URTI PROFONDAMENTE ANELASTICI

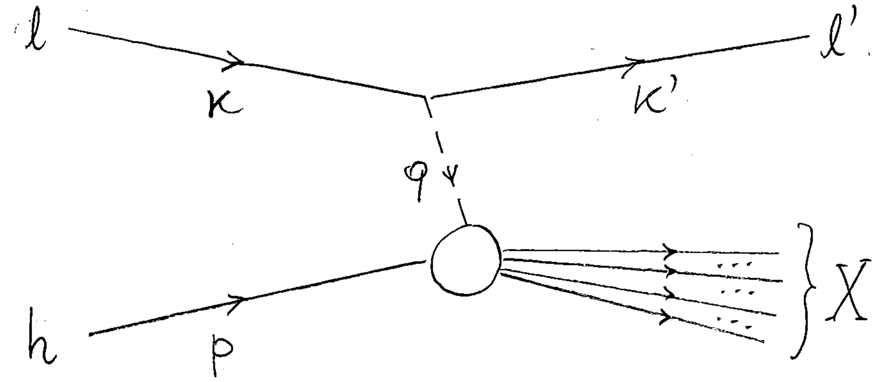
(DIS: DEEP INELASTIC SCATTERING)

Per studiare la struttura interna degli adroni si può procedere in modo analogo a quello di Rutherford per indagare la struttura interna dell'atomo: bombardando il bersaglio (lì atomo, qui adrone) con particelle molto energetiche, la cui lunghezza d'onda di De Broglie sia sufficientemente piccola da "localizzare" gli eventuali costituenti.

Il processo migliore per studiare la struttura degli adroni consiste nell'inviare delle particelle elementari, senza struttura interna, come gli elettroni (fino a prova contraria, o per lo meno fino alla risoluzione che riusciamo ad ottenere) i quali interagiscono con l'adrone. Dallo studio degli stati finali che si producono, possiamo ricavare importanti informazioni sulla sua struttura e quindi sulla dinamica dei suoi costituenti e delle forze che li governano.

Poichè l'elettrone interagisce elettromagneticamente (tramite fotoni) o debolmente (tramite bosoni $W^{\pm}, Z, H$), la sua interazione con l'adrone sarà mediata da uno o più di questi bosoni (nel linguaggio di Feynman

Cinematicamente il processo è descritto così



$q := K - K'$ impulso (di tipo spazio) trasferito dal leptone.

$s := (P+K)^2$ (energia totale nel CM $)^2$

$Q^2 := -q^2 > 0$

$W^2 := (P+q)^2 = P_X^2$ (massa invariante$)^2$ dello stato finale adronico X

$M^2 := P_h^2$

$m^2 := P_e^2 \simeq 0$ (si trascura per gli elettroni)

Sono utili due invarianti adimensionali:

$x := \dfrac{Q^2}{2P\cdot q}$ variabile di Bjorken

$y := \dfrac{P\cdot q}{P\cdot K} = \dfrac{E_{LAB} - E'_{LAB}}{E_{LAB}}$ frazione di energia trasferita nel SDR del LAB ($\vec{P}_h = 0$)

NON è una rapidità

Nel LAB si usa anche $\nu := P\cdot q$

Se permettiamo che X sia uno stato arbitrario, ci sono 3 invarianti indipendenti in questo processo, p. es. $s,\ t = -Q^2,\ P_X^2 = W^2$ (oltre ad m_e, M_h)

Solitamente si sceglie Q^2 come unico invariante dimensionale, ed x, y per completare la terna:

$$s = \frac{Q^2}{xy} + M^2 \qquad W^2 = \frac{Q^2}{x}(1-x) + M^2 .$$

Nella versione più tradizionale e semplice di DIS, si effettuano misure inclusive in X, cioè, fissati P e K (lungo l'asse z) si misura solamente l'impulso K' del leptone uscente, ignorando la conformazione dello stato adronico X.

Ci sono quindi 3 variabili da misurare ($K'^2 = 0$).

Nel LAB solitamente si usano (E', θ, φ) di K'.

Ad alte energie si adottano, oltre a φ, gli invarianti Q^2, x. (y è determinato da s che è fissato).

L'osservabile che si misura è $\dfrac{d\sigma}{dx\, dQ^2\, d\varphi}$.

CALCOLO IN TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

L'interazione $l + h$ è elettrodebole, ci aspettiamo pertanto una buona approssimazione ($\sim 1\%$) nel descrivere il processo all'ordine più basso in questa forza.

$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{H}} |M_{fi}|^2 \, d\Phi$$

$$\mathcal{H} = 4\left[(P\cdot K)^2 - M^2 m^2\right]^{1/2} \simeq 2(s - M^2) = \frac{2Q^2}{xy}$$

$$d\Phi = \widetilde{dK'} \, d\Phi_X \, (2\pi)^4 \delta^4(P + \underbrace{K - K'}_{q} - P_X)$$

$$d\kappa' = \frac{E'^2\, dE'\, d\cos\theta\, d\varphi}{(2\pi)^3\, 2E'} = \frac{y}{x}\, \frac{dQ^2 dx\, d\varphi}{(4\pi)^2\, \pi}$$

Per calcolare $M_{fi} = \langle f|M|i\rangle = \langle l' X|M| l\, h\rangle$
per un generico stato finale, partiamo dall'elemento di matrice $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + i(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\langle f|M|i\rangle$
Perturbativamente

$$S = \mathbb{1} - i\int d^4z\, \mathcal{H}_I(\varphi_{in}(z)) + \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4z_1 d^4z_2\, \mathbb{T}\{\mathcal{H}_I(z_1)\mathcal{H}_I(z_2)\} + \cdots$$

L'interazione elettromagnetica è descritta da

$$\mathcal{H}_I = (j_\mu + J_\mu)A^\mu$$

$$j_\mu = -e\bar\Psi\gamma_\mu\Psi \quad \text{campo leptonico}$$

$$J_\mu = -e\sum_s Q_s \bar\Psi_s \gamma_\mu \Psi_s \quad \text{campo dei quark}$$

s → sapore

All'ordine più basso $O(e^2)$

$$S_{fi} = (-i)^2\int dz_1 dz_2 \langle l' X|\mathbb{T}\; j_\mu A^\mu(z_1)\; J_\nu A^\nu(z_2)|l\, h\rangle$$

e, usando le formule di riduzione per eliminare $\langle l'|$ e $|l\rangle$

$$S_{fi} = (-i)^2\int dz_1 dz_2 (-i)^2\int dx\, dy\; e^{-ikx + ik'y}\; \bar u(k')(i\hat\partial_y - m)$$
$$\langle 0, X|\mathbb{T}\; \psi(y)\bar\Psi(x)\; j_\mu A^\mu(z_1)\; J_\nu A^\nu(z_2)|0, h\rangle(-i\overleftarrow{\hat\partial}_x - m)u(k)$$

Applicando il teorema di Wick per trasformare i prodotti T-ordinati dei campi leptonici $(\psi, \bar\psi)$ e bosonici (A) in contrazioni e quindi propagatori, si ha

$$\langle\ldots\rangle = iS(y - z_1)\, e\gamma_\mu\, iS(z_1 - x)\; iD^{\mu\nu}(z_1 - z_2)\; \langle X|J_\nu(z_2)|h\rangle$$

Gli operatori d'onda $\pm i\hat\partial - m$ trasformano i propagatori $S(z)$

in $\delta^4(z)$, che si possono usare per eliminare $\int dy\, dz_1$:

$$S_{fi} = \int dz\, dx\, e^{-i(k-k')x}\, \bar{u}(k')(-ie\gamma^\mu)u(k)$$

$$\int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\, e^{iq'(x-z)}\, D_{\mu\nu}(q')\, \langle X | J^\nu(z) | h \rangle$$

Trasliamo la corrente adronica nell'origine:

$$\langle X | J^\nu(z) | h \rangle = \langle X | e^{i\mathbb{P}\cdot z} J^\nu(0) e^{-i\mathbb{P}\cdot z} | h \rangle$$

$$= e^{-i(P-P_X)\cdot z} \langle X | J^\nu(0) | h \rangle$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che $\langle X|$ e $|h\rangle$ sono autostati dell'operatore 4-impulso $\mathbb{P}$ con autovalori P_X e P.

L'integrazione in x produce una $\delta^4(k-k'-q')$ che permette di identificare $q'=q$.

L'integrazione in z genera il fattore $(2\pi)^4\delta^4(P+q-P_X)$ che fornisce la conservazione dell'impulso in fronte all'elemento della matrice di transizione, che assume la forma

$$i\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}(k')(-ie\gamma^\mu)u(k)\, \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\, \langle X | J^\nu(0) | h \rangle$$

CASI PARTICOLARI:

Urto elastico con h fermione elementare (di Dirac)

$$\langle X | J^\nu(0) | h \rangle = \bar{u}(P_X)(-ieQ_h\gamma^\nu)u(P)$$

Urto elastico con h fermione generico:

fattori di forma

$$\langle X | J^\nu(0) | h \rangle = \bar{u}(P_X)(-ieQ_h)\left[\gamma^\nu F_1(Q^2) + \frac{i\sigma^{\nu\alpha}}{2M} q_\alpha F_2(Q^2)\right]u(P)$$

Se i fasci di particelle non sono polarizzati e non misuriamo la polarizzazione delle particelle prodotte, la media dei quadrati degli elementi di matrice(*) si può scrivere come il prodotto di due tensori: uno leptonico e uno adronico:

$$\sum_X \int d\Phi_X \, \overline{|M_{fi}|^2} (2\pi)^4 \delta^4(P+q-P_X)$$

$$= \left.\frac{1}{2}\sum_{nn'} \bar{u}'\gamma^\mu u \, \bar{u}\gamma^\nu u' \right\} \frac{1}{2} L^{\mu\nu}(P,q)$$

$$\times \; e^4/(q^2)^2 \qquad\qquad 4\pi W_{\mu\nu}(P,q)$$

$$\times \; \left.\frac{1}{2}\sum_{n_h}\sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(P+q-P_X) \langle h| J_\mu(0)|X\rangle\langle X|J_\nu(0)|h\rangle \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{dQ^2 dx\, d\varphi} = \frac{\alpha^2 y^2}{Q^6} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

NOTA

Con la rappresentazione $(2\pi)^4\delta^4(P+q-P_X) = \int d^4z \, e^{+i(P+q-P_X)\cdot z}$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\sum_{n_h}\sum_X \int d\Phi_X \int d^4z \, e^{iq\cdot z} \langle P| e^{iPz} J_\mu(0) e^{-iP_z}|X\rangle\langle X|J_\nu(0)|P\rangle$$

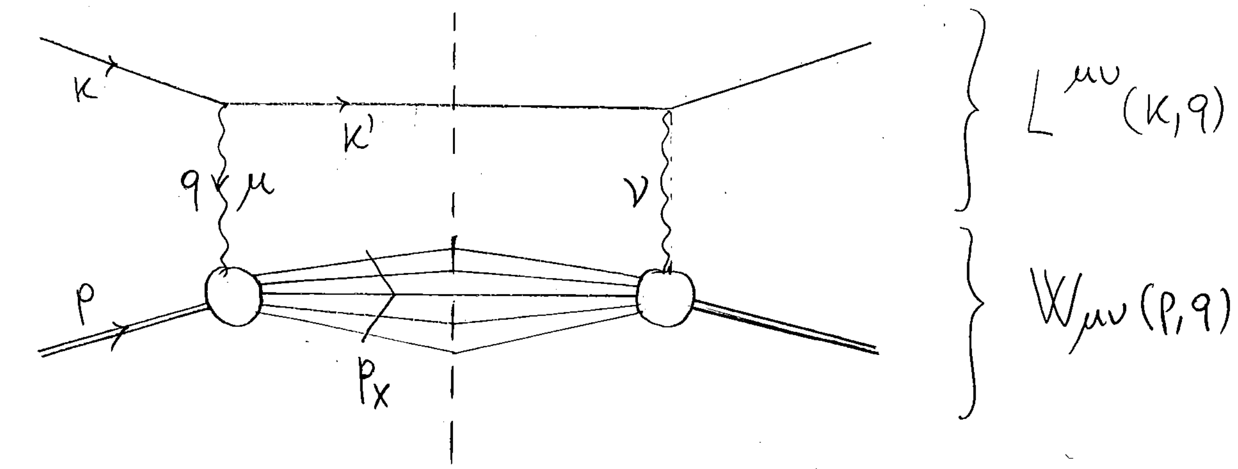
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\sum_{n_h}\int d^4z \, e^{iq\cdot z}\langle h|J_\mu(z)\underbrace{\Big(\sum_X \int d\Phi_X |X\rangle\langle X|\Big)}_{\mathbb{1}\ \text{adronica}} J_\nu(0)|h\rangle$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\sum_{n_h}\int d^4z \, e^{iq\cdot z}\langle h|J_\mu(z) J_\nu(0)|h\rangle$$

cioè la trasf. di Fourier del valore di aspettazione sullo stato adronico iniziale $|h\rangle$ del prodotto di due correnti elettromagnetiche.

(*) Integrando sullo spazio delle fasi $d\Phi_X$ dello stato finale X, e sommando su tutti i possibili stati finali X.

Graficamente



I tensori $L^{\mu\nu}$ e $W_{\mu\nu}$ sono simmetrici nello scambio $\mu \leftrightarrow \nu$.
(se la parità è conservata!)

OSSERVAZIONE

Sarebbe bello avere il commutatore delle correnti in $W_{\mu\nu}$ al posto del semplice prodotto, perchè sappiamo che il supporto di un commutatore di osservabili è contenuto all'interno del cono luce.

Si può vedere che è proprio così:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2}\sum_{h}\int d^4z\, e^{iq\cdot z}\langle h|[J_\mu(z), J_\nu(0)]|h\rangle$$

infatti il termine addizionale è nullo:

$$\int d^4z\, e^{iqz}\langle h|-J_\nu(0)J_\mu(z)|h\rangle = -\sum_X\int d\Phi_X (2\pi)^4\delta^4(P-q-P_X)\langle h|J_\nu(0)|X\rangle\langle X|J_\mu(0)|h\rangle$$

e cinematicamente $P-q=P_X$ è impossibile, perchè viola la conservazione del 4-impulso:

DIM

Se $P-q=P_X$, nel LAB, ove $P=(M,\vec{0})$, $P_X^2 \geq P^2 = M^2$

$\Rightarrow P_X^0 > M = P^0 \quad \Rightarrow q^0 = P^0 - P_X^0 < 0.$

Ma $q^0 = K^0 - K'^0 \quad \Rightarrow K^0 < K'^0$. Ne seguirebbe che l'energia iniziale $K^0 + P^0 < K'^0 + P_X^0$ energia finale $\not\exists$ CVD

Se ci limitiamo a valori di $Q^2 \ll M_Z^2$,
è lecito trascurare i contributi dovuti agli scambi di bosoni Z, e possiamo limitarci all'interazione elettromagnetica, che conserva la parità.

Il tensore $W_{\mu\nu}$ dipende solo dagli impulsi p, q, ed è conservato ($q^\mu W_{\mu\nu} = 0 = W_{\mu\nu} q^\nu$), essendo conservata la corrente e.m. J_μ.

La forma più generale è

$$W_{\mu\nu} = A g_{\mu\nu} + B p_\mu p_\nu + C p_\mu q_\nu + D q_\mu p_\nu + E q_\mu q_\nu$$

con A, B, C, D, E funzioni scalari degli invarianti costruibili con p e q, p.es. Q^2 e $x = \frac{2pq}{q^2}$ (e M^2).

I vincoli di conservazione impongono 3 relazioni tra tali coefficienti: $C = D = -B\frac{pq}{q^2}$; $E = -\frac{A}{q^2} + B\left(\frac{p \cdot q}{q^2}\right)^2$

Ne deriva che $W_{\mu\nu}$ è una combinazione lineare di due tensori indipendenti:

$$W_{\mu\nu} = F_1 \underbrace{\left(\frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - g^{\mu\nu}\right)}_{-\text{ proiettore su } \langle q\rangle^\perp} + F_2 \frac{1}{p \cdot q} \underbrace{\left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right)\left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu\right)}_{\text{propor. al proiettore su } \langle \varepsilon_L \rangle}$$

ove $\varepsilon_L \in \langle p, q\rangle$, $\varepsilon_L \cdot q = 0$

$\varepsilon_L^\mu \propto \left(p^\mu - \frac{pq}{q^2} q^\mu\right)$

Le funzioni $F_i(x, Q^2)$: $i = 1,2$ si chiamano FUNZIONI DI STRUTTURA dell'adrone h e ne descrivono le sue proprietà osservabili.

Esercizio:

Mostrare che, per urto elastico di un generico fermione,

$$F_1(x,Q^2) = \frac{1}{2}\delta(1-x)\left[\mathcal{F}_1(Q^2)+\mathcal{F}_2(Q^2)\right]$$

$$F_2(x,Q^2) = \delta(1-x)\left[\mathcal{F}_1^2(Q^2)+\frac{Q^2}{4M^2}\mathcal{F}_2^2(Q^2)\right]$$

da cui si ricava la formula di Rosenbluth.

Vediamo così che le funzioni di struttura $F_i(x,Q^2)$ generalizzano i fattori di forma $\mathcal{F}_i(q^2)$ al caso di urti anelastici, per i quali è richiesta la dipendenza da una variabile aggiuntiva a q^2, p. es. x.

OSSERVAZIONE:

Il vincolo $x=1$ deriva dalla condizione che P_X sia on-shell per urti elastici:

$$\delta(P_X^2-M^2) = \delta(2Pq+q^2) = \frac{1}{2Pq}\delta\left(1-\frac{Q}{2Pq}\right) = \frac{1}{Q^2}\delta(1-x)$$

Esercizio

Mostrare che, per urto elastico di un fermione elementare,

$$F_1(x,Q^2) = \frac{1}{2}\delta(1-x)$$

$$F_2(x,Q^2) = \delta(1-x)$$

Il sottospazio 3D $\langle q \rangle^\perp$, con proiettore $\Pi_\perp^{\mu\nu}$,
si può scomporre nella somma diretta di:

- uno spazio 2D $\langle p, q\rangle^\perp$, con proiettore $\Pi_T^{\mu\nu}$
- uno spazio 1D $\langle q\rangle^\perp \cap \langle p, q\rangle$ con proiettore $\Pi_L^{\mu\nu}$:

$$\Pi_\perp^{\mu\nu} = \Pi_T^{\mu\nu} + \Pi_L^{\mu\nu}$$

Trascurando d'ora in poi $M \ll Q, W, \sqrt{s}$ negli urti profondamente anelastici, abbiamo

$$\Pi_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}$$

$$\Pi_L^{\mu\nu} = \varepsilon_L^\mu \varepsilon_L^\nu \quad ; \quad \varepsilon_L^\mu = \frac{2x}{Q}\left(p^\mu - \frac{pq}{q^2} q^\mu\right) \quad ; \quad \varepsilon_L \cdot \varepsilon_L = 1$$

Si introduce la funzione di struttura longitudinale

$$F_L := F_2 - 2x F_1$$

$$\Rightarrow W^{\mu\nu} = -F_1 \Pi_\perp^{\mu\nu} + F_2 \frac{1}{2x} \Pi_L^{\mu\nu}$$

$$= -F_1 \Pi_T^{\mu\nu} + F_L \frac{1}{2x} \Pi_L^{\mu\nu}$$

Ricaviamo infine la sezione d'urto differenziale in termini delle funzioni di struttura:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx\, d\varphi} = \frac{2\alpha^2}{xQ^4}\left[x y^2 F_1 + (1-y) F_2 \right]$$

$$= \frac{\alpha^2}{xQ^4}\left[\left(1 + (1-y)^2\right) F_2 - y^2 F_L \right]$$ cfr pag 5