x) dx$ è la media dei valori di p su un intervallo periodo.

In pratica questi lemmi ci dicono che, integrando una funzione periodica modulata da una funzione integrabile, all'aumentare del periodo di oscillazione le semionde positive e le semionde negative attorno al valor medio si compensano esattamente nel limite di frequenza (o numero d'onda) infinita. Passiamo finalmente alla

Dimostrazione: (del teorema di convergenza puntuale 2.1)

Prima parte Innanzitutto ricaviamo un'espressione chiusa per la ridotta N -esima

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inkx} = \sum_{n=-N}^N \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) e^{-inkt} \frac{dt}{\lambda} e^{inkx} \\ &= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[\sum_{n=-N}^N e^{ink(x-t)} \right] \frac{dt}{\lambda} = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) D_N(k(x-t)) \frac{dt}{\lambda}, \end{aligned}$$

in cui D_N (detto *nucleo di Dirichlet*) denota la somma finita di esponenziali, è periodico con periodo 2π e vale

$$\begin{aligned} D_N(y) &:= \sum_{n=-N}^N e^{iny} = e^{-iNy} \sum_{m=0}^{2N} e^{imy} = e^{-iNy} \frac{1 - e^{i(2N+1)y}}{1 - e^{iy}} \\ &= \frac{e^{-iNy} - e^{i(N+1)y}}{1 - e^{iy}} = \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})y} - e^{i(N+\frac{1}{2})y}}{e^{-iy/2} - e^{iy/2}} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(y/2)}. \end{aligned}$$

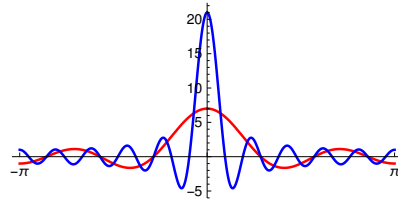


Figura 2.2: Grafico di D_3 (rosso) e D_{10} (blu).

Ponendo $x - t \equiv -h$ cioè $t = x + h$ ed osservando che $D_N(y) = D_N(-y)$ è pari si ha

$$S_N f(x) = \int_{-x-\lambda/2}^{-x+\lambda/2} f(x+h) D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} = \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} f(x+h) D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} \quad (2.42)$$

avendo riportato l'intervallo di integrazione a $[-\lambda/2, +\lambda/2]$ per la periodicità dell'integrando. Come si vede dalla figura, al crescere di N la funzione $D_N(kh)$ si stringe e si alza sempre di più nella regione $h \simeq 0$, mentre il suo integrale vale sempre

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \sum_{n=-N}^N e^{inkh} \frac{dh}{\lambda} = 1 \quad (2.43)$$

(dal momento che tutti i termini con $n \neq 0$ hanno integrale nullo sull'intervallo periodo, mentre per $n = 0$ si ottiene λ/λ). Quindi il precedente integrando tende a stringersi attorno ad $h = 0$ e se f è continua in x , allora $f(x+h)$ è circa uguale ad $f(x)$ nella stretta regione in cui D_N è grande. Il limite per $N \rightarrow \infty$ dell'integrale sarebbe allora $f(x)$. Questa è l'idea, se f è continua.

Se f è discontinua, separiamo l'integrale nell'ultimo membro dell'eq. (2.42) come somma due integrali, uno per $h < 0$ e l'altro per $h > 0$. Vogliamo dimostrare che l'integrale in $h \in [-\lambda/2, 0[$ dà $f(x_0^-)/2$ e l'integrale in $h \in]0, \lambda/2]$ dà $f(x_0^+)/2$.

Seconda parte Siccome D_N è funzione pari, dall'eq. (2.43) segue subito che

$$\int_{-\lambda/2}^0 D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} = \int_0^{\lambda/2} D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} = \frac{1}{2}, \quad (2.44)$$

quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f(x_0^-) &= \int_{-\lambda/2}^0 f(x_0^-) D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} \\ \frac{1}{2} f(x_0^+) &= \int_0^{\lambda/2} f(x_0^+) D_N(kh) \frac{dh}{\lambda}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} &= \int_{-\lambda/2}^0 [f(x_0 + h) - f(x_0^-)] D_N(kh) \frac{dh}{\lambda} \\ &\quad + \int_0^{\lambda/2} [f(x_0 + h) - f(x_0^+)] D_N(kh) \frac{dh}{\lambda}. \end{aligned}$$

Mostriamo che ambo i termini tendono a zero per $N \rightarrow \infty$. Lo facciamo per il secondo (per il primo si procede in modo analogo, o ci si riconduce al secondo con il cambio di variabile $h \rightarrow -h$).

Si ha

$$\int_0^{\lambda/2} [f(x_0 + h) - f(x_0^+)] \frac{\sin((N + \frac{1}{2})kh)}{\sin(kh/2)} dh = \int_0^{\lambda/2} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} \frac{h}{\sin(kh/2)} \sin(Lh) dh$$

in cui abbiamo posto $L := (N + \frac{1}{2})k$.

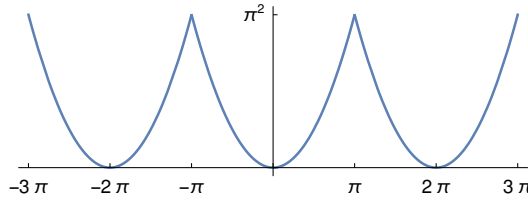
Il passo finale consiste nell'applicare il lemma di Riemann-Lebesgue al precedente integrale, in cui il fattore $\sin(Lh)$ rappresenta la funzione periodica il cui numero d'onda L tende ad ∞ . C'è da dimostrare che la funzione

$$]0, \tau/2] \ni h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} \frac{h}{\sin(kh/2)}$$

è integrabile in $]0, \tau/2]$. Infatti il primo fattore $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h}$ è integrabile perché f lo è (ci potrebbero essere problemi di divergenza per $h \rightarrow 0$, ma per ipotesi il rapporto incrementale è limitato in $]0, \delta]$). Il secondo fattore $h \mapsto \frac{h}{\sin(kh/2)}$ è continuo e limitato (ha limite finito $= 2/k$ per $h \rightarrow 0$ ed il seno non si annulla mai, essendo il suo argomento $kh/2$ compreso tra 0 e $k(\tau/2)/2 = \pi/4$). C.V.D.

ESERCIZIO: Determinare la serie di Fourier (in forma complessa e reale) della funzione periodica di periodo $\lambda = 2\pi$ definita da $f(x) = x^2$ per $x \in [-\pi, \pi]$ ed estesa per periodicità. Calcolare poi le somme delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$.

Svolgimento: Disegniamo innanzitutto il grafico della funzione assegnata:



Il numero d'onda fondamentale è $k = 2\pi/\lambda = 1$. I coefficienti di Fourier in forma complessa sono dati da

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \begin{cases} \pi^2/3 & (n = 0) \\ 2 \frac{(-1)^n}{n^2} & (n \neq 0) \end{cases}.$$

avendo integrato due volte per parti (con fattore differenziale x^2 prima e $2x$ poi) nel caso $n \neq 0$. La serie di Fourier complessa di f è quindi

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}.$$

Vediamo che $c_{-n} = c_n$, quindi accoppiando gli n di segno opposto ed usando la formula di Eulero per il coseno, troviamo

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

che è la serie di Fourier di f in forma reale. Il fatto che non ci siano termini con i seni è diretta conseguenza del fatto che f è pari: $f(x) = f(-x)$.

f è funzione ovunque continua, è derivabile in tutti i punti eccetto i multipli dispari (positivi e negativi) di π , in cui però esistono le derivate destra e sinistra. Sono così soddisfatte le ipotesi del teorema di convergenza puntuale 2.1. In realtà la convergenza è più forte: la sup-norma del termine generale $\frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ vale $4/n^2$, quindi la serie delle sup-norme converge, pertanto la serie di Fourier è totalmente convergente e uniformemente convergente ad f .

Ponendo $x = \pi$ nello sviluppo di Fourier reale, e ricordando che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, abbiamo

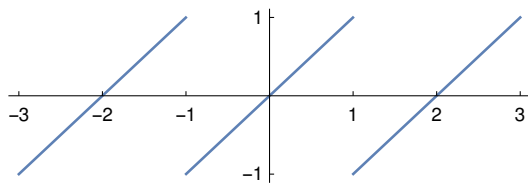
$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ponendo invece $x = 0$ troviamo

$$f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

ESERCIZIO: Determinare la serie di Fourier della funzione “a dente di sega” di periodo $\lambda = 2$ definita in $] -1, 1]$ da $f(x) = x$ e prolungata per periodicità. Calcolare poi la somma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / (2n+1)$.

Svolgimento: Il grafico della funzione è rappresentato nella seguente figura:



Il numero d'onda fondamentale è $k = 2\pi/\lambda = \pi$. I coefficienti di Fourier in forma complessa sono

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x e^{-in\pi x} dx = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ \frac{i(-1)^n}{\pi n} & (n \neq 0) \end{cases}.$$

La serie di Fourier di f è quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{i(-1)^n}{\pi n} e^{in\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n} \sin(n\pi x)$$

in cui nell'ultima uguaglianza abbiamo ottenuto la forma reale combinando i termini con gli n di segno opposto e sfruttando la formula di Eulero per il seno. Ci sono solo seni nello sviluppo reale perché f è dispari: $f(-x) = -f(x)$.

Siccome f è discontinua solo per gli x dispari (positivi e negativi), mentre è continua e derivabile negli altri punti, c'è convergenza puntuale dappertutto eccetto che per gli x dispari, in cui la serie di Fourier tende alla media $(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2 = 0$.

Per $x = 1/2$ abbiamo che $\sin(n\pi x) = 0$ se n è pari, e ± 1 se n è dispari: più precisamente $\sin((2m+1)\pi(1/2)) = (-1)^m$. Pertanto

$$f(1/2) = \frac{1}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

2.3.1 Teoremi ulteriori sulle serie di Fourier

Enunciamo in questa sezione ulteriori proprietà delle serie di Fourier, alcune delle quali saranno dimostrate nella parte sugli spazi di Hilbert. Cominciamo con il definire gli spazi di funzioni che prendiamo in considerazione.

Definizione 2.6 Sia $p > 0$ reale strettamente positivo. Indichiamo con L_λ^p l'insieme delle funzioni periodiche di periodo λ localmente integrabili in norma- p , cioè tali che

$$\int_a^{a+\lambda} |f(x)|^p dx < +\infty. \quad (2.45)$$

Indichiamo invece con L_λ^∞ l'insieme delle funzioni periodiche di periodo λ localmente integrabili e limitate.

Teorema 2.4 Se $p \geq 1$ allora L_λ^p è uno spazio vettoriale normato rispetto alla (semi)norma

$$\|f\|_p := \left(\int_a^{a+\lambda} |f(x)|^p \frac{dx}{\lambda} \right)^{1/p}. \quad (2.46)$$

L_λ^∞ è uno spazio vettoriale normato rispetto alla sup-norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, a+\lambda]} |f(x)|. \quad (2.47)$$

Se $p < q$, la convergenza in $\|\cdot\|_p$ è più debole di quella in $\|\cdot\|_q$:

Teorema 2.5 Sia $1 \leq p < q \leq +\infty$. Se $f \in L_\lambda^q$ allora $f \in L_\lambda^p$ e si ha $\|f\|_p \leq \|f\|_q$. Pertanto $L_\lambda^q \subset L_\lambda^p$.

Di particolare importanza sono il caso $p = 1$ (per il quale parleremo di funzioni sommabili e convergenza in media) ed il caso $p = 2$ (per il quale parleremo di funzioni a quadrato sommabile e convergenza in media quadratica). Quindi una funzione a quadrato sommabile è anche sommabile, e la convergenza in media quadratica implica la convergenza in media.

Notiamo anche che la norma del caso $p = \infty$ è la sup-norma, che rappresenta quindi la norma più forte. Siccome la convergenza in sup-norma altro non è che la convergenza uniforme, abbiamo che la convergenza uniforme implica a convergenza in media e media quadratica, mentre il viceversa non è vero.

ESEMPIO: La funzione $x \mapsto |\tan x|^r$ sta in L_π^2 (e quindi in L_π^1) se $r < 1/2$; se invece $1/2 \leq r < 1$, allora sta in L_π^1 ma non in L_π^2 .

Teorema 2.6 La serie di Fourier di una funzione periodica a quadrato sommabile converge sempre in media quadratica alla funzione stessa. In formule:

$$f \in L_\lambda^2 \implies \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^{a+\lambda} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inkx} \right|^2 dx = 0. \quad (2.48)$$

Teorema 2.7 (identità di Parseval) Sia $f \in L^2_\lambda$ e siano $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i suoi coefficienti di Fourier.⁵ Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|_2^2. \quad (2.49)$$

Teorema 2.8 Se la serie trigonometrica $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inkx}$ converge in media quadratica ad una funzione f periodica di periodo $\lambda = 2\pi/k$, allora tale serie è la serie di Fourier di f .

Teorema 2.9 (di integrazione termine a termine delle serie trigonometriche) Integrando termine a termine tra 0 ed $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di una funzione a quadrato sommabile, si ottiene una serie totalmente convergente.

Definizione 2.7 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ funzione, $l \in \mathbb{N}$. Si dice che f è di classe C^l a tratti in $[a, b]$ se esiste una suddivisione finita $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, e per ogni $k = 1, \dots, m$ una $g_k \in C^l([x_{k-1}, x_k])$ (intervallo chiuso) tale che $g_k(x) = f(x)$ per $x \in]x_{k-1}, x_k[$ (intervallo aperto). In particolare esistono finiti i $\lim_{x \rightarrow x_{k-1}^+} f^{(j)}(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_k^-} f^{(j)}(x)$.

Chiaramente, se f è C^l a tratti con $l \geq 1$, allora f' è C^{l-1} a tratti, definita ad arbitrio sui salti.

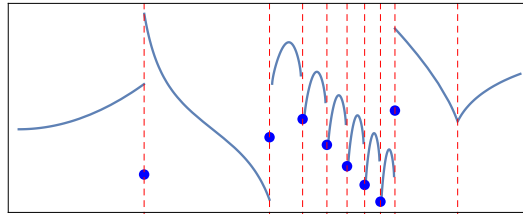


Figura 2.3: Grafico di funzione $C^l(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a tratti. Tratteggiate le ascisse della suddivisione (x_k) .

Proposizione 2.10 Se una funzione è continua, C^1 a tratti e periodica, la sua serie di Fourier converge totalmente alla funzione stessa.

Siccome $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, si ha convergenza della serie di Fourier ad f anche in media quadratica. E poiché le funzioni periodiche continue C^1 a tratti sono dense in L^2_λ , questa proposizione implica la seguente

Proposizione 2.11 Sia f di classe C^1 a tratti e periodica; la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f su ogni compatto che non contenga punti di salto di f .

2.4 Cenni all'integrale di Lebesgue

Tratteremo ora della generalizzazione dell'analisi armonica a funzioni non periodiche, che porta, come vedremo, a sostituire le somme di Fourier con integrali. In questo contesto, l'integrazione

⁵I c_n esistono perché $f \in L^1_\lambda$.

elementare di Riemann è carente, mentre risulta pienamente soddisfacente l'integrazione sviluppata da Lebesgue, della quale riportiamo alcune proprietà importanti che ci serviranno per i nostri sviluppi.

L'integrale che utilizzeremo in questi capitoli è l'integrale di Lebesgue. L'integrale di Riemann permette di calcolare l'integrale di funzioni continue o con un numero non troppo grande di discontinuità.⁶ Ci sono funzioni che non rientrano in questa classe: per esempio la funzione di Dirichlet, ovvero la funzione caratteristica dei razionali nell'intervallo $[0, 1]$ (che vale 1 nei razionali e 0 in ogni punto irrazionale), non è integrabile secondo Riemann. L'integrale di Lebesgue permetterà l'integrazione di una tale funzione ma soprattutto permetterà di passare a limite sotto il segno di integrale sotto ipotesi di natura abbastanza generale e non solo nel caso in cui la funzione da integrare è limite uniforme di una successione di funzioni continue come nel caso dell'integrazione secondo Riemann.

2.4.1 Preliminari

Definizione 2.8 Un n -intervallo è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n formato dal prodotto cartesiano di intervalli 1-dimensionali. Ad esempio $i = \prod_{l=1}^n [a_l, b_l]$, ma in ciascuna dimensione uno o entrambi gli estremi potrebbero essere esclusi. La misura di Lebesgue di tale intervallo coincide con la misura di Peano-Jordan, ed è data dal prodotto delle misure degli intervalli 1-dimensionali: $\mu_n(i) := \prod_{l=1}^n |b_l - a_l|$. Si intende che tale prodotto vale 0 se almeno uno degli 1-intervalli è degenere, e vale $+\infty$ se non ci sono 1-intervalli degeneri ed almeno uno di essi è infinito.

Definizione 2.9 Una funzione a scalino $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di n -intervalli: $s = \sum_{k=1}^K \alpha_k \chi_{i_k}$ ove $(i_k)_{k=1, \dots, K}$ è una famiglia finita di 1-intervalli. L'integrale (di Riemann e anche di Lebesgue) della funzione a scalino è data da $I(s) := \sum_{k=1}^K \alpha_k \mu_n(i_k)$.

Ricordiamo che l'integrale di Riemann di una data funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a supporto compatto e limitata si basa sull'approssimare tale funzione da sotto e da sopra mediante funzioni a scalino a supporto compatto.

Lebesgue invece approssima la funzione da integrare mediante limiti di successioni di funzioni a scalino a supporto compatto. Diamo una serie di definizioni.

- Indichiamo con $P(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[\}$ l'insieme di tutte le funzioni positive e con $\tilde{P}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty] \}$ l'insieme di tutte le funzioni positive a valori reali estesi. Ovviamente $P \subset \tilde{P}$.
- Per ogni famiglia $(f_j)_{j \in J}$ in $\tilde{P}(\mathbb{R}^n)$ definiamo le funzioni sup e inf puntuali:

$$\bigvee_{j \in J} f_j(x) := \sup_{\mathbb{R}} \{f_j(x) : j \in J\} \quad (2.50)$$

$$\bigwedge_{j \in J} f_j(x) := \inf_{\mathbb{R}} \{f_j(x) : j \in J\} \quad (2.51)$$

⁶Il teorema di Vitali-Lebesgue afferma che una funzione limitata e a supporto compatto è Riemann integrabile se e solo se i suoi punti di discontinuità costituiscono un insieme di misura nulla alla Lebesgue, vedi definizione 2.11 e teorema 2.16.

- Indichiamo con $S_c^+(\mathbb{R}^n) \subset P(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni a scalino a supporto compatto e a valori positivi. L'integrale di $s \in S_c^+(\mathbb{R}^n)$, definito come nel caso elementare, sarà indicato con $I(s) \in \mathbb{R}_+$, come sopra.
- Indichiamo con $S^\sigma(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle $v \in \tilde{P}(\mathbb{R}^n)$ che sono limiti puntuali di successioni crescenti di funzioni a scalino, ossia tali che esista una successione di $s_j \in S_c^+(\mathbb{R}^n) : j \in \mathbb{N}$ con $s_j \uparrow v$. Si dimostra che le $v \in S^\sigma$ sono le funzioni della forma $v = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} s_j : s_j \in S_c^+(\mathbb{R}^n)$.
- Indichiamo con $S_\delta(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle $u \in P(\mathbb{R}^n)$ che sono limiti puntuali di successioni decrescenti di funzioni a scalino, ossia tali che esista una successione di $s_j \in S_c^+(\mathbb{R}^n) : j \in \mathbb{N}$ con $s_j \downarrow u$. Si dimostra che le $u \in S_\delta$ sono le funzioni della forma $u = \bigwedge_{j \in \mathbb{N}} s_j : s_j \in S_c^+(\mathbb{R}^n)$.

Osserviamo che, mentre le funzioni di S_δ sono a valori finiti, in S^σ ci sono certamente funzioni a valori $+\infty$, anzi, la funzione ι_n che vale costantemente $+\infty$ sta in S^σ , avendosi $j\chi_{B_\infty} \uparrow \iota_n$ per $j \rightarrow \infty$ (fare il disegno; B_∞ è la palla unitaria per la norma $\|\cdot\|_\infty$ su \mathbb{R}^n).

Estendiamo l'integrale ad S^σ e ad S_δ (e lo denoteremo con \bar{I}) ponendo

$$\text{se } v \in S^\sigma \quad \bar{I}(v) := \lim_{j \rightarrow \infty} I(s_j) \quad \text{ove } s_j \uparrow v, s_j \in S_c^+; \quad (2.52)$$

$$\text{se } u \in S_\delta \quad \bar{I}(u) := \lim_{j \rightarrow \infty} I(s_j) \quad \text{ove } s_j \downarrow u, s_j \in S_c^+ \quad (2.53)$$

o, equivalentemente,

$$\text{se } v \in S^\sigma \quad \bar{I}(v) := \sup_{\mathbb{R}} \{I(s) : s \leq v, s \in S_c^+\}; \quad (2.54)$$

$$\text{se } u \in S_\delta \quad \bar{I}(u) := \inf_{\mathbb{R}} \{I(s) : u \leq s, s \in S_c^+\}. \quad (2.55)$$

Notiamo che $\bar{I}(v)$ può essere finito o infinito, mentre $\bar{I}(u)$ è sempre finito.

Definite le classi di funzioni S^σ e S_δ come limiti di successioni di funzioni a scalino, potremmo pensare di costruire nuove classi di funzioni prendendo limiti di successioni di funzioni in S^σ o S_δ . Invece con tali limiti si rimane sempre in S^σ o S_δ .

2.4.2 Definizione dell'integrale di Lebesgue

Per ogni $f \in \tilde{P}$ poniamo

$$S^\sigma f := \{v \in S^\sigma : f \leq v\} \quad (2.56)$$

$$S_\delta f := \{u \in S_\delta : u \leq f\}. \quad (2.57)$$

Notare che $\iota_n \in S^\sigma f$ e che $0 \in S_\delta f$, tali insiemi sono quindi non vuoti.

Definiamo l'integrale superiore di f secondo Lebesgue $I^*(f)$ e l'integrale inferiore di f secondo Lebesgue $I_*(f)$ mediante

$$I^*(f) := \inf_{\mathbb{R}} \{\bar{I}(v) : v \in S^\sigma(f)\} \quad (2.58)$$

$$I_*(f) := \sup_{\mathbb{R}} \{\bar{I}(u) : u \in S_\delta(f)\}. \quad (2.59)$$

Chiaramente si ha sempre $I_*(f) \leq I^*(f)$. Anzi, si ha che $\int_* f \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \int^* f$, ove \int_* ed \int^* sono rispettivamente l'integrale inferiore e superiore secondo Riemann. Infatti $S_*(f) \subset S_\delta(f)$ e $S^*(f) \subset S^\sigma(f)$.

Definizione 2.10 Diciamo che $f \in \tilde{P}(\mathbb{R}^n)$ è sommabile alla Lebesgue su \mathbb{R}^n se $I_*(f) = I^*(f)$, tale comune valore essendo finito, e sarà indicato con $I(f)$ o con i soliti simboli $\int_{\mathbb{R}^n} f$ o $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$. L'insieme delle $f \in \tilde{P}$ sommabili sarà indicato con \tilde{P}^1 , mentre P^1 indicherà le $f \in P$ sommabili a valori finiti.

Teorema 2.12 Siano $f, g \in \tilde{P}$.

- (i) Se $f \leq g$ allora $I_*(f) \leq I_*(g)$, $I^*(f) \leq I^*(g)$.
- (ii) Se $\lambda > 0$ allora $I_*(\lambda f) = \lambda I_*(f)$ e $I^*(\lambda f) = \lambda I^*(f)$.
- (iii) Se $f, g \in \tilde{P}^1$, allora $f \vee g, f \wedge g \in \tilde{P}^1$.
- (iv) $I_*f + I_*g \leq I_*(f + g) \leq I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g)$

Corollario 2.13 Se $f, g \in \tilde{P}^1$ e $\alpha, \beta > 0$, allora $\alpha f + \beta g \in \tilde{P}^1$ e $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$.

Ma il fatto cruciale e di gran lunga più interessante di tutti è che (iv) vale per una successione:

Teorema 2.14 (sub-additività numerabile dell'integrale superiore di Lebesgue) Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di \tilde{P} . Si ha allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} I_* f_k \leq I_* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) \leq I^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} I^* f_k \quad (2.60)$$

(di queste disuguaglianze l'importante è l'ultima).

Da questo teorema segue un importante

Corollario 2.15 (Teorema di integrazione per serie a termini positivi) Se $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è successione di \tilde{P}^1 (quindi di funzioni sommabili), allora

$$I_* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) = I^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} I(f_k), \quad (2.61)$$

in particolare $\sum_{k=0}^{\infty} f_k \in \tilde{P}^1$ (cioè è sommabile) se e solo se la serie degli integrali converge.

Definizione 2.11 Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice sommabile alla Lebesgue (o anche misurabile di misura finita) se la sua funzione caratteristica χ_E sta in \tilde{P} . In tal caso $I(\chi_E)$ si chiama misura di Lebesgue dell'insieme E . Un insieme si dice trascurabile se è sommabile e di misura nulla.

Un modo per caratterizzare gli insiemi di misura nulla secondo Lebesgue è il seguente:

Teorema 2.16 Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è di misura nulla secondo Lebesgue se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di n -intervalli che copre A e tale che la somma della serie delle misure di tali intervalli non superi ε :

$$\mu(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (I_k)_{k \in \mathbb{N}} : \quad A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad e \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) \leq \varepsilon.$$

NOTA: Come per la misura di Riemann, la misura di Lebesgue dipende dalla dimensione n dello spazio \mathbb{R}^n . Ad esempio, un segmento limitato ha misura finita in \mathbb{R} ma ha misura nulla in \mathbb{R}^2 .

ESERCIZIO: Mostrare che l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} è di misura 1-dimensionale nulla secondo Lebesgue.

Possiamo ora definire l'integrale di Lebesgue per funzioni a valori reali qualsiasi o a valori complessi:

Definizione 2.12 Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; si dice che f è Lebesgue sommabile su \mathbb{R}^n e si scrive $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se $f^+ := f \vee 0$ e $f^- := (-f) \vee 0$ stanno in $\tilde{P}^1(\mathbb{R}^n)$; l'integrale di Lebesgue di f è

$$I(f) := I(f^+) - I(f^-) . \quad (2.62)$$

Poiché $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, si capisce che f è Lebesgue sommabile se e solo se lo è $|f|$. Inoltre

$$|I(f)| \leq I(|f|) . \quad (2.63)$$

Definizione 2.13 Una $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice Lebesgue sommabile su \mathbb{R}^n e si scrive $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ se $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$ stanno in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; l'integrale di Lebesgue di f è

$$I(f) := I(\operatorname{Re} f) + iI(\operatorname{Im} f) . \quad (2.64)$$

Introduciamo il concetto di funzione *misurabile*. Parlando alla buona, “misurabile” significa che può essere trattata con il metodo di Lebesgue per “valutarne” l'integrale, ma che il risultato può anche essere infinito.

Definizione 2.14 Una $f \in \tilde{P}^1(\mathbb{R}^n)$ si dice misurabile se $f \wedge g \in \tilde{P}^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni $g \in \tilde{P}^1(\mathbb{R}^n)$.

Una $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{R}$ si dice misurabile se f^+, f^- sono misurabili.

Una $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ si dice misurabile se $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ sono misurabili.

Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è misurabile.

Ad esempio, le funzioni $x \mapsto x^n : n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \sin(x)/x$, $x \mapsto \pm\infty$, ι_1 sono misurabili in \mathbb{R} , ma non sommabili.

NOTA: In effetti è difficile definire degli insiemi o delle funzioni non misurabili. Per quanto ci riguarda, tutti gli insiemi e tutte le funzioni che incontreremo saranno misurabili (eventualmente di misura infinita).

Teorema 2.17 Se $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque ad f , allora f è misurabile.

2.4.3 Alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue

Teorema 2.18 Gli insiemi $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ sono \mathbb{R} - e \mathbb{C} -spazi vettoriali di funzioni, rispettivamente; I è \mathbb{R} - e \mathbb{C} -lineare su tali spazi. Se f sta in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, allora $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e si ha $|I(f)| \leq I(|f|)$.

NOTA: Come vedremo nel teorema di Tonelli 2.23, $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ se e solo se $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Nel seguito, “integrale” e “misura nulla” saranno intesi nel senso di Lebesgue. Poiché alterare i valori di una funzione su un insieme di misura nulla non ne altera l'integrale, in molti teoremi si potranno considerare equivalenti le funzioni che differiscano su insiemi di misura nulla. A questo scopo è conveniente usare locuzioni come “quasi ovunque” per significare “ovunque tranne in un insieme di misura nulla”.

Ricordiamo alcuni teoremi dell'integrazione di Lebesgue che ci saranno utili: due per il passaggio al limite sotto il segno di integrale, uno per derivazione sotto il segno di integrale, e due per la riduzione di integrali a dimensioni inferiori.

Teorema 2.19 (della convergenza monotona (Beppo Levi)) *Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione monotona di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, convergente quasi ovunque ad una $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Allora $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se e solo se la successione $(I(f_k))_{k \in \mathbb{N}}$ degli integrali delle f_k è convergente, ed in tal caso $I(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(f_k)$.*

Teorema 2.20 (della convergenza dominata di Lebesgue) *Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ che converga puntualmente quasi ovunque ad una funzione $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Se esiste una funzione $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ tale che $|f_k(x)| \leq g(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, gli integrali delle f_k convergono all'integrale di f ed $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge ad f anche in media, cioè*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx \quad e \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I(|f - f_k|) = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_1 = 0. \quad (2.65)$$

Teorema 2.21 (di derivazione sotto il segno di integrale) *Sia A aperto di \mathbb{R} (insieme dei valori del parametro a), e sia $f : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{C}$ funzione tale che $\partial_a f(x, a)$ esista per ogni $a \in A$ e per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Se $x \mapsto f(x, a)$ è una funzione integrabile in \mathbb{R}^n per ogni a ed inoltre $|\partial_a f(x, a)| \leq g(x)$ con $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\partial_a \int_{\mathbb{R}^n} f(x, a) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_a f(x, a) \, dx \quad (2.66)$$

ovvero si può derivare sotto il segno di integrale. Chiaramente si può restringere il dominio della variabile x ad un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, definendo $f(x, a) = 0$ se $x \notin D$.

Teorema 2.22 (di Fubini) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, allora per μ_n -quasi ogni⁷ $x \in \mathbb{R}^n$ la x -sezione $f_x : y \mapsto f(x, y)$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^m)$; inoltre la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x \, dy$ (quasi ovunque definita da tale formula su \mathbb{R}^n) sta in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) \, d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) \, dy \right) \, dx. \quad (2.67)$$

Il teorema di Fubini permette di effettuare un integrale multiplo come integrali successivi di dimensione inferiore. È però richiesta la sommabilità della funzione integranda. Un criterio per stabilire la sommabilità di una funzione f in più variabili è fornito dal teorema di Tonelli.

⁷Cioè rispetto alla misura di Lebesgue μ_n di \mathbb{R}^n .

Teorema 2.23 (di Tonelli) *Se $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ è Lebesgue misurabile, allora $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ se e solo se*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| \, dy \right) \, dx < +\infty. \quad (2.68)$$

Più precisamente, nell'ipotesi che f sia misurabile, allora anche $g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} |f(x, y)| \, dy$ (che vale $+\infty$ per gli x per cui $y \mapsto |f(x, y)|$ non è sommabile) è misurabile su \mathbb{R}^n ; inoltre f è sommabile se e solo se g è sommabile su \mathbb{R}^n .

2.4.4 Gli spazi L^p ed \mathcal{L}^p

Definizione 2.15 *Sia $p \geq 0$. Indichiamo con $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{C} misurabili per i quali esiste l'integrale (di Lebesgue) della potenza p -esima:*

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx < +\infty \right\} \quad (p \geq 1). \quad (2.69)$$

Tutti gli spazi L^p sono vettoriali, e sono chiamati *spazi di Lebesgue*. Se $p \geq 1$ possiamo dotarli di una (semi)norma:

Teorema 2.24 *Sia $p \geq 1$ ed $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad (2.70)$$

definisce una seminorma nello spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Si può infatti dimostrare che la $\|\cdot\|_p$ (leggi: “norma- p ”) soddisfa le proprietà della norma N1 – N3, eccetto il fatto che ci sono funzioni non nulle che hanno norma nulla (per questo si parla di “seminorma” invece che di “norma”). Queste sono tutte e sole le funzioni che sono diverse da 0 in un qualche sottoinsieme di \mathbb{R}^n di misura nulla.

Introduciamo anche lo spazio delle funzioni Lebesgue misurabili *essenzialmente limitate*, cioè le funzioni misurabili per le quali esiste $M > 0 : |f(x)| \leq M$ quasi ovunque. Anche queste funzioni costituiscono uno spazio vettoriale, indicato con $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, che può essere dotato della *norma dell'estremo superiore essenziale*

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \text{ per quasi ogni } x \in \mathbb{R}^n \}. \quad (2.71)$$

(Si dimostra che tale estremo inferiore è in realtà un minimo.) La convergenza in L^∞ può essere pensata come convergenza uniforme quasi ovunque.

ESERCIZIO: Mostrare che le funzioni $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ sono localmente sommabili. (Suggerimento: presa $f \in L^\infty$ considerare la funzione $f \wedge \chi_{[a,b]}$ con $[a, b] \subset \mathbb{R}$ compatto...)

Pertanto la norma- p ($1 \leq p \leq \infty$) non distingue funzioni che differiscono tra loro su un insieme di misura nulla. Per ottenere uno spazio normato di funzioni, si introduce in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ una relazione di equivalenza tra funzioni: $f \sim g \iff \|f - g\|_p = 0 \iff f = g$ quasi ovunque, e si considera l'insieme $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ formato dalle classi di equivalenza di tali funzioni. È facile

verificare che \mathcal{L}^p eredita la struttura di spazio vettoriale da L^p e la relativa norma: Se $\{f\} \in \mathcal{L}^p$, $\{f\} \subset L^p$ denota la classe di equivalenza delle funzioni equivalenti ad $f \in L^p$, allora

$$\alpha\{f\} + \beta\{g\} := \{\alpha\bar{f} + \beta\bar{g}\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \bar{f} \in \{f\}, \bar{g} \in \{g\} \quad (2.72)$$

$$\|\{f\}\|_p := \|\bar{f}\|_p \quad (2.73)$$

e le definizioni non dipendono dalla scelta di $\bar{f} \in \{f\}$ e di $\bar{g} \in \{g\}$.

Possiamo dire che la proprietà fondamentale dell'integrale di Lebesgue è quella di rendere gli spazi L^p ed \mathcal{L}^p completi nella norma- p :

Teorema 2.25 *Gli spazi \mathcal{L}^p con $1 \leq p \leq \infty$ sono completi nella norma $\|\cdot\|_p$. Sono quindi tutti spazi di Banach.*

NOTA: Commettendo un abuso di linguaggio, tutti identificano gli elementi di \mathcal{L}^p come “funzioni appartenenti ad \mathcal{L}^p ”. Tale abuso di linguaggio è quasi sempre innocuo, ma è bene esserne coscienti. Ad esempio, non ha senso considerare in \mathcal{L}^p il funzionale “valutazione su un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ”, nonostante esso abbia senso in L^p (anche se tale funzionale non è continuo). Tuttavia ha ancora senso parlare in \mathcal{L}^p di funzioni continue in un punto, e anche dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Infatti, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $g \in \{f\}$, non è detto che esista $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, ma se tale limite esiste, allora esso è uguale ad l . In altre parole possiamo dire che $\{g\}$ ammette limite l per $x \rightarrow x_0$ se esiste $f \in \{g\}$ tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, ossia se si può alterare g in un insieme di misura nulla tale che la funzione alterata ammetta limite. Questo limite, se esiste, è unico all'interno di una classe di equivalenza. La dimostrazione si basa sul fatto che in \mathbb{R}^n gli aperti non vuoti hanno misura non nulla. Lo stesso ragionamento si può applicare per i concetti di continuità e derivabilità.

Teorema 2.26 (di densità) *Le funzioni a scalino a supporto compatto in \mathbb{R}^n sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ se $1 \leq p < \infty$; cioè, data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $s \in S_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|f - s\|_p \leq \varepsilon$.*

Notare che in questo enunciato è escluso il caso $p = \infty$.

2.5 La trasformata di Fourier in L^1

Nella sezione precedente abbiamo imparato a scomporre funzioni periodiche come serie trigonometriche (reali o complesse). Questo ci mette in grado di risolvere l'eq. (2.7) nel caso in cui il termine noto sia periodico.

Ma come possiamo risolvere la stessa equazione quando il termine noto non è periodico? Come fare a scriverlo come somma di termini della forma e^{inkx} che sono invece periodici? Una possibilità è quella di considerare una funzione non periodica come caso limite di una periodica con periodo λ che tende ad infinito. In questo limite, i numeri d'onda $k_n = \frac{2\pi}{\lambda}n$ si addensano sempre più fittamente lungo la retta reale, mentre il prefattore $\sim 1/\lambda$ nei coefficienti di Fourier diventa infinitesimo. L'idea è dunque quella di trasformare la serie di Fourier in un'integrale.

A questo scopo riscriviamo i coefficienti di Fourier c_n mettendo in evidenza il fattore $\Delta k := k_n - k_{n-1} = \frac{2\pi}{\lambda}$ che rappresenta la distanza tra due numeri d'onda consecutivi:

$$c_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-ik_n x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k_n) \Delta k, \quad \tilde{f}(k_n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{-ik_n x} dx. \quad (2.74)$$

Allora la serie di Fourier (2.35) si può riscrivere come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ik_n x} \tilde{f}(k_n) \Delta k. \quad (2.75)$$

Se ora effettuiamo il limite $\lambda \rightarrow \infty$, nel quale $\Delta k \rightarrow 0$, la serie nella (2.75) può essere interpretata come una somma integrale alla Riemann per la funzione $k \mapsto e^{ikx} \tilde{f}(k)$ su tutto l'asse reale della variabile k , suddiviso in infiniti intervalli di ampiezza infinitesima Δk . Pertanto la (2.75) diventa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk, \quad (2.76)$$

dove, per la (2.74),

$$\tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (2.77)$$

Questi passaggi formali ci suggeriscono che, per poter decomporre funzioni non periodiche in termini di funzioni trigonometriche (complesse), è necessario passare da serie ad integrali di funzioni trigonometriche.

NOTA: Riscrivere il prefattore $1/\lambda$ in termini di Δk fa comparire un prefattore $(2\pi)^{-1}$. Solitamente si sceglie di ripartirlo equamente tra la definizione di \tilde{f} nell'eq. (2.77) e la formula inversa (2.76), che così vengono ad assumere una inaspettata ed elegante simmetria: si scambiano f con \tilde{f} ed il segno dell'esponente.

Nel seguito intenderemo gli integrali nel senso di Lebesgue. Vediamo così che l'integrale nell'eq. (2.77) esiste se e solo se esiste $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$, ossia per f sommabile in \mathbb{R} .

Definizione 2.16 (Trasformata di Fourier) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzione in $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La trasformata di Fourier $[Tdf]$ della funzione f è la funzione $\mathcal{F}f \equiv \tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$[\mathcal{F}f](k) := \tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.78)$$

La sommabilità di f garantisce l'esistenza della trasformata per ogni $k \in \mathbb{R}$, infatti $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$. È naturale chiedersi se l'integrale della TdF nell'eq. (2.76), chiamato *antitrasformata di Fourier* $[ATdF]$, riconduca alla funzione f . Questo non è vero in generale, anzi, non è neanche garantito in generale che tale integrale esista. Analizzeremo questo aspetto fondamentale più avanti. Adesso facciamo subito un esempio di TdF e poi stabiliamo alcune importanti proprietà della trasformazione di Fourier \mathcal{F} intesa come *operatore* tra spazi di funzioni (e che continueremo a chiamare TdF).

ESEMPIO: Calcolare la TdF di $\chi_{[-r,r]}$, funzione caratteristica dell'intervallo $[-r, r]$, che vale 1 se $x \in [-r, r]$ e vale 0 altrimenti.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}\chi_{[-r,r]}](k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \chi_{[-r,r]}(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-r}^{+r} e^{-ikx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \begin{cases} \frac{2r}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-r}^r = \frac{e^{-ikr} - e^{ikr}}{-i\sqrt{2\pi}k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(kr)}{k} & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

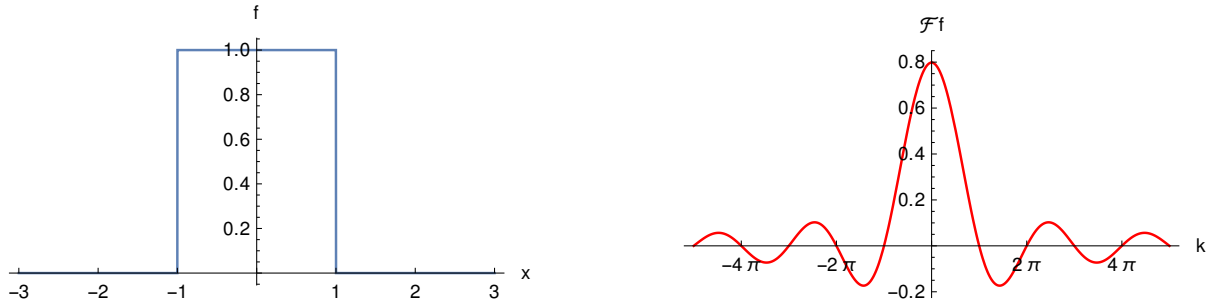


Figura 2.4: Funzione caratteristica di $[-1, 1]$ e sua trasformata di Fourier.

Abbiamo ottenuto una funzione continua (anzi, C^∞ , malgrado la discontinuità della funzione caratteristica χ), limitata e tendente a 0 per $k \rightarrow \infty$. Queste caratteristiche sono in realtà generali e riconducibili al solo fatto che la funzione caratteristica è una funzione sommabile.

Teorema 2.27 *La trasformazione di Fourier è un operatore lineare e continuo da $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in $C_{b,0}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, spazio delle funzioni continue e limitate che tendono a zero all'infinito:*

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad (2.79)$$

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1. \quad (2.80)$$

Dimostrazione: i) La linearità della TdF è diretta conseguenza della linearità dell'integrale.

ii) Vale poi, per ogni k , $\sqrt{2\pi}|\tilde{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ikx}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1 < +\infty$ e questo dimostra che \tilde{f} è limitata. Prendendo il sup della precedente disuguaglianza si ottiene la (2.80).

iii) Siccome f è sommabile, il lemma di Riemann-Lebesgue 2.3 ci assicura che, per $k \rightarrow \infty$, l'integrale (2.78) tende a zero.

iv) Per dimostrare la continuità mostriamo che $|\tilde{f}(k+\delta) - \tilde{f}(k)|$ tende a zero per $\delta \rightarrow 0$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} |\tilde{f}(k+\delta) - \tilde{f}(k)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} [e^{-i(k+\delta)x} - e^{-ikx}] f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-ikx} [e^{-i\delta x} - 1] f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\delta x} - 1| |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Possiamo a questo punto applicare il teorema della convergenza dominata: infatti $e^{-i\delta x} \rightarrow 1$ per $\delta \rightarrow 0$ e quindi l'integrando ad ultimo membro tende puntualmente a zero per ogni x . Inoltre, poiché $|e^{-i\delta x} - 1| \leq |e^{-i\delta x}| + 1 = 2$, per ogni δ l'integrando è dominato in modulo dalla funzione

$g(x) = 2|f(x)|$, sommabile. Quindi si può portare il $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ dentro il segno di integrale, e si trova 0 come risultato. C.V.D.

Dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$ ed una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definiamo la *traslata* di f mediante a come la funzione $[\tau_a f](x) := f(x - a)$. Se $a > 0$ il grafico di $\tau_a f$ risulta traslato a destra di a unità, viceversa se $a < 0$ il grafico risulta traslato a sinistra di $|a|$ unità. L'*operatore di traslazione* τ_a è lineare:

$$\tau_a(bf + cg) = b\tau_a f + c\tau_a g \quad \forall b, c \in \mathbb{C}, \quad \forall f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (2.81)$$

Osserviamo che f è sommabile se e solo se $\tau_a f$ lo è. Questo perché l'integrale è invariante per traslazioni.

Definiamo anche l'operatore ι di riflessione rispetto all'origine: $[\iota f](x) := f(-x)$.

Nell'enunciare alcune proprietà della TdF è comodo usare una notazione sintetica, non completamente consistente con quanto fatto finora, ma meno pesante e comunque di pronta comprensione sul tipo di operazioni in atto. Ad esempio, scriveremo “la funzione $f(x)$ ” invece di “la funzione $x \mapsto f(x)$ ” per evidenziare la variabile indipendente. Così scriveremo anche $[\mathcal{F}f(x)](k)$ per indicare che x è la variabile indipendente di f , mentre k è la variabile indipendente della trasformata $\mathcal{F}f$. Con queste notazioni, enunciamo la

Teorema 2.28 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ed $a \in \mathbb{R}$. Allora*

$$[\mathcal{F}f(-x)](k) = [\mathcal{F}f(x)](-k) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}\iota = \iota\mathcal{F} \quad (2.82)$$

cioè una riflessione per f diventa una riflessione per $\mathcal{F}f$;

$$[\mathcal{F}\tau_a f](k) = [\mathcal{F}f(x - a)](k) = e^{-ika} [\mathcal{F}f(x)](k) \quad (2.83)$$

cioè una traslazione per f diventa una moltiplicazione per un'esponenziale immaginario per $\mathcal{F}f$;

$$[\mathcal{F}\{e^{iax} f(x)\}](k) = [\mathcal{F}f(x)](k - a) = [\tau_a \mathcal{F}f](k) \quad (2.84)$$

cioè una moltiplicazione per un'esponenziale immaginario per f diventa una traslazione per $\mathcal{F}f$;

$$[\mathcal{F}f(ax)](k) = \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}f(x)]\left(\frac{k}{a}\right) \quad \text{per ogni } a \neq 0 \quad (2.85)$$

cioè una “dilatazione orizzontale” ($|a| < 1$) per f diventa una dilatazione verticale con dilatazione orizzontale inversa per $\mathcal{F}f$;

Dimostrazione: Basta applicare semplici cambi di variabile: per la (2.82) abbiamo

$$[\mathcal{F}f(-x)](k) = \int e^{-ikx} f(-x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{(x' \equiv -x)}{=} \int e^{ikx'} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} = \int e^{-i(-k)x'} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} = [\mathcal{F}f(x)](-k);$$

per la (2.83) abbiamo

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}f(x - a)](k) &= \int e^{-ikx} f(x - a) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{(x-a \equiv x')}{=} \int e^{-ik(x'+a)} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-ika} \int e^{-ikx'} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} = e^{-ika} [\mathcal{F}f(x)](k); \end{aligned}$$

procedendo a ritroso si dimostra la (2.84), ed infine per la (2.85) si ha

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}f(ax)](k) &= \int e^{-ikx} f(ax) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{(ax \equiv x')}{=} \int e^{-ikx'/a} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi} |a|} \\ &= \frac{1}{|a|} \int e^{-i\frac{k}{a}x'} f(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}f(x)]\left(\frac{k}{a}\right). \end{aligned}$$

Come per le serie di Fourier, l'utilità principale di rappresentare una funzione come somma (serie lì, integrale qui) di esponenziali sta nella poter trasformare equazioni differenziali in equazioni algebriche. Vediamo dunque il comportamento della TdF sotto queste operazioni.

Teorema 2.29 *Se $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $f^{(m)} \equiv D^m f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ per ogni $m \leq n \in \mathbb{N}$, allora*

$$[\mathcal{F}D^n f](k) = (ik)^n [\mathcal{F}f](k) \quad (2.86)$$

cioè ogni derivata nella funzione f corrisponde ad un fattore ik che moltiplica la trasformata.

Se $(1 + |x|^n)f(x) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ per $n \in \mathbb{N}$, allora $\mathcal{F}f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e vale

$$[\mathcal{F}\{(-ix)^n f(x)\}](k) = [D^n(\mathcal{F}f)](k) \quad (2.87)$$

cioè ogni derivata nella trasformata $\mathcal{F}f$ corrisponde ad un fattore $-ix$ che moltiplica la funzione f .

Dimostrazione: Consideriamo innanzitutto l'eq. (2.86) per $n = 1$. Integrando per parti la trasformata della derivata si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{d}{dx} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = [e^{-ikx} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik) e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si può dimostrare che, se una funzione f e la sua derivata f' stanno in $L^1(\mathbb{R})$, allora la funzione tende a 0 all'infinito. Quindi il termine di bordo nell'equazione precedente si annulla, mentre l'ultimo integrale dà la TdF di f moltiplicata per ik . Procedendo per induzione si dimostra la (2.86) per ogni n .

Anche per dimostrare la (2.87) iniziamo con il caso $n = 1$. Nella derivata della TdF possiamo derivare sotto il segno di integrale:

$$\partial_k \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} \partial_k [e^{-ikx}] f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} (-ix) f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

poiché la derivata del primo integrando (che è l'integrando del secondo integrale) è maggiorato per ogni k da $|xf(x)|$ che è sommabile per ipotesi. Per induzione si dimostra la (2.87) per ogni n . C.V.D.

Dalla (2.86) segue quindi che la TdF di una funzione n volte derivabile è $\mathcal{O}(|k|^{-n})$ per $k \rightarrow \infty$; in altri termini: **quanto più una funzione è liscia, tanto più velocemente la sua TdF va a zero all'infinito**, ed abbiamo la corrispondenza

$$\frac{d}{dx} \longleftrightarrow ik. \quad (2.88)$$

L'eq. (2.87) stabilisce la corrispondenza “duale”

$$-ix \longleftrightarrow \frac{d}{dk} \quad (2.89)$$

e mostra che **quanto più rapidamente una funzione decresce all'infinito, tanto più la sua TdF è liscia.**

ESERCIZIO: Calcolare la TdF della funzione $f_a : x \mapsto e^{-a|x|}$ con $a > 0$.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_a(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-a|x|} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{(-ik+a)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(ik+a)x} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-ik+a} + \frac{1}{ik+a} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tilde{f}_1\left(\frac{k}{a}\right). \end{aligned}$$

Notare che $|e^{(-ik+a)x}| = e^{ax} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ e che $|e^{-(ik+a)x}| = e^{-ax} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

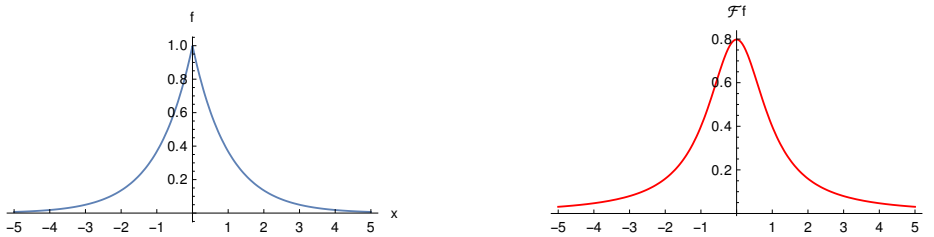


Figura 2.5: La funzione $x \mapsto e^{-|x|}$ e la sua trasformata di Fourier.

È facile verificare nei due esempi precedenti la proprietà (2.85) della “dilatazione” della TdF: a funzioni più “larghe” corrispondono TdF più “strette” e viceversa. Questo risultato è alla base del principio di indeterminazione di Heisenberg in meccanica quantistica. Osserviamo anche che in entrambi gli esempi precedenti, la funzione da trasformare tende a zero più velocemente di qualsiasi potenza, quindi è garantita la derivabilità ad ogni ordine delle rispettive TdF, che in effetti appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre vediamo che, mentre la TdF della funzione discontinua $\chi_{[-r,r]}$ decresce all'infinito come $\mathcal{O}(k^{-1})$, la TdF della funzione continua (ma con derivata discontinua) $e^{-a|x|}$ decresce più velocemente, come $\mathcal{O}(k^{-2})$. Vediamo cosa succede per una funzione infinitamente derivabile.

ESERCIZIO: Calcolare la TdF della gaussiana $\mathcal{G} : x \mapsto \exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$.

Svolgimento: Dalla definizione di TdF si deve calcolare l'integrale

$$\tilde{\mathcal{G}}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ikx)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si può completare il quadrato all'esponente aggiungendo e sottraendo $(ik)^2 = -k^2$, così da ottenere

$$\tilde{\mathcal{G}}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}[(x+ik)^2-k^2]} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{1}{2}k^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Dimostreremo nel capitolo sulle funzioni olomorfe che l'integrale complesso ad ultimo membro, il quale si estende sulla retta $z = x + ik : x \in \mathbb{R}$ parallela all'asse reale, è uguale all'integrale

della stessa funzione (gaussiana) sull'asse reale $z = x$, che sappiamo valere 1. Quindi $\tilde{\mathcal{G}}(k) = \exp\{-\frac{1}{2}k^2\}$, ossia $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.

Senza usare le tecniche di integrazione in campo complesso, possiamo calcolare la TdF della gaussiana con il seguente metodo, che è anche istruttivo di per sé : partiamo con l'osservare che \mathcal{G} soddisfa l'equazione differenziale

$$\mathcal{G}' + x\mathcal{G} = 0 .$$

Dai teoremi (2.86) e (2.87) abbiamo che

$$[\mathcal{F}\mathcal{G}'](k) = ik[\mathcal{F}\mathcal{G}](k) = ik\tilde{\mathcal{G}}(k) , \quad [\mathcal{F}x\mathcal{G}(x)](k) = iD[\mathcal{F}\mathcal{G}](k) = i\tilde{\mathcal{G}}'(k)$$

e quindi troviamo che $\tilde{\mathcal{G}}$ soddisfa

$$k\tilde{\mathcal{G}}(k) + \tilde{\mathcal{G}}'(k) = 0 ,$$

cioè la stessa equazione differenziale omogenea di \mathcal{G} , che è del primo ordine. Pertanto \mathcal{G} e $\tilde{\mathcal{G}}$ devono essere proporzionali: $\tilde{\mathcal{G}} = a\mathcal{G}$ con $a \in \mathbb{R}$. Per calcolare a , valutiamo le funzioni in 0:

$$\mathcal{G}(0) = 1 , \quad \tilde{\mathcal{G}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i0x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1 ,$$

perciò $a = 1$ e $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.

Verifichiamo così con l'esempio concreto della gaussiana che (i) la TdF di una funzione infinitamente derivabile è una funzione che all'infinito decresce più velocemente di qualsiasi potenza (assieme alle sue derivate), e che (ii) la TdF di una funzione che all'infinito decresce più velocemente di qualsiasi potenza (assieme alle sue derivate) è infinitamente derivabile.

Usando le tecniche di integrazione delle funzioni olomorfe (che vedremo più avanti) sarà possibile calcolare le TdF di svariate funzioni elementari e non.

2.5.1 L'antitrasformata di Fourier

Veniamo ora al punto cruciale dell'analisi armonica, cioè se sia possibile (e come) determinare una funzione f data la sua TdF $\mathcal{F}f$. Ci aspettiamo che la formula giusta sia data dall'eq. (2.76), quando tale integrale esiste. In effetti, vale un risultato analogo a quello delle serie di Fourier:

Teorema 2.30 (di convergenza puntuale) *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tale che nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$ esistano i limiti destro $f(x_0^+)$ e sinistro $f(x_0^-)$, e che inoltre i rapporti incrementali destro e sinistro*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} , \quad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0^-)}{-h}$$

si mantengano limitati per h abbastanza piccolo, $h \in]0, \delta]$. Allora si ha

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} . \quad (2.90)$$

In particolare, se $f'(x_0)$ esiste, allora tale limite converge ad $f(x_0)$.

Dimostrazione: Si ha

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \tilde{f}(k) e^{ikx_0} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{-R}^R \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right\} e^{ikx_0} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-R}^R f(x) e^{ik(x_0-x)} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \right\} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

in cui nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il teorema di Fubini per scambiare l'ordine di integrazione. Notiamo che $f(x)$ si può portare fuori dall'integrazione in k . Vale poi

$$\int_{-R}^R e^{ik(x_0-x)} dk = \frac{e^{iR(x_0-x)} - e^{-iR(x_0-x)}}{i(x_0-x)} = \frac{2 \sin(R(x-x_0))}{x-x_0}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned}\int_{-R}^R \tilde{f}(k) e^{ikx_0} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{2 \sin(R(x-x_0))}{x-x_0} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+h) \frac{\sin(Rh)}{h} dh\end{aligned}$$

avendo fatto il cambio di variabile $h := x - x_0$. A questo punto scomponiamo l'ultimo integrale in 4 contributi: $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. L'integrale in $] -\infty, 1]$ si annulla per $R \rightarrow \infty$ grazie al lemma di Riemann-Lebesgue 2.3, che si può applicare in quanto per ipotesi f è sommabile in qualsiasi intervallo di \mathbb{R} , quindi $h \mapsto f(x_0+h)$ è sommabile in $] -\infty, 1]$ e a maggior ragione lo è $h \mapsto f(x_0+h)/h$. Lo stesso dicasi per l'altro intervallo infinito.

Restano da valutare gli integrali sugli intervalli compatti. Qui la dimostrazione procede come quella del teorema 2.1 sulle serie di Fourier: si osserva che la funzione $h \mapsto \sin(Rh)/h$ ha un picco attorno ad $h = 0$ sempre più pronunciato e sempre più stretto per $R \rightarrow \infty$, mantenendo inalterata l'area, data dall'integrale di Dirichlet e che vale π . Più precisamente, consideriamo l'integrale in $]0, 1]$. Da

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\sin(Rh)}{h} dh = \frac{\pi}{2} \quad (2.91)$$

scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(x_0+h) \frac{\sin(Rh)}{h} dh &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(x_0+h) - f(x_0^+)}{h} \sin(Rh) dh \\ &\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(x_0^+) \frac{\sin(Rh)}{h} dh.\end{aligned}$$

Il primo integrale tende a 0 grazie al lemma di Riemann-Lebesgue, perché per ipotesi il rapporto incrementale è limitato (e localmente integrabile). Il secondo integrale vale $f(x_0^+)/2$. Analogamente l'integrale sull'intervallo $[-1, 0[$ dà $f(x_0^-)/2$ e si conclude. C.V.D.

NOTA: L'*anti-trasformata di Fourier* definita dall'eq. (2.90) comporta una particolare procedura di limite per estendere l'intervallo di integrazione in k a tutto \mathbb{R} . Quindi non è necessario che \tilde{f} sia sommabile per ricostruire f (almeno nei punti di continuità). Se \tilde{f} non è sommabile, una diversa procedura di limite potrebbe portare ad un diverso risultato, oppure non convergere.

Se $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = [\mathcal{FF}f](-x). \quad (2.92)$$

Nell'ipotesi ulteriore che f sia continua e derivabile in x , si ha quindi che $f(x) = [\mathcal{FF}f](-x)$, ossia $\mathcal{F}^{-1} = \imath \mathcal{F}$.

ESEMPIO: La ATdF di $x \mapsto 1/(a^2 + x^2)$ è $k \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|ak|}}{|a|}$.

ESEMPIO: La ATdF della gaussiana è la gaussiana stessa.

2.5.2 Il prodotto di convoluzione

Introduciamo un'importante operazione matematica tra funzioni: la *convoluzione*. Partiamo da un problema che si presenta frequentemente, specialmente nell'analisi dei segnali. Supponiamo di avere un segnale rappresentato da una funzione, che idealmente è regolare ma che in realtà, per cause indesiderate, presenta dei “disturbi” dovuti per esempio alla presenza di rumore (fig. 2.6a). Siccome generalmente questi disturbi si presentano con alterazioni tanto positive che negative, un'idea per ricostruire o “lisciare” il segnale originale nel punto x può essere quella di fare una media del segnale stesso in un intorno di x di ampiezza $2a$:

$$\bar{f}(x) := \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{2a} \chi_{[x-a, x+a]}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{\chi_{[-a, a]}(x-y)}{2a} dy \quad (2.93)$$

Un'idea probabilmente migliore è quella di non usare una finestra netta, una funzione discontinua come la funzione caratteristica, ma piuttosto una funzione liscia, come una gaussiana, che faccia una media pesata, dando più importanza ai dati vicini al punto x e via via meno importanza a quelli lontani da x :

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g_{\sigma}(x-y) dy, \quad g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \quad (2.94)$$

Vediamo che queste trasformazioni hanno una struttura comune, la quale ci porta alla seguente definizione-teorema:

Teorema 2.31 (Prodotto di convoluzione) *Date due funzioni $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, la formula*

$$[f * g](x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x-y) dy \quad (2.95)$$

*definisce per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$ una funzione $f * g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ chiamata prodotto di convoluzione o, più semplicemente, convoluzione di f e g .*

Dimostrazione: Accettiamo il fatto che la funzione $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} : F(x, y) = f(y)g(x-y)$ sia misurabile. Mostriamo innanzitutto che $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con il teorema di Tonelli 2.23. Infatti, per ogni $y \in \mathbb{R}$, $|F|$ è integrabile in x , in quanto $|g|$ è sommabile:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx = |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| dx = |f(y)| \cdot \|g\|_1$$

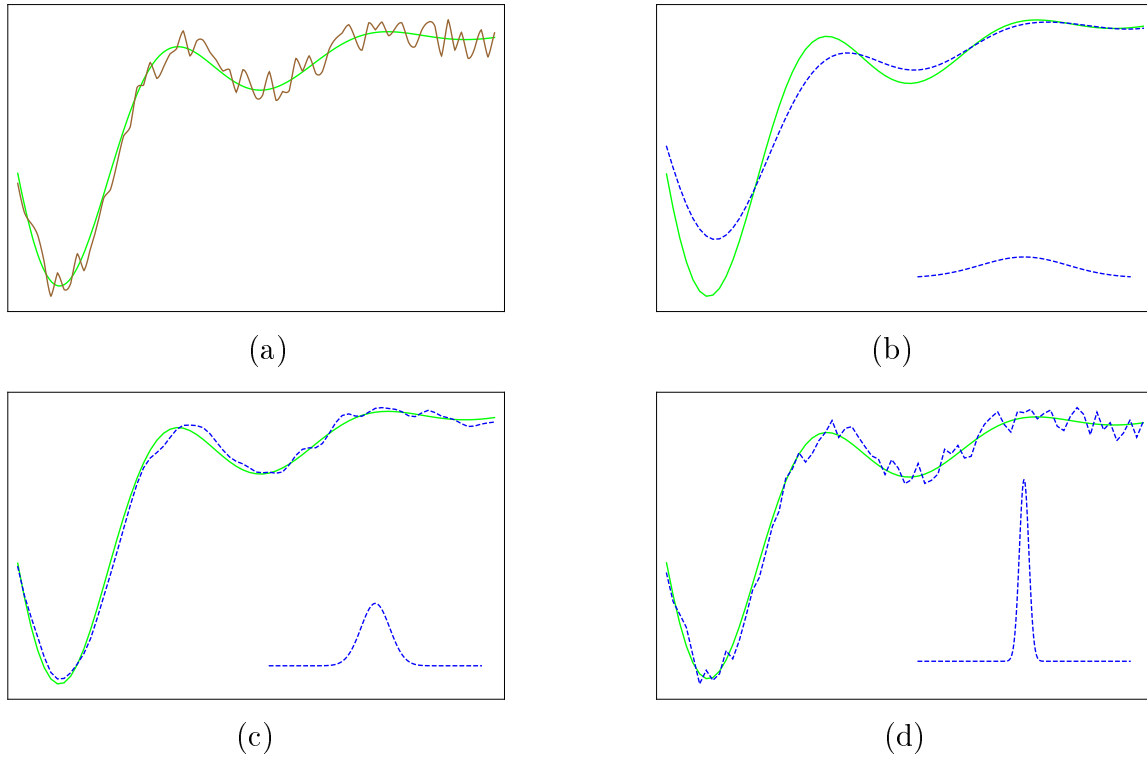


Figura 2.6: Il segnale “pulito” è rappresentato dalla linea verde; (a) segnale disturbato da rumore (marrone); (b-c-d) segnale disturbato convoluto (blu tratteggiato) con funzione gaussiana visualizzata in basso a destra per tre valori della larghezza.

e questa funzione è integrabile in y poiché $|f|$ è sommabile. A questo punto possiamo applicare il teorema di Fubini ad F , il quale garantisce che l'integrale rispetto ad y di F — che è esattamente $[f*g](x)$ — definisce per quasi ogni x una funzione sommabile. In altre parole, $f*g$ è quasi ovunque definita e sta in $L^1(\mathbb{R})$.

Possiamo anche valutare la norma-1 del prodotto di convoluzione. Integrando F prima in y e poi in x ricaviamo $\int_{\mathbb{R}} f*g$. Se invece integriamo F prima rispetto ad x e poi rispetto ad y , otteniamo il prodotto di $\int_{\mathbb{R}} f$ e di $\int_{\mathbb{R}} g$, pertanto

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} g\right) = \int_{\mathbb{R}} f*g \quad \implies \quad \|f*g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (2.96)$$

C.V.D.

ESERCIZIO: Dimostrare che il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e bilineare:

$$\begin{aligned} f*g &= g*f \\ (f*g)*h &= f*(g*h) \\ (\alpha f + \beta g)*h &= \alpha(f*h) + \beta(g*h) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Teorema 2.32 Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, la TdF della convoluzione di f e g è uguale al prodotto della TdF di f per la TdF di g , moltiplicato per $\sqrt{2\pi}$:

$$\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi} (\mathcal{F}f) (\mathcal{F}g). \quad (2.98)$$

Dimostrazione: Poiché $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, esiste la sua TdF e si ha

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f * g)](k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-iky} f(y) e^{-ik(x-y)} g(x-y) dy \right] dx \end{aligned}$$

L'integrando è chiaramente sommabile per il teorema di Tonelli, quindi per il teorema di Fubini possiamo scambiare l'ordine di integrazione, e con il cambio di variabile $t := x - y$ otteniamo

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f * g)](k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ik(x-y)} g(x-y) dx \right] dy = \quad (t := x - y) \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} f(y) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikt} g(t) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) . \end{aligned}$$

C.V.D.

2.6 Alcune applicazioni

2.6.1 I filtri lineari

Un filtro lineare è un sistema fisico che riceve in ingresso una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e risponde (\rightsquigarrow) con una funzione di uscita $r_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ in modo lineare ed invariante per traslazioni (temporali se pensiamo alla variabile indipendente $t \in \mathbb{R}$ come al tempo):

- $f_1 \rightsquigarrow r_1$, $f_2 \rightsquigarrow r_2$ \implies $a_1 f_1 + a_2 f_2 \rightsquigarrow a_1 r_1 + a_2 r_2$ $\quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$
- $\tau_a f \rightsquigarrow \tau_a r$ cioè $[t \mapsto f(t-a)] \rightsquigarrow [t \mapsto r(t-a)]$

Un amplificatore audio è un esempio di filtro lineare, così come i filtri passivi (cross-over) realizzati con componenti lineari.

Anche in questo contesto, la funzione esponenziale complessa assume un ruolo particolare: verifichiamo che, se il segnale di ingresso $f(t) = e^{i\omega t}$ con $\omega \in \mathbb{R}$, allora il segnale di uscita è $r_f(t) = \sqrt{2\pi} G(\omega) e^{i\omega t}$, in cui $G(\omega) \in \mathbb{C}$ dipende solo da ω ma non dal tempo t .

Dimostrazione: Infatti in generale possiamo scrivere $r_f(t) = \sqrt{2\pi} G(\omega, t) e^{i\omega t}$. Allora la risposta al segnale traslato $e^{i\omega(t-a)} = e^{-i\omega a} e^{i\omega t}$ è $e^{-i\omega a} \sqrt{2\pi} G(\omega, t) e^{i\omega t}$ per la linearità, mentre è $\sqrt{2\pi} G(\omega, t-a) e^{i\omega(t-a)}$ per l'invarianza temporale. Quindi deve essere

$$e^{-i\omega a} G(\omega, t) e^{i\omega t} = G(\omega, t-a) e^{i\omega(t-a)}$$

per cui

$$G(\omega, t) = G(\omega, t-a) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

e quindi G non dipende dal tempo.

C.V.D.

La quantità $G(\omega)$ è detta *guadagno* o *fattore di trasferimento* del filtro.

Proposizione 2.33 *Dato un filtro lineare, la risposta r_f ad f è*

$$r_f = f * g \quad (2.99)$$

in cui $g = \mathcal{F}^{-1}G$ è l'antitrasformata di Fourier del guadagno del filtro, cioè $G(\omega) = [\mathcal{F}g(t)](\omega) = \tilde{g}(\omega)$. Viceversa, se per un sistema fisico la risposta r_f ad un segnale di ingresso f è data dall'eq. (2.99) (ossia è del tipo di convoluzione), allora il sistema fisico è un filtro lineare con guadagno $G = \tilde{g}$.

NOTA: Ovviamente bisognerà imporre opportune ipotesi su f e su G affinché esista g e la sua convoluzione con f . Ad esempio, buone ipotesi sono che $f \in L^1$ e che G sia antitrasformabile con antitrasformata $g \in L^1$. Ma queste non sono ipotesi necessarie. Vedi ad esempio il teorema 2.35.

Dimostrazione: Supponiamo dunque che esista la “decomposizione spettrale” di f in termini della sua trasformata di Fourier \tilde{f} :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}$$

Per la linearità del filtro vale

$$r_f(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} d\omega ,$$

quindi

$$\mathcal{F}r_f = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \cdot G = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \cdot \tilde{g} = \mathcal{F}(f * g)$$

da cui si ottiene (2.99).

Viceversa, se vale la (2.99), la risposta è lineare. Inoltre, la risposta ad un segnale traslato $\tau_a f$ è

$$\begin{aligned} r_{\tau_a f}(t) &= [\tau_a f * g](t) = \int_{\mathbb{R}} [\tau_a f](u) g(t-u) du = \int_{\mathbb{R}} f(u-a) g(t-u) \\ &\stackrel{u-a \equiv v}{=} \int_{\mathbb{R}} f(v) g((t-a)-v) dv = r_f(t-a) = [\tau_a r_f](t) \end{aligned}$$

per cui il sistema è invariante per traslazioni temporali.

C.V.D.

OSSERVAZIONE: $g(t)$ è la risposta ad un segnale a “delta di Dirac” $f(t) = \delta(t)$ (vedi capitolo sulle distribuzioni).

2.6.2 Il teorema della campionatura

Teorema 2.34 (della campionatura) *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funzione continua con TdF a supporto compatto, con $\tilde{f}(k) = 0$ per $|k| > K \in \mathbb{R}_+^*$. Allora f è determinata dai valori che assume nell'insieme discreto $\{x = n\frac{\pi}{K} : n \in \mathbb{Z}\}$ e si ha*

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(m\frac{\pi}{K}\right) \frac{\sin(m\pi - Kx)}{m\pi - Kx} . \quad (2.100)$$

Dimostrazione: Dato che f è continua, la possiamo rappresentare come antitrasformata di Fourier:

$$f(x) = \int_{-K}^{+K} \tilde{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.101)$$

in cui abbiamo ristretto il dominio di integrazione in k all'intervallo $[-K, K]$, visto che al di fuori di esso \tilde{f} è nulla per ipotesi. Siccome $\tilde{f}(-K) = 0 = \tilde{f}(K)$, possiamo estendere per periodicità \tilde{f} ad una funzione F continua e periodica di periodo $2K$, tale che $\tilde{f}(k) = F(k)$ per $k \in [-K, K]$. Grazie a queste proprietà, la serie di Fourier di F è uniformemente convergente ad F :

$$F(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in \frac{\pi}{K} k}, \quad c_n = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K F(k) e^{-in \frac{\pi}{K} k} dk = \frac{\sqrt{2\pi}}{2K} f\left(-n \frac{\pi}{K}\right).$$

Quindi

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2K} f\left(-n \frac{\pi}{K}\right) e^{in \frac{\pi}{K} k}$$

che, sostituita nell'eq. (2.101) dà

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-K}^{+K} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2K} f\left(-n \frac{\pi}{K}\right) e^{in \frac{\pi}{K} k} e^{ikx} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2K} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(-n \frac{\pi}{K}\right) \int_{-K}^{+K} e^{i(n \frac{\pi}{K} + x)k} dk \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(-n \frac{\pi}{K}\right) \frac{\sin(n\pi + Kx)}{n\pi + Kx}, \end{aligned}$$

in cui nella seconda uguaglianza abbiamo usato la convergenza uniforme per scambiare l'integrale con la sommatoria. C.V.D.

Osserviamo che il “passo” di campionatura è $\Delta x = \pi/K$. Il teorema è vero anche per $K' > K$ al posto di K , cioè con passo $\Delta x' = \pi/K'$ più piccolo di Δx . Quindi il passo deve essere minore o uguale a $\Delta x_{\max} = 2\pi/\Delta k$, ove Δk è il diametro del supporto di \tilde{f} . Si vede quindi che più grande è il supporto di \tilde{f} , più piccolo è il passo di campionatura da operare su f per ricostruirla in ogni suo punto. Nel limite $\Delta k \rightarrow \infty$ — cioè \tilde{f} non è più a supporto compatto — la campionatura non è più possibile perché $\Delta x \rightarrow 0$.

2.6.3 L'equazione del calore

Un'altra importantissima classe di problemi fisici che si risolve con la trasformata di Fourier è quella governata dall'equazione di diffusione, in particolare la diffusione del calore. Consideriamo un sistema omogeneo unidimensionale parametrizzato dalla variabile x ed indichiamo con $u(x, t)$ la temperatura al tempo t nel punto x . L'evoluzione della temperatura nello spazio e nel tempo è determinata dalla seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.102)$$

in cui D rappresenta il *coefficiente di diffusione* (in questo caso la conducibilità termica). Siccome l'equazione è del primo ordine nel tempo, è sufficiente sapere la distribuzione della temperatura

ad un certo istante di tempo, per esempio a $t = 0$, per poterla determinare ad ogni t (almeno in linea di principio). Supponiamo quindi nota la condizione iniziale

$$u(x, 0) = U(x) , \quad (2.103)$$

ove $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione data. Se ora prendiamo la TdF di u rispetto ad x , pensando a t come ad un parametro fissato durante la trasformazione, otteniamo

$$\frac{\partial \tilde{u}(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 \tilde{u}(k, t) \quad (2.104)$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che $\partial_x^2 \rightsquigarrow -k^2$ in TdF. La (2.104) è un'equazione differenziale del primo ordine in t che ha per soluzione

$$\tilde{u}(k, t) = \tilde{u}(k, 0)e^{-Dk^2 t} = \tilde{U}(k)e^{-Dk^2 t} , \quad (2.105)$$

ove $\tilde{U}(k) = \tilde{u}(k, 0)$ è la TdF della condizione iniziale (2.103).

Per ricavare $u(x, t)$ antitrasformiamo secondo Fourier:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \tilde{u}(k, t) \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \tilde{U}(k) e^{-Dk^2 t} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-Dk^2 t} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx'} U(x') \frac{dx'}{\sqrt{2\pi}} \right] \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} . \quad (2.106)$$

Grazie al teorema di Fubini-Tonelli possiamo scambiare l'ordine di integrazione. L'integrale in k non è altro che la TdF della gaussiana, già incontrata in precedenza:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-Dk^2 t} e^{-ikx'} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-x')} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2Dt}k)^2} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2Dt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} . \quad (2.107)$$

e troviamo così la soluzione al problema:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} U(x') e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} dx' . \quad (2.108)$$

NOTA: Si può arrivare allo stesso risultato osservando che $e^{-Dk^2 t}$ è la TdF di $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$; quindi \tilde{u} è il prodotto di due TdF e la sua antitrasformata u è la convoluzione di U e g , che è proprio l'eq. (2.108).

Possiamo interpretare l'eq. (2.108) nel seguente modo: la temperatura nel punto x al tempo t dipende dalla temperatura iniziale ($t = 0$) in tutti i punti x' del sistema, e precisamente è una somma (integrale) di tutte le temperature $U(x')$ pesate mediante la funzione

$$G(x, x'; t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dt}} . \quad (t > 0) \quad (2.109)$$

Questa funzione, detta *nucleo del calore*, è la *funzione di Green* o *propagatore* dell'equazione del calore (2.102), e rappresenta appunto l'efficienza di propagazione del calore dal punto x al punto x' nel tempo $t > 0$. In altri termini, $G(x, x'; t)$ rappresenta la temperatura al tempo $t > 0$ in un punto x' di una sorgente di calore localizzata completamente nel punto x a $t = 0$. Se la sorgente di calore è estesa con distribuzione $U(x')$, i vari contributi si sovrappongono indipendentemente — questo perché l'equazione è lineare. Vediamo che il calore che parte dal punto x si propaga

simmetricamente tra destra e sinistra, che si trasmette preferenzialmente agli x' vicini ad x mentre si trasmette con maggiore difficoltà agli x' lontani, soprattutto per piccoli t (gaussiana stretta), mentre al crescere di t la propagazione si spande in regioni sempre più vaste (la gaussiana si allarga). In ogni caso, il calore si conserva, cioè l'integrale in x' di G vale sempre 1 ad ogni t .

Concludiamo questa sezione sulla convoluzione con alcune considerazioni di carattere generale. La convoluzione è un'operazione di "lisciamento". La proprietà caratterizzante la convoluzione è che il "grado di lisciazza" del prodotto è la "somma dei gradi di lisciazza" dei suoi fattori. In particolare, valgono i seguenti teoremi (la cui dimostrazione lasciamo per esercizio):

- Se una funzione è continua e l'altra discontinua, la loro convoluzione è continua;
- Se una funzione è derivabile n volte e l'altra m volte, la loro convoluzione è derivabile $n+m$ volte.

2.7 La trasformata di Fourier in \mathbb{R}^n

La trasformata di Fourier può essere facilmente generalizzata a funzioni f definite in \mathbb{R}^n , associando ad ogni variabile x_j la variabile coniugata k_j , ed integrando f su ogni x_j con un fattore esponenziale $e^{-ik_j x_j}$. Siccome

$$\prod_{j=1}^n e^{-ik_j x_j} = e^{-i \sum_{j=1}^n k_j x_j} = e^{-ik \cdot x}, \quad k \cdot x := \sum_{j=1}^n k_j x_j \quad (2.110)$$

(con $k \cdot x$ prodotto scalare canonico in \mathbb{R}^n), arriviamo alla

Definizione 2.17 La trasformata di Fourier della funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ è la funzione $\mathcal{F}f \equiv \tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$[\mathcal{F}f](k) := \tilde{f}(k) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx. \quad (2.111)$$

Anche nel caso multidimensionale valgono molte delle proprietà già viste per le funzioni $L^1(\mathbb{R})$. Innanzitutto la linearità, la continuità e la limitatezza come operatore tra gli spazi di funzioni $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ e $C_{b,0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, come nelle eqq. (2.79) e (2.80). Abbiamo analoghe relazioni per riflessione, traslazione e riscalamento:

$$[\mathcal{F}f(-x)](k) = [\mathcal{F}f(x)](-k) \quad (2.112)$$

$$[\mathcal{F}f(x-a)](k) = e^{-ik \cdot a} [\mathcal{F}f(x)](k) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}^n \quad (2.113)$$

$$[\mathcal{F}\{e^{ia \cdot x} f(x)\}](k) = [\mathcal{F}f(x)](k-a) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}^n \quad (2.114)$$

$$[\mathcal{F}f(\lambda x)](k) = \frac{1}{|\lambda|^n} [\mathcal{F}f(x)]\left(\frac{k}{\lambda}\right) \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}^*. \quad (2.115)$$

È immediato estendere l'operazione di convoluzione tra due funzioni $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$: se la funzione $y \mapsto f(y)g(x-y)$ è integrabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si definisce *prodotto di convoluzione* di f e g la funzione $f * g$ tale che

$$[f * g](x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy. \quad (2.116)$$

Anche in \mathbb{R}^n il prodotto di convoluzione è commutativo, associativo e bilineare.

L'esistenza del prodotto di convoluzione è garantita se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se g è limitata (e misurabile). Indicando con $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni limitate e misurabili, si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.35 *Siano $p, q, r \in [1, +\infty]$ numeri reali (o anche $+\infty$) tali che*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1. \quad (2.117)$$

*Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ allora $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$.*

Vale poi la generalizzazione dell'eq. (2.98):

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2} (\mathcal{F}f) (\mathcal{F}g). \quad (2.118)$$

2.7.1 Il paradiso degli integrali di Fourier: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Anche le formule che collegano le derivate e le moltiplicazioni per monomi nella TdF si possono facilmente estendere a funzioni definite in \mathbb{R}^n , con opportune ipotesi di derivabilità o integrabilità. Però sarebbe comodo lavorare in uno spazio di funzioni in cui fosse garantita la derivabilità delle funzioni in esame, e la loro integrabilità nelle TdF. Lo scopo di questa sezione è quello di definire questo spazio e studiare l'azione della TdF in esso.

Cominciamo introducendo una notazione che sarà molto comoda per designare derivate parziali e monomi in \mathbb{R}^n .

Definizione 2.18 *Un multiindice in \mathbb{R}^n è una n -upla $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ di numeri interi positivi (anche nulli). Si chiama ordine del multiindice il numero intero positivo*

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \in \mathbb{N}. \quad (2.119)$$

Per ciascun multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ indichiamo con ∂^α l'operatore differenziale

$$\partial^\alpha := \partial_x^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (2.120)$$

Se $|\alpha| = 0$ allora $\partial^\alpha f = f$, cioè ∂^α è l'identità. Indichiamo invece con x^α il monomio

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (2.121)$$

Definizione 2.19 *Definiamo lo spazio di Schwartz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ o spazio delle funzioni a rapida decrescita come l'insieme delle funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{K} infinitamente derivabili e per le quali sia limitata*

$$(1 + |x^\alpha|) \partial^\beta f \quad \text{per ogni coppia di multiindici } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n. \quad (2.122)$$

Sono quindi funzioni estremamente regolari che vanno a zero all'infinito, insieme alle loro derivate di ogni ordine, più rapidamente di ogni potenza. Queste funzioni formano uno spazio vettoriale. Di più, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è chiuso anche rispetto al prodotto di funzioni, alla convoluzione di funzioni, alla

derivazione ∂^α ed alla moltiplicazione per monomi x^α per ogni multiindice α . Questo spazio è un sottospazio di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e contiene come sottospazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, lo spazio delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto.⁸

Un esempio tipico di funzione a rapida decrescita è la gaussiana $x \mapsto e^{-|x|^2}$, mentre invece la lorentziana $x \mapsto 1/(1+|x|^2)$, pur essendo infinitamente derivabile e decrescente a zero all'infinito, non vi tende abbastanza rapidamente.

Lo spazio di Schwartz è contenuto in $L^1(\mathbb{R}^n)$ — anzi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è *denso*⁹ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, \infty[$ —, infatti la continuità garantisce la misurabilità e la sommabilità locale (in particolare non ci possono essere singolarità), mentre la forte decrescenza all'infinito garantisce la sommabilità su tutto \mathbb{R}^n . Pertanto la definizione (2.111) ha senso per tutte le funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Più in generale abbiamo

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n). \quad (2.123)$$

Mostreremo che la trasformata di Fourier fornisce una corrispondenza uno a uno di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. In seguito utilizzeremo una procedura limite con funzioni $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per definire la trasformata di Fourier per funzioni in $L^2(\mathbb{R}^n)$ perché in generale una funzione in $L^2(\mathbb{R}^n)$ può non essere $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.36 *Per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ si ha*

$$[\mathcal{F}\partial^\alpha f](k) = i^{|\alpha|} k^\alpha [\mathcal{F}f](k) \quad (2.124a)$$

$$[\mathcal{F}\{x^\alpha f(x)\}](k) = i^{|\alpha|} [\partial^\alpha (\mathcal{F}f)](k) \quad (2.124b)$$

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{è una trasformazione lineare.} \quad (2.124c)$$

Dimostrazione: (a) Si ha, integrando per parti α_k volte rispetto ad x_k per ogni $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}\partial^\alpha f](k) &= (2\pi)^{-n/2} \int [\partial_x^\alpha f(x)] e^{-ik \cdot x} dx = (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|\alpha|} \int f(x) [\partial_x^\alpha e^{-ik \cdot x}] dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|\alpha|} \int f(x) (-i)^{|\alpha|} k^\alpha e^{-ik \cdot x} dx = i^{|\alpha|} k^\alpha [\mathcal{F}f](k), \end{aligned}$$

in cui tutti i termini di bordo sono nulli poichè $f \in \mathcal{S}$.

(b) Osserviamo che se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ anche $x^\alpha f$ sarà in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e quindi trasformabile secondo Fourier. Appliciamo ora l'operatore differenziale ∂_k^α all'eq. (2.111) e portiamolo sotto il segno di integrale. Questo è possibile perché

$$|\partial_k^\alpha f(x) e^{-ik \cdot x}| = |(-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)| = |x^\alpha f(x)|$$

che è senz'altro in L^1 poichè $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}$. Derivando sotto il segno di integrale si ottiene il risultato cercato.

(c) La linearità della TdF discende da quella dell'integrale. Dobbiamo solo dimostrare che se $f \in \mathcal{S}$ anche $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$. Innanzitutto, $\mathcal{F}f$ è infinitamente derivabile, perchè f tende a zero

⁸Si definisce *supporto* di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ la chiusura dell'insieme degli elementi x del dominio per i quali $f(x)$ è diversa da zero: $\text{supp}(f) = \text{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

⁹Ricordiamo che un sottoinsieme A di uno spazio topologico B è denso in B se la chiusura di A contiene B , ossia se per ogni elemento $b \in B$ esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di A che converge a b .

più velocemente di ogni potenza. In altri termini, l'esistenza del primo membro dell'eq. (2.124b) garantisce l'esistenza e la continuità del secondo membro per ogni multiindice, e quindi la differenziabilità ad ogni ordine. Infine $\mathcal{F}f$ è a rapida decrescita perché f è infinitamente derivabile, infatti dall'eq. (2.124a) si vede che $k^\alpha \mathcal{F}f$ è limitata per ogni α . C.V.D.

Teorema 2.37 *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora vale la relazione*

$$\int [\mathcal{F}f](x)g(x) \, dx = \int f(x)[\mathcal{F}g](x) \, dx . \quad (2.125)$$

Dimostrazione: La funzione $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto e^{-ix \cdot y} f(x)g(y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Infatti $|h(x, y)| = |f(x)||g(y)|$, quindi possiamo applicare il teorema di Tonelli per dimostrare la sommabilità di h . Applicando ora il teorema di Fubini, possiamo integrare prima in x e poi in y oppure nell'ordine inverso, ottenendo rispettivamente i due membri dell'eq. (2.125):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left[\int e^{-ix \cdot y} f(x) \, dx \right] g(y) \, dy &= \int [\mathcal{F}f](y)g(y) \, dy \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left[\int e^{-ix \cdot y} g(y) \, dy \right] f(x) \, dx &= \int f(x)[\mathcal{F}g](x) \, dx . \end{aligned}$$

C.V.D.

Teorema 2.38 (di inversione della TdF) *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik \cdot x} [\mathcal{F}f](k) \, dk . \quad (2.126)$$

Dimostrazione: L'idea è quella di sfruttare l'eq. (2.125) scegliendo una opportuna funzione g tale che la sua trasformata $\mathcal{F}g$ sia concentrata in un intorno di $x \simeq x_0$, in modo tale che $\int f(x)[\mathcal{F}g](x) \, dx \simeq f(x_0)$, in modo analogo a quanto visto per la serie di Fourier e la TdF in una dimensione. Più precisamente, prendiamo una gaussiana centrata in $x = x_0$, di larghezza $\varepsilon > 0$ e di n -volume unitario:

$$[\mathcal{F}g](x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\varepsilon)^n} \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) , \quad \tilde{\mathcal{G}}(y) = \mathcal{G}(y) = e^{-\frac{1}{2}|y|^2} , \quad \int [\mathcal{F}g](x) \, dx = 1 ,$$

e consideriamo

$$\int f(x)[\mathcal{F}g](x) \, dx = \int f(x) \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\varepsilon)^n} \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(w + x_0) \frac{1}{\varepsilon^n} \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) \, dw , \quad (2.127)$$

in cui abbiamo effettuato il cambio di variabile $x - x_0 = w$. Per prima cosa, facciamo vedere che il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ dei precedenti integrali dà $f(x_0)$. Ponendo $w/\varepsilon = y$ nell'ultimo integrale dell'eq. (2.127) otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(w + x_0) \frac{1}{\varepsilon^n} \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) \, dw &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int f(\varepsilon y + x_0) \tilde{\mathcal{G}}(y) \, dy \\ &\stackrel{(2.65)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon y + x_0) \tilde{\mathcal{G}}(y) \, dy = f(x_0) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{\mathcal{G}}(y) \, dy = f(x_0) \end{aligned}$$

in cui abbiamo potuto portare il limite sotto il segno di integrale grazie al teorema della convergenza dominata, in quanto f è limitata e perciò $|f(\varepsilon y + x_0)\tilde{\mathcal{G}}(y)| < \|f\|_\infty \tilde{\mathcal{G}}(y)$, funzione di L^1 .

Mostriamo ora che il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ dell'eq. (2.127) dà il secondo membro dell'eq. (2.126). Sfruttando la proprietà (2.115) delle dilatazioni, abbiamo che $\frac{1}{\varepsilon^n} \tilde{\mathcal{G}}(\frac{w}{\varepsilon}) = \mathcal{F}[\mathcal{G}(\varepsilon k)](w)$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(w + x_0) \frac{1}{\varepsilon^n} \tilde{\mathcal{G}}\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) dw &\stackrel{(2.115)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(w + x_0) \mathcal{F}[\mathcal{G}(\varepsilon k)](w) dw \\ &\stackrel{(2.125)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int [\mathcal{F}f(w + x_0)](k) \mathcal{G}(\varepsilon k) dk \stackrel{(2.113)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik \cdot x_0} [\mathcal{F}f](k) \mathcal{G}(\varepsilon k) dk, \end{aligned}$$

in cui abbiamo sfruttato la relazione (2.125) e la proprietà (2.113) per la trasformata della traslata. Prendendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ dell'ultima espressione, siamo giustificati a portare il limite sotto il segno di integrale, in quanto $|e^{ik \cdot x_0} [\mathcal{F}f](k) \mathcal{G}(\varepsilon k)| \leq |[\mathcal{F}f](k)|$ che sta in L^1 . Siccome $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(\varepsilon k) = \mathcal{G}(0) = 1$, otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik \cdot x_0} [\mathcal{F}f](k) \mathcal{G}(\varepsilon k) dk = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ik \cdot x_0} [\mathcal{F}f](k) dk$$

ed il teorema è dimostrato. C.V.D.

Il teorema di inversione 2.38 ci mostra che \mathcal{F} è invertibile, anzi, che la sua inversa \mathcal{F}^{-1} , l'antitrasformata di Fourier, è a sua volta una TdF con argomento opposto: $\mathcal{F}^{-1} = \iota \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \iota$, ove ι è l'operatore di riflessione.

Teorema 2.39 *La trasformazione di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un operatore biiettivo, quindi un automorfismo.*

Dimostrazione: Come detto, \mathcal{F} è ben definita in tutto \mathcal{S} poiché ogni funzione in \mathcal{S} è trasformabile secondo Fourier. Inoltre la TdF di una funzione in \mathcal{S} sta in \mathcal{S} , quindi l'immagine di \mathcal{F} è contenuta in \mathcal{S} . \mathcal{F} è anche iniettiva, poichè abbiamo stabilito che è invertibile. Oppure ragioniamo così: \mathcal{F} è lineare, quindi iniettiva se e solo se $\mathcal{F}f = 0$ implica $f = 0$, ma se $\mathcal{F}f = 0$, dal teorema di inversione si ha che $f = \iota \mathcal{F}(\mathcal{F}f) = \iota \mathcal{F}0 = 0$. Infine \mathcal{F} è suriettiva, infatti per ogni $g \in \mathcal{S}$ (nel codominio), la funzione $f = \iota \mathcal{F}g \in \mathcal{S}$ (nel dominio) e $\mathcal{F}f = g$. C.V.D.

OSSERVAZIONE: Quanto appena stabilito per la \mathcal{F} in \mathcal{S} non vale per la \mathcal{F} come operatore in L^1 . A parte il fatto che la TdF di una funzione L^1 non è necessariamente L^1 , non è neanche vero che la TdF sia iniettiva. Infatti tutte le funzioni uguali quasi ovunque alla funzione nulla hanno TdF nulla.

Il fatto che in \mathcal{S} l'antitrasformata di Fourier sia sostanzialmente una trasformata di Fourier, ci permette di formulare il teorema (2.118) sulla TdF delle convoluzioni in quattro forme diverse:

Proposizione 2.40 *Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \quad (2.128a)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g) \quad (2.128b)$$

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g) \quad (2.128c)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(fg) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}(\mathcal{F}^{-1}f) * (\mathcal{F}^{-1}g) \quad (2.128d)$$

Dimostrazione: Semplice, osservando che $\mathcal{F}^{-1} = \iota \circ \mathcal{F}$ e che $(\iota f) * (\iota g) = \iota(f * g)$. C.V.D.

Siccome il prodotto di due funzioni $f, g \in \mathcal{S}$ è sicuramente sommabile, è ben definito in \mathcal{S} il prodotto scalare (hermitiano)

$$(f|g) := \int f^*(x)g(x) \, dx. \quad (2.129)$$

Cerchiamo ora di capire se e come si possa esprimere tale prodotto scalare in termini delle loro TdF. Per la biiettività della TdF, esiste un'unica $\psi \in \mathcal{S}$ tale che $\mathcal{F}\psi = f^*$, ed è

$$\psi(y) = [\mathcal{F}^{-1}f^*](y) = \int e^{ixy} f^*(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \left[\int e^{-ixy} f(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right]^* = [\mathcal{F}f]^*(y);. \quad (2.130)$$

Abbiamo quindi, sfruttando l'eq. (2.125),

$$(f|g) = \int f^*g = \int [\mathcal{F}\psi]g \stackrel{(2.125)}{=} \int \psi[\mathcal{F}g] \stackrel{(2.130)}{=} \int [\mathcal{F}f]^*[\mathcal{F}g] = (\mathcal{F}f|\mathcal{F}g). \quad (2.131)$$

In definitiva, la TdF in \mathcal{S} conserva il prodotto scalare. L'eq. (2.131) è nota come *formula di Plancherel*.

Come tutti i prodotti scalari, anche il prodotto scalare (2.129) induce una norma:

$$\|f\| := (f|f)^{1/2} = \left(\int f^*f \right)^{1/2} = \|f\|_2 \quad (2.132)$$

che riconosciamo essere la norma-2 dello spazio L^2 . Infatti, è immediato verificare che $\mathcal{S} \subset L^2$. Ebbene, l'eq. (2.131) implica che la TdF in \mathcal{S} conserva la norma-2:

$$\|f\|_2 = (f|f)^{1/2} = (\mathcal{F}f|\mathcal{F}f)^{1/2} = \|\mathcal{F}f\|_2. \quad (2.133)$$

Questa equazione è nota come *identità di Parseval*. Possiamo concludere enunciando il seguente

Teorema 2.41 *La TdF $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un operatore lineare biiettivo che conserva il prodotto scalare e la norma indotta:*

$$(f|g) = (\mathcal{F}f|\mathcal{F}g) \quad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (2.134)$$

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2 \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.135)$$

Pertanto, come operatore dallo spazio normato $(\mathcal{S}, \|\cdot\|_2)$ in sé, \mathcal{F} è un'isometria e quindi è continua.

Dimostrazione: Ricordiamo che in uno spazio metrico M , un'isometria $h : M \rightarrow M$ è una funzione che conserva le distanze: $d(x, y) = d(h(x), h(y))$ per ogni $x, y \in M$. Siccome nel caso in esame $M = \mathcal{S}$, $d(x, y) = \|x - y\|_2$ ed $h = \mathcal{F}$, la conservazione della norma corrisponde alla conservazione delle distanze sotto \mathcal{F} .

Rimane da dimostrare la continuità di $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ una successione di funzioni che tende ad una $f \in \mathcal{S}$ in norma-2, cioè $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Allora

$$\|\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f)\|_2 \stackrel{(2.133)}{=} \|f_n - f\|_2$$

e quindi $\mathcal{F}f_n \rightarrow \mathcal{F}f$ per $n \rightarrow \infty$.

C.V.D.

Riferimenti ed approfondimenti

Gli argomenti di questo capitolo sono generalmente esposti in testi di analisi matematica o analisi funzionale. Questo capitolo segue da vicino [DM2], sia per quanto riguarda le serie e trasformate di Fourier, sia per quanto riguarda l'integrale secondo Lebesgue. Sulle serie e trasformata di Fourier vedi anche [BPS2, Cic, Pra, Cha], oltre alle dispense online [Ort, BFS, Mar] reperibili in rete o sul sito moodle del corso.

Come approfondimento sull'integrazione secondo Lebesgue consiglio la lettura di [Giu2, KoFo].

