PROCESSI DURI CON ADRONI NELLO STATO INIZIALE:

MODELLO A PARTONI MIGLIORATO

Consideriamo DIS: $l\,h \to l' X$

$\hat{p} = \xi p \Rightarrow \hat{s} = \xi s$

$$d\sigma \propto \frac{1}{2s} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}(p,q)$$

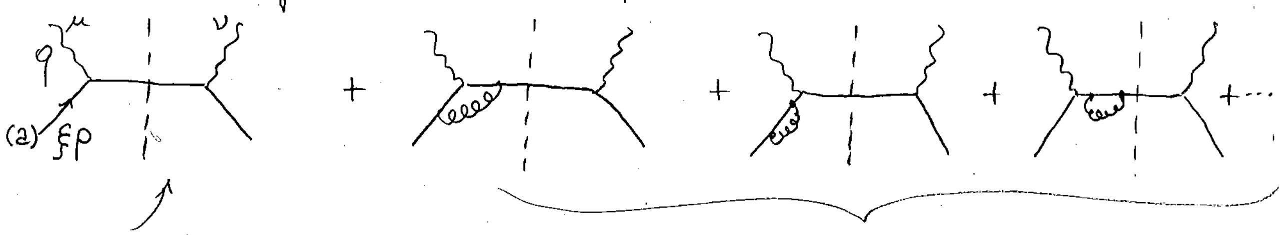
Modello a partoni:

$$d\sigma = \sum_a \int d\xi\, f_a(\xi)\, d\hat{\sigma}_a \qquad d\hat{\sigma}_a \to \frac{1}{2\hat{s}} L^{\mu\nu} \hat{W}^{(a)}_{\mu\nu}(\hat{p},q)$$

$$= \frac{1}{2s} L^{\mu\nu} \sum_a \int \frac{d\xi}{\xi} f_a(\xi)\, \hat{W}^{(a)}_{\mu\nu}(\xi p, q)$$

$$\Rightarrow W_{\mu\nu}(p,q) = \sum_a \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} f_a(\xi)\, \hat{W}^{(a)}_{\mu\nu}(\xi p, q)$$

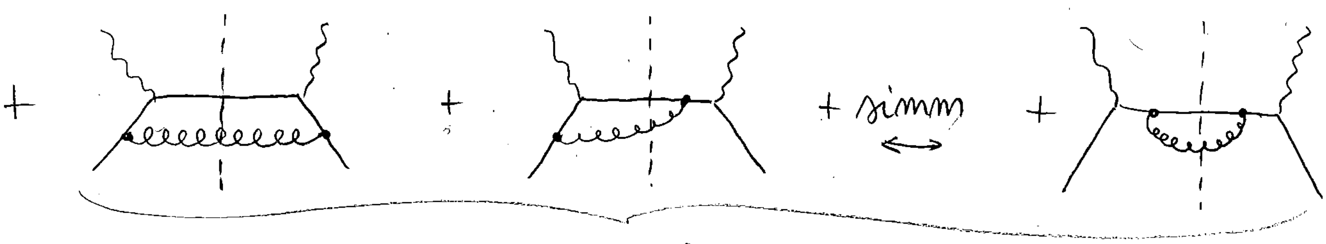
Usiamo il metodo perturbativo per calcolare il TENSORE PARTONICO

$\hat{W}^{(a)}_{\mu\nu} =$ 

MODELLO A PARTONI INGENUO

CORREZIONI VIRTUALI

$$\delta(\xi p + q)^2 = \frac{x}{Q^2}\delta(\xi - x)$$



CORREZIONI REALI

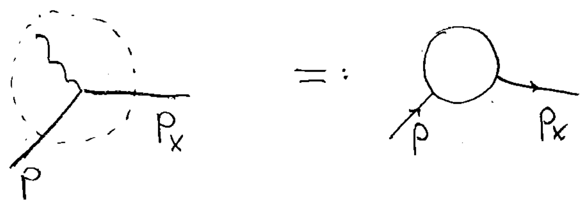
- Le correzioni virtuali e reali sono separatamente divergenti IR
- La somma inclusiva sugli stati finali porta alla cancellazione delle rispettive divergenze IR da stati finali

- Considerando $p_a = \xi P$ come unica particella dello stato iniziale adronico, non si effettua la somma sugli stati iniziali degeneri richiesta dal teorema KLN. Rimangono delle

SINGOLARITÀ DI STATO INIZIALE NON CANCELLATE

Per capirlo meglio, senza fare un conto esplicito, sfruttiamo quello che abbiamo imparato dalla universalità delle singolarità IR

LO :

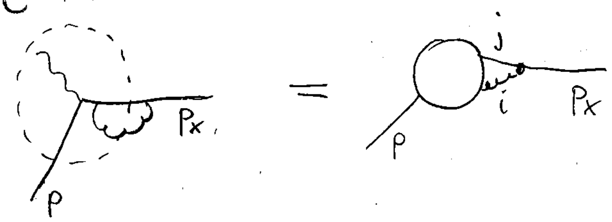


$\sim M^{(0)}(p, p_x)$

NLO : configurazioni IR divergenti

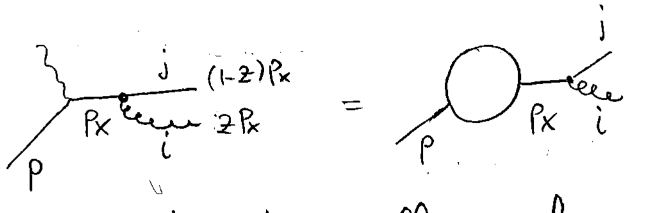
STATO FINALE

VIRTUALE



$\simeq - M^{(0)}(p, p_x) \int_i V_{ij}(z_i)$

REALE

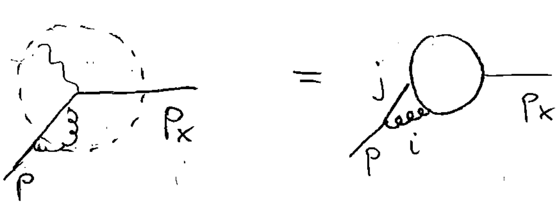


$\simeq M^{(0)}(p, p_x)\, V_{ij}(z_i)$

che, integrato nello sp. fasi cancella la diverg. virtuale

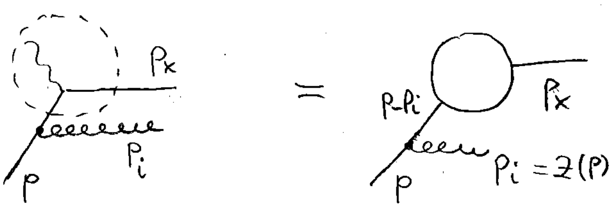
STATO INIZIALE

VIRTUALE



$\simeq - M^{(0)}(p, p_x) \int_i V_{ij}(z_i)$

REALE



$\simeq M^{(0)}(p - p_i)\, V_{ij}(z_i)$

Avere fissato l'impulso dell'unico partone iniziale causa una non-corrispondenza tra divergenze IR virtuali e reali che non si cancellano, se non nel limite soffice in cui $P_i \to 0$, $z_i \to 0$.

Sopravvivono singolarità collineari non cancellate.

PROBLEMA 1: $\nearrow$

Si potrebbe argomentare, giustamente, che le divergenze IR sono regolate dalla dinamica non perturbativa della teoria, che non lascia allontanare le particelle oltre le dimensioni adroniche $R \sim 1/\Lambda_{QCD}$ ossia che taglia gli impulsi inferiori alla scala adronica Λ_{QCD}.

Come abbiamo già osservato, questo comporta che le divergenze IR diventerebbero dei coefficienti logaritmici $\sim \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}$ di fronte ad ogni potenza $\alpha_s(Q^2) \simeq \frac{1}{b_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}}$.

Rimarremmo così con un osservabile sensibile alla dinamica non perturbativa delle lunghe distanze, con un ulteriore

PROBLEMA 2:

La serie perturbativa $1 + \alpha_s(Q^2) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \alpha_s^2(Q^2) \ln^2 \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \dots$ perde di significato, contribuendo con termini di confrontabile grandezza ad ogni ordine perturbativo.

La proprietà notevole della QCD che risolve entrambi i problemi (sensibilità IR) (risommazione a tutti gli ordini) è la

FATTORIZZAZIONE UNIVERSALE → indipendente dal processo
DELLE SINGOLARITÀ COLLINEARI,

grazie alla quale le singolarità collineari che non si cancellano, qualora si identifichi un partone in uno stato iniziale (o finale), sono indipendenti dal processo in esame, e dipendono solamente dal tipo di partone considerato ($q, \bar{q}, g$), dal tipo dei suoi figli (i, j, prodotti dalla scissione) e dalla frazione di impulso di uno dei due (p. es. z_i).

Queste singolarità, di natura IR, essendo universali, possono essere associate alla densità partonica f_a che viene trasformata in una nuova quantità, analogamente alla procedura di rinormalizzazione.

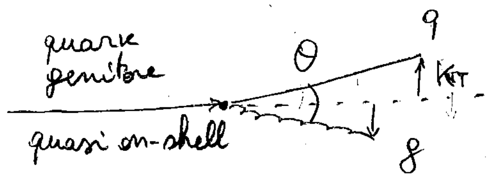
Vediamo il funzionamento di questa procedura con un esempio.
Nel calcolo di $e^+e^- \to q\bar{q}g$ avevamo visto che, nel limite in cui il gluone veniva emesso quasi collineare al quark, la sezione d'urto assumeva la forma

$$d\sigma_{NLO} = \sigma_{LO} \cdot \underbrace{\frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{1+(1-x_g)^2}{x_g} dx_g \frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta}}_{U_{gq}(x_g)}$$

ove x_g è la frazione di energia del gluone,
$x_q = 1 - x_g$ " " " del quark
$x_{\bar q} = 1$ " " " " antiquark

θ è l'angolo tra $\vec{P}_g$ e $\vec{P}_q$, e per $\theta \to 0$ troviamo la singolarità collineare

$$\int^1 \frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta} \simeq \int_0 \frac{d\theta^2}{\theta^2} \simeq \int_0 \frac{dK_T^2}{K_T^2}$$



Lo stesso fattore collineare si ha nel tensore partonico:

$$\hat{W}^{(q)}_{\mu\nu}(\xi p, q) \simeq \hat{W}^{(q,0)}_{\mu\nu}(\xi p, q)\left[1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}(\text{virtuali})\right]$$
$$+ \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_{\Lambda^2}^{Q^2} \frac{dK_T^2}{K_T^2}\int_0^1 dx_q \underbrace{C_F\frac{1+x_q^2}{1-x_q}}_{P_{qq}(x_q)} \frac{\hat{W}^{(q,0)}_{\mu\nu}(x_q \xi p, q)}{x_q}$$

$\Lambda^2_{QCD} \ll K_T^2 \ll Q^2$

Λ è un cutoff IR (pensiamo $\Lambda \sim \Lambda_{QCD}$)

fattore di flusso dovuto al differente riscalamento con p tra σ e W.

Prendiamo in esame la componente di $W_{\mu\nu} \propto \Pi_{\perp\mu\nu}$ cioè F_1:

$$W_{\mu\nu}(p,q) = \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}\right) F_1(x, Q^2)$$

$\hookrightarrow \hat{p} = \xi p$ $\qquad \hookrightarrow \hat{x} = \frac{x}{\xi}$

$\hookrightarrow x_q \xi p$ $\qquad \hookrightarrow \frac{x}{x_q \xi}$

$$\Rightarrow F_1^{(q)}(x) = \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi)\, \hat{F}_1^{(q)}\left(\frac{x}{\xi}\right)$$

$$= \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} f_q(\xi)\left\{\hat{F}_1^{(q,0)}\left(\frac{x}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\int_0^1 \frac{dx_q}{x_q} P_{qq}(x_q)\, \hat{F}_1^{(q,0)}\left(\frac{x}{x_q\xi}\right)\right\}$$

in cui per ora includiamo solo le correzioni reali da quark entrante

Cambiando variabile $z = x_q \xi$ abbiamo (ometto q)

$$F_1(x) = \int \frac{d\xi}{\xi} f(\xi) \int \frac{dz}{z} \left[\delta\left(1-\frac{z}{\xi}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} P\left(\frac{z}{\xi}\right)\right] \hat{F}_1^{(0)}\left(\frac{x}{z}\right)$$

Definendo la convoluzione di due funzioni

$f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ come la funzione

$$[f * g](x) := \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z)\, g\left(\frac{x}{z}\right) \qquad (* \text{ è associativa})$$

ed osservando che $\int_x^1 \frac{dz}{z} \delta(1-z)\, g\left(\frac{x}{z}\right) = g(x) = [\mathbb{1} g](x)$

$$F_1 = f * \left[\mathbb{1} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} P\right] * \hat{F}_1^{(0)}$$

Se interpretiamo f come una PDF "nuda" $f^{(0)}$ ed assorbiamo il fattore divergente $\left[\mathbb{1} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} P\right]$ in essa, definendo una PDF "vestita"

$$f\left(z, \frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) := f^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} \int_z^1 \frac{d\xi}{\xi} f^{(0)}(\xi)\, P_{qq}\left(\frac{z}{\xi}\right)$$

spesso sottointeso

$$= \left[f^{(0)} * \left(\mathbb{1} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} P\right)\right](z)$$

possiamo esprimere

$$F_1(x, Q^2) = \left[f * \hat{F}_1^{(0)}\right](x) = \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z, Q^2)\, \hat{F}_1^{(0)}\left(\frac{x}{z}\right)$$

Chiaramente $\hat{W}_{\mu\nu}$, oltre alla parte divergente IR proporzionale a $\int \frac{1}{K_T^2} P(x_q)$, ha dei contributi IR finiti.

Questa considerazione si trasporta alle $\hat{F}_i$:

$$F_1 = f * \left[\mathbb{1} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\ln \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2} P + \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} P \right) * \hat{F}_1^{(0)} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \overbrace{\mathcal{J}_1}^{\text{IR finita}} \right]$$

$$= \underbrace{f * \left[\mathbb{1} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2} P \right]}_{f\left(z, \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}\right)} * \underbrace{\left[\mathbb{1} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\ln \frac{Q^2}{\mu_F^2} P * \hat{F}_1^{(0)} + \mathcal{J}_1 \right) \right]}_{C_1\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)}$$

in cui abbiamo separato il termine divergente IR introducendo una scala di fattorizzazione μ_F arbitraria, che ha il ruolo di separare $\rightarrow \mu_F \gg \Lambda_{QCD}$

- la regione IR ($K_T^2 < \mu_F^2$) la cui dinamica non perturbativa è inglobata nelle PDF
- la regione perturbativa ($K_T^2 > \mu_F^2$) i cui contributi calcolabili e finiti sono tenuti in conto nelle "funzioni coefficiente" $C_i\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)$.

La definizione delle PDF ricalca concettualmente la procedura di rinormalizzazione delle costanti di accoppiamento: si parte da un parametro "nudo", e si definisce il parametro vestito mediante un fattore moltiplicativo che contiene le divergenze causate dall'integrazione sugli impulsi in una regione che non sappiamo controllare.

L'analogia ha però delle importanti differenze:

- Qui si tratta di singolarità collineari (IR) non UV
- Qui le quantità nude sono funzioni (∞ G.L), non numeri.

Anche se non possiamo calcolare le densità partoniche con tecniche perturbative, vediamo che è possibile predirne la variazione rispetto alla scala μ_F.
Infatti, poiché le funzioni di struttura sono osservabili mentre μ_F è arbitraria, vale

$$\frac{dF_1}{d\ln\mu_F^2} = 0$$

Ma se vale la formula di fattorizzazione delle singolarità collineari che esprime $F_1 = f * C_1$

$$\frac{dF_1}{d\ln\mu_F^2} = \frac{\partial f}{\partial \ln\mu_F^2} * C_1 + f * \frac{\partial C_1}{\partial \ln\mu_F^2} = 0$$

Ora $\dfrac{\partial C_1}{\partial \ln\mu_F^2} = -\dfrac{\alpha_s}{2\pi} P * F_1^{(0)} = -\dfrac{\alpha_s}{2\pi} P * C_1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \ln\mu_F^2} * C_1 = \frac{\alpha_s}{2\pi} f * P * C_1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \ln\mu_F^2} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P * f + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$

La stessa relazione si ricava dalla penultima formula di pag 6:

$$\frac{\partial f}{\partial \ln Q^2} = f^{(0)} * \frac{\alpha_s}{2\pi} P = \frac{\alpha_s}{2\pi} P * f + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \qquad \text{poiché } f = f^{(0)} + \mathcal{O}(\alpha_s)$$

Fino a qui abbiamo considerato solamente

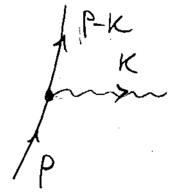
- correzioni $\mathcal{O}(\alpha_s)$ reali
- quark nello stato iniziale che emette un gluone reale

È possibile generalizzare la fattorizzazione delle singolarità ad ordini perturbativi più elevati, includendo tutte le specie partoniche presenti.

Presentiamo un procedimento euristico (la dimostrazione rigorosa è molto più complessa) basato sul conteggio di potenze in una gauge fisica.

Consideriamo un generico diagramma in cui viene emesso un gluone $\varepsilon(K)$ da una particella (quasi) on-shell P_i

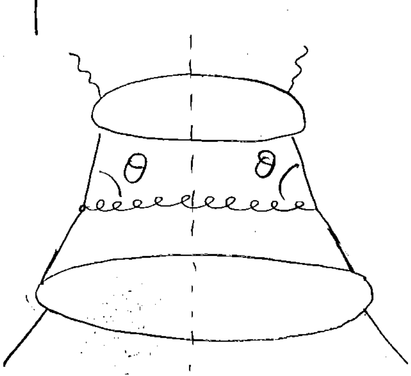
- $\widetilde{dK} \propto \frac{d^3K}{2K^0} \propto K^0 dK^0\, d\varphi\, \underbrace{d\cos\theta} \to d\theta^2$ per $\theta \to 0$
- Elemento di matrice:



propagatore: $\frac{1}{(P-K)^2} = \frac{1}{-2P\cdot K} = \frac{1}{-2P^0K^0(1-\cos\theta)} \overset{\theta\to 0}{\propto} \frac{1}{\theta^2}$

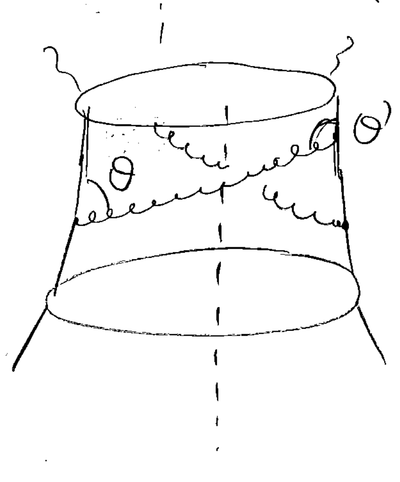
vertice: $P_\mu \varepsilon^\mu(K) \propto \theta \to 0$ perché $\varepsilon \perp K$.
(in gauge fisica!) Se $\theta \to 0 \Rightarrow K \parallel P \Rightarrow \varepsilon \perp P \Rightarrow P\cdot\varepsilon \to 0$

$|\text{Elemento di matrice}|^2$



TERMINE DI QUADRATO

$\frac{\theta}{\theta^2} \cdot \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$ singolarità collineare

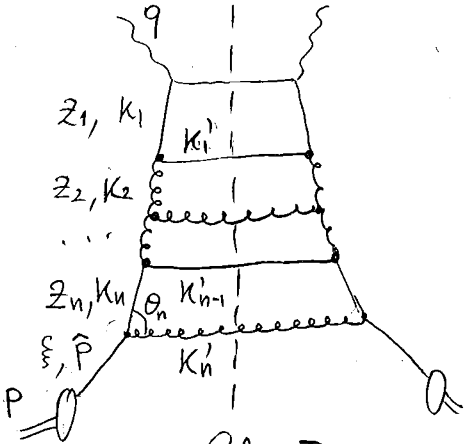


TERMINE DI INTERFERENZA

$\frac{\theta}{\theta^2} \cdot \frac{\theta'}{\theta'^2} \sim \frac{1}{\theta\theta'}$ non sufficientemente singolare da dare una divergenza.

I termini di interferenza non danno divergenze collineari. (10

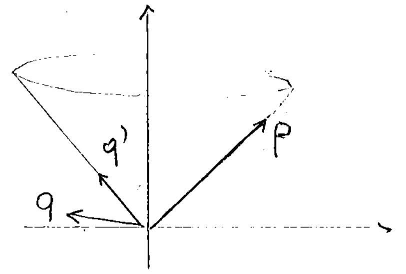
I diagrammi (regolarizzati dal taglio IR Λ) che danno logaritmi collineari $\sim \ln Q^2/\Lambda^2$ hanno una struttura a scala.



Usiamo la parametrizzazione di Sudakov per gli impulsi interni $k_1 \cdots k_n$:

$$k_i = z_i P - \bar{z}_i q' + k_{iT}$$

LONGITUDINALE — TRASVERSO (euclideo)



Ove $q' = q + xP$ di tipo luce.

Gli $\bar{z}_i$ sono determinati dalle condizioni $k_i'^2 = 0$.

Il fatto che i k_i' siano rivolti nel futuro ($k_i'^0 > 0$) implica l'ordinamento degli z_i: $x \leq z_1 \leq z_2 \ldots \leq z_n \leq \xi \leq 1$

Osserviamo il primo vertice dal basso: $\hat{p} \to k_n + k_n'$

Se $k_{nT} \to 0 \Rightarrow \frac{d\theta_n^2}{\theta_n^2} \simeq \frac{dk_{nT}^2}{k_{nT}^2}$ come visto prima.

Al vertice appena sopra $k_n \to k_{n-1} + k_{n-1}'$ abbiamo una analoga divergenza collineare $\frac{d\theta_{n-1}^2}{\theta_{n-1}^2} \simeq \frac{dk_{n-1,T}^2}{k_{n-1,T}^2}$,

perché il k_n sia on shell.

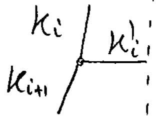
Più precisamente, la divergenza logaritmica vale fino a che $k_{n-1,T}$ è molto maggiore di $k_{n,T}$, per cui il sistema $k_{n-1} + k_{n+1}'$ vede k_n on-shell. Quando $k_{n-1,T}$ è dell'ordine di $k_{n,T}$, k_{n-1} si accorge che k_n non è on-shell e la decrescita $\frac{1}{k_{n-1,T}^2}$ si arresta.

$$k_n' = (1-z_n)P + \bar{z}_n q' - k_{nT}$$
$$0 = k_n'^2 = (1-z_n)\bar{z}_n 2P\cdot q' - k_{nT}^2$$
$$k_n^2 = -z_n \bar{z}_n 2P\cdot q' - k_{nT}^2 = \frac{-k_{nT}^2}{1-z_n}$$

Lo stesso vale per i vertici superiori: la regione con i termini logaritmici è ristretta dalla condizione $\Lambda^2 \ll k_{nT}^2 \ll k_{n-1,T}^2 \ll \ldots \ll k_{1T}^2 \lesssim Q^2$

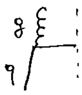
In questa regione ogni vertice contribuisce con un fattore (11)

$$\frac{\alpha_s(k_{iT}^2)}{2\pi} P_{a_i a_{i+1}}\left(\frac{z_i}{z_{i+1}}\right) \frac{dk_{iT}^2}{k_{iT}^2}\, dz_i$$

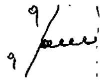


In cui $P_{ba}(z)$ è la funzione di scissione (splitting) che interviene nella scissione partonica $a \to b + b'$.

Abbiamo già calcolato

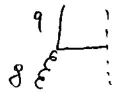


$$P_{gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}$$

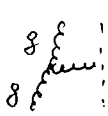


$$P_{qq}(z) = C_F \frac{1-z^2}{1-z}$$

Le altre sono:



$$P_{qg}(z) = T_R n_f \left[z^2 + (1-z)^2\right]$$



$$P_{gg}(z) = 2C_A\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)\right]$$

Notiamo le proprietà di simmetria che si intuiscono scambiando i partoni figli $b \longleftrightarrow b'$ che hanno fraz. d'impulso $z \longleftrightarrow 1-z$ rispettivam.

$$\left.\begin{aligned} P_{gq}(z) &= P_{qq}(1-z) \\ P_{qg}(z) &= P_{qg}(1-z) \\ P_{gg}(z) &= P_{gg}(1-z) \end{aligned}\right\} \quad 0<z<1$$

Vediamo ora come calcolare le $\left\{\begin{matrix}\text{funzioni di struttura} \\ \text{densità partoniche}\end{matrix}\right\}$ risommate.

Con 3 pioli

$$F(x,Q^2) = \sum_{a_1 a_2 a} \int_x^1 dz_1 \int_x^{z_1} dz_2 \int_x^{z_2} d\xi\; \hat{F}_{a_1}\left(\frac{x}{z_1}\right) P_{a_1 a_2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) P_{a_2 a}\left(\frac{z_2}{\xi}\right) f_a(\xi) \quad \Big\} A_2(x)$$

$$\int_{\Lambda^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(k_1^2)}{2\pi} \frac{dk_1^2}{k_1^2} \int_{\Lambda^2}^{k_1^2} \frac{\alpha_s(k_2^2)}{2\pi} \frac{dk_2^2}{k_2^2} \quad \Big\} B_2(Q^2)$$

• B) $\alpha_s(k^2) = \dfrac{1}{b_0 \ln \frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2}} =: \dfrac{1}{b_0 l}$ $\quad dl = \dfrac{dk^2}{k^2}$ $\quad$ (qui $\Lambda > \Lambda_{QCD}$)

$$\Rightarrow B_2 = \frac{1}{(2\pi b_0)^2} \int_{l_\Lambda}^{l_Q} \frac{dl_1}{l_1} \int_{l_\Lambda}^{l_1} \frac{dl_2}{l_2} = (\lambda := \ln l) = \frac{1}{(2\pi b_0)^2} \int_{\lambda_\Lambda}^{\lambda_Q} d\lambda_1 \int_{\lambda_\Lambda}^{\lambda_1} d\lambda_2 = \frac{(\lambda_Q - \lambda_\Lambda)^2}{2!\,(2\pi b_0)^2}$$

Ripetendo il calcolo per un numero arbitrario di scambi, (12)

$$B_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d_2-d_1}{2\pi b_0}\right)^n = \frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi b_0)^n}\ln^n\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2\pi b_0}\ln\frac{\alpha_s(\Lambda^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right]^n$$

- A) Abbiamo una convoluzione nelle frazioni di impulso

$$A_2(x) = \left[\hat{F}_{a_1} * P_{a_1a_2} * P_{a_2a} * f_a\right](x) \qquad \text{(somme su indici ripetuti)}$$

Le convoluzioni si diagonalizzano (cioè si riducono a prodotti) mediante la trasformata di Mellin (equivalente a Laplace con $z = e^{-s}$)

$$\tilde{A}(\omega) := \int_0^1 \frac{dx}{x}\, x^{\omega} A(x) \quad \text{con inversa} \quad A(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi i}\, x^{-\omega}\tilde{A}(\omega) \quad \exists\, c > c_0$$

ascissa di convergenza

Vale $\widetilde{[A_1 * A_2]}(\omega) = \tilde{A}_1(\omega)\tilde{A}_2(\omega)$

$\Rightarrow \tilde{A}_2(\omega) = \tilde{\hat{F}}_{a_1}\, \tilde{P}_{a_1a_2}\, \tilde{P}_{a_2a}\, \tilde{f}_a$ tutte funzioni di ω.

Per generalizzare il calcolo per un numero arbitrario di scambi, consideriamo il precedente prodotto in forma matriciale rispetto agli indici partonici, con $(\hat{F}_{a_1})$ vettore riga, $(P_{a_1a_2})$ matrice, (f_a) colonna.

$\Rightarrow \tilde{A}_n(\omega) = \tilde{\hat{F}}(\omega)\left[\tilde{P}(\omega)\right]^n \tilde{f}(\omega)$. Sommando su n troviamo

$$\Rightarrow \tilde{F}(\omega, Q^2) = \tilde{\hat{F}}(\omega)\sum_n \frac{1}{n!}\left[\frac{\tilde{P}(\omega)}{2\pi b_0}\ln\frac{\alpha_s(\Lambda^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right]^n \tilde{f}(\omega)$$

$$= \tilde{\hat{F}}(\omega)\exp\left\{\frac{\gamma(\omega)}{b_0}\ln\frac{\alpha_s(\Lambda)}{\alpha_s(Q^2)}\right]\tilde{f}(\omega) = \tilde{\hat{F}}(\omega)\left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)}\right]^{-\frac{\gamma(\omega)}{b_0}}\tilde{f}(\omega)$$

in cui abbiamo introdotto la

matrice di dimensione anomala $\gamma_{ab}(\omega) := \frac{1}{2\pi}\tilde{P}_{ab}(\omega)$

Separando $\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu_F^2)}\frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)}$ otteniamo infine

$$F_i(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z}\, C_i\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) f(z, \mu_F^2)$$