Cancellazione divergenze e sezione d'urto totale $O(\alpha_s)$ per $e^+e^- \to q\bar{q}(g)$

Mettiamo insieme i contributi reali e virtuali per ottenere la sezione d'urto totale ad $O(\alpha_s)$. (9)

Poiché i diagrammi virtuali di QCD rinormalizzano solamente i quark uscenti, l'ampiezza rinormalizzata ad $O(\alpha_s)$ per $e^+e^- \to q\bar{q}$ è

$$M_R = (\sqrt{R_\psi})^2 (M^{(0)} + M^{(1)}) = R_\psi M^{(0)} [1 + \delta F_1(s)]$$

$$\Rightarrow |M_R|^2 = R_\psi^2 |M^{(0)}|^2 |1 + \delta F_1|^2$$

$O(\alpha_s)$

$$\Rightarrow \sigma_{e^+e^- \to q\bar{q}} = \sigma_B (1 + \delta R_\psi)^2 |1 + \delta F_1|^2$$

$$= \sigma_B [1 + 2\delta R_\psi + 2 \mathrm{Re}\, \delta F_1 + O(\alpha_s^2)]$$

$$\delta R_\psi^{\overline{MS}} = -\delta_2^{\overline{MS}} \quad (\text{interpretando } \varepsilon = \varepsilon_{IR}) = \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \gamma + \ln 4\pi \right)$$

$$\delta F_1 = \delta F_1^{\wedge} + \delta_1^{\overline{MS}}$$

($\delta_1^{\overline{MS}} = \delta_2^{\overline{MS}}$ per identità di Ward che a questo livello vale come in QED)

Non distinguendo ε_{UV} da ε_{IR} si ha

$$\delta R_\psi + \mathrm{Re}\, \delta F_1 = -\delta_2^{\overline{MS}} + \mathrm{Re}\, \delta F_1^{\wedge} + \delta_1^{\overline{MS}} = \mathrm{Re}\, \delta F_1^{\wedge}$$

Ma per questa volta distinguiamo ε_{UV} da $\varepsilon_{IR} \equiv \varepsilon$:

$$\sigma_{e^+e^- \to q\bar{q}} = \sigma_B + \sigma_V \qquad (\text{Born + correzioni virtuali})$$

e $\sigma_V = \sigma_B \cdot 2 \left(\delta_1^{\overline{MS}} + \delta R^{\overline{MS}} + \mathrm{Re}\, \delta F_1^{\wedge} \right)$

Per quanto riguarda le correzioni reali $\mathcal{O}(\alpha_s)$, abbiamo considerato il processo $\sigma_{e^+e^- \to q\bar{q}g} =: \sigma_R$, il quale, essendo già di $\mathcal{O}(\alpha_s)$, non necessita a questo ordine di rinormalizzazione.

È conveniente scrivere questo contributo alla sezione d'urto come la σ_B per un fattore aggiuntivo:

$$\sigma_R = \sigma_B \cdot \frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \left(\frac{4\pi\mu^2}{s}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} K_R$$

ove $K_R = \left[\prod_{i=1}^{3} \int_0^1 dx_i \, (1-x_i)^{-\varepsilon}\right] \delta(x_1+x_2+x_3-2) \, \dfrac{x_1^2+x_2^2-\varepsilon x_3^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$

$$= B(2-2\varepsilon, 1-\varepsilon)\, B(1-\varepsilon, 1-\varepsilon) \left(\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{12}{\varepsilon} + 10 - 4\varepsilon\right)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + \frac{19}{2} - \pi^2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad \text{(i poli sono IR)}$$

Conviene scrivere ora il contributo di δF_1^{Λ} ricalcando la struttura della correzione reale:

$$2\,\mathrm{Re}\,\delta F_1^{\Lambda} = \mathrm{Re}\,\frac{\alpha_s C_F}{2\pi}\left(\frac{4\pi\mu^2}{-s-i0}\right)^{\varepsilon} \Gamma(1+\varepsilon)\, B(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\left[-\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon_{UV}} + 2\right]$$

$$= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi}\left(\frac{4\pi\mu^2}{s}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} K_{\Lambda}$$

ove $K_{\Lambda} = \cos(\pi\varepsilon)\,\Gamma(1-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)\, B(1-\varepsilon,1-\varepsilon)\left[-\dfrac{2}{\varepsilon^2} + \dfrac{1}{\varepsilon_{UV}} + 2\right]$

$$= -\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{4}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_{UV}} - 8 + \pi^2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Il fattore $\cos(\pi\varepsilon)$ deriva dal taglio in piano complesso $s \in \mathbb{C}$ del fattore di forma F_1 nel canale s, ossia per $s > 0$. Si ha infatti

$$\left(\frac{1}{-s-i0}\right)^{\varepsilon} = \left(\frac{1}{s e^{-i\pi}}\right)^{\varepsilon} = \left(\frac{1}{s}\right)^{\varepsilon} e^{i\pi\varepsilon}$$

la cui parte reale è $\left(\frac{1}{s}\right)^{\varepsilon} \cdot \cos(\pi\varepsilon)$.

È evidente a questo punto la cancellazione di tutte le divergenze:

$$\frac{\sigma_V + \sigma_R}{\sigma_B} = \frac{\alpha_s C_F}{2\pi}\left\{ -\overbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \gamma + \ln 4\pi\right)}^{\delta_1} + \overbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right)}^{\delta R} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4\pi\mu^2}{s}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(K_1 + K_R\right) + O(\varepsilon) \right\}$$

$$= \frac{\alpha_s C_F}{2\pi}\left\{ -\frac{1}{\varepsilon_{UV}} + \frac{1}{\varepsilon} + \left(1 + O(\varepsilon)\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_{UV}} - \frac{1}{\varepsilon_{IR}} + \frac{3}{2}\right] + O(\varepsilon) \right\}$$

$$= \frac{\alpha_s C_F}{\pi} \cdot \frac{3}{4} + O(\varepsilon)$$

Otteniamo così un risultato finito per

$$\sigma_{tot} = \sigma_B \left(1 + \frac{\alpha_s C_F}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\right)$$

e quindi, per il rapporto adronico,

$$R = N_c \sum Q_s^2 \left(1 + \frac{\alpha_s C_F}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\right)$$