TEOREMA KLN

In una teoria con campi a massa nulla, le probabilità di transizione sommate su tutti gli stati degeneri iniziali e finali non presentano divergenze infrarosse (soffici o collineari)

Per "stati degeneri" si intende stati con la stessa energia.
Una dimostrazione relativamente semplice fa uso della visuale di interazione, seguendo uno sviluppo perturbativo a tutti gli ordini.

Partiamo dalla visuale di Schrödinger, in cui l'evoluzione temporale è governata dall'hamiltoniana

$$H = H_0 + g H_1$$

che supponiamo indipendente dal tempo, e scomposta in una parte "libera" ed una di "interazione".
La visuale di interazione è definita mediante

$$|\psi(t)\rangle_I := e^{iH_0 t}|\psi(t)\rangle_S \qquad \Rightarrow \quad i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I = g\, H_{1I}(t)|\psi(t)\rangle_I$$

$$O_I(t) := e^{iH_0 t}\, O_S\, e^{-iH_0 t}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = U_I(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$$

ove U_I è l'operatore di evoluzione temporale in visuale di interazione:

$$U_I(t,t_0) = \mathbb{T}\exp\left\{-ig\int_{t_0}^{t} H_{1I}(t')dt'\right\}$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ig)^n}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_1\cdots dt_n\ \mathbb{T}\{H_{1I}(t_1)\cdots H_{1I}(t_n)\}$$

In questa visuale, la matrice S è data da

$$S = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t_0\to-\infty}} U_I(t,t_0) = U_I(+\infty,-\infty) = U_I(+\infty,0)\,U_I(0,-\infty)$$
$$= U_I^{+}(0,+\infty)\,U_I(0,-\infty)$$

Consideriamo la probabilità di transizione tra due autostati $|a\rangle \to |b\rangle$ di H_0 : (ometto l'indice I)

$$|S_{ba}|^2 = |\langle b|S|a\rangle|^2 = |\langle b|\,U^{+}(0,+\infty)\,U(0,-\infty)\,|a\rangle|^2$$

$$= \sum_{i,j} \left(\langle b|U^{+}(0,+\infty)|i\rangle\langle i|\,U(0,-\infty)|a\rangle\right)^*$$
$$\underbrace{\langle b|\,U^{+}(0,+\infty)|j\rangle}_{(R^{+}_{b,ij})^*}\underbrace{\langle j|\,U(0,-\infty)|a\rangle}_{R^{-}_{a,ij}}$$

$$= \sum_{i,j} (R^{+}_{b,ij})^* \; R^{-}_{a,ij}$$

con $\{|i\rangle\}$ e $\{|j\rangle\}$ basi di autostati di H_0

In questo modo abbiamo separato la dipendenza dagli stati iniziale e finale di $|S_{ba}|^2$.

Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente dimostrare che

$$R^{\pm}_{ij}(E) := \sum_{a\in D(E)} R^{\pm}_{a,ij}$$

non presenta divergenze IR, in cui abbiamo sommato su una base di stati $\{|a\rangle\}$ dell'autospazio $D(E)$ di H_0 costituito da tutti gli stati con energia E.

Cominciamo ad analizzare il primo ordine perturbativo. 3

$$\langle i | U(0,-\infty) | j \rangle = \langle i | 1 - ig \int_{-\infty}^{0} H_{1I}(t)\,dt\, | j \rangle = \delta_{ij} - ig \int_{-\infty}^{0} dt \langle i | e^{iH_0 t} H_1 e^{-iH_0 t} | j \rangle$$

$$= \delta_{ij} - ig \int_{-\infty}^{0} dt\, e^{i(E_i - E_j - i0)t} \langle i | H_1 | j \rangle$$

$$= \delta_{ij} - ig \frac{\langle i | H_1 | j \rangle}{i(E_i - E_j - i0)}$$

$U(0,+\infty) \quad \rightarrow \quad\quad\quad +i0$

$$\Rightarrow R^{\pm}_{a,ij} = \delta_{ia}\delta_{ja} - \frac{g\langle i | H_1 | a \rangle^*}{E_i - E_a \mp i0}\delta_{ja} - \delta_{ia}\frac{g\langle j | H_1 | a \rangle}{E_j - E_a \pm i0} + \mathcal{O}(g^2)$$

Chiaramente $R_{a,ij}$ può divergere se $E_i = E_a$ o $E_j = E_a$, cioè se l'interazione H_1 permette la transizione da uno stato $|a\rangle$ ad uno $|i\rangle$ con la stessa energia.

$|e^-\rangle \quad\quad |e^- + \text{fotone soffice}\rangle$

$|g\rangle \quad\quad |gg\rangle$ gluoni collineari

Tuttavia, se sommiamo sugli stati degeneri $a \in D(E)$, otteniamo in ogni caso un risultato finito.
I casi possibili sono 4, e possono essere calcolati semplicemente sfruttando le delta di Kronecker e l'hermiticità di H_1.

- $i, j \notin D(E) \quad \Rightarrow \quad R^{\pm}_{ij}(E) = 0$
- $i \notin D(E) \ni j \qquad R^{\pm}_{ij}(E) = - \dfrac{g \langle i | H_1 | j \rangle^*}{E_i - E}$ finito
- $i \in D(E) \not\ni j \qquad R^{\pm}_{ij}(E) = - g \dfrac{\langle j | H_1 | i \rangle}{E_j - E}$
- $i, j \in D(E) \qquad R^{\pm}_{ij}(E) = \delta_{ij} - g \left[\dfrac{\langle i | H_1 | j \rangle^*}{\mp i0} + \dfrac{\langle j | H_1 | i \rangle}{\pm i0} \right]$

uguali ed opposti

Il prossimo passo sarà quello di estendere la dimostrazione a tutti gli ordini perturbativi, procedendo per induzione.
Osserviamo preliminarmente che gli operatori $U_I(0, \pm\infty)$ trasformano autostati di H_0 in autostati di H, pertanto l'operatore $\hat{H}_0 := U_I^\dagger(0, \pm\infty)\, H\, U_I(0, \pm\infty)$ è diagonale nella base degli autostati di H_0 $\Rightarrow$ $U_I \hat{H}_0 = H U_I$

$$\Rightarrow [U_I, \hat{H}_0] = U_I \hat{H}_0 - \hat{H}_0 U_I = (H - \hat{H}_0) U_I = (g H_1 + \underbrace{H_0 - \hat{H}_0}_{\Delta \text{ diagonale}}) U_I$$

Inserendo questa relazione tra $\langle i | \cdots | a \rangle$ si ha

$$(E_a - E_i)\, U_{ia} = g \sum_k V_{ik} U_{ka} + \Delta_i U_{ia} \qquad \text{(eq. 1)}$$

$\langle i | U_I(0, \pm\infty) | a \rangle \qquad \langle i | H_1 | k \rangle \qquad \langle i | \Delta | i \rangle$

che ci permette di scrivere un'equazione ricorsiva per i coefficienti dello sviluppo perturbativo di

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} g^n U^{(n)}, \quad \Delta = \sum_{n=1}^{\infty} g^n \Delta^{(n)}, \quad R = \sum_{n=0}^{\infty} R^{(n)} :$$

$$R_{a,ij} = U^*_{ia} U_{ja} = \sum_{r,s=0}^{\infty} g^{r+s} U^{(r)*}_{ia} U^{(s)}_{ja}$$

$$\Rightarrow R^{(n)}_{a,ij} = \sum_{r=0}^{n} U^{(r)*}_{ia} U^{(n-r)}_{ja} \qquad \text{(eq. 2)}$$

Distinguiamo ora 3 casi:

$\boxed{1}$ $\begin{cases} i \notin D(E) \\ \text{ogni } j \end{cases}$ $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $U^{(r)}_{ia} = \frac{1}{E_a - E_i}\left[\sum_k V_{ik} U^{(r-1)}_{ka} + \sum_{s=1}^{r} \Delta_i^{(s)} U^{(r-s)}_{ia}\right]$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} R^{(n)}_{a,ij} = \frac{1}{E_a - E_i}\left[\sum_k V^*_{ik} \underbrace{U^{(r-1)*}_{ka} U^{(n-r)}_{ja}}_{R^{(n-1)}_{a,kj}} + \sum_{s=1}^{r} \Delta_i^{*(s)} \underbrace{U^{(r-s)}_{ia} U^{(n-r)}_{ja}}_{R^{(n-s)}_{a,ij}}\right] \sum_{r=0}^{n}$$

e, sommando su $\sum_{a\in D(E)}$

poichè $R^{(0)}_{ij}(E) = 0$ se $i \notin D(E)$

$$R^{(n)}_{ij}(E) = \frac{1}{E-E_i}\left[\sum_k V_{ki} R^{(n-1)}_{kj}(E) + \sum_{s=1}^{n-1} \Delta_i^{(s)} R^{(n-s)}_{ij}(E)\right]$$

Quindi abbiamo espresso $R^{(n)}$ in termini di $R^{(m)}, \Delta^{(m)}$ con $m<n$.

Δ_i è finito ad ogni ordine:

$$\Delta_i = \langle i|H_0 - \hat{H}_0|i\rangle = E_i - \langle i|U^\dagger H \underbrace{U|i\rangle}_{} = E_i - \langle \hat{i}|H|\hat{i}\rangle = E_i - \hat{E}_i$$

$|\hat{i}\rangle : H|\hat{i}\rangle = \hat{E}_i|\hat{i}\rangle$ — $\hat{E}_i$: serie in g

Sappiamo che $R^{(0)}$ ed $R^{(1)}$ sono finiti, dal calcolo ad $O(g)$.
Quindi per induzione $R^{(n)}_{ij}(E)$ è finito ad ogni ordine se $i\in D(E)$

$\boxed{2}$ $\begin{cases} j \notin D(E) \\ \text{ogni } i \end{cases}$ La situazione è del tutto analoga alla precedente, infatti

$$R^{\pm(n)}_{ji}(E) = \left(R^{\pm(n)}_{ij}(E)\right)^*$$

$\boxed{3}$ $i, j \in D(E)$. In questo caso sfruttiamo l'unitarietà di U:

$$U_I^\dagger U_I = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{n} U^{(r)\dagger} U^{(n-r)} = 0 \qquad \text{se } n \neq 0$$

$$0 = \langle i | \sum_{r=0}^{n} U^{(r)\dagger} U^{(n-r)} | j \rangle = \sum_{r=0}^{n} \sum_{a} U_{ai}^{(r)*} U_{aj}^{(n-r)}$$

$$= \sum_r \Big(\underbrace{\sum_{a \in D(E)} U_{ai}^{(r)*} U_{aj}^{(n-r)}}_{R_{ij}^{(n)}(E)} + \underbrace{\sum_{a \notin D(E)} U_{ai}^{(r)*} U_{aj}^{(n-r)} \Big)}_{\sum_{E' \neq E} R_{ij}^{(n)}(E')} \ \text{con } \Sigma_r$$

finito per la dimostrazione precedente ($i \notin D(E')$)

$$\Rightarrow R_{ij}^{(n)}(E) = - \sum_{E' \neq E} R_{ij}^{(n)}(E') \qquad \text{è anch'esso finito IR.}$$