Capitolo 9

Date: 2021-03-31 13:05 +0200 Revision: 325 : e4130306dc3b

La trasformata di Laplace

9.1 Introduzione

Mediante le serie e le trasformate di Fourier, siamo in grado di esprimere funzioni di varie classi come sovrapposizione (combinazioni lineari infinite) di funzioni esponenziali. Questo permette, tra le altre cose, di ridurre alcune equazioni differenziali ad equazioni algebriche. Tuttavia, le condizioni cui devono sottostare le funzioni per ammettere trasformata di Fourier sono piuttosto stringenti, soprattutto per quanto riguarda il loro andamento all'infinito: devono decrescere ed anche abbastanza rapidamente per essere sommabili sull'intera retta reale.

Se vogliamo rappresentare una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ non sommabile come sovrapposizione di esponenziali, una possibile soluzione potrebbe essere quella di moltiplicare f per un fattore di convergenza, cioè per una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sufficientemente decrescente all'infinito in modo tale che fh sia trasformabile secondo Fourier. In questo modo però la TdF di fh non è più direttamente collegata alle proprietà di f, per esempio alla derivata di f non corrisponde più la moltiplicazione per monomi della nuova trasformata. Se però scegliamo opportunamente il fattore di convergenza h, allora possiamo salvare le belle proprietà della TdF.

Questo succede se h stessa è una funzione esponenziale, del tipo $h(x) = \mathrm{e}^{-px}$ con $p \in \mathbb{R}$. Consideriamo una funzione f continua tale che sia sommabile la funzione $g_p(x) = f(x)\mathrm{e}^{-px}$. Allora g_p è trasformabile secondo Fourier e si ha

$$\widetilde{g}_p(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \mathrm{e}^{-px} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(p+\mathrm{i}k)x} f(x) \, \mathrm{d}x \tag{9.1a}$$

$$f(x) = \frac{g_p(x)}{\mathrm{e}^{-px}} = \mathrm{e}^{px} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \widetilde{g}_p(k) \, \mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(p+\mathrm{i}k)x} \, \widetilde{g}_p(k) \, \mathrm{d}k \tag{9.1b}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(p+\mathrm{i}k)x} \, (p + \mathrm{i}k) \widetilde{g}_p(k) \, \mathrm{d}k \, . \tag{9.1c}$$

Dalla (9.1b) constatiamo che f è esprimibile mediante l'antitrasformata di Fourier di $\widetilde{g}_p(x)$ e dalla (9.1c) che le derivate di f corrispondono a moltiplicare $\widetilde{g}_p(k)$ per potenze del binomio $(\mathrm{i}k + p)$. Osserviamo che l'ipotesi di sommabilità di g_p richiede che f si annulli per $x \to -\infty$ più velocemente della funzione esponenziale $\mathrm{e}^{-p|x|}$, e questa è una richiesta molto stringente. Tuttavia, se noi siamo interessati ad un problema di Cauchy per f in cui sappiamo le condizioni iniziali di f in un certo punto iniziale $x_0 = 0$ e ci interessa conoscere $f(x)$ solamente per $x \geq x_0$, allora possiamo ignorare i valori di f per $x < x_0$ e considerarla lì identicamente nulla, e procedere come sopra.

Osservando attentamente le espressioni (9.1), ci rendiamo conto che gli esponenziali di x coinvolgono il parametro complesso $s \equiv p + \mathrm{i}k$, per cui la funzione $\widetilde{g}_p(k)$ dipende solo da tale parametro s, anzi, $\widetilde{g}_p(k)$ è la stessa trasformata di Fourier di f estesa nel dominio complesso $\widetilde{f}(k) \to \widetilde{f}(s/\mathrm{i})$. Questo ci porta a definire una nuova trasformazione integrale per f: la trasformata di Laplace.

9.2 Definizione della trasformata di Laplace

Definizione 9.1 *Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. Si dice* trasformata di Laplace *[TdL] di f la funzione complessa $\mathcal{L}f$ di variabile complessa s definita da*

$$[\mathcal{L}f](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{9.2}$$

per quei valori di $s \in \mathbb{C}$ per cui l'integrale esiste.[1] *Per semplicità scriveremo anche $[\mathcal{L}f](s) = \mathcal{L}f(s)$.*

Una funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ si dice *trasformabile secondo Laplace* se esiste almeno un valore $s_0 \in \mathbb{C}$ in cui è definita la TdL di f. Per essere trasformabile, una funzione deve essere localmente integrabile, e non crescere all'infinito più velocemente di qualsiasi esponenziale. Per esempio, se esistono $M, a, \bar{t} \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(t)| \le M\mathrm{e}^{at} \quad \text{per ogni} \quad t > \bar{t}\,,$$

allora la TdL di f esiste per ogni $s : \mathrm{Re}\,(s) > a$, quindi f è trasformabile secondo Laplace.

Più in generale, se $\mathcal{L}f(s_0)$ è definita per un qualche $s_0 \in \mathbb{C}$, allora la TdL di f è definita anche per ogni $s \in \mathbb{C}$ per cui valga $\mathrm{Re}\,(s) > \mathrm{Re}\,(s_0)$. Infatti, in questo caso

$$|\mathrm{e}^{-st}| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(s)t} \le \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(s_0)t} = |\mathrm{e}^{-s_0 t}| \qquad \big(\mathrm{Re}\,(s) \ge \mathrm{Re}\,(s_0)\big)\,,$$

pertanto se $t \mapsto \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t)$ è sommabile in $\mathbb{R}_+$, a maggior ragione lo è anche $t \mapsto \mathrm{e}^{-st} f(t)$.

Se f è trasformabile secondo Laplace, indichiamo con

$$A_f := \{x = \mathrm{Re}\,(s) : t \mapsto \mathrm{e}^{-st} f(t) \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})\} \subset \mathbb{R} \tag{9.3}$$

l'insieme non vuoto delle parti reali dei valori s per cui $\mathcal{L}f(s)$ esiste. Per quanto appena osservato, questo insieme è un intervallo di $\mathbb{R}$, ed il suo estremo inferiore

$$\alpha_f := \inf A_f \tag{9.4}$$

(che può essere $-\infty$) è chiamato *ascissa di convergenza*, perché l'integrale (9.2) esiste per ogni $s : \mathrm{Re}\,(s) > \alpha_f$, e l'insieme

$$S_f := \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > \alpha_f\} \tag{9.5}$$

[1] È convenzione diffusa usare t invece di x come variabile indipendente per f in quanto nelle applicazioni generalmente tale variabile indica il tempo, e $t_0 = 0$ corrisponde all'istante in cui sono date le condizioni iniziali del problema.

è detto *semipiano di convergenza.*

Diamo alcuni esempi di TdL, indicando sempre con $t \in \mathbb{R}_+$ la variabile indipendente delle funzioni da trasformare secondo Laplace.

ESEMPIO: La funzione costante $f(t) = 1$ è trasformabile secondo Laplace e si ha

$$\mathcal{L}1(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s} \tag{9.6}$$

per ogni $s : \mathrm{Re}\,(s) > 0$. In questo caso l'ascissa di convergenza è $\alpha_f = 0$ e si vede che, nel semipiano di convergenza, la TdL definisce una funzione olomorfa.

ESEMPIO: La funzione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ è trasformabile secondo Laplace e si ha

$$[\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{s - \mathrm{i}\omega} \, . \tag{9.7}$$

Anche in questo caso l'ascissa di convergenza è $\alpha_f = 0$ e la TdL definisce una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza.

ESEMPIO: La funzione e^{t^2} non è trasformabile secondo Laplace.

È facile verificare che ogni funzione f sommabile a supporto compatto è trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $\alpha_f = -\infty$ (e per quanto mostreremo tra poco, la sua trasformata di Laplace è una funzione intera).

9.3 Proprietà della trasformata di Laplace

Dalla linearità dell'integrale segue subito che la TdL è un'operazione lineare. Più precisamente, la TdL di una combinazione lineare di funzioni trasformabili secondo Laplace è la combinazione lineare delle trasformate, con ascissa di convergenza uguale alla massima delle ascisse di convergenza delle singole funzioni:

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L} f_1 + c_2 \mathcal{L} f_2 \, , \qquad \alpha_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = \max\{\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}\} \, , \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \, . \tag{9.8}$$

Abbiamo visto che le TdL degli esempi precedenti erano funzioni olomorfe. Questa proprietà è generale:

Teorema 9.1 *Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza α_f. La sua TdL è olomorfa nel semipiano di convergenza S_f e la sua derivata n-esima è la TdL, con la stessa ascissa di convergenza, della funzione $(-t)^n f(t)$:*

$$[\mathcal{L}f]^{(n)} = \mathcal{L}\big((-t)^n f(t)\big) \, . \tag{9.9}$$

Dimostrazione: Dimostriamo innanzitutto che la funzione $t \mapsto t^n f(t)$ ha ascissa di convergenza $\alpha' = \alpha_f$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{t}_{n,\varepsilon}$ tale che

$$|t^n| < \mathrm{e}^{\varepsilon t} \qquad \text{per ogni } t > \bar{t} \, .$$

Quindi la TdL di $t^n f(t)$ esiste per ogni $s : \mathrm{Re}\,(s) > \alpha_f + \varepsilon$, ossia $\alpha' \leq \alpha_f + \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di ε segue che $\alpha' \leq \alpha_f$. Ma se $t^n f(t)\mathrm{e}^{-st}$ è sommabile per qualche $s \in \mathbb{C}$, allora anche $f(t)\mathrm{e}^{-st}$ è sommabile, dato che

$$|f(t)\mathrm{e}^{-st}| \leq |t^n f(t)\mathrm{e}^{-st}| \qquad \text{per ogni } t \geq 1 \; ,$$

perciò $\alpha_f \leq \alpha'$. Di conseguenza $\alpha' = \alpha_f$.

Ne segue anche che $\mathcal{L}f$ è derivabile sotto il segno di integrale rispetto ad $x = \mathrm{Re}\,(s)$ e ad $y = \mathrm{Im}\,(s)$. Le derivate sono continue e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, per cui f è olomorfa. Per derivazione sotto il segno di integrale si ottiene il resto della tesi e la formula (9.9). C.V.D.

La TdL gode di svariate proprietà, alcune delle quali analoghe a quelle della TdF. Elenchiamo di seguito le più importanti, ripetendo anche quelle trovate in precedenza:

1. linearità:

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}f_1 + c_2 \mathcal{L}f_2 \; , \qquad \alpha_{c_1 f_1 + c_2 f_2} = \max\{\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}\} \; , \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}) \; ; \tag{9.10}$$

2. traslazione:

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{ct} f) = \mathcal{L}f(s - c) \; , \qquad \alpha_{\mathrm{e}^{ct} f} = \alpha_f + \mathrm{Re}\, c \; , \qquad (c \in \mathbb{C}) \; ; \tag{9.11}$$

3. dilatazione:

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f(s/a) \; , \qquad \alpha_{f(at)} = a\alpha_f \; , \qquad (a > 0) \; ; \tag{9.12}$$

4. trasformata della derivata prima:

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0^+) \; , \qquad \alpha_{f'} = \alpha_f \; , \tag{9.13}$$

ove $f(0^+) := \lim_{t \to 0^+} f(t)$;

5. trasformata della derivata m-esima:

$$\mathcal{L}(f^{(m)})(s) = s^m \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} f^{(k)}(0^+) \; , \qquad \alpha_{f^{(m)}} = \alpha_f \; ; \tag{9.14}$$

6. trasformata dell'integrale:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s) \; , \qquad \alpha_{\int_0^t f} = \alpha_f \; ; \tag{9.15}$$

7. derivazione:

$$\mathcal{L}\big((-t)^m f(t)\big) = [\mathcal{L}f]^{(m)} \; , \qquad \alpha_{t^m f} = \alpha_f \; ; \tag{9.16}$$

8. integrazione:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty \mathcal{L}f(u)\,\mathrm{d}u \; , \qquad \alpha_{f/t} = \alpha_f \; . \tag{9.17}$$

Dimostrazione:

1: segue dalla linearità dell'integrale, nel semipiano in cui entrambe le TdL sono definite.

2: segue da

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{ct}f) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{ct}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-c)t}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}f(s-c)\ ,$$

che esiste se $\mathrm{Re}\,(s-c) > \alpha_f$.

3: segue dal semplice cambio di variabile $at = u$:

$$\mathcal{L}\big(f(at)\big) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u}f(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{a}\frac{1}{a}\mathcal{L}f(s/a)\ ,$$

che esiste se $\mathrm{Re}\,(s/a) > \alpha_f$.

4: si dimostra integrando per parti:

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{e}^{-st}f(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = -f(0) + s\mathcal{L}f(s)\ ,$$

in quanto $\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t) = 0$. Se f non è continua nell'origine, ma ammette limite destro, allora nel termine di bordo ci va $\lim_{t\to 0^+}\mathrm{e}^{-st}f(t) = f(0^+)$.

5: si dimostra iterando la relazione (9.13) per la derivata prima.

6: basta applicare la relazione (9.13) alla funzione

$$F(t) := \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t\ ,\quad F(0) = 0\ ,\quad F'(t) = f(t)\ .$$

7: già visto nel teorema 9.1.

8: si dimostra osservando che

$$\frac{\mathrm{e}^{-st}}{t} = \int_s^\infty \mathrm{e}^{-ut}\,\mathrm{d}u$$

e scambiando l'ordine di integrazione dei due integrali in t ed in u. C.V.D.

Riportiamo una lista di alcune importanti trasformate di Laplace.

$f(t)$	1	t	t^n	e^{at}	$\cos(at)$	$\sin(at)$	$\cosh(at)$	$\sinh(at)$
$\mathcal{L}f(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$

9.3.1 Convoluzione e sua trasformata di Laplace

Anche per due funzioni $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ si può definire il prodotto di convoluzione, nello stesso modo in cui è stato definito nell'eq. (2.95) per funzioni con dominio tutto $\mathbb{R}$. Infatti, se definiamo le funzioni $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ponendo $F(x) = \Theta(x)f(x)$, $G(x) = \Theta(x)g(x)$ — Θ è la funzione di Heaviside definita nell'eq. (5.84) — possiamo interpretare il prodotto di convoluzione tra F e G come la definizione dell'analogo prodotto per f e g. A causa della presenza delle funzioni di Heaviside, si ha che l'integrale in $y \in \mathbb{R}$ è limitato agli $y \geq 0$ da F e agli $y \leq x$ da G, per cui, per ogni x, l'integrale di convoluzione è all'intervallo limitato $y \in [0, x]$. Quindi la convoluzione di due funzioni $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ localmente integrabili

$$[f*g](t) = \int_0^t f(y)g(t-y)\,\mathrm{d}y \tag{9.18}$$

esiste per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ (e vale 0 per $t \leq 0$).

Per la TdL di un prodotto di convoluzione vale una formula analoga a quella per la TdF (2.98):

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g \ , \qquad \alpha_{f*g} = \max\{\alpha_f, \alpha_g\} \ . \tag{9.19}$$

Dimostrazione: Invocando (con le opportune giustificazioni) il teorema di Fubini-Tonelli, possiamo scambiare l'ordine delle due integrazioni nell'integrale doppio:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f*g) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \left[\int_0^t f(y)g(t-y)\ \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(y) \left[\int_y^\infty \mathrm{e}^{-st} g(t-y)\ \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sy} f(y) \left[\int_y^\infty \mathrm{e}^{-s(t-y)} g(t-y)\ \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sy} f(y)\ \mathrm{d}y \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s\tau} g(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g \ ,
\end{aligned}$$

in cui abbiamo effettuato il cambio di variabile $\tau := t - y$, che fattorizza i due integrali. Naturalmente s deve essere tale che entrambi gli integrali esistano, quindi $\mathrm{Re}\,(s) > \alpha_f, \alpha_g$. C.V.D.

9.4 Inversione della trasformata di Laplace

Siccome la TdL è una particolare TdF, dal teorema di inversione puntuale della TdF 2.30 possiamo ricavare un teorema di inversione per la TdL. Vediamo meglio la relazione tra le due trasformate: posto $s = x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbb{R}$, per ogni $x > \alpha_f$ si ha

$$\mathcal{L}f(x+\mathrm{i}y) = \int_{\mathbb{R}} \Theta(t) f(t) \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}\ \mathrm{d}t = \left[\mathcal{F}\big(\sqrt{2\pi}\,\Theta(t)\mathrm{e}^{-xt} f(t)\big)\right](y) \ , \tag{9.20}$$

Da questa formula e dalla proprietà di unicità della TdF, segue che se due funzioni hanno la stessa TdL, esse sono uguali quasi ovunque. Ciò premesso, possiamo enuciare il

Teorema 9.2 (di convergenza puntuale) *Sia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza α_f, e tale che nel punto $t > 0$ esistano i limiti destro $f(t^+)$ e sinistro $f(t^-)$, e che inoltre i rapporti incrementali destro e sinistro*

$$\frac{f(t+h) - f(t^+)}{h} \ , \qquad \frac{f(t-h) - f(t^-)}{-h}$$

si mantengano limitati per h abbastanza piccolo, $h \in]0, \delta]$. Allora si ha

$$\frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{R\to+\infty} \int_{x-\mathrm{i}R}^{x+\mathrm{i}R} \mathrm{e}^{st} \mathcal{L}f(s)\ \mathrm{d}s \ . \tag{9.21}$$

In particolare, se $f'(t)$ esiste, allora tale limite converge ad $f(t)$.

Dimostrazione: La funzione $t \mapsto \sqrt{2\pi}\,\Theta(t)\mathrm{e}^{-xt} f(t)$ scritta nell'eq. (9.20) soddisfa le stesse ipotesi di f per ogni $t > 0$, cioè ha limite destro, limite sinistro ed i rapporti incrementali limitati.

Inoltre, per $x > \alpha_f$ essa ammette TdF (data da $y \mapsto \mathcal{L}f(x + \mathrm{i}y)$), pertato le si può applicare la formula (2.90) del teorema di convergenza puntuale per l'ATdF, ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-xt}f(t^+) + \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-xt}f(t^-)\right] &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\mathcal{L}f(x+\mathrm{i}y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\ \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] &= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{(x+\mathrm{i}y)t}\mathcal{L}f(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y\ . \end{aligned}$$

Questo integrale si può interpretare come integrale in campo complesso lungo il cammino $\gamma : [-R, R] \ni y \mapsto x + \mathrm{i}y = s$, $\gamma'(y) = \mathrm{i}$, da cui si ottiene l'eq. (9.21). C.V.D.

Notiamo che il cammino γ ha sostegno nel semipiano di convergenza di f. Dall'arbitrarietà di $x > \alpha_f$, l'integrazione complessa nell'eq. (9.21) può avvenire in qualunque retta parallela all'asse immaginario che sia contenuta nel semipiano di convergenza S_f. Questo è anche conseguenza del fatto che $\mathcal{L}f$ è olomorfa in S_f e tende a zero per $s \to \infty$ in direzione immaginaria (positiva e negativa), per cui l'integrale sui rettangoli $[x - \mathrm{i}R, x + \mathrm{i}R, x' + \mathrm{i}R, x' - \mathrm{i}R, x - \mathrm{i}R]$ è nullo ed il contributo sui lati orizzontali $x + \mathrm{i}R, x' + \mathrm{i}R]$ e $[x' - \mathrm{i}R, x - \mathrm{i}R]$ tende a zero per $R \to +\infty$.

Se $\mathcal{L}f$ ha un'estensione analitica a tutto il piano complesso, eccetto al più un insieme di singolarità isolate $\{s_k : k \in K\}$, e tende a zero al di fuori del semipiano di convergenza

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in\mathbb{C}\setminus S_f}} \mathcal{L}f(s) = 0$$

allora, invocando il lemma di Jordan, è possibile calcolare l'integrale usando il teorema dei residui, chiudendo il cammino con un arco di circonferenza centrato nell'origine e di raggio $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ che dal punto $x + \mathrm{i}R$ procede in senso positivo fino al punto $x - \mathrm{i}R$, ottenendo

$$\frac{1}{2}\left[f(t^+) + f(t^-)\right] = \sum_{k\in K}\mathrm{Res}\big(\mathrm{e}^{st}\mathcal{L}[f], s_k\big)\ . \tag{9.22}$$