GLI OSSERVABILI IR FINITI IN QCD

Abbiamo visto che in una teoria di gauge con particelle a massa nulla si presentano spontaneamente

divergenze IR $<$ soffici, collineari

Abbiamo anche visto come, nel calcolo di alcuni osservabili, $e^+e^- \to$ adroni (σ_{totale}, σ_{2jet}) ci sia una "miracolosa" cancellazione di queste singolarità tra correzioni reali e virtuali.

Ci proponiamo ora di capire le ragioni ed il meccanismo di questa cancellazione, per vedere se si tratta di un caso fortuito per $e^+e^- \to q\bar{q}(g)$ oppure se è una proprietà in qualche modo generale che può essere sfruttata per estendere i calcoli perturbativi ad altri processi e ad ordini superiori.

Riconsideriamo $e^+e^- \to \gamma^* \to q\bar{q} \to$ adroni

L'idea che sta alla base di questa schematizzazione (modello a partoni), ossia che

- prima il γ^* crei la coppia $q\bar{q}$
- poi $q\bar{q}$ interagiscono dalle corte alle lunghe distanze per adronizzare alla fine

(o) $\gamma^* \to q\bar{q}$ non dipenda da $q\bar{q} \to$ odroni si basa sul fatto che, se $\sqrt{S} \gg \Lambda_{QCD}$, il primo passo avviene ad una scala di tempi e distanze molto più breve di quella alla quale avviene il secondo passo (l'adronizzazione), in un regime in cui i quark sono quasi liberi (grazie alla libertà asintotica $\alpha_s(S) \ll 1$).

Se dunque $\gamma^* \to q\bar{q}$ è indipendente dall'adronizzazione, la probabilità che avvenga $\gamma^* \to q\bar{q}$ è uguale alla probabilità che avvenga $\gamma^* \to$ adroni, dato che il destino della coppia $q\bar{q}$ è comunque quello di terminare in uno stato adronico.

In altre parole, la dinamica della QCD seguente la creazione della coppia $q\bar{q}$ conserva la probabilità di avere uno stato finale adronico, perché la QCD è unitaria.

Si capisce quindi che le correzioni al diagramma di ordine più basso devono in qualche modo cancellarsi, ossia le correzioni virtuali devono compensare quelle reali, e pertanto avere segno opposto:

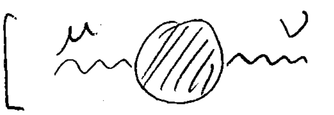
UNITARIETÀ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}\text{correzioni}\\ \text{virtuali}\end{pmatrix} \simeq -\begin{pmatrix}\text{correzioni}\\ \text{reali}\end{pmatrix}$

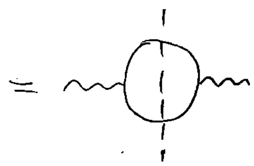
Chiaramente nel mondo reale, in cui la libertà è solo asintotica, la coppia $q\bar{q}$ è in interazione con il campo cromomagnetico già all'atto della creazione, pertanto la supposta compensazione è solo approssimata, la somma

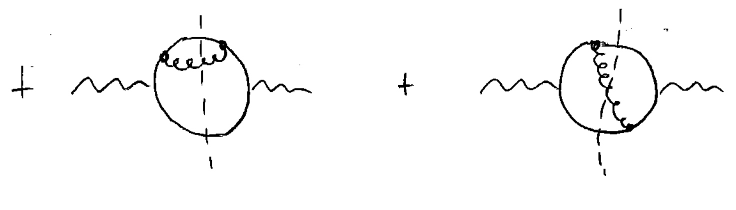
$$\begin{pmatrix}\text{correzioni}\\ \text{reali}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{correzioni}\\ \text{virtuali}\end{pmatrix} \neq 0 \qquad (\text{ma finita})$$

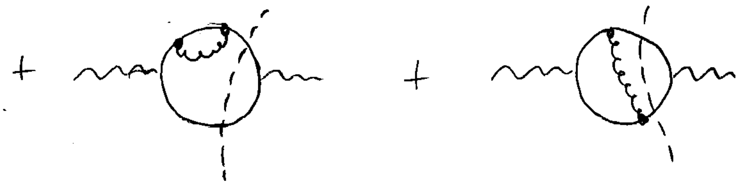
ma essendo finita implica la cancellazione delle divergenze reali e virtuali.

<u>DIAGRAMMATICAMENTE</u> la corrispondenza tra $|$elementi di matrice$|^2$ nelle correzioni reali e virtuali è dovuta al fatto che, come abbiamo già osservato, contribuiscono gli stessi diagrammi, "tagliati" in modo diverso:

$$H_{\mu\nu}(q) = 2\,\mathrm{Im}\left[\Pi_{\mu\nu}(q^2)\right] = 2\,\mathrm{Im}\Big[$$  $$\Big] = \begin{pmatrix}\text{Cutkosky}\\ \text{rules}\end{pmatrix}$$

 (LO)

 + simm. (NLO reale)

 + simm. (NLO virtuale)

Inoltre la CINEMATICA nei diagrammi virtuali è diversa da quella nei diagrammi reali, in cui il gluone è on-shell.
Però nelle regioni singolari anche la cinematica viene a coincidere, in quanto

- nella regione soffice $K^\mu = P_3^\mu \to 0$ per $\begin{cases}\text{reale}\\ \text{virtuale}\end{cases}$
- nelle regioni collineari $P_3 \parallel P_{1,2} \Rightarrow P_3$ è on-shell anche nei diagrammi virtuali.

Di conseguenza, c'è una perfetta cancellazione nelle regioni singolari, mentre la cancellazione è per così dire imperfetta altrove, e ne risultano correzioni sottodominanti (next-to-leading) finite.

ESEMPIO Contributi soffici in QED

Sono basati sulla corrente di Weinberg $J^\mu(K) = \sum_m e_m \eta_m \frac{P_m^\mu}{P_m \cdot K}$

Reale: $\int_0^{\mathcal{E}} \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2\omega_K} J^\mu(K)(-g_{\mu\nu}) \overset{*}{J}{}^\nu(K)$ $\qquad \mathcal{E} \equiv$ energia di soglia del rivelatore

$\leftarrow \sum_\lambda \varepsilon_\mu(K,\lambda) \overset{*}{\varepsilon}_\nu(K,\lambda)$

Virtuale: $\int_0^L \frac{d^{3+1}K}{(2\pi)^4} J^\mu(K) \frac{(-i g_{\mu\nu})}{K^2 - i0} J^\nu(-K) = \int_0^L \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2\omega_K} J^\mu(K) g_{\mu\nu} J^\nu(K)$

$\frac{2\pi i}{2\omega_K}$

integrando opposto a quello dell'emissione reale per $K^\mu \to 0$

ESEMPIO $e^+e^- \to q\bar{q}(g) \to$ adroni

$|$L'elemento di matrice$|^2$ per la produzione reale è proporzionale a $\mathcal{M}(q^2) \propto \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)}$ $\quad(\varepsilon=0)$

Ricordando che $x_1+x_2+x_3=2$ possiamo riscrivere

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{1+(1-x_3)^2}{x_3}\left(\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}\right) - 2$$

singolarità soffice $\omega_k \to 0$

singolarità collineari $\theta_{23}\to 0$ $\quad\theta_{13}\to 0$

termine finito

Nella regione soffice o collineare abbiamo quindi

$$|M_{q\bar{q}g}|^2 = |M_{q\bar{q}}|^2 \left(dw_{13}+dw_{23}\right) + \text{termini finiti}$$

ove

$$dw_{23} = \int_0^1 dx_3 \underbrace{\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1+(1-x_3)^2}{x_3}}_{P_{gq}(x_3)} \underbrace{\int_{1-x_3}^1 dx_1 \frac{1}{1-x_1}}_{\int_{-1}^{1} \frac{d(\cos\theta_{23})}{1-\cos\theta_{23}} \cdot \frac{1}{1-x_3\frac{1-\cos\theta_{23}}{2}}}$$

$P_{gq}(x_3)$ funzione di scissione (splitting)

$$\frac{dx_3}{x_3} = \frac{d\omega_k}{\omega_k}$$

$$\underbrace{\frac{d(\cos\theta_{23})}{1-\cos\theta_{23}}}_{\frac{d\theta_{23}^2}{\theta_{23}^2}} \quad \text{per } \theta_{23}\to 0$$

Il virtuale dà un contributo analogo nella regione soffice, con un differente spazio delle fasi: $\int_0^\infty dx_3 = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty}\right) dx_3$ $\to$ UV $\to$ rinormalizzazione

$$\sigma_{IR}^{R+V} \simeq \sigma_0 \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{d\cos\theta_{23}}{1-\cos\theta_{23}} \int_0^1 dx_3\, P_{gq}(x_3) \underbrace{\left(\frac{1}{1-x_3\frac{1-\cos\theta_{23}}{2}} - 1 \right)}_{\to\, \sim\, \theta_{23}^2 x_3} + (1\leftrightarrow 2) \right\}$$

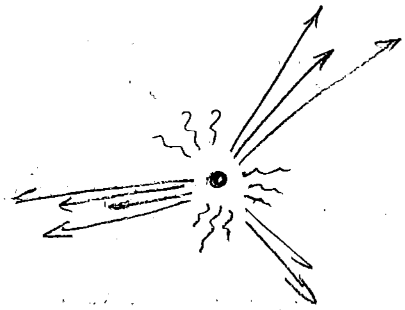
finito

OSSERVAZIONI

- La probabilità di irraggiare un gluone è accentuata nella regione soffice e nella regione collineare perché ivi gli elementi di matrice diventano grandi (divergono!)

Lo spazio delle fasi invece è "piatto": $\sim d\omega \, d\cos\theta \, d\varphi$

La struttura di un tipico evento duro presenta getti di adroni collimati attorno ad alcune direzioni, più una copiosa radiazione soffice.



Non si vedono eventi isotropi

- Le singolarità IR (partoni a grandi distanze) non sono fisiche: la dinamica forte (confinamento) impedisce distanze $\gtrsim \Lambda_{QCD}^{-1}$ $\Rightarrow$ cutoff fisico $k \gtrsim \Lambda_{QCD}$

ossia, per le frazioni di energia, $\frac{\Lambda}{Q} \underset{\text{cutoff soffice}}{\lesssim} x_i \underset{\text{cutoff collineare}}{\lesssim} 1-\frac{\Lambda}{Q}$

$$\Rightarrow \alpha_s \int_{\Lambda/Q}^{1-\frac{\Lambda}{Q}} \frac{dx}{1-x} \simeq \alpha_s \ln\frac{\Lambda}{Q} \sim \frac{1}{\ln\frac{\Lambda}{Q}} \cdot \ln\frac{\Lambda}{Q} \sim 1$$

Le singolarità dei calcoli perturbativi non sono un disastro per la QCD, lo sono per l'approccio perturbativo:

$$1+\alpha_s \ln\frac{\Lambda}{Q} + \alpha_s^2 \ln^2\frac{\Lambda}{Q^2} + \dots \simeq 1+1+1+\dots$$ non ha significato.

La cancellazione delle divergenze dà senso allo sviluppo perturbativo.

PROCESSI SEMI INCLUSIVI

La cancellazione delle divergenze IR ci dice che possiamo calcolare la sezione d'urto totale mediante la teoria delle perturbazioni, ordine per ordine.

Può questo metodo essere esteso a: - processi meno inclusivi?
→ SÌ ← - altri processi ?

Per la σ_{tot} il meccanismo che ha reso possibile e consistente il calcolo è la cancellazione delle diverg. IR, che si basa sulla

UNIVERSALITÀ DEL COMPORTAMENTO IR DEGLI ELEMENTI DI MATRICE DELLA QCD:

R) $$\left| M_{n+1}^{(0\ loop)}(P_1, \cdots P_i, P_j, \cdots P_{n+1}) \right|^2 \longrightarrow \left| M_n^{(0\ loop)}(P_1, \cdots P_i + P_j, \cdots P_{n+1}) \right|^2 \cdot V_{ij}(x_i)$$

se $P_i \to 0$ o $P_i \parallel P_j$

$P = P_i + P_j$ $\qquad P_i \simeq x_i P \qquad P_j \simeq (1-x_i)P \simeq x_j P$

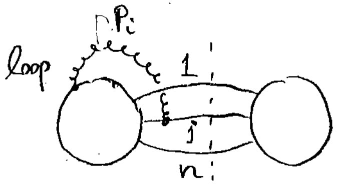
(0 loop) = (tree) = (albero)

- Gli elementi di matrice $M_{n+1}^{(tree)}$, $M_n^{(tree)}$ dipendono dal processo
- I fattori $V_{ij}(x_i)$ sono UNIVERSALI: non dipendono dal processo ma solo dai partoni i, j e loro impulsi.

EX $$V_{gq}(x_3) = P_{gq}(x_g) \frac{1}{1 - \cos\theta_{gq}}$$ (notazione schematica)

V) Per i contributi virtuali c'è una fattorizzazione analoga:

$$2\,\mathrm{Re}\, M_n^{(1\ loop)}(P_1 \cdots P_n)\, M_n^{*(0\ loop)}(P_1 \cdots P_n) \longrightarrow (-1) \left| M_n^{(0\ loop)}(P_1 \cdots P_n) \right|^2 \int_{loop} dP_i\, V_{ij}(x_i)$$



⇛ Il metodo perturbativo si può estendere PURCHÉ non si faccia qualcosa di sbagliato cinematicamente cioè PURCHÉ si definiscano in modo opportuno gli osservabili

Supponiamo quindi di voler misurare e calcolare una sezione d'urto per produrre particolari stati finali, con qualche taglio sperimentale, in cui alcuni eventi sono buoni e altri sono rigettati

$$a+b = e^+e^-,\quad = p e^-,\quad = pp,\quad = p\bar{p}\quad \text{ecc.}$$

EX $\quad a+b \to$ 3 jet adronici

$\qquad\qquad \to \pi^+ + X$

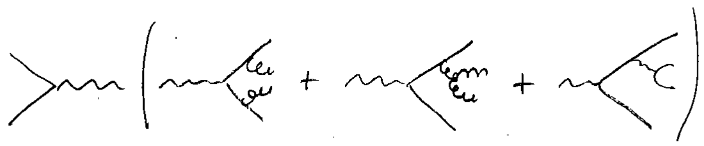
$\qquad\qquad \to$ 5 adroni

$\qquad\qquad \to$ 2 jet $+ (H \to W^+W^-)$

$\qquad$ ecc.

Scelto il processo, avremo uno o più diagrammi di Feynman che lo descrivono all'ordine più basso, con n partoni finali.

EX $\quad e^+e^- \to \pi^+ + \pi^- + 2\text{jet}$:



$\qquad n = 4$

Scriviamo $\quad \sigma = \sigma_{LO} + \sigma_{NLO} + \cdots$

$$\sigma_{LO} = \int_n d\Phi_n \, \left| M_n^{(0)}(\{p_j\}) \right|^2 F_n^{OBS}(\{p_j\})$$

Ampiezza ad albero

Funzione di misurazione: distribuzione che definisce i tagli nello spazio delle fasi (tipicamente con delle funzioni Θ : vale 0 o 1)

Dipende da: - l'osservabile
- il numero di partoni
- gli impulsi dei partoni

EX: · Sezione d'urto totale: $F_n = 1$

· $e^+e^- \to$ jet + soffici:

$$F_3(p_1,p_2,p_3) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta_{12}<2\delta \text{ o } \theta_{13}<2\delta \text{ o } \theta_{23}<2\delta \text{ o } E_3<\varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A NLO dobbiamo considerare contributi reali e virtuali:

$$\sigma_{NLO} = \int_{n+1} d\sigma_R + \int_n d\sigma_V$$

$$= \int_{n+1} d\Phi_{n+1} |M^{(0)}_{n+1}|^2 F^{OBS}_{n+1} + \int_n d\Phi_n \, 2\mathrm{Re}\left[M^{(1)}_n M^{(0)*}_n\right] F_n^{OBS}$$

1 particella in più nello stato finale

1 particella in più nei loop (sempre n nello stato finale)

I due contributi R e V sono separatamente divergenti IR (di sicuro σ_V).

Combiniamo assieme le parti divergenti di questi due termini, ricordando che gli elementi di matrice sono proporzionali a $|M^{(0)}_n|^2$ nella regione soffice e in quelle collineari:

$$\int_n d\sigma_V \longrightarrow \int_n d\Phi_n |M^{(0)}_n|^2 \sum_{ij} \int dp_i \, U_{ij}(x_i) \, (-1) \, F_n(p_1 \cdots p_j \cdots p_n)$$

V: particella virtuale

R: particella soffice o collin. a j

particelle "dure" presenti in σ_{LO}

$$\int_{n+1} d\sigma_R \longrightarrow \int_n d\Phi_n \sum_{ij} \left| M^{(0)}_n(p_1 \cdots p_{(ij)} \cdots p_{n+1})\right|^2 \int dp_i \, U_{ij}(x_j) \, F_{n+1}(p_1 \cdots p_{n+1})$$

NOTA: Nella regione soffice $P_i \to 0$

$P_{(ij)} := P_i + P_j$ diventa on-shell

$$d\tilde{P}_j \, d\tilde{P}_i \propto d^4P_j \, d^4P_i \, \delta(P_j^2)\,\delta(P_i^2) = d^4P_{ij} \, d^4P_i \, \delta((P_{(ij)}-P_i)^2)\,\delta(P_i^2)$$

$$\simeq d^4P_{(ij)} \, d^4P_i \, \delta(P_{(ij)}^2)\,\delta(P_i^2) \propto d\tilde{P}_{(ij)} \, d\tilde{P}_i$$

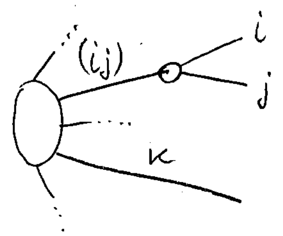
Nella regione collineare $P_i \parallel P_j$, bisogna indicare anche un partone "spettatore" $P_{\tilde{k}} \propto P_k$

partone duro $k \neq i,j$

definendo

$$y_{ij,k} := \frac{P_i \cdot P_j}{P_i \cdot P_j + P_j \cdot P_k + P_k \cdot P_i} \in [0,1]$$

$$P_{\tilde{k}} := \frac{1}{1-y_{ij,k}} P_k \qquad \text{spettatore}$$



$$P_{(ij)} := P_i + P_j - \frac{y_{ij,k}}{1-y_{ij,k}} P_k \qquad \text{emettitore}$$

Valgono: $P_{\tilde{k}}^2 = 0 \qquad P_{(ij)}^2 = 0$ (esattamente on-shell)

$$P_i + P_j + P_k = P_{(ij)} + P_{\tilde{k}} \qquad \text{(conservaz. impulso esatta)}$$

$$d\tilde{P}_i \, d\tilde{P}_j \, d\tilde{P}_k = d\tilde{P}_{(ij)} \, d\tilde{P}_{\tilde{k}} \, d\tilde{P}_i \cdot J(P_i, P_{(ij)}, P_{\tilde{k}})$$

↳ jacobiano

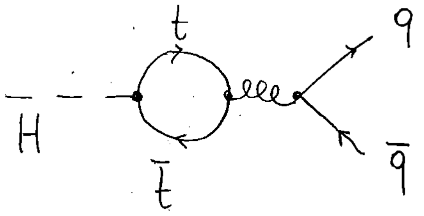
(fattorizzazione esatta dello spazio delle fasi)

$$\Rightarrow \sigma_{NLO}\Big|_{IR} \to \sum_{ij} \int_n d\Phi_n \left| M_n^{(0)}(\dots p_{ij} \dots)\right|^2 \times \int dp_i \; V_{ij}(x_j) \times$$

$$\times \left[F_{n+1}(p_1 \cdot\cdot p_i \cdot\cdot p_j \cdot\cdot p_{n+1}) - F_n(p_1 \cdots \check{p}_i \cdot\cdot p_{(ij)} \cdot\cdot p_{n+1}) \right]$$

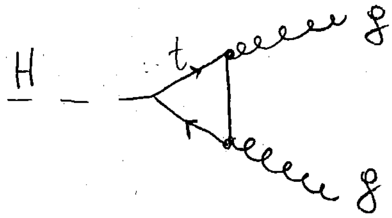
<u>EX</u> $\quad H \to 2\,jet \qquad\qquad n = 2$

2 diagrammi a LO



$= M_2^{(0)}(p_q, p_{\bar{q}})$

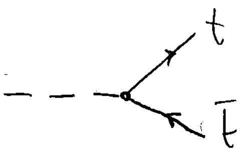
qui (0) significa zero loop di quark leggeri o di gluoni. Il loop del top c'è sempre



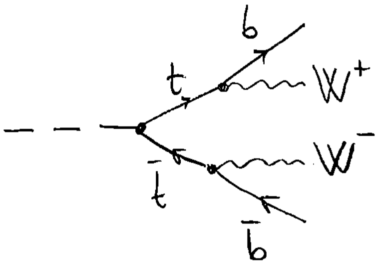
$= M_2^{(0)}(p_g, p_g)$

Un circuito del quark top fa da mediatore tra il bosone di Higgs e gluoni o quark leggeri.

Il quark top ha una vita media così breve che decade prima ancora di adronizzare:

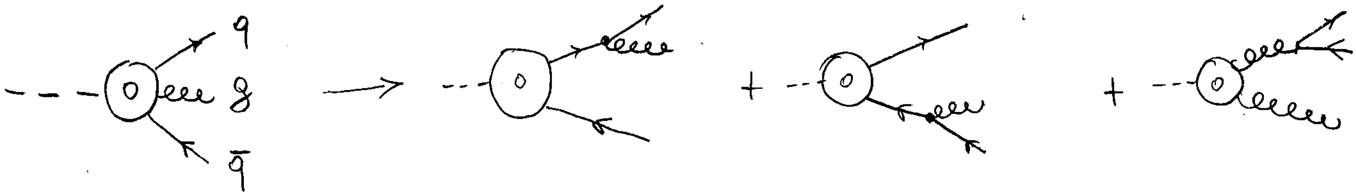


non ha senso come elemento di matrice tra stati (quasi) asintotici



non lo consideriamo per l'osservabile in esame $H \to 2\,jet$

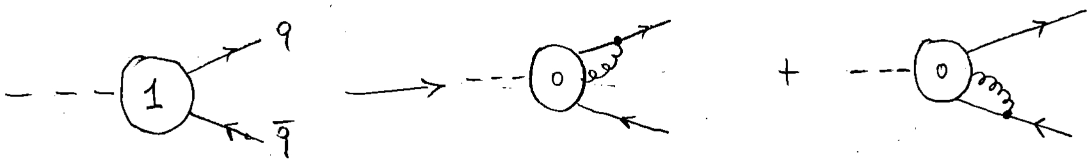
Correzioni reali:



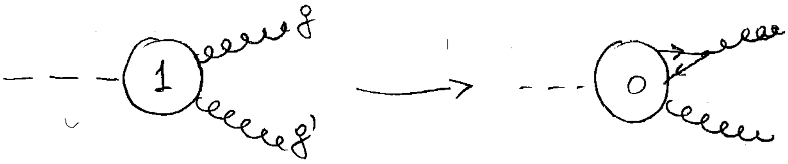
$$\left\{ \left|M^{(0)}_{q\bar q}(p_{gq}, p_{\bar q})\right|^2 U_{gq}(x_g) + \left|M^{(0)}_{q\bar q}(p_q, p_{g\bar q})\right|^2 U_{g\bar q}(x_g) + \left|M^{(0)}_{gg}(p_{q\bar q}, p_g)\right|^2 U_{q\bar q}(x_q) \right\}$$

$$\times F_3(p_q, p_{\bar q}, p_g)$$

Correzioni virtuali



$$\left\{ \left|M^{(0)}_{q\bar q}(p_q, p_{\bar q})\right|^2 U_{gq}(x_g) + \left|M^{(0)}_{q\bar q}(p_q, p_{\bar q})\right|^2 U_{g\bar q}(x_g) \right\} F_2(p_q, p_{\bar q})$$



$$\left|M^{(0)}_{gg}(p_g, p_g')\right|^2 U_{q\bar q}(x_q) \quad F_2(p_g, p_g')$$

$$\Rightarrow \sigma_{NLO} = \int \underset{\substack{\downarrow \\ gq}}{\tilde{d}p_q}\, \tilde{d}p_{\bar q}\, \underset{\substack{\downarrow \\ gq}}{\left|M^{(0)}_{q\bar q}(p_q, p_{\bar q})\right|^2} \int \tilde{d}p_g\, U_{gq}(x_g) \left[F_3(\underbrace{p_q - p_g}_{p_q = p_{gq} - p_g}, p_{\bar q}, p_g) - F_2(\underset{\substack{\downarrow \\ gq}}{p_q}, p_{\bar q}) \right]$$

oppure

+ altre due strutture $[g\bar q]$ e $[q\bar q]$.

Poiché gli integrali $\int dp_i \, V_{ij}(x_i)$ sono divergenti, per ottenere risultati finiti è necessario che

$$F_3(p_q - p_g, p_{\bar{q}}, p_g) \longrightarrow F_2(p_q, p_{\bar{q}}) \qquad \text{se} \begin{cases} p_g \to 0 \\ p_g \parallel p_q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow F_3(p_q, p_{\bar{q}}, p_g) \longrightarrow F_2(p_q + p_g, p_{\bar{q}})$$

In generale si ha la

CONDIZIONE AFFINCHÉ UN OSSERVABILE SIA INFRAROSSO FINITO:

$$F_{n+1}(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_{n+1}) \longrightarrow F_n(p_1 \cdots, p_i + p_j, \cdots, p_{n+1})$$

$$\text{se } p_i \to 0 \quad \text{o} \quad p_i \parallel p_j$$

EX Sezione d'urto totale OK: $F_{n+1} = 1 = F_n$.

Se misuriamo qualcosa, escludendo certi eventi e accettandone altri, $F_{n+1} \neq 1$.
Bisogna allora, per avere un osservabile IR finito, che la mia misura non provochi uno "sbilanciamento" tra reali e virtuali nella regione IR:
la differenza $F_{n+1} - F_n \to 0$.
$\Leftrightarrow$ Il peso con cui considero gli stati finali non deve dipendere dalle particelle soffici o collineari
$\Leftrightarrow$ Nella misura e nei calcoli non posso distinguere stati che differiscono per particelle soffici o per particelle separate in gruppi di particelle collineari.

TEOREMA KLN

(Kinoshita Lee Nauenberg)

In una teoria con campi a massa nulla, le probabilità di transizione non hanno divergenze IR (soffici e collineari) se si effettua la somma su stati degeneri iniziali e finali

stati con fissati numeri quantici (impulso, carica, sapore...) che differiscono per il numero di particelle

NOTA Fino ad ora abbiamo considerato solo stati degeneri finali, in quanto ciò era sufficiente per i nostri scopi.
Quando considereremo partoni nello stato iniziale, dovremo sommare anche su stati degeneri iniziali, oppure ci troveremo delle singolarità IR non cancellate ...

EX Osservabili non IR finiti:

Molteplicità: probabilità di produrre N particelle:

$F_n = 1$, $F_{n+1} = 0$, $F_{n'>n} = 0$

PERTURBATIVAMENTE : divergente

SPERIMENTALMENTE : dipende dalla risoluzione dei rivelatori

RETICOLO : dipende da parametri non perturbativi come Λ_{QCD} o m_π