

- una funzione "distanza" d_{ij} che per ogni coppie di impulsi (P_i, P_j) stabilisce un criterio di lontananza (o vicinanza) tra due particelle, sulla base del quale decidere se raggrupparle all'interno di un jet. Pensiamo a $d_{ij} \rightarrow 0$ se $P_i \parallel P_j$.
- uno schema di ricombinazione che per ogni coppie di impulsi (P_i, P_j) da raggruppare, stabilisca l'impulso dell'unione delle due particelle $P_{(ij)}$.
È naturale considerare la somma $(P_i, P_j) \mapsto P_{(ij)} = P_i + P_j$, ma non è né l'unico schema né il più conveniente. L'idea comunque è questa.
- un parametro di risoluzione "dat" che determina quanto grossi o stretti o quanto "energetici" voglio che siano i jet che identifichiamo.

L'algoritmo funziona così:

- 1) Calcoliamo le distanze d_{ij} tra tutte le coppie di particelle.
- 2) Cerco le distanze minime e le confronto con d_{cut}
- 3a) $d_{ij}^{min} < d_{cut} \Rightarrow$ le (pseudo)particelle i, j vengono raggruppate in una singola pseudo-particella (ij) il cui impulso è specificato dallo schema di ricombinazione;
Si ricomincia dal punto 1)
- 3b) $d_{ij}^{min} > d_{cut} \Rightarrow$ La procedura termina. Ogni gruppo di particelle forma un jet.

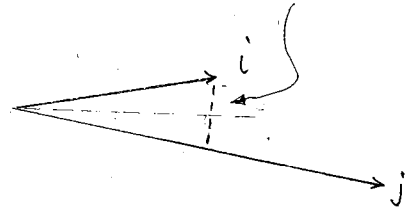
La funzione "distanza", chiamata anche "variabile di risoluzione" d_{ij} , deve essere crescente rispetto all'angolo relativo Θ_{ij} , perché per $\Theta_{ij} \rightarrow 0$ vogliamo che assuma i valori più piccoli, che pensiamo uguali a zero.

I due algoritmi più usati (nel passato e nel presente, rispettivamente) sono:

JADE : $d_{ij} = 2E_i E_j (1 - \cos \Theta_{ij}) \stackrel{(m=0)}{=} (p_i + p_j)^2 = 2p_i \cdot p_j$

KT : $d_{ij} = 2 \min(E_i^2, E_j^2) (1 - \cos \Theta_{ij}) = \left(2E_i \sin \frac{\Theta_{ij}}{2} \right)^2$

$\approx \left(\begin{array}{c} \text{impulso trasverso delle più soffice} \\ \text{rispetto all'altra} \end{array} \right)^2$



L'algoritmo KT è migliore perché raggruppa la particella soffice E_i alla particella che le è più vicina in angolo, mentre in JADE la presenza del fattore E_j a volte causa raggruppamenti tra particelle soffici con grande separazione angolare.

NOTA È importante che d_{ij} decresca ($\rightarrow 0$) quando una particella diventa soffice, in modo da raggruppare tutte le particelle "sufficientemente soffici" all'interno di un jet, al fine di ottenere un osservabile IR finito.

Richiede $d_{ij} \sim |P_T|^2$ ha le dimensioni del quadrato di un impulso (energia), lo stesso dovrà valere per d_{out} , che svolge il ruolo che svolgevano $S^2 S$ e $E^2 S$ nei jet di Sterman-Weinberg.

Affinché la dipendenza da d_{out} provenga dalla dinamica perturbativa (di corte distanze), si richiede

$$\Lambda_{QCD}^2 \ll d_{out} < S.$$

Per quanto riguarda lo schema di ricombinazione, i due schemi più usati sono:

SCHEMA COVARIANTE: $P_{(ij)}^\mu = P_i^\mu + P_j^\mu$ $P_{(ij)}^2 \neq 0$ in generale

SCHEMA PESATO CON P_T :

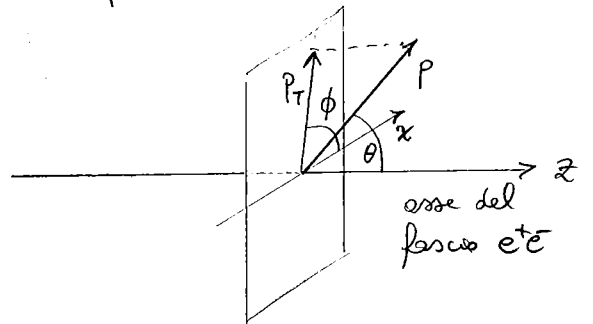
Dato un vettore \vec{P} , si definisce \vec{P}_T la proiezione di \vec{P} sul piano trasverso al fascio di particelle entranti (e^+e^-)

$$\Rightarrow |P_{T(ij)}| := |P_{Ti}| + |P_{Tj}|$$

$$\eta_{(ij)} := \frac{|P_{Ti}| \eta_i + |P_{Tj}| \eta_j}{|P_{Ti}| + |P_{Tj}|}$$

$$\phi_{(ij)} := \frac{|P_{Ti}| \phi_i + |P_{Tj}| \phi_j}{|P_{Ti}| + |P_{Tj}|}$$

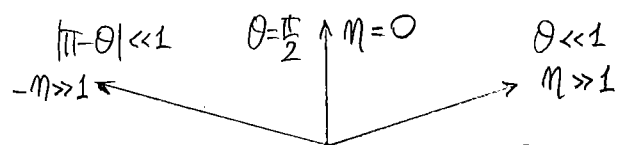
$$P_{(ij)}^2 = 0 \quad \text{per costruzione}$$



ϕ = angolo azimutale

η = pseudorapidità

$$:= -\ln \tan \frac{\theta}{2}$$



42

Nell'algoritmo JADE le proprietà del jet e in particolare le correzioni di adronizzazione dipendono molto dallo schema di ricombinazione.

Al contrario, l'algoritmo KT è poco sensibile allo schema di ricombinazione

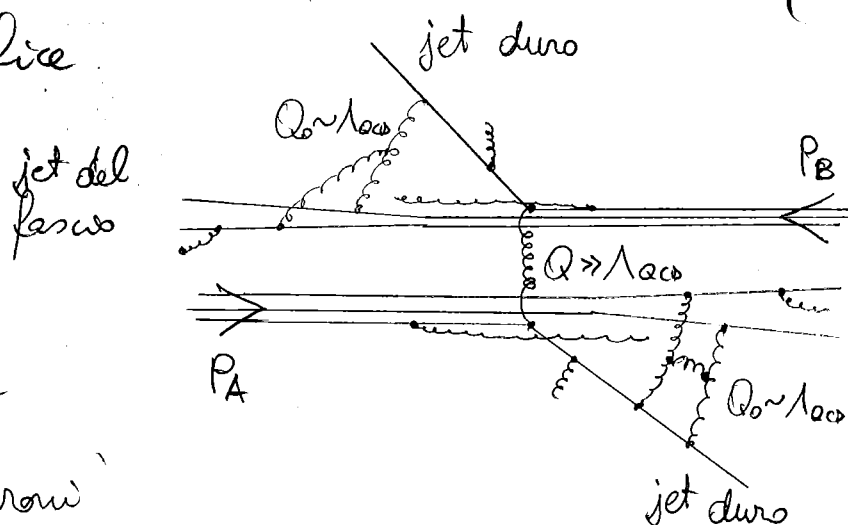
Esercizio:

Determinare $F_3^{(2jet)}(P_1, P_2, P_3)$ nei due algoritmi di jet introdotti precedentemente.

ALGORITMO KT PER COLLISIONI ADRONICHE

Nei processi con adroni nello stato iniziale, $e^+p, p\bar{p}, \dots$ lo stato finale adronico può derivare (schematicamente)

- dall'adronizzazione delle particelle dure
- dai resti degli adroni iniziali
- da radiazione soffice



In questi processi c'è un'intensa attività adronica (presenza di adroni nello stato finale) in prossimità del fascio, cioè a piccoli angoli rispetto alla direzione degli adroni incidenti

Per definire osservabili di jet IR finiti è essenziale definire un jet del fascio, ossia l'insieme di quelle particelle emesse, a piccoli angoli rispetto al fascio, che possono essere state prodotte da emissioni collineari dei partoni attivi entranti, oppure che possono essere i resti di adronizzazione dei partoni passivi entranti (vedi figure).

NOTA Per processi con 2 adroni iniziali P_A, P_B , ci riferiamo sempre ad un unico jet del fascio, che comprende sia il jet "in avanti" collineare a P_A sia il jet "all'indietro" collineare a P_B .

Questo perché tali jet e le loro particelle sono ignorate nella descrizione dello stato finale, e differenze dei jet duri che ne costituiscono gli elementi essenziali.

Bisogna pertanto stabilire una procedura per assegnare ogni particella o ad un jet duro o al jet del fascio

Il criterio usato nelle collisioni e^+e^- basato sulle differenze angolari θ_{ij} ed energie E_i delle particelle non è adatto a questo scopo. Il motivo di ciò sta nel fatto che nei processi duri, l'urto coinvolge principalmente un solo partone all'interno di ogni adrone incidente.

Poiché l'impulso del partone p_a è solo una parte dell'impulso dell'adrone P_A ; il centro di massa (CM) delle particelle che prendono parte, all'urb non è quello del laboratorio (LAB), come nei processi e^+e^- .

Per collisioni adrone-adrone:
(trascurando impulsi trasversi)

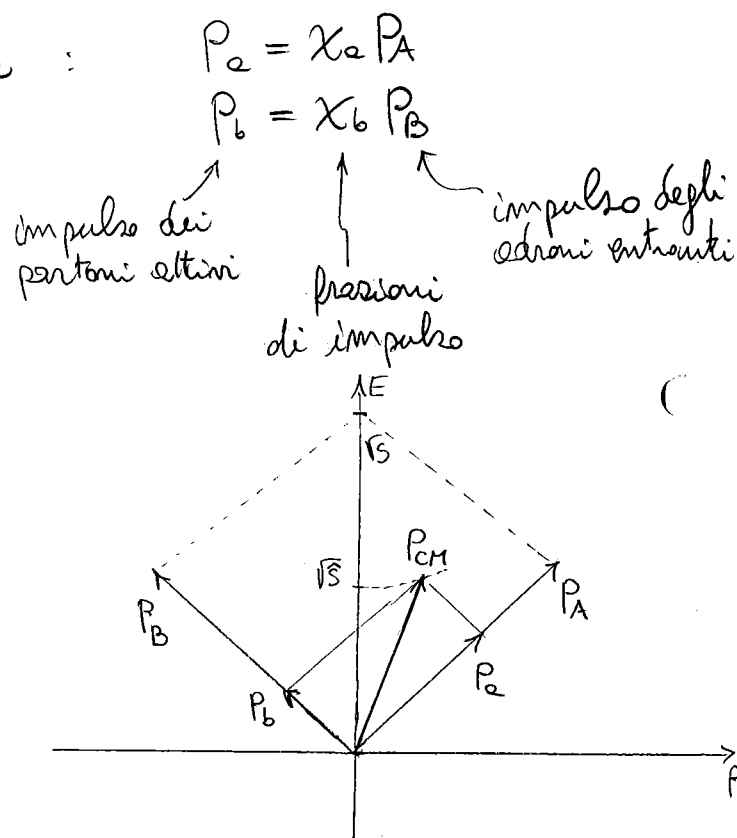
$$\Rightarrow P_{CM} = X_a P_A + X_b P_B$$

$$P_{CM}^2 = \hat{S} = X_a X_b S$$

= energia totale al quadrato nel CM partonico

Esercizio: dati X_a, X_b determinare la velocità β_{CM} del CM partonico.

Risposta: $\beta_{CM} = \frac{X_a - X_b}{X_a + X_b}$



Le differenze angolari $\Delta\theta_{ij}$ non sono invarianti sotto spinte (boost) di Lorentz. Più precisamente:

- gli angoli azimutali e le loro differenze sono invarianti per spinte lungo z (l'asse del fascio)

$$\varphi' = \varphi \quad ; \quad \Delta\varphi' = \Delta\varphi$$

- gli angoli polari non trasformano in modo "semplice" sotto spinte lungo l'asse z , e le loro differenze $\Delta\theta$ non sono invarianti.

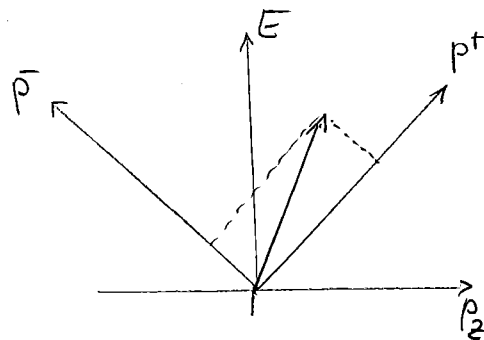
Chiamiamo una variabile, collegata agli angoli
polari, le cui differenze sono invarianti
rispetto a spinte lungo z .

Una spinta lungo z modifica le componenti
temporale e le componenti z degli impulsi, mentre
preserva le componenti trasverse (piano $\langle xy \rangle$).

$$\begin{cases} E' = \cosh(d) E + \sinh(d) P_z \\ P_z' = \sinh(d) E + \cosh(d) P_z \end{cases} \quad \text{ove } \tanh(d) = \beta$$

Definiamo le componenti di uno luce $p^\pm = E \pm P_z$

$$\begin{cases} p^{+'} = e^d p^+ \\ p^{-'} = e^{-d} p^- \end{cases} \Rightarrow \frac{p^+}{p^-} \sim e^{2d}$$



Parametrizziamo il generico impulso

$$p^\mu = (p^+, p^-, p_T) = (A e^\gamma, A e^{-\gamma}, p_T) \Rightarrow A = \sqrt{p_T^2 + m^2} \quad \hookrightarrow p^\mu p_\mu$$

La variabile γ si chiama RAPIDITÀ delle
particelle di impulso p^μ , ed è legata alla sua
velocità v dalla relazione $\tanh(\gamma) = v$; $\frac{p^+}{p^-} = e^{2\gamma}$

Per quanto osservato precedentemente, sotto una spinta
di angolo iperbolico d (che è la rapidità del
nuovo SDR rispetto al vecchio) abbiamo che

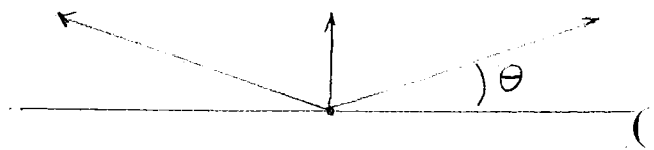
$$\begin{cases} p^{+'} = e^d p^+ = e^d (A e^\gamma) = A e^{\gamma+d} =: A e^{\gamma'} \\ p^{-'} = e^{-d} p^- = e^{-d} (A e^{-\gamma}) = A e^{-(\gamma+d)} =: A e^{-\gamma'} \end{cases} \Rightarrow \gamma' = \gamma + d$$

cioè la rapidità trasforma in modo additivo, (16)
 indipendentemente dalle partielle, e quindi le
 differenze di rapidità sono invarianti per spinte lungo z !

$$\Delta Y' = \Delta Y.$$

Fissato P_T , Y è monotona crescente come funzione di P_z ;
 e quindi monotona decrescente come funzione di Θ :

$$\frac{P_z}{|P_T|} = \frac{A}{|P_T|} \text{Sh}(Y) = \cot(\Theta) \quad \parallel \quad \begin{array}{ccc} \Theta \rightarrow \pi^- & \Theta = \frac{\pi}{2} & \Theta \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow -\infty & Y = 0 & Y \rightarrow +\infty \end{array}$$



In regione centrale

($\Theta \approx \frac{\pi}{2}$, $Y \approx 0$, $P_z \approx 0$) i differenziali sono legati da

$$\frac{A}{|P_T|} \text{Ch}(Y) dy = - \frac{d\Theta}{\cos^2 \Theta} \Rightarrow \frac{A}{|P_T|} dy \approx -d\Theta.$$

In particolare, se $m^2 \ll P_T^2 \Rightarrow A \approx |P_T|$ vale $dy \approx -d\Theta$.

Quindi una buona distanza angolare, invariante
 per spinte longitudinali, è

$$R_{ij}^2 := (Y_i - Y_j)^2 + (\Phi_i - \Phi_j)^2 = Y_{ij}^2 - \Phi_{ij}^2 \quad \text{oppure}$$

$$R_{ij}^2 := 2[\text{Ch}(Y_{ij}) - \cos(\Phi_{ij})] \propto P_i \cdot P_j$$

dalla quale si può definire una distanza
 analoga a quella definita per ragioni ete:

$$d_{ij} = \min(P_{Ti}^2, P_{Tj}^2) R_{ij}^2$$

Infine, definiamo la funzione distanza di una particella P_i del fascio (Beam). 17

Una semplice e buona definizione risulta essere

$$d_{iB} := P_{Ti}^2$$

Abbiamo quindi due funzioni distanza:

- d_{ij} (distanza tra due (pseudo)particelle)
- d_{iB} (distanza tra una (pseudo)particella ed il fascio)

L'algoritmo di raggruppamento è analogo a quello già descritto:

1) Si determinano le minime distanze tra tutte le d_{ij} e le d_{iB} .

2A) Se la minima è una d_{iB} , si associa la (pseudo)particella i -esima al jet del fascio, e si rimuove dall'elenco delle (pseudo)particelle.

2B) Se la minima è una d_{ij} , si raggruppano le pseudoparticelle i e j in una nuova pseudoparticella (ij) che le sostituisce nell'elenco.

$P_{T(ij)}$ è determinato dallo schema di ricombinazione.

3) Si continua dal punto 1) finché tutte le d_{ij} e d_{iB} superano il parametro di risoluzione d_{cut} .

Le pseudoparticelle così definite rappresentano i jet dello stato finale.

Variante:

118

Per regolare "l'apertura" dei jet (\approx il raggio R del cono) si può riscrivere le d_{ij} rispetto alle d_{iB} con un fattore R^2 :

$$\begin{cases} d_{ij} := \min(P_{Ti}^2, P_{Tj}^2) \frac{R_{ij}^2}{R^2} \\ d_{iB} := P_{Ti}^2 \end{cases}$$

Al diminuire di $R < 1$, si aumentano le distanze relative tra le particelle; è quindi più difficile che siano raggruppate, e lo saranno se la loro distanza angolare R_{ij} è piccola ($R_{ij} \lesssim R$).

Modificando la potenza alla quale vengono elevati i P_T^2 si modificano le forme dei jet:

$$\begin{cases} d_{ij} := \min(P_{Ti}^{2p}, P_{Tj}^{2p}) R_{ij}^2 / R^2 \\ d_{iB} := P_{Ti}^{2p} \end{cases}$$

Molto usato attualmente è il valore $p = -1$ (ALGORITMO ANTI-KT) che ha il pregio di produrre jet di forma approssimativamente conica:

se i è soffice e j è dura $\Rightarrow d_{ij} = \frac{1}{P_{Tj}^2} R_{ij}^2 / R^2$ dipende da i solo tramite R_{ij} . Se anche k è soffice, con $R_{ij} \approx R_{ik}$ $d_{ik} = \frac{1}{P_{Tk}^2} \frac{R_{ik}^2}{R^2} \gg d_{ij}$. Ne deriva che le particelle soffici tendono a raggrupparsi attorno alle particelle dure piuttosto che tra di loro, e questo determina forme più regolari.