Capitolo 5

Date: 2021-10-13 14:29 +0200 Revision: 346 : 70975734981b

Operatori

5.1 Applicazioni lineari tra spazi vettoriali

In questo capitolo studieremo le proprietà di vari tipi di applicazioni[1] tra spazi vettoriali. Come requisito minimale, richiediamo che queste applicazioni preservino la struttura vettoriale tra dominio e codominio, cioè che siano trasformazioni lineari. Il nostro obiettivo principale è quello di studiare gli spazi di funzioni, quindi spazi vettoriali di dimensione infinita. In questo caso abbiamo visto che è cruciale introdurre delle topologie (norme) in questi spazi, per cui le proprietà delle trasformazioni lineari saranno connesse con le topologie degli spazi stessi.

In dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, tutti gli spazi vettoriali sono completi (di Banach) e tutte le applicazioni lineari sono continue, uniformemente continue, e se invertibili, sono omeomorfismi; insomma, si comportano “bene”.

In dimensione infinita le cose cambiano. Iniziamo richiamando i concetti fondamentali

Definizione 5.1 *Siano X e Y due spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K}$. Allora un'applicazione $A : X \to Y$ è detta* lineare *o* omomorfismo *se è omogenea ed additiva, ovvero se per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vale*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \ .$$

L'insieme delle applicazioni $\mathbb{K}$-lineari da X a Y è indicato con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ *(ma frequentemente $\mathbb{K}$ verrà omesso).*

Nota: Solitamente, se il codominio $Y = \mathbb{K}$, le applicazioni lineari sono chiamate *funzionali*. Se invece il codominio coincide con il dominio, $X = Y$, solitamente si parla di *operatori*, e il loro insieme sarà indicato con $\mathrm{Hom}(X)$. Tuttavia compiremo talvolta un abuso di linguaggio chiamando operatori anche le applicazioni lineari tra spazi vettoriali distinti. Infatti, possiamo sempre pensare due spazi distinti come sottospazi di un medesimo spazio vettoriale più vasto (in particolare nel contesto delle successioni numeriche o in quello degli spazi di funzioni) e la distinzione tra operatore e applicazione lineare viene sostanzialmente meno.

[1] Useremo “applicazione” e “trasformazione” come sinonimi. Cercheremo di evitare il termine “funzione” per riservarlo agli elementi dei nostri spazi vettoriali che spesso saranno spazi di funzioni.

Questa definizione presuppone che l'applicazione A sia definita su tutti gli elementi di X. Più in generale si considerano applicazioni lineari definite solamente su un sottoinsieme proprio $D \subset X$ dello spazio X, che viene detto *dominio* dell'applicazione A ed è denotato con il simbolo $\mathcal{D}(A)$.

Le condizioni di linearità richiedono che D abbia una struttura di spazio vettoriale, cioè dati $x, y \in D$, anche una loro C.L. finita devono appartenere a D, dominio della trasformazione. In caso contrario possiamo estendere la sua definizione proprio tramite le relazioni di linearità a tutto il sottospazio $\langle D \rangle$ generato da D. Non è quindi restrittivo supporre che una trasformazione lineare sia definita su tutto uno spazio vettoriale, il quale eventualmente può essere sottospazio di uno spazio vettoriale più vasto. Per le applicazioni lineari è consuetudine indicare la loro azione sui vettori con la notazione Ax al posto di $A(x)$.

A volte risulta però necessario specificare il dominio come sottospazio (proprio o improprio) di uno spazio vettoriale X, in particolare se si intendono studiare le caratteristiche del dominio come sottoinsieme di X, oppure se si vogliono confrontare tra loro due trasformazioni A e B tra i medesimi spazi vettoriali.

Esempio: Consideriamo $X = Y = C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, lo spazio delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. La "derivata" $\partial : C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è un'applicazione lineare, ma è definita solamente sul sottoinsieme $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ delle funzioni derivabili (con derivata continua), ed è un sottospazio di $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Per dire che due trasformazioni coincidono, non è sufficiente verificare che la loro azione (algebrica) coincide, ma devono coincidere anche i domini di definizione: se $A, B \in \mathrm{Hom}(X, Y)$

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) \\ A(x) = B(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}(A) \ . \end{cases} \tag{5.1}$$

Se invece l'applicazione B estende l'azione dell'applicazione A scriveremo

$$A \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \\ A(x) = B(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \tag{5.2}$$

ossia se il dominio di A è contenuto in quello di B e se la restrizione di B al dominio di A coincide con A.

Definizione 5.2 *Sia $A : X \to Y$ applicazione lineare. L'insieme degli elementi di x la cui immagine è l'elemento neutro di Y è detto* nucleo *dell'applicazione A, ed è indicato con il simbolo* [2]

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in X : A(x) = 0_Y\} \ . \tag{5.3}$$

L'insieme di tutte le immagini degli elementi di X è detto immagine *dell'applicazione A, ed è indicata con il simbolo*

$$\mathrm{Im}\, A = \{y \in Y : \exists\, x \in X,\ A(x) = y\} \ . \tag{5.4}$$

[2] Dal tedesco "kernel" che significa "nocciolo" e "nucleo".

È facile mostrare che il nucleo e l'immagine di un'applicazione sono sottospazi vettoriali. In particolare, un'applicazione è iniettiva se e solo se il suo nucleo è il sottospazio banale $\{0_X\}$ — ed in tal caso si dice che la trasformazione è *non singolare* — mentre è suriettiva se e solo se la sua immagine coincide con tutto il codominio Y.

Se un'applicazione $A : X \to Y$ è iniettiva e suriettiva, ossia biiettiva, essa è invertibile, e si ha

$$A^{-1} : Y \to X \ , \qquad A^{-1}Ax = x \quad \forall\, x \in X \ , \qquad AA^{-1}y = y \quad \forall\, y \in Y \tag{5.5}$$

In particolare è importante che entrambe le uguaglianze nell'eq. (5.5) siano soddisfatte: una sola non basta a garantire che A sia invertibile.

Nota: Se una applicazione A è iniettiva ma non suriettiva, si può comunque dire che è invertibile; la sua inversa A^{-1} però sarà definita solo sull'immagine di A, cioè $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathrm{Im}\,(A)$.

Esempio: Nello spazio delle successioni $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definiamo gli operatore di "traslazione a destra" T_d e "traslazione a sinistra" T_s

$$T_d : (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \cdots) \tag{5.6a}$$
$$T_s : (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_1, x_2, \cdots) \ . \tag{5.6b}$$

Evidentemente si ha

$$T_s \circ T_d : (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_0, x_1, x_2, \cdots)$$
$$T_d \circ T_s : (x_0, x_1, x_2, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots) \ ,$$

quindi $T_s \circ T_d = \mathbb{1}$ operatore identità di $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, mentre $T_d \circ T_s$ è il proiettore sul sottospazio delle successioni con il primo elemento nullo. Quindi né T_d né T_s sono invertibili. T_d però diventa invertibile se restringiamo il codominio alla sua immagine; in questo caso $T_d^{-1} = T_s$.

Assegnati due spazi vettoriali X e Y, si può dotare l'insieme di tutte le applicazioni lineari $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$ della struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale definendo le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari di $\mathbb{K}$. Date due trasformazioni A e B, definite ognuna sul proprio dominio (sottospazi di un medesimo spazio vettoriale X), e col medesimo codominio Y, si definisce

$$(A + B)x := Ax + Bx \qquad\qquad \mathcal{D}(A + B) := \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \tag{5.7}$$
$$(\alpha A)x := \alpha(Ax) \qquad\qquad \mathcal{D}(\alpha A) := \mathcal{D}(A) \tag{5.8}$$

Se non specifichiamo il contrario assumiamo che tutte le applicazioni siano definite su tutto lo spazio X, dominio comune di tutte le trasformazioni.

Tra operatori si definisce anche l'operazione di *composizione* $A \circ B$ che dà luogo ad un nuovo operatore lineare, e si denota semplicemente con AB. Affinché questa applicazione naturale sia definita su un vettore x, è necessario che sia $x \in \mathcal{D}(B)$ ed anche che $Bx \in \mathcal{D}(A)$. Questo definisce il *dominio naturale* della composizione:

$$(AB)x := A(Bx) \qquad \mathcal{D}(AB) = \{x \in \mathcal{D}(B) : Bx \in \mathcal{D}(A)\} = B^{-1}\big(\mathcal{D}(A)\big) \ . \tag{5.9}$$

5.2 Applicazioni lineari tra spazi normati

Con l'introduzione della topologia indotta dalla norma, possiamo definire la nozione di applicazioni continue tra spazi normati. In particolare siamo interessati alle applicazioni lineari. Se A è una trasformazione lineare tra due spazi normati X e Y (sul medesimo campo $\mathbb{K}$) possiamo dire che A è continua (secondo le topologie indotte negli spazi X e Y dalle corrispondenti norme) in un punto $x_0 \in X$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$||x - x_0||_X \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad ||Ax - Ax_0||_Y \leq \varepsilon \; .$$

In linea di principio δ, oltre che da ε, può dipendere anche dal punto x_0 in cui si verifica la continuità, ma la linearità dell'applicazione rende δ indipendente dal punto x_0, e la continuità stessa risulta una proprietà globale, cioè indipendente dal punto, come vedremo tra poco.

Per le trasformazioni lineari tra spazi normati è utile introdurre anche un'altra proprietà.

Definizione 5.3 *Un'applicazione lineare $A : X \to Y$ tra due spazi normati è detta* limitata *se esiste una costante reale (finita) M, tale che*

$$||Ax||_Y \leq M||x||_X \quad \textit{per ogni} \quad x \in X \; , \tag{5.10}$$

dove la costante $M \geq 0$ deve essere indipendente da x.

La nozione di limitatezza per una trasformazione lineare è diversa dalla nozione usuale di funzione limitata. A causa della omogeneità, $||A(\alpha x)|| = |\alpha| \, ||Ax||$ può essere reso grande a piacere al crescere di $|\alpha|$, quindi una applicazione lineare non può essere limitata in senso ordinario, a meno che non sia identicamente nulla. Per questa ragione si usa la definizione modificata 5.3, e vedremo come questa risulta molto utile in pratica. Sostanzialmente la condizione (5.10) ci dice che la "pendenza" della trasformazione lineare è limitata. Questo fatto risulta automatico in spazi vettoriali di dimensioni finite dove una trasformazione lineare è rappresentata da una matrice di scalari che forniscono le possibili "pendenze" lungo le varie direzioni. Essendo le direzioni indipendenti in numero finito, esiste sicuramente una pendenza massima e finita. Se la dimensionalità degli spazi vettoriali è infinita questo ragionamento cessa di valere e la limitatezza diventa una caratteristica che una trasformazione lineare può avere o non avere.

Per dimostrare che un'applicazione lineare non è limitata basta trovare una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tale che $\lim_{n\to\infty} \frac{||Ax||}{||x||} \to \infty$.

Esempio: La derivata $\partial : C^1_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con entrambi gli spazi vettoriali muniti della sup-norma è un'applicazione lineare non limitata. Infatti per le funzioni $f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} : a \in \mathbb{R}$ si ha $f'_a(x) = \mathrm{i}af_a(x)$, quindi

$$||f_a||_\infty = 1 \; , \qquad ||\partial f_a||_\infty = |a| \, ||f_a||_\infty = |a|$$

e quindi non esiste alcun $M \in \mathbb{R}$ tale che $||\partial f||_\infty \leq M||f||_\infty$ per ogni $f \in C^1_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Le proprietà di limitatezza e di continuità per applicazioni lineari sono in realtà coincidenti, infatti abbiamo il seguente risultato generale:

Teorema 5.1 *Siano X e Y spazi normati e sia $A : X \to Y$ un'applicazione lineare tra i due spazi. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *A è continua (in ogni punto).*
2. *A è continua nell'origine.*
3. *A trasforma insiemi limitati in insiemi limitati.*
4. *A è limitata.*
5. *Esiste (finito) l'estremo superiore*

$$\sup_{||x||\le 1} ||Ax|| = M < \infty \, . \tag{5.11}$$

In questi casi si ha

$$\sup_{||x||\le 1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \inf\{M \in \mathbb{R} : ||Ax|| \le M||x|| \; \forall\, x \in X\} \, . \tag{5.12}$$

Dimostrazione:

$1 \Rightarrow 2$. Se A è continua in ogni punto, allora è continua anche nell'origine.

$2 \Rightarrow 1$. Se A è continua nell'origine, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} &\text{per ogni } x : ||x|| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad ||Ax|| \le \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad &||Ax - Ax_0|| = ||A(x - x_0)|| \le \varepsilon \quad \text{per ogni } x : ||x - x_0|| \le \delta \end{aligned}$$

cioè A è continua nel punto x_0, arbitrario, quindi A è continua in ogni punto. Notare che δ non dipende da x_0, essendo stato scelto in riferimento all'origine.

$2 \Rightarrow 3$. Sia A continua nell'origine. Preso $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $||x|| \le \delta$ allora $||Ax|| \le \varepsilon$, quindi A trasforma la palla $B(0, \delta]$ in un sottoinsieme della palla $B(0, \varepsilon]$. Per la linearità, la palla $B(0, R]$ viene trasformata in un sottoinsieme della palla $B(0, R\varepsilon/\delta]$, e questo per ogni $R > 0$. Infatti per ogni $y : ||y|| \le R$ vale $y = \frac{R}{\delta}x$ con $||x|| \le \delta$, perciò

$$||Ay|| = ||A\frac{R}{\delta}x|| = \frac{R}{\delta}||Ax|| \le \frac{R}{\delta}\varepsilon$$

Siccome per ogni insieme limitato B esiste $R > 0$ tale che B è contenuto nella palla $B(0, R]$, allora l'immagine di B è contenuta nella palla di raggio finito $R\varepsilon/\delta$, e quindi tale immagine è limitata.

$3 \Rightarrow 4$. Per ipotesi la palla unitaria $B(0, 1]$, che è limitata, è trasformata in un insieme limitato, quindi è contenuta in una palla di raggio M: $||x|| \le 1 \Longrightarrow ||Ax|| \le M$. Allora, per ogni $y \in \mathcal{H}$ non nullo vale

$$\left|\left| A\frac{y}{||y||} \right|\right| \le M \qquad \Longrightarrow \qquad ||Ay|| \le M||y||$$

e quindi A è limitata

$4 \Rightarrow 2$. Se A è limitata, esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale $||Ax|| \le M||x||$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \varepsilon/M > 0$ tale che se $||x|| \le \delta$ allora $||Ax|| \le M||x|| \le M\delta = \varepsilon$.

$4 \Rightarrow 5$. Sempre come conseguenza della limitatezza con costante $M > 0$, abbiamo $||Ax|| \leq M$ per ogni $x : ||x|| \leq 1$. Quindi l'insieme numerico $\{||Ax|| : ||x|| \leq 1\}$ è limitato superiormente ed esiste l'estremo superiore.

$5 \Rightarrow 4$. Sappiamo che $||Ax|| \leq M$ se $||x|| \leq 1$. Allora per ogni $y \in \mathcal{H}$ non nullo vale

$$\left|\left|A\frac{y}{||y||}\right|\right| \leq M \qquad \Longrightarrow \qquad ||Ay|| \leq M||y||$$

e quindi A è limitata.

Le uguaglianze (5.12) si dimostrano facilmente sfruttando l'omogeneità di A e della norma. C.V.D.

Osservazione: La limitatezza introdotta nella definizione 5.3 implica l'uniforme continuità, lo si vede dalla definizione scegliendo $\delta_\varepsilon = \varepsilon/||A||$. Quindi possiamo asserire che:

continuità $\iff$ uniforme continuità $\iff$ limitatezza.

5.2.1 Norma operatoriale

L'insieme delle applicazioni lineari e continue (ossia limitate) è indicato con $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X,Y)$ (e con $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X)$ se $Y = X$). Chiaramente $\mathcal{L}(X,Y)$ è spazio vettoriale, sottospazio di $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Mostriamo che $\mathcal{L}(X,Y)$ può essere dotato di una norma, se definiamo *norma di un'applicazione lineare* l'estremo superiore individuato dall'eq. (5.12) del teorema 5.1:

Definizione 5.4 *Siano X e Y spazi normati ed $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ limitata. Definiamo* norma *di A il numero reale*

$$||A|| := \sup_{||x||=1} ||Ax|| \,. \tag{5.13}$$

Teorema 5.2

1. *$\mathcal{L}(X,Y)$ è spazio normato, con la norma definita nell'eq.* (5.13).
2. *Se Y è spazio di Banach, anche $\mathcal{L}(X,Y)$ è spazio di Banach.*

Esempio: Consideriamo lo spazio funzioni $X = L^2([0,1],\mathbb{C})$ con la norma-2. Data la funzione $x \mapsto V(x) = x(1-x)$ definiamo l'operatore $A : X \to X$ mediante

$$[Af](x) := V(x)f(x)$$

a) Dimostrare che A è operatore limitato.
b) Calcolare la norma di A.

Svolgimento: (a) Poiché V è continua e limitata, se f è a quadrato integrabile anche Vf è a quadrato integrabile e quindi in L^2. La linearità dell'integrale garantisce che l'applicazione $A : f \mapsto Vf$ è lineare. Nell'intervallo $[0,1]$ la funzione V è continua e limitata, ed assume il suo massimo $V_m = 1/4$ nel punto $x_m = 1/2$. Pertanto, per ogni $f \in X$

$$||Af||_2 = \left(\int_0^1 [V(x)f(x)]^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leq V_m \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = V_m||f||_2$$

e quindi A è operatore limitato con una costante di limitatezza $M = V_m = 1/4$, per cui $||A|| \leq 1/4$.

(b) Per trovare la norma dell'operatore, cerchiamo la migliore (cioè la minore) costante di limitatezza M. Siccome nel punto $x_m = 1/2$ la $V(x)$ assume il suo valore massimo $V_m = 1/4$, nell'intorno di quel punto una funzione $f(x)$ viene moltiplicata per valori molto prossimi a V_m. Quindi se ci restringiamo a funzioni non nulle solo in un piccolo intorno di x_m, sostanzialmente queste funzioni vengono moltiplicate per V_m e quindi V_m dovrà essere non più piccola della norma di A. Questa è l'idea. Più precisamente, consideriamo le funzioni $f_\varepsilon \in X$ $(\varepsilon < 1/2)$

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon] \\ 0 & x \notin [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon] \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad ||f_\varepsilon||_2 = \left(\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} 1^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \sqrt{2\varepsilon}$$

mentre

$$||Af_\varepsilon||_2 = \left(\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} V^2(x) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \geq \sqrt{2\varepsilon}\, V(1/2 - \varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon} \left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2 \right)$$

in quanto $V(x) \geq V(1/2 - \varepsilon)$ per ogni $x \in [1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon]$. Allora

$$||A|| = \sup_{f \neq 0} \frac{||Af||_2}{||f||_2} \geq \sup_{\varepsilon \in]0,1/2[} \frac{||Af_\varepsilon||_2}{||f_\varepsilon||_2} = \sup_{\varepsilon \in]0,1/2[} \left(\frac{1}{4} - \varepsilon^2 \right) = \frac{1}{4} \, ,$$

e quindi $||A|| = 1/4 = V_m$.

Esercizio: Calcolare la norma degli operatori T_d e T_s definiti nelle eqq. (5.6).

Esercizio: Dato l'intervallo compatto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, mostrare che l'operatore di moltiplicazione X nello spazio normato $L^p([a, b])$ è continuo, e calcolarne la norma.

Esercizio: Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ si consideri l'operatore $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$[Af](x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Dimostrare che A è limitato e si stimi la sua norma.

Svolgimento:

$$\big|[Af](x)\big| \leq \int_0^x |f(t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^1 1|f(x)| \, \mathrm{d}x = (1|\,|f|) \leq ||1||_2 ||\,|f|\,||_2 = ||f||_2$$

dove 1 è la funzione che vale costantemente 1; l'ultima disuguaglianza è quella di Schwarz. Di conseguenza

$$||Af||_2^2 = \int_0^1 |[Af](x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 ||f||_2^2 \, \mathrm{d}x = ||f||_2^2$$

da cui deduciamo che A è limitato con una costante di limitatezza pari a 1, e quindi $||A|| \leq 1$.

Provando con la famiglia di funzioni $f_a(x) = \Theta(a - x)$ $(0 < a \leq 1)$ si trova

$$\frac{||Af_a||_2}{||f_a||_2} = \sqrt{a \left(1 - \frac{2}{3} a \right)}$$

il cui massimo vale $\sqrt{3/8} = 0.612\ldots$.

Con la famiglia di funzioni $f_a(x) = (1-x)^a$, $a > -1/2$, si trova

$$\frac{||Af_a||_2}{||f_a||_2} = \sqrt{\frac{2(1+2a)}{(2+a)(3+2a)}}$$

il cui massimo vale $\sqrt{20-8\sqrt{6}} = 0.635\ldots$. Quindi $0.635 < ||A|| \leq 1$.

Abbiamo visto che l'insieme delle applicazioni lineari continue forma uno spazio vettoriale normato. In generale, per le trasformazioni non risulta solo definita una struttura algebrica di natura vettoriale, ma possiamo considerare anche un'altra operazione, quella di composizione. Nel caso di applicazioni lineari la composizione definisce ancora una trasformazione lineare, per cui è lecito porsi la questione della continuità o meno della applicazione composta.

Teorema 5.3 *Siano X, Y, Z spazi normati, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Allora la composizione $BA \in \mathcal{L}(X,Z)$ e si ha*

$$||BA|| \leq ||B||\,||A|| \,. \tag{5.14}$$

Dimostrazione: La composizione di applicazioni lineari è lineare. La composizione di funzioni continue è continua. Inoltre, per ogni $x \in X$ si ha

$$||BAx|| \leq ||B||\,||Ax|| \leq ||B||\,||A||\,||x||$$

e quindi $||B||\,||A||$ è una costante M dell'eq. (5.10). Questo significa che BA è limitata (già lo sapevamo dalla continuità) e che $||BA||$, estremo inferiore di tali M, è minore o uguale a $||B||\,||A||$. C.V.D.

5.2.2 Convergenza di operatori

La nozione di convergenza delle successioni infinite, di limite, è alla base dell'analisi matematica. Si comincia dallo studio delle successioni numeriche in $\mathbb{R}$ e poi in $\mathbb{C}$. Si passa poi alla convergenza di successioni di funzioni e più in generale di successioni di vettori in spazi normati, con le complicazioni ma anche con le straordinarie proprietà delle varie topologie. Qui compieremo un ulteriore salto, iniziando ad indagare la convergenza — anzi, alcuni possibili tipi di convergenza — delle successioni di operatori.

Convergenza in norma

Avendo introdotto una topologia in $\mathcal{L}(X,Y)$, possiamo considerare la questione della convergenza di successioni di operatori. La convergenza in norma si definisce come per qualsiasi spazio normato:

Definizione 5.5 *Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una successione di applicazioni lineari continue. La successione si dice* convergente in norma *ad $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $||A_n - A|| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$.*

Osserviamo che questa nozione di convergenza si può applicare solamente alle applicazioni limitate, per le quali è definita la norma. Come per una qualsiasi convergenza rispetto ad una norma, abbiamo la convergenza delle norme stesse:

Proposizione 5.4 *Sia* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *una successione di applicazioni lineari continue convergente in norma ad* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty} ||A_n|| = ||A|| \,. \tag{5.15}$$

Dimostrazione: Dalla disuguaglianza triangolare

$$||A|| = ||(A - A_n) + A_n|| \leq ||A - A_n|| + ||A_n|| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||A_n|| \geq ||A||$$

poiché per ipotesi $\lim_{n\to\infty} ||A - A_n|| = 0$. Viceversa, per lo stesso motivo,

$$||A_n|| = ||(A_n - A) + A|| \leq ||A_n - A|| + ||A|| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} ||A_n|| \leq ||A||$$

e si conclude. C.V.D.

Questa nozione di convergenza in norma è spesso molto stringente. Per questi motivi si introducono altre nozioni di convergenza che sono meno restrittive e che si possono applicare anche ad applicazioni non limitate.

Convergenza forte

Supponiamo di avere una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di applicazioni lineari (non necessariamente continue) fra due spazi normati X e Y, ed assumiamo che per ogni $x \in X$ la successione di vettori $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converga in Y ad un vettore y (che dipende da x). È facile mostrare che la corrispondenza $x \mapsto y$ è lineare, e quindi definisce un'applicazione lineare tra X e Y. Si parla in questo caso di *convergenza forte*.

Definizione 5.6 *Una successione di applicazioni lineari* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Hom}(X,Y)$ *tra due spazi normati* X *e* Y converge fortemente *se, per ogni* $x \in X$, *esiste il limite in* Y *della successione* $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$, *ed in questo caso il limite definisce una trasformazione lineare* $A \in \mathrm{Hom}(X,Y)$

$$Ax := \lim_{n\in\infty} A_n x \,, \qquad \textit{per ogni } x \in X \,.$$

Dimostrazione: Per ipotesi A è definita per ogni $x \in X$. Se poi $y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha, per la continuità della somma e del prodotto per scalari rispetto alla topologia della norma,

$$A(\alpha x + y) := \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha A x + A y \,.$$

C.V.D.

La convergenza forte è una proprietà più debole della convergenza in norma.

Teorema 5.5 *Siano* X *e* Y *spazi normati ed* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *una successione di applicazioni lineari continue che converge in norma ad* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Allora la successione converge fortemente ad* A.

Dimostrazione:

$$||A_n - A|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Longrightarrow \quad ||A_n x - Ax|| \leq ||A_n - A||\,||x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{per ogni } x \in X.$$

C.V.D.

Quindi, se una serie che converge fortemente ad A converge anche in norma ad un'applicazione B, deve essere $B = A$ e di conseguenza A deve essere limitata.

Cosa possiamo dire invece di una successione di applicazioni lineari che converge fortemente ad un'applicazione A? In generale, non è detto che A sia limitata, neanche se imponiamo che la successione (A_n) sia costituita da applicazioni limitate. Quindi la convergenza forte non implica la convergenza in norma, come si vede nel seguente

Esempio: Nello spazio normato l^p con $1 < p < \infty$ definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'operatore di traslazione a sinistra di n elementi:

$$T_s^n(x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots) = (x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}, \cdots)\ .$$

Consideriamo ora la successione $(T_s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ di questi operatori ed analizziamo la norma-p di $T_s^n x$:

$$||T_s^n x||_p = ||(x_n, x_{n+1}, \cdots)||_p = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

che, a parte la radice p-esima (la potenza $1/p$) è il resto n-esimo della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p$. Siccome tale serie è convergente per definizione (siamo in l^p), il suo resto n-esimo tende a zero, e così anche la sua radice p-esima (essendo quest'ultima una funzione continua). Pertanto

$$T_s^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in l^p \qquad \Longrightarrow \qquad T_s^n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{0} \in \mathcal{L}(l^p) \quad \text{fortemente.}$$

È facile vedere che $||T_s^n|| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre ovviamente $||\mathbf{0}|| = 0$. Quindi la convergenza a $\mathbf{0}$ degli operatori T_s^n non può essere in norma, perché se $T_s^n \to B$ in norma, $||B|| = \lim_{n\to\infty} ||T_s^n|| = 1$, ma al tempo stesso il limite forte $\mathbf{0}$ dovrebbe coincidere con il limite in norma B, il che non può essere.

Ci poniamo ora la questone di stabilire in quali casi la convergenza forte possa definire una trasformazione A continua, assumendo ovviamente che tutte le trasformazioni lineari A_n siano continue. La proprietà cruciale è la completezza del dominio e codominio.

Teorema 5.6 *Siano X ed Y spazi di Banach, ed $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ una successione di applicazioni lineari e continue che converga fortemente ad A. Allora A è continua: $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

Questo non significa che la successione (A_n) converga in norma ad A, come mostrato nell'esempio precedente.

Nel precedente teorema è cruciale anche la completezza del dominio X. Infatti, se gli A_n sono definiti solo su un sottoinsieme $D \subset X$ non completo, allora anche se D è denso in X, anche se gli A_n sono continui, anche se esiste il limite forte $A : D \to Y$ (necessariamente continuo), non è detto che l'estensione continua degli A_n converga fortemente ad un'applicazione definita su tutto X.

Esempio: Consideriamo ancora lo spazio l^p ed il suo sottoinsieme denso l_f costituito dalle successioni con un numero finito di elementi non nulli, cioè

$$l_f = \{x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \exists\, m \in \mathbb{N}\,,\ x_k = 0 \quad \forall\, k \geq m\}\ .$$

In l_f possiamo definire l'operatore limitato $A_n := nT_s^n$:

$$A_n : l_f \to l^p \qquad (x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots) \mapsto n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}, \cdots)$$

cioè l'operatore di traslazione a sinistra di n elementi, moltiplicato per n. Chiaramente $||A_n|| = n$, quindi gli A_n sono limitati in l_f, e fissato $x \in l_f$ si ha che $A_n x = 0$ per ogni $n > m$, ove m è l'indice dell'ultimo elemento non nullo di x. Quindi

$$\lim A_n x = 0 \quad \forall\, x \in l_f$$

per cui A_n converge fortemente all'operatore nullo $\mathbf{0} \in \mathcal{L}(l_f)$.

Gli A_n sono ben definiti anche come operatori di l^p e sono limitati in $\mathcal{L}(l^p)$: $||A_n|| = n$. Tuttavia la successione degli A_n non converge fortemente in $\mathrm{Hom}(l^p)$. Per verificarlo, applichiamo A_n all'elemento $x \in l^p$ definito da $x_k = (k+1)^{-\alpha/p}$ con $\alpha > 1$. Innanzitutto

$$||x||_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} |(k+1)^{-\alpha/p}|^p = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}k = 1 + \frac{1}{\alpha - 1} < \infty$$

e quindi $x \in l^p$. Poi

$$\begin{aligned} ||A_n x||_p^p &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[n \left(\frac{1}{n+k+1} \right)^{\alpha/p} \right]^p = n^p \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \right)^\alpha \\ &\geq n^p \int_{n+1}^\infty m^{-\alpha}\,\mathrm{d}m = n^p \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \overset{*}{\sim} n^{p+1-\alpha}\ . \end{aligned}$$

Scegliendo $\alpha : p + 1 - \alpha > 0$ ossia $1 < \alpha < 1 + p$ si ha che $||A_n x||$ diverge e quindi non può esistere un limite forte per gli A_n.

5.2.3 Estensione continua di applicazioni continue

Spesso, dato uno spazio vettoriale topologico, si riesce a definire una applicazione lineare solo su un suo sottospazio, magari denso. Ci possiamo quindi chiedere se sia possibile estendere tale applicazione lineare a tutto lo spazio, e se, in caso affermativo, tale estensione sia unica, lineare e continua. In generale possiamo dire che:

- Se l'applicazione non è continua, non si riesce ad estenderla a tutto lo spazio (al massimo la si riesce ad estendere ad uno spazio un pò più grande di quello di partenza).

- Se l'applicazione è continua invece l'estensione è possibile e unica. Possiamo far riferimento al teorema generale 3.10 di estensione di una funzione uniformemente continua per determinare l'esistenza e l'unicità dell'estensione. Nel caso particolare di una applicazione lineare e continua questo può essere formulato come segue.

Teorema 5.7 (di estensione continua) *Siano X e Y spazi di Banach, D un sottospazio lineare denso di X ed A un'applicazione lineare continua da D in Y: $A \in \mathcal{L}(D, Y)$. Allora esiste un'unica applicazione lineare continua $\overline{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ che estende A a tutto lo spazio X:*

$$\overline{A}x = Ax \qquad \textit{per ogni } x \in D\ .$$

Inoltre l'estensione $\overline{A}$ ha la stessa norma di A:

$$||\overline{A}|| = ||A||\ .$$

Dimostrazione: Abbiamo già osservato che un'applicazione lineare continua è uniformemente continua. Per il teorema 3.10 esiste un'unica estensione continua di A. L'estensione è lineare, infatti, per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e per ogni $x, y \in X$ esistono due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D che convergono ad x ed y rispettivamente, e si ha

$$\overline{A}(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} A(\alpha x_n + y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} Ax_n + \lim_{n\to\infty} Ay_n = \alpha Ax + Ay\ .$$

Per quanto riguarda la norma di $\overline{A}$, sfruttando la continuità della norma in X abbiamo che

$$||\overline{A}x|| = ||\lim_{n\to\infty} Ax_n|| = \lim_{n\to\infty} ||Ax_n|| \le \lim_{n\to\infty} ||A||\,||x_n|| = ||A||\,||\lim_{n\to\infty} x_n|| = ||A||\,||x||$$

e quindi $||\overline{A}|| \le ||A||$. Ma poiché $D \subset X$, vale anche

$$||\overline{A}|| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||\overline{A}x||}{||x||} \ge \sup_{x\in D\setminus\{0\}} \frac{||\overline{A}x||}{||x||} = \sup_{x\in D\setminus\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||} = ||A||$$

e quindi $||\overline{A}|| = ||A||$. C.V.D.

5.2.4 Serie operatoriali

In svariati campi della fisica e della matematica si è portati a considerare funzioni di operatori, tipicamente $f : \mathrm{Hom}(X) \to \mathrm{Hom}(X)$. Si pensi, ad esempio, al passaggio dalla meccanica classica alla meccanica quantistica, in cui si sostituiscono alle variabili numeriche classiche dei corrispondenti operatori quantistici. Pertanto le funzioni numeriche delle variabili classiche saranno sostituite da opportune funzioni di operatori. Si pensi anche alla teoria delle rappresentazioni dei gruppi continui, in cui gli elementi del gruppo sono rappresentati da operatori, i quali possono essere espressi come esponenziali dei rispettivi generatori, operatori a loro volta.

Siccome molte funzioni dell'analisi sono definite tramite i loro sviluppi in serie di potenze, l'idea è quella di estendere tali funzioni a serie di potenze di operatori. Infatti gli endomorfismi $\mathrm{Hom}(X)$ di uno spazio vettoriale X, oltre a costituire uno spazio vettoriale, formano un'*algebra associativa* introducendo l'operazione di composizione (che pensiamo come una sorta di moltiplicazione: $A \circ B \equiv AB$). In particolare, per ogni operatore A definito su tutto X, ha senso definire la sua *potenza* n-esima

$$A^n \equiv A \circ A \circ \cdots \circ A \qquad (n \text{ volte})$$

e quindi serie di potenze di A.

Dovendo trattare con questioni di convergenza, l'ambiente di lavoro ideale è quello degli spazi di Banach. In seguito ci limiteremo ad operatori continui definiti su uno spazio di Banach X. La domanda che ci poniamo è: data la successione di numeri complessi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sotto quali ipotesi esiste la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n \tag{5.16}$$

ed in quale senso vale l'eventuale convergenza?

Prima di concentrarci sulle serie di potenze di operatori, consideriamo il caso più generale di *serie di vettori* che sfrutta solo la struttura vettoriale di uno spazio normato e non un'eventuale ulteriore operazione algebrica. Quello che vogliamo fare è considerare serie di potenze in campo complesso i cui coefficienti siano vettori in uno spazio di Banach.

Teorema 5.8 (Cauchy-Hadamard) *Sia V uno spazio di Banach sul campo complesso, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di V e $z \in \mathbb{C}$. Posto*

$$\rho := \left(\limsup_{n\to\infty} ||a_n||^{1/n}\right)^{-1} , \tag{5.17}$$

la serie di potenze vettoriale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{5.18}$$

converge assolutamente per ogni z tale che $|z| < \rho$ e non converge per ogni z tale che $|z| > \rho$.

Dimostrazione: Identica a quella delle serie numeriche, sostituendo al modulo in $\mathbb{C}$ la norma in V degli a_n. In questo contesto, convergenza assoluta significa che converge la serie (reale) delle norme dei termini, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||a_n z^n|| = \sum_{n=0}^{\infty} ||a_n||\,|z|^n < \infty .$$

C.V.D.

Il valore ρ dato dalla (5.17) è detto *raggio di convergenza* della serie di potenze vettoriale. In modo del tutto analogo a quanto visto per le serie numeriche, all'interno del cerchio di convergenza, la serie (5.18) definisce una *funzione somma*

$$f : B(0,\rho[\ \to\ V , \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{5.19}$$

che risulta derivabile ovunque, infinite volte, termine a termine, e le serie derivate hanno lo stesso raggio di convergenza ρ.

Le serie di potenze operatoriali (per operatori continui) sono un caso particolare di serie vettoriali in cui i coefficienti a_n sono potenze n-esime di un operatore, eventualmente moltiplicate per un coefficiente numerico $c_n \in \mathbb{C}$: $a_n = c_n A^n \in V = \mathcal{L}(X)$. Siccome $||a_n|| = |c_n|\,||A^n|| \leq |c_n|\,||A||^n$, si ha che

$$\rho := \left(\limsup_{n\to\infty} (||c_n A^n||^{1/n})\right)^{-1} \geq \left(\limsup_{n\to\infty} (|c_n|^{1/n}||A||)\right)^{-1} = \frac{R}{||A||} ,$$

ove R è il raggio di convergenza della serie di potenze numerica $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$. In definitiva

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < R) \tag{5.20}$$

$$f(zA) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (zA)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n\, z^n \qquad \left(|z| < \rho \geq \frac{R}{||A||}\right) \tag{5.21}$$

$$(z = 1) \quad \Longrightarrow \quad f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n \qquad \left(1 < \rho \geq \frac{R}{||A||}\right) \tag{5.22}$$

Poiché la convergenza assoluta implica la convergenza in norma, la serie (5.22) converge in norma se $\rho > 1$ — in particolare se $||A|| < R$ — mentre diverge in norma se $\rho < 1$. Questa è la risposta alla domanda che ci siamo posti relativamente all'eq. (5.16).

Esempio: La **serie esponenziale**. Definiamo l'esponenziale di un operatore mediante la serie operatoriale

$$\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \ . \tag{5.23}$$

Essa ha raggio di convergenza infinito, quindi è ben definita per ogni operatore limitato. Bisogna fare attenzione al fatto che, se due operatori $A, B \in \mathcal{L}(X)$ non commutano, cioè $AB \neq BA$, allora neanche i rispettivi esponenziali commutano, e non vale neanche più la proprietà che il prodotto degli esponenziali è l'esponenziale della somma. Se invece gli operatori commutano, allora vale

Proposizione 5.9 *Siano $A, B \in \mathcal{L}(X)$ con X spazio di Banach. Se A e B commutano, ossia se si annulla il loro* commutatore

$$[A, B] := AB - BA = 0 \tag{5.24}$$

allora

$$\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$$

Dimostrazione: Notiamo innanzitutto che, se $[A, B] = 0$, allora $[A^m, B^l] = 0$ per ogni $m, l \in \mathbb{N}$. Sfruttando la formula del binomio di Newton

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

e potendo cambiare a piacimento l'ordine delle potenze degli operatori abbiamo

$$\mathrm{e}^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

Scambiando l'ordine di somma si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty}$ avendo posto $m := n - k$. Pertanto

$$\mathrm{e}^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \frac{B^m}{m!} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \ .$$

C.V.D.

Dalla precedente proposizione si deduce che, dato un qualsiasi operatore continuo $A \in \mathcal{L}(X)$, il suo esponenziale è invertibile e si ha

$$(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A} . \tag{5.25}$$

Esercizio: Sia $X = C([a,b])$ lo spazio di Banach delle funzioni continue sull'intervallo compatto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con la sup-norma. Sia $h \in C([a,b]\times[a,b])$ una funzione continua e definiamo l'operatore $B \in \mathrm{Hom}(X)$ mediante

$$[Bf](x) = \int_a^b h(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y .$$

(a) Dimostrare che B è continuo.
(b) Calcolare e^{zB}, $z \in \mathbb{C}$, nel caso in cui $h(x,y) = 1$.

Svolgimento: (a) L'integrale che definisce l'operatore esiste, in quanto l'integrando è sempre una funzione continua di y integrata in un compatto. La funzione di x che ne risulta è continua e definita per ogni $x \in [a,b]$, quindi B è ben definito come applicazione da X in X. Per la linearità dell'integrale, B è chiaramente lineare.

Per verificare la limitatezza di B, calcoliamo innanzitutto

$$|[Bf](x)| = \left|\int_a^b h(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \le \int_a^b |h(x,y)|\,|f(y)|\,\mathrm{d}y \le \int_a^b |h(x,y)|\,\mathrm{d}y\,||f||$$

quindi

$$||Bf|| = \sup_{x\in[a,b]} |[Bf](x)| \le \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |h(x,y)|\,\mathrm{d}y\,||f||$$

e vediamo subito che il numero reale

$$M_h := \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |h(x,y)|\,\mathrm{d}y \tag{5.26}$$

è costante di limitatezza per B, anzi, $||B|| = M_h$, come si può verificare prendendo $f =$ costante. (Siccome $|Bf|$ è una funzione continua definita su un intervallo compatto, il sup in realtà è un massimo). Se servisse, potremmo anche maggiorare

$$||B|| = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |h(x,y)|\,\mathrm{d}y \le |b-a| \sup_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]} |h(x,y)| .$$

(b) Per calcolare l'esponenziale di zB, $z \in \mathbb{C}$, calcoliamo preliminarmente l'azione delle potenze di B su una generica funzione $f \in X$:

$$\begin{aligned}
[Bf](x) &= \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{costante}\\
[B^2f](x) &= \int_a^b [Bf](y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^b [Bf](y')\,\mathrm{d}y'\right)\mathrm{d}y = (b-a)[Bf](x) \qquad \text{costante}\\
&\vdots\\
[B^nf](x) &= \int_a^b [B^{n-1}f](y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_a^b [B^{n-1}f](y')\,\mathrm{d}y'\right)\mathrm{d}y = (b-a)^{n-1}[Bf](x)
\end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} e^{zB}f &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zB)^n}{n!}f = f + zBf + \frac{z^2}{2}(b-a)Bf + \frac{z^3}{3!}(b-a)^2Bf + \cdots \\ &= f + \frac{1}{b-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n(b-a)^n}{n!}\,Bf = f + \frac{e^{z(b-a)}-1}{b-a}Bf \end{aligned}$$

e quindi

$$e^{zB} = \mathbb{1} + \frac{e^{z(b-a)}-1}{b-a}B\ .$$

5.3 Operatori in spazi di Hilbert

5.3.1 Il teorema di Fischer-Riesz

Il prodotto scalare definito in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ permette di associare ad ogni vettore $x \in \mathcal{H}$ un'applicazione lineare da $\mathcal{H}$ in $\mathbb{C}$ in questo modo: prendiamo $x \in \mathcal{H}$ e consideriamo l'applicazione "prodotto scalare per x"

$$f_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}\ , \qquad y \mapsto (x|y)\ . \tag{5.27}$$

Questa applicazione è lineare (e non antilineare) per la linearità del prodotto scalare nella variabile destra, ed è anche limitata (perciò continua) grazie alla disuguaglianza di Schwarz:

$$|f_x(y)| = |(x|y)| \leq ||x||\,||y|| = M||y|| \tag{5.28}$$

con $M = ||x||$ indipendente da y. Pertanto $f_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathbb{C}) =: \mathcal{H}^*$, ove $\mathcal{H}^*$ è lo spazio *duale* [3] di $\mathcal{H}$. Ricordiamo che le applicazioni lineari a valori sul corpo degli scalari sono generalmente chiamate "funzionali".

La norma di f_x si valuta facilmente. Poiché la disequazione (5.28) vale per ogni y, si deduce che $||f_x|| \leq ||x||$. D'altra parte, prendendo $y = x$ si ha $f_x(x) = (x|x) = ||x||\,||x||$ e quindi $||f_x||$ deve essere almeno pari a $||x||$. In conclusione

$$||f_x|| = ||x||\ . \tag{5.29}$$

Quindi la corrispondenza che associa ad x il funzionale f_x preserva la norma ed è quindi un'isometria da $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}^*$. Poiché il prodotto scalare è antilineare (e non degenere) nella variabile sinistra, la corrispondenza $x \mapsto f_x$ è antilineare ed iniettiva:

$$\begin{aligned} &f_{\alpha x+\beta x'} = \alpha^* f_x + \beta^* f_{x'} \\ &x \neq y \quad \Longrightarrow \quad f_x \neq f_y\ . \end{aligned}$$

La cosa notevole è che tale corrispondenza è anche suriettiva, cioè qualsiasi funzionale lineare continuo è equivalente al prodotto scalare (a sinistra) per un qualche vettore:

[3] In generale, dato un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, si definisce *duale algebrico* l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in $\mathbb{K}$: $V^\star := \mathrm{Hom}(V,\mathbb{K})$. Per gli spazi vettoriali normati, in cui è presente il concetto di continuità , si introduce anche il *duale topologico* come l'insieme di tutte le applicazioni lineari *continue* da V in $\mathbb{K}$: $V^* := \mathcal{L}(V,\mathbb{K})$. Chiaramente sia $V^\star$ che V^* sono spazi vettoriali e si ha $V^* < V^\star$. In questo capitolo ci interessiamo al duale topologico.

Teorema 5.10 (Fischer-Riesz) *Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert. Per ogni funzionale lineare e continuo $f \in \mathcal{H}^*$ esiste un unico elemento $x_f \in \mathcal{H}$ tale che*

$$f(y) = (x_f|y)\ , \qquad \textit{per ogni } y \in \mathcal{H}\ . \tag{5.30}$$

Dimostrazione: Se $f = \mathbf{0}$ (funzionale nullo) basta prendere $x_f = 0$. Se $f \neq \mathbf{0}$ consideriamo il sottospazio

$$N = \mathrm{Ker}(f) = \{y \in \mathcal{H} : f(y) = 0\}$$

che è chiuso, essendo la controimmagine (tramite la funzione continua f) dell'insieme chiuso $\{0\} \in \mathbb{C}$. Essendo f non nullo, N non coincide con $\mathcal{H}$, quindi $N^\perp \neq \{0\}$ ed esiste $x_0 \in N^\perp$ con $f(x_0) \neq 0$. Sia ora $y \in \mathcal{H}$ arbitrario:

$$\begin{aligned} f\left(y - \frac{f(y)x_0}{f(x_0)}\right) &= f(y) - \frac{f(y)}{f(x_0)}f(x_0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y - \frac{f(y)x_0}{f(x_0)} \in N \\ y &= \frac{f(y)}{f(x_0)}x_0 + \left(y - \frac{f(y)x_0}{f(x_0)}\right) \in N^\perp \oplus N\ . \end{aligned}$$

Solo la componente x_0 contribuisce al prodotto scalare di x_0 con y, per cui

$$\begin{aligned} (x_0|y) = \frac{f(y)}{f(x_0)}||x_0||^2 \qquad &\Longrightarrow \qquad f(y) = (\frac{f(x_0)^*}{||x_0||^2}x_0|y) \\ \Longrightarrow \qquad x_f := \frac{f(x_0)^*}{||x_0||^2}x_0 \quad &\text{è tale che } f(y) = (x_f|y) \quad \forall\, y \in \mathcal{H}\ . \end{aligned}$$

L'unicità di x_f deriva dalla iniettività della corrispondenza $x \mapsto f_x$ evidenziata in precedenza. C.V.D.

Sostanzialmente questo teorema afferma che il prodotto scalare costituisce il più generale funzionale lineare e continuo definito su uno spazio di Hilbert. Questo risultato permette di identificare lo spazio duale topologico di uno spazio di Hilbert con lo spazio di Hilbert stesso. Possiamo riformulare il teorema affermando che ogni spazio di Hilbert è in biiezione isometrica (in pratica coincide) con il suo duale topologico:

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*\ . \tag{5.31}$$

Inoltre questa identificazione giustifica l'uso delle medesime notazioni per indicare sia i funzionali lineari (e continui) che il prodotto scalare. A questo proposito la *notazione di Dirac* è particolarmente efficace:

- un vettore x di $\mathcal{H}$ si denota con il "ket" $|x\rangle$
- il funzionale $f_x \in \mathcal{H}^*$ associato ad x si denota con il "bra" $\langle x|$
- il prodotto scalare tra x ed y si scrive con le parentesi triangolari ("braket" in inglese) $\langle x|y\rangle$, che visivamente si interpreta bene anche come azione del funzionale (bra) $\langle x|$ sul vettore (ket) $|y\rangle$.

5.3.2 Aggiunto di un operatore continuo

Abbiamo visto che ad ogni vettore x di uno spazio di Hilbert è associato in modo biunivoco un vettore (funzionale) f_x nello spazio duale. Questa corrispondenza avviene per mezzo del prodotto scalare. Si può stabilire una corrispondenza analoga anche tra operatori continui.

Dato un operatore continuo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, e fissato $x \in \mathcal{H}$, l'applicazione

$$f_x^A : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \ , \qquad y \mapsto (x|Ay) \tag{5.32}$$

è un funzionale lineare (per la linearità di A e del prodotto scalare) e continuo (per la continuità di A e del prodotto scalare). Per il teorema di Fischer-Riesz, esiste un unico elemento $x' \in \mathcal{H}$ tale che

$$f_x^A = f_{x'} \quad \Longleftrightarrow \quad (x|Ay) = (x'|y) \ , \quad \text{per ogni } y \in \mathcal{H} \ . \tag{5.33}$$

Chiaramente x' dipende sia da A che da x. Dato A, la corrispondenza $x \mapsto x'$ è lineare:

$$(\alpha x|Ay) = \alpha^*(x|Ay) = \alpha^*(x'|y) = (\alpha x'|y) \tag{5.34}$$

$$(x_1 + x_2|Ay) = (x_1|Ay) + (x_2|Ay) = (x_1'|y) + (x_2'|y) = (x_1' + x_2'|y) \ . \tag{5.35}$$

Questa corrispondenza dipende da A e definisce l'operatore *aggiunto* $A^\dagger$ di A:

$$A^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ , \qquad A^\dagger x = x' \ , \qquad (A^\dagger x|y) = (x|Ay) \tag{5.36}$$

per ogni $x, y \in \mathcal{H}$.

L'operatore $A^\dagger$ è limitato e con la stessa norma di A:

$$||A^\dagger x||^2 = (A^\dagger x|A^\dagger x) = (x|AA^\dagger x) \leq ||x|| \, ||A|| \, ||A^\dagger x||$$

da cui, dividendo per $||A^\dagger x||$,

$$||A^\dagger x|| \leq ||A|| \, ||x|| \ \forall \, x \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad ||A^\dagger|| \leq ||A|| \ .$$

L'operatore $A^\dagger$ risulta definito su tutto H e possiamo prenderne l'aggiunto ulteriore. Prendendo il complesso coniugato dell'equazione (5.36) risulta evidente che, per operatori limitati,

$$(A^\dagger)^\dagger = A \tag{5.37}$$

ed i ruoli di A e $A^\dagger$ possono essere scambiati nel calcolo della norma, per cui $||A|| \leq ||A^\dagger||$ ed in definitiva

$$||A^\dagger|| = ||A|| \ . \tag{5.38}$$

Riassumiamo e compendiamo i risultati ottenuti in questa sezione con il seguente

Teorema 5.11 *Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert ed $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora*

1. *$A^\dagger$ è continuo e $||A^\dagger|| = ||A||$.*
2. *$A^{\dagger\dagger} = A$.*
3. *Il prodotto $A^\dagger A$ è continuo e si ha $||A^\dagger A|| = ||A||^2$.*

4. *La C.L. di operatori* $\alpha A+\beta B$ *è continua e* $(\alpha A+\beta B)^\dagger = \alpha^* A^\dagger + \beta^* B^\dagger$ *per ogni* $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

5. *Il prodotto* AB *è continuo e* $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

Dimostrazione:

1, 2: fatte sopra.

3: Dall'eq. (5.14) abbiamo che $||A^\dagger A|| \le ||A^\dagger||\,||A|| = ||A||^2$. Viceversa,

$$||A^\dagger A|| = \sup_{x:||x||=1} ||A^\dagger A x||\,||x|| \overset{(4.12)}{\ge} \sup(x|A^\dagger A x) = \sup(Ax|Ax) = \sup ||Ax||^2 = (\sup ||Ax||)^2 = ||A||^2 \ .$$

4: Applicando la (5.36) all'operatore $\alpha A+\beta B$ deve valere per ogni $x,y\in\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}((\alpha A+\beta B)^\dagger x|y) &= (x|(\alpha A+\beta B)y) = \alpha(x|Ay)+\beta(x|By) = \alpha(A^\dagger x|y)+\beta(B^\dagger x|y)\\ &= (\alpha^* A^\dagger x|y)+(\beta^* B^\dagger x|y) = ((\alpha^* A^\dagger + \beta^* B^\dagger)x|y)\end{aligned}$$

5: Esercizio. C.V.D.

Esempio: Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert a finite dimensioni, $E=\{e_k : k=1,\dots,n\}$ una base ortonormale, ed $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ operatore. A è necessariamente limitato, quindi esiste sempre l'aggiunto di A in dimensione finita. La matrice che rappresenta A nella base E è data da

$$A_{ij} = (e_i|Ae_j) = (A^\dagger e_i|e_j) = (e_j|A^\dagger e_i)^* = [(A^\dagger)_{ji}]^* \ . \tag{5.39}$$

Quindi, rispetto ad una base ortonormale, la matrice dell'operatore aggiunto è la matrice aggiunta (trasposta coniugata) dell'operatore. Se la base non è ortonormale, in generale ciò non è vero.

Esempio: Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}=L^2([0,1])$ si consideri l'operatore

$$A:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\ , \qquad [Af](x) := \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \ .$$

(a) Dimostrare che A è limitato.
(b) Determinare $A^\dagger$ e calcolare $A+A^\dagger$.

Svolgimento: (a) Per prima cosa dobbiamo controllare che, se $f\in\mathcal{H}$, Af è ben definita e sta in $\mathcal{H}$. Abbiamo (con la norma-2)

$$\begin{aligned}|[Af](x)| &= \left|\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 \chi_{[0,x]}(t) f(t)\ \mathrm{d}t\right| = |(\chi_{[0,x]}|f)| \le ||\chi_{[0,x]}||\,||f|| \ ,\\ ||\chi_{[0,x]}||^2 &= \int_0^1 \chi^2_{[0,x]}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x \ ,\\ ||Af||^2 &= \int_0^1 |[Af](t)|^2\ \mathrm{d}t \le \int_0^1 x||f||^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}||f||^2 \quad \Longrightarrow \quad ||A|| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \ .\end{aligned}$$

(b) Per calcolare l'aggiunto, consideriamo due funzioni $f,g\in L^2([0,1])$, esplicitiamo $(f|Ag)$ e proviamo ad esprimerlo come $(A^\dagger f|g)$, con $A^\dagger$ un qualche operatore. Si ha

$$\begin{aligned}(f|Ag) &= \int_0^1 \mathrm{d}x\ f^*(x) \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_t^1 \mathrm{d}x\ f^*(x) g(t)\\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t \left(\int_t^1 f(x)\ \mathrm{d}x\right)^* g(t) \ ,\end{aligned}$$

quindi deve essere (scambiando il nome alle variabili $x \leftrightarrow t$)

$$[A^\dagger f](x) = \int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

La somma di A ed $A^\dagger$ agisce come segue:

$$[(A + A^\dagger)f](x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\ ,$$

cioè $A + A^\dagger$ trasforma la funzione f nella funzione costante il cui valore è l'integrale di f sul suo dominio $[0, 1]$.

5.3.3 Aggiunto di un operatore non limitato

Vogliamo ora discutere la possibilità di definire l'aggiunto per un operatore A non limitato, che in generale avrà come dominio un sottoinsieme proprio $\mathcal{D}(A)$ di $\mathcal{H}$. Con x fissato, consideriamo di nuovo l'applicazione

$$f_x^A : y \mapsto (x|Ay)\ , \quad y \in \mathcal{D}(A)$$

che ha per dominio $\mathcal{D}(A)$. Essa è lineare ma in generale non è limitata, visto che A non è limitato. Però può succedere che per alcuni vettori x l'applicazione f_x^A sia limitata. Allora, se $\mathcal{D}(A)$ è denso in $\mathcal{H}$, possiamo estendere f_x^A su tutto $\mathcal{H}$ ad un funzionale $\overline{f_x^A}$ continuo, e per il teorema di Fischer-Riesz esiste un unico elemento $x' \in \mathcal{H}$ tale che $\overline{f_x^A} = f_{x'}$, cioè

$$(x|Ay) = (x'|y) \qquad \text{per ogni } y \in \mathcal{D}(A)\ . \tag{5.40}$$

Questo vettore è unico, poiché l'estensione continua è unica. Possiamo anche verificarlo così: se esistesse un altro elemento $x'' \in \mathcal{H}$ tale che

$$(x''|y) = (x'|y) \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A) \quad \Longrightarrow \quad (x'' - x'|y) = 0 \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A)$$

ma l'unico vettore ortogonale ad un sottoinsieme denso risulta il vettore nullo, per cui $x'' = x'$.

Indichiamo con D^* l'insieme degli x tali che $f_x^A : \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C}$ risulti limitata:

$$D^* := \{x \in \mathcal{H} : [y \mapsto (x|Ay)] \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), \mathbb{C})\}\ .$$

Equivalentemente, per Fischer-Riesz possiamo caratterizzare D^* come

$$D^* := \{x \in \mathcal{H} : \exists x' \in \mathcal{H} : (x|Ay) = (x'|y)\ \forall y \in \mathcal{D}(A)\}\ . \tag{5.41}$$

È facile rendersi conto che D^* è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$ e non è vuoto, in quanto contiene almeno il vettore nullo. Abbiamo quindi definito una corrispondenza univoca (cioè una funzione) tra D^* e $\mathcal{H}$, che ad x associa x'. Questa corrispondenza è lineare:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2|Ay) = \alpha^*(x_1|Ay) + \beta^*(x_2|Ay) = \alpha^*(x_1'|y) + \beta^*(x_2'|y) = (\alpha x_1' + \beta x_2'|y) \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A)$$
$$\Longrightarrow \quad \alpha x_1 + \beta x_2 \mapsto \alpha x_1' + \beta x_2'$$

e definisce l'operatore *aggiunto* $A^\dagger$ di A:

Teorema 5.12 *Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert e A un operatore lineare definito su un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso in $\mathcal{H}$. Allora esiste un unico operatore lineare $A^\dagger$ definito sul dominio*

$$\mathcal{D}(A^\dagger) := \{x \in \mathcal{H} : [y \mapsto (x|Ay)] \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A), \mathbb{C})\} \tag{5.42}$$

tale che

$$(x|Ay) = (A^\dagger x|y) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A^\dagger)\ ,\ \forall\, y \in \mathcal{D}(A) \tag{5.43}$$

Osservazione: Notiamo che, per poter invocare il teorema di Fischer-Riesz, è necessario richiedere la densità del dominio $\mathcal{D}(A)$. Se il dominio di A non è denso, allora $\overline{\mathcal{D}(A)}^\perp$ è un sottospazio non banale ed esistono più vettori linearmente indipendenti x' che soddisfano la condizione (5.40).

Definizione 5.7 *Un operatore A su uno spazio normato X si dice* densamente definito *se $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

In generale non possiamo dire molto sul dominio $\mathcal{D}(A^\dagger)$. Non è detto neppure che sia denso. Sicuramente non è vuoto, ma potrebbe anche essere solamente il sottospazio banale $\{0\}$. Però è possibile fare qualche confronto tra gli aggiunti di due operatori diversi (vedi eq. (5.2) per le notazioni):

Teorema 5.13 *Siano A e B operatori densamente definiti sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Allora*

1. *Se $A^\dagger$ è densamente definito, $A \subset A^{\dagger\dagger}$*
2. *Se $A \subset B$ allora $B^\dagger \subset A^\dagger$*
3. *Se AB è densamente definito, allora $B^\dagger A^\dagger \subset (AB)^\dagger$;*
   Se inoltre A è limitato, allora vale l'uguaglianza: $B^\dagger A^\dagger = (AB)^\dagger$
4. *Se A^{-1} esiste ed è densamente definito (ossia se A è iniettivo e la sua immagine è densa in $\mathcal{H}$), allora $(A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1}$*

Dimostrazione: Dimostriamo un paio di punti, che illustrano il metodo da seguire anche per gli altri.

1. Innanzitutto, se $A^\dagger$ è densamente definito, è definito il suo aggiunto $A^{\dagger\dagger}$. L'eq. (5.43) mostra che per ogni $x \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ ed $y \in \mathcal{D}(A)$ sono ben definiti e coincidenti i prodotti scalari $(Ay|x) = (y|A^\dagger x)$. Pertanto il funzionale $g_y : x \mapsto (y|A^\dagger x)$ è definito su tutto $\mathcal{D}(A^\dagger)$ ed è continuo, visto che $g_y : x \mapsto (Ay|x)$. Ma per il teorema-definizione 5.12 questo significa che $y \in \mathcal{D}(A^{\dagger\dagger})$. Quindi $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{\dagger\dagger})$. Inoltre

$$(A^{\dagger\dagger}y|x) \overset{(5.43)}{=} (y|A^\dagger x) = (Ay|x) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A^\dagger)\ ,\ \forall\, y \in \mathcal{D}(A)\ .$$

Poiché l'uguaglianza tra primo ed ultimo membro vale per ogni x di un insieme denso in $\mathcal{H}$, si ha che $A^{\dagger\dagger}y = Ay$ e quindi $A^{\dagger\dagger}$ agisce come A sui vettori di $\mathcal{D}(A)$. Di conseguenza $A^{\dagger\dagger}$ è un'estensione di A.

3. Sia $y \in \mathcal{D}(B^\dagger A^\dagger) \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$. Se $x \in \mathcal{D}(AB) \subset \mathcal{D}(B)$ (e quindi $Bx \in \mathcal{D}(A)$), abbiamo

$$(y|ABx) = (A^\dagger y|Bx) = (B^\dagger A^\dagger y|x) \ ,$$

Quindi il funzionale $x \mapsto (y|ABx)$ è limitato su un dominio denso, pertanto $y \in \mathcal{D}((AB)^\dagger)$. Inoltre

$$((AB)^\dagger y|x) = (y|ABx) = (B^\dagger A^\dagger y|x) \ ,$$

e pertanto $B^\dagger A^\dagger \subset (AB)^\dagger$.

Supponiamo ora che A sia limitato, quindi $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$. Vogliamo mostrare che, se $y \in \mathcal{D}((AB)^\dagger)$, allora $y \in \mathcal{D}(B^\dagger A^\dagger)$, il che vuol dire che $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ (vero) e che $A^\dagger y \in \mathcal{D}(B^\dagger)$. Quest'ultima richiesta vale se il funzionale $x \mapsto (A^\dagger y|Bx)$ è limitato sul dominio $x \in \mathcal{D}(B)$ denso. Siccome per ipotesi

$$(A^\dagger y|Bx) = (y|ABx) = ((AB)^\dagger y|x) \ ,$$

vediamo che il funzionale in esame è limitato. Pertanto $\mathcal{D}((AB)^\dagger) \subset \mathcal{D}(B^\dagger A^\dagger)$ e perciò $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. C.V.D.

Teorema 5.14 *Sia A operatore densamente definito in $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert. Allora*

$$\mathrm{Ker}(A^\dagger) = \mathrm{Im}\,(A)^\perp \ . \tag{5.44}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(A^\dagger) \iff A^\dagger x = 0 \iff (A^\dagger x|y) = 0 \quad \forall\, y \in \mathcal{H} \\ \iff A^\dagger x \in \mathcal{H}^\perp = \overline{\mathcal{D}(A)}^\perp = \mathcal{D}(A)^\perp \\ \iff 0 = (A^\dagger x|y) = (x|Ay) \quad \forall\, y \in \mathcal{D}(A) \iff x \in \mathrm{Im}\, A^\perp \ . \end{aligned}$$

C.V.D.

5.3.4 Operatori autoaggiunti

In meccanica quantistica ed in vari campi della matematica svolgono un ruolo di particolare interesse gli operatori autoaggiunti, cioè quelli che coincidono, come azione e come dominio, con il proprio aggiunto. Nel caso in cui l'azione di A e $A^\dagger$ sia la stessa, cioè che $Ax = A^\dagger x$ per ogni $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A^\dagger)$, l'eq. (5.43) diventa

$$(x|Ay) = (Ax|y) \ .$$

Questa verifica ha senso su tutti i vettori $x, y \in \mathcal{D}(A)$, e può essere effettuata anche quando il dominio di A non sia denso in $\mathcal{H}$. Quando è valida, stabilisce un'importante proprietà dell'operatore A.

Definizione 5.8 *Sia $\mathcal{H}$ spazio di Hilbert e $D < \mathcal{H}$ un suo sottospazio. Un operatore $A \in$* $\mathrm{Hom}(D, \mathcal{H})$ *si dice* hermitiano *se*

$$(x|Ay) = (Ax|y) \quad \textit{per ogni } x, y \in D = \mathcal{D}(A) \ . \tag{5.45}$$

Questa è evidentemente un requisito essenziale affinché un operatore sia autoaggiunto, ma siccome non abbiamo fatto nessuna ipotesi sul dominio di A, un operatore hermitiano non possiede nemmeno l'aggiunto se il suo dominio non è denso in $\mathcal{H}$. Il passo successivo consiste nel considerare operatori hermitiani che abbiano dominio denso in $\mathcal{H}$, per i quali è definito l'operatore aggiunto.

Definizione 5.9 *Un operatore hermitiano A con dominio denso nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ si dice* simmetrico.

In questo caso $A^\dagger$ è un'estensione di A:

Teorema 5.15 *Un operatore A densamente definito sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è simmetrico se e solo se*

$$A \subset A^\dagger \tag{5.46}$$

Dimostrazione: La densità del dominio è ipotesi di ambo le implicazioni.

Se $A \subset A^\dagger$, allora per ogni $x, y \in \mathcal{D}(A)$ si ha

$$(x|Ay) = (A^\dagger x|y) = (Ax|y)$$

in quanto per ipotesi $x \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, quindi A è hermitiano.

Viceversa, se A è hermitiano e densamente definito, sia $x \in \mathcal{D}(A)$ e consideriamo il funzionale su $\mathcal{D}(A)$

$$\mathcal{D}(A) \ni y \mapsto (Ax|y)\ .$$

Esso è certamente limitato, perchè $Ax \in \mathcal{H}$, ma per l'hermiticità esso coincide con il funzionale

$$\mathcal{D}(A) \ni y \mapsto (x|Ay)\ ,$$

pertanto $x \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ e $(A^\dagger x|y) = (x|Ay) = (Ax|y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{D}(A)$. C.V.D.

Una richiesta ancora più forte che possiamo fare è che i domini di A e $A^\dagger$ coincidano:

Definizione 5.10 *Un operatore A con dominio denso in $\mathcal{H}$ si dice* autoaggiunto *se*

$$A = A^\dagger \tag{5.47}$$

cioè se

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger) \quad e \quad Ax = A^\dagger x \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{D}(A)\ . \tag{5.48}$$

Chiaramente un operatore autoaggiunto è anche simmetrico e quindi hermitiano. Abbiamo così la seguente catena di proprietà :

$$\text{autoaggiunto} \implies \text{simmetrico} \implies \text{hermitiano}\ . \tag{5.49}$$

Se un operatore A è hermitiano, per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$ vale

$$(x|Ax) = (Ax|x) = (x|Ax)^* \implies (x|Ax) \in \mathbb{R}\ . \tag{5.50}$$

Vale anche il viceversa:

Teorema 5.16 *Un operatore A è hermitiano se e solo se*

$$(x|Ax) \in \mathbb{R} \quad \textit{per ogni } x \in \mathcal{D}(A) \; . \tag{5.51}$$

Dimostrazione: L'implicazione $\Longrightarrow$ l'abbiamo appena vista.
Viceversa, se $(x|Ax)$ è reale per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$, allora per ogni $x, y \in \mathcal{D}(A)$ vale

$$\begin{aligned} & (x+y|A(x+y)) = (A(x+y)|x+y) \\ \Longrightarrow \quad & (x|Ax) + (x|Ay) + (y|Ax) + (y|Ay) = (Ax|x) + (Ax|y) + (Ay|x) + (Ay|y) \\ \Longrightarrow \quad & (x|Ay) + (y|Ax) = (Ax|y) + (Ay|x) \; . \end{aligned}$$

Lo stesso vale sostituendo iy al posto di y:

$$\begin{aligned} & (x|A(\mathrm{i}y)) + (\mathrm{i}y|Ax) = (Ax|\mathrm{i}y) + (A(\mathrm{i}y)|x) \\ \Longrightarrow \quad & \mathrm{i}(x|Ay) - \mathrm{i}(y|Ax) = \mathrm{i}(Ax|y) - \mathrm{i}(Ay|x) \\ \Longrightarrow \quad & (x|Ay) - (y|Ax) = (Ax|y) - (Ay|x) \; . \end{aligned}$$

Facendo la semisomma delle due relazioni ottenute troviamo

$$(x|Ay) = (Ax|y) \quad \text{per ogni } x, y \in \mathcal{D}(A) \; .$$

C.V.D.

Esercizio: Nello spazio di Hilbert l^2 si definisca l'operatore

$$A : (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \cdots, \sqrt{n+1}\, x_{n+1}, \cdots) \; .$$

(a) Determinare il dominio di A. (b) Determinare l'aggiunto di A. (c) Determinare l'aggiunto di $A^\dagger$. (d) Verificare che $A^\dagger A$ è autoaggiunto. (e) Determinare gli autovalori e gli autovettori di $A^\dagger A$ e $AA^\dagger$. (f) Determinare il commutatore $[A, A^\dagger]$.

Svolgimento: (a) Vediamo subito che A non è un operatore limitato. Infatti esso trasforma il versore canonico $e^{(n)} : n > 0$ in $Ae^{(n)} = \sqrt{n}\, e^{(n-1)}$. Pertanto

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} ||Ae^{(n)}|| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sqrt{n} = \infty \; .$$

Il dominio naturale di A è costituito da quelle successioni di l^2 che, trasformate da A, stanno ancora in l^2:

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2 < \infty\} \; . \tag{5.52}$$

Per capire il loro andamento all'infinito, supponiamo che $|x_n| = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$. Allora $x \in l^2$ se $\alpha > 1/2$, e siccome $n|x_n|^2 = \mathcal{O}\left(n^{1-2\alpha}\right)$, $Ax \in l^2$ se $\alpha > 1$. Si potrebbe ipotizzare che $\mathcal{D}(A) = l^1$. Tuttavia si possono trovare successioni di $\mathcal{D}(A)$ che non stanno in l^1, ad esempio $x_n = (n \ln n)^{-1}$, e successioni di l^1 che non stanno in $\mathcal{D}(A)$, ad esempio $x_n = 1/\sqrt{n}$ se $n = k^4$ $\exists k \in \mathbb{N}$ e $x_n = 0$ altrimenti.[4] In ogni caso, l'equazione precedente risponde alla prima domanda.

[4]Ringrazio il prof. G. Panico per avermi fornito questi controesempi.

Notiamo che il sottospazio l_f delle successioni con un numero finito di elementi non nulli è sottospazio del dominio di A, ed è denso in l^2, quindi $\mathcal{D}(A)$ è denso in l^2, ma è un sottospazio proprio di l^2, in quanto A non è limitato.

(b) Data $x \in l^2$, cerchiamo $x' \in l^2$ tale che $(x|Ay) = (x'|y)$ per ogni $y \in \mathcal{D}(A)$.

$$(x|Ay) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^* (Ay)_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^* \sqrt{n+1}\, y_{n+1} \overset{(k=n+1)}{=} 0 \cdot y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k}\, x_{k-1})^* y_k$$

quindi x' (da identificare con $A^\dagger x$) è la successione

$$(x')_k = (A^\dagger x)_k = (0, \sqrt{1}x_0, \sqrt{2}x_1, \sqrt{3}x_2, \cdots, \sqrt{k}\, x_{k-1}, \cdots) .$$

In accordo con la definizione (5.41), il dominio di $A^\dagger$ è formato dagli $x \in l^2$ tali che $x' \in l^2$, ossia

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{x \in l^2 : \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|x_n|^2 < \infty\} . \tag{5.53}$$

Complessivamente possiamo scrivere, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (Ax)_n &= \sqrt{n+1}\, x_{n+1} \\ (A^\dagger x)_n &= \sqrt{n}\, x_{n-1} . \end{aligned}$$

È facile mostrare che $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{D}(A)$. Infatti, se converge la somma nell'eq. (5.53), allora per il criterio del confronto converge anche la somma nell'eq. (5.52). Viceversa, se converge la somma nell'eq. (5.52), e quindi la stessa serie moltiplicata per 2, converge anche la serie nell'eq. (5.53), essendo $2n \geq n+1$ per $n \geq 1$.

(c) Procediamo come al punto (b) per cercare il dominio e l'azione di $(A^\dagger)^\dagger$:

$$(x|A^\dagger y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^* (A^\dagger y)_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \sqrt{n}\, y_{n-1} \overset{(k=n-1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{k+1}\, x_{k+1})^* y_k$$

quindi

$$(A^{\dagger\dagger} x)_k = (\sqrt{1}x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \cdots)$$

che ha la stessa azione e lo stesso dominio di A, quindi $A^{\dagger\dagger} = A$.

(d) Determiniamo l'azione di $A^\dagger A$ e $AA^\dagger$ su una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} (A^\dagger A x)_n &= \sqrt{n}\, (Ax)_{n-1} = n x_n \\ (AA^\dagger x)_n &= \sqrt{n+1}\, (Ax)_{n+1} = (n+1) x_n . \end{aligned}$$

Pertanto tali operatori non sono limitati e si ha $\mathcal{D}(A^\dagger A) = \mathcal{D}(AA^\dagger) = \{x \in l^2 : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty\}$. Questo sottospazio contiene l_f e perciò è denso in l^2, quindi $A^\dagger A$ e $AA^\dagger$ ammettono l'aggiunto. Dal teorema 5.13 abbiamo che $(A^\dagger A)^\dagger \supset (A)^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger A$, quindi $A^\dagger A$ è simmetrico. Il dominio di $(A^\dagger A)^\dagger$ è dato dalle successioni $x \in l^2$ per le quali è limitato il funzionale

$$l^2 \ni y \mapsto (x|A^\dagger A x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^*\, n\, y_n$$

e quindi deve essere $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, che altro non è che la condizione che specifica il dominio di $A^\dagger A$. Quindi $A^\dagger A$ è autoaggiunto. Allo stesso modo si dimostra che $AA^\dagger$ è autoaggiunto.

(e) Le equazioni agli autovalori per tali operatori sono

$$\begin{aligned} A^\dagger A x = \lambda x \quad &\iff \quad n x_n = \lambda x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \\ AA^\dagger x = \lambda x \quad &\iff \quad (n+1) x_n = \lambda x_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\ . \end{aligned}$$

Poiché un autovettore deve essere non nullo, almeno un x_n, diciamo $x_{\bar{n}} : \bar{n} \in \mathbb{N}$ deve essere diverso da zero. Nel caso di $A^\dagger A$ bisogna che $\lambda = \bar{n}$ e perciò che tutti gli altri $x_n : n \neq \bar{n}$ siano nulli. Nel caso di $AA^\dagger$, bisogna che $\lambda = \bar{n} + 1$ e quindi che tutti gli altri $x_n : n \neq \bar{n}$ siano nulli. In conclusione, tutti e soli gli autovettori — a meno di multipli — di $A^\dagger A$ e $AA^\dagger$ sono le successioni $e^{(n)} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ con 1 all'n-esimo posto (cominciando a contare da zero), ossia $(e^{(n)})_k = \delta_{nk}$. L'autovalore relativo per $A^\dagger A$ è $\lambda_n = n \in \mathbb{N}$, mentre quello per $AA^\dagger$ è $\lambda_n = n + 1 \in \mathbb{N}^*$.

(f)

$$([A, A^\dagger]x)_n = (AA^\dagger x)_n - (A^\dagger A x)_n = (n+1)x_n - n x_n = x_n$$

per ogni $x \in \mathcal{D}(A^\dagger A)$, quest'ultimo denso perché contiene l_f. Quindi $[A, A^\dagger]$ si può estendere per continuità all'operatore identità su tutto $\mathcal{H}$.

Lo studente che abbia già affrontato l'oscillatore armonico quantistico avrà riconosciuto negli operatori A e $A^\dagger$ del precedente esercizio gli operatori di distruzione e creazione. Si osservi che la regola di commutazione $[A, A^\dagger] = \mathbb{1}$ a primo membro coinvolge un operatore definito in un sottospazio proprio (ma denso) di $\mathcal{H}$. Essendo limitato, esso può essere esteso a tutto $\mathcal{H}$, da cui l'identità a secondo membro. Analoghe estensioni di dominio possono essere implicite in altre equazioni operatoriali.

5.3.5 Proiettori

Una categoria importantissima di operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert è costituita dai proiettori ortogonali.

Se M è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora il teorema 4.14 ci dice che vale la decomposizione

$$\mathcal{H} = M \boxplus M^\perp \tag{5.54}$$

ed ogni vettore $x \in \mathcal{H}$ può essere decomposto in maniera unica nella somma ortogonale

$$x = x_\parallel + x_\perp\ , \qquad x_\parallel \in M\ , \quad x_\perp \in M^\perp\ ; \tag{5.55}$$

la corrispondenza $x \mapsto x_\parallel$ definisce l'operatore di *proiezione ortogonale* su M:

$$P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ , \quad Px = x_\parallel \tag{5.56}$$

il cui dominio è tutto $\mathcal{H}$. Per il teorema di Pitagora $||x||^2 = ||x_\parallel||^2 + ||x_\perp||^2$, la norma di $x_\parallel$ è minore o uguale a quella di x:

$$||Px|| = ||x_\parallel|| \leq ||x|| \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{H}$$

e quindi P è limitato e $||P|| \leq 1$. D'altra parte, se $x \in M$ allora

$$x \in M \quad \Longrightarrow \quad Px = x \quad \Longrightarrow \quad ||Px|| = ||x|| \quad \Longrightarrow \quad ||P|| = 1 \; . \tag{5.57}$$

Se invece $x \in M^\perp$ la sua proiezione su M è nulla:

$$Px = 0 \quad \text{ per ogni } x \in M^\perp \; .$$

Proiettando una proiezione su M, si riottiene ancora la proiezione:

$$P(Px) = Px \quad \text{ per ogni } x \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad P^2 = P \; . \tag{5.58}$$

Quest'ultima proprietà si chiama *idempotenza*:

Definizione 5.11 *Un operatore P si dice* idempotente *se $P^2 = P$.*

Chiaramente, le potenze successive di un operatore idempotente coincidono con l'operatore stesso: $P^n = P$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Poichè un operatore di proiezione è limitato, possiede l'aggiunto $P^\dagger$ definito su tutto $\mathcal{H}$. Presi due vettori arbitrari in $\mathcal{H}$, $x = x_\parallel + x_\perp$ e $y = y_\parallel + y_\perp$, sfruttando l'ortogonalità delle diverse componenti, ossia $(x_\parallel|y_\perp) = 0 = (x_\perp|y_\parallel)$, troviamo

$$\begin{aligned} & (x|Py) = (x_\parallel + x_\perp|y_\parallel) = (x_\parallel|y_\parallel) \\ & (Px|y) = (x_\parallel|y_\parallel + y_\perp) = (x_\parallel|y_\parallel) \\ \Longrightarrow \quad & (x|Py) = (Px|y) \quad \text{ per ogni } x, y \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad P^\dagger = P \end{aligned} \tag{5.59}$$

cioè l'operatore di proiezione ortogonale è autoaggiunto.

Osservazione: La proprietà di autoaggiunzione ed il valore unitario della norma operatoriale sono una conseguenza dell'ortogonalità dei sottospazi che decompongono lo spazio di Hilbert. Senza l'ortogonalità, queste proprietà vengono a cadere, ma permangono le altre, in particolare l'idempotenza tipica delle proiezioni.

In realtà, la corrispondenza tra sottospazi chiusi ed operatori idempotenti ed autoaggiunti è biunivoca.

Teorema 5.17 *Sia P un operatore idempotente ed autoaggiunto su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$:*

$$P^2 = P \quad e \quad P^\dagger = P \; . \tag{5.60}$$

Allora P è un proiettore ortogonale sul sottospazio dato dall'immagine di P:

$$M = \mathrm{Im}\,(P) \; , \quad M^\perp = \mathrm{Ker}(P) \; , \quad \mathcal{H} = M \boxplus M^\perp \; . \tag{5.61}$$

Dimostrazione: P è limitato. Infatti per ogni $x \in \mathcal{H}$ non nullo

$$||Px||^2 = (Px|Px) = (x|PPx) = (x|Px) \leq ||x||\,||Px|| \quad \Longrightarrow \quad ||Px|| \leq ||x|| \; .$$

Verifichiamo ora che P non muta i vettori di M: $P|_M = \mathbb{1}_M$. Infatti, se $y \in M = \mathrm{Im}\,(P)$, allora esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che $y = Px$. Ma allora

$$Py = PPx = Px = y \qquad \text{per ogni } y \in M = \mathrm{Im}\,(P)\ .$$

Vediamo la chiusura di M: se $x \in \overline{M}$, esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Per la continuità di P si ha che $Px_n \xrightarrow{n\to\infty} Px$, ma siccome $Px_n = x_n$ abbiamo che $x_n \xrightarrow{n\to\infty} Px$ e quindi che $Px = x$ ossia $x \in M$.

Infine abbiamo che

$$\begin{aligned} z \in M^{\perp} &\iff (z|y) = 0 \quad \forall y \in M \iff (z|Px) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \\ &\iff (Pz|x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \iff Pz = 0 \iff z \in \mathrm{Ker}(P)\ . \end{aligned}$$

C.V.D.

Associato al proiettore P sul sottospazio chiuso M, possiamo considerare il proiettore

$$P_{\perp} = \mathbb{1} - P \tag{5.62}$$

che proietta sul sottospazio chiuso $M^{\perp}$. Infatti, per ogni $x \in \mathcal{H}$ vale

$$P_{\perp}x = (\mathbb{1} - P)(x_{\parallel} + x_{\perp}) = (x_{\parallel} + x_{\perp}) - x_{\parallel} = x_{\perp}\ .$$

Chiaramente anche $P_{\perp}$ è idempotente ed autoaggiunto:

$$\begin{aligned} P_{\perp}^2 &= (\mathbb{1} - P)^2 = \mathbb{1} - 2P + P^2 = \mathbb{1} - P = P_{\perp} \\ P_{\perp}^{\dagger} &= (\mathbb{1} - P)^{\dagger} = \mathbb{1} - P = P_{\perp}\ . \end{aligned}$$

Come si intuisce, la composizione di P con $P_{\perp}$, in entrambi gli ordini, ha come unico risultato il vettore nullo:

$$\begin{aligned} PP_{\perp} &= P(1 - P) = P - P^2 = P - P = \mathbf{0} \\ P_{\perp}P &= (1 - P)P = P - P^2 = P - P = \mathbf{0}\ . \end{aligned}$$

Quindi ogni coppia $(M, M^{\perp})$ di sottospazi ortogonali chiusi è in corrispondenza biunivoca con una coppia $(P, P_{\perp})$ di proiettori con le proprietà sopra elencate.

Poiché un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert risulta a sua volta uno spazio di Hilbert, la decomposizione in sottospazi ortogonali e proiettori associati può essere estesa induttivamente ad un numero finito qualsiasi di sottospazi.

Teorema 5.18 *Ogni decomposizione di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in sottospazi chiusi $M_1, M_2, \cdots, M_n$ ortogonali tra loro*

$$\mathcal{H} = M_1 \boxplus M_2 \boxplus \cdots \boxplus M_n\ , \qquad M_i \perp M_j \quad \forall\, i \neq j = 1, 2, \cdots n \tag{5.63}$$

è in corrispondenza biunivoca con una n-upla di proiettori $P_1, P_2, \cdots P_n$ definiti su tutto $\mathcal{H}$ con le proprietà

$$\begin{aligned} &P_iP_j = \delta_{ij}P_i\ , &&(i, j = 1, \cdots n) \\ &P_i^{\dagger} = P_i\ , &&(i = 1, \cdots n) \\ &P_1 + P_2 + \cdots P_n = \mathbb{1} && \end{aligned}$$

e che verificano, per $i = 1, \cdots, n$,

$$P_i x = x \qquad \textit{per ogni } x \in M_i$$
$$P_i x = 0 \qquad \textit{per ogni } x \in M_i^{\perp} \ .$$

Esercizio: Nello spazio di Hilbert $L^2([0, 2\pi])$ è definita l'applicazione lineare A:

$$[Af](x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x - y) f(y) \, \mathrm{d}y \ .$$

(a) Mostrare che l'operatore A è limitato.
(b) Determinare per quali valori di $z \in \mathbb{C}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$ converge in norma, e calcolarne la somma.

Svolgimento: (a) Per dimostrare la limitatezza, essendo $|\cos(x - y)| \leq 1$ potremmo sfruttare la maggiorazione

$$|[Af](x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot |f(y)| \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \Big(1 \Big| |f| \Big) \leq \frac{1}{\pi} ||1|| \, ||f|| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, ||f|| \ .$$

in cui abbiamo usato la disuguaglianza di Schwarz ed il fatto che la norma della funzione che vale costantemente 1 è $||1|| = \sqrt{2\pi}$ in $L^2([0, 2\pi])$. Pertanto

$$||Af||^2 = \int_0^{2\pi} |Af(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \, ||f|| \right)^2 \mathrm{d}x = 4 ||f||^2 \ ,$$

e quindi A è limitato con $||A|| \leq 2$.

(b) Per calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze, dobbiamo conoscere la norma di A. La chiave dell'esercizio è quella di scomporre il coseno della differenza con la nota formula trigonometrica, ed osservare che seno e coseno sono funzioni ortogonali in $L^2([0, 2\pi])$:

$$\begin{aligned} [Af](x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)] f(y) \, \mathrm{d}y \\ c(x) &:= \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} \ , \quad s(x) := \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}} \ , \quad ||c|| = 1 = ||s|| \ , \quad (c|s) = 0 \\ Af &= c(c|f) + s(s|f) \ , \qquad \text{proiettore ortogonale su } \langle c, s \rangle \\ ||Af||^2 &= |(c|f)|^2 + |(s|f)|^2 \leq ||f||^2 \ , \qquad \text{disuguaglianza di Bessel} \end{aligned}$$

per cui $||A|| = 1$. Il raggio di convergenza della serie (geometrica) è 1, quindi la serie converge in norma se $||zA|| = |z| \, ||A|| = |z| \leq 1$. Siccome A è un proiettore, abbiamo che $A^n = A$ per ogni $n \geq 1$, quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n A = \mathbb{1} + \left(\frac{1}{1 - z} - 1 \right) A = \mathbb{1} + \frac{z}{1 - z} A \ .$$

A chi non viene la tentazione di usare la somma della serie geometica e scrivere $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n = 1/(1 - zA)$, o meglio, visto che stiamo manipolando operatori, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n = (\mathbb{1} - zA)^{-1}$? In effetti è proprio così (sempre se $|z| < 1$): $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$ è l'inverso dell'operatore $\mathbb{1} - zA$. La verifica è immediata, ricordando che $A^2 = A$:

$$(\mathbb{1} - zA) \left(\mathbb{1} + \frac{z}{1 - z} A \right) = \mathbb{1} + \left(\frac{z}{1 - z} - z - \frac{z^2}{1 - z} \right) A = \mathbb{1} \ .$$

5.3.6 Operatori isometrici ed unitari

Un'importante classe di applicazioni tra spazi metrici è rappresentata dagli operatori isometrici, cioè quelli che preservano le distanze. Poichè negli spazi hilbertiani la metrica è indotta dal prodotto scalare, vale il

Teorema 5.19 *Un operatore T sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è* isometrico *se e solo se*

$$(Tx|Tx) = (x|x) \quad \textit{per ogni } x \in \mathcal{H} \ . \tag{5.64}$$

Dimostrazione: Ovvia: $||Tx|| = ||x||$ se e solo se $||Tx||^2 = ||x||^2$ se e solo se $(Tx|Tx) = (x|x)$. C.V.D.

Questo teorema può anche essere considerato una definizione se l'ambito di lavoro è solo quello degli spazi di Hilbert. Osserviamo che se il dominio di T è un sottospazio proprio di $\mathcal{H}$ (purché denso), T può essere esteso ad un operatore isometrico su tutto $\mathcal{H}$, tramite la procedura di estensione continua. Quindi non è restrittivo supporre $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$.

La conservazione della norma si trasporta alla conservazione di tutti i prodotti scalari:

Teorema 5.20 *Un operatore è isometrico se e solo se*

$$(Tx|Ty) = (x|y) \quad \textit{per ogni } x, y \in \mathcal{H} \ . \tag{5.65}$$

Dimostrazione: Se T è isometrico, allora, sfruttando anche la linearità di T e l'hermiticità del prodotto scalare, abbiamo per ogni $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
&(T(x+y)|T(x+y)) = (Tx|Tx) + (Tx|Ty) + (Ty|Tx) + (Ty|Ty) = (x|x) + (y|y) + 2\mathrm{Re}\,(Tx|Ty) \\
&(T(x+y)|T(x+y)) = (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = (x|x) + (y|y) + 2\mathrm{Re}\,(x|y) \\
&\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Re}\,(Tx|Ty) = \mathrm{Re}\,(x|y) \\
&(T(x+\mathrm{i}y)|T(x+\mathrm{i}y)) = (Tx|Tx) + \mathrm{i}(Tx|Ty) - \mathrm{i}(Ty|Tx) + (Ty|Ty) = (x|x) + (y|y) - 2\mathrm{Im}\,(Tx|Ty) \\
&(x+\mathrm{i}y|x+\mathrm{i}y) = (x|x) + \mathrm{i}(x|y) - \mathrm{i}(y|x) + (y|y) = (x|x) + (y|y) - 2\mathrm{Im}\,(x|y) \\
&\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(Tx|Ty) = \mathrm{Im}\,(x|y) \qquad \Longrightarrow \qquad (Tx|Ty) = (x|y) \ .
\end{aligned}$$

L'implicazione inversa è il caso speciale $x = y$. C.V.D.

Corollario 5.21 *Un operatore T è isometrico se e solo se*

$$T^\dagger T = \mathbb{1} \ . \tag{5.66}$$

Dimostrazione: Se T è isometrico, è limitato, poiché $||T|| = 1$, quindi ha un aggiunto definito su tutto $\mathcal{H}$. Si ha poi che $(x|y) = (Tx|Ty) = (T^\dagger Tx|y)$ per ogni $x, y \in \mathcal{H}$, quindi $x = T^\dagger Tx$ per ogni x e quindi $T^\dagger T = \mathbb{1}$.

Viceversa, se $T^\dagger T = \mathbb{1}$, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ e per ogni $x, y \in \mathcal{H}$ vale

$$(x|y) = (T^\dagger Tx|y) = (Tx|Ty) \ ,$$

ossia T è isometrico. C.V.D.

ESEMPIO: Negli spazi normati delle successioni $l^p : 1 \leq p \leq \infty$, l'operatore di traslazione a destra T_d è isometrico. Tuttavia non è suriettivo, infatti l'immagine di T_d è il sottospazio proprio costituito dalle successioni il cui primo elemento è nullo. Se T_s indica l'operatore di traslazione a sinistra, vale $T_s T_d = \mathbb{1}$. In particolare, nello spazio di Hilbert l^2, si ha $T_d^\dagger = T_s$ e $T_d^\dagger T_d = \mathbb{1}$. Invece

$$T_d T_d^\dagger = T_d T_s = P_{\langle e^{(0)} \rangle^\perp} \neq \mathbb{1} \ .$$

T_s poi non è neanche isometrico avendo un nucleo non banale. Il suo aggiunto è evidentemente $T_s^\dagger = T_d$, e vale $T_s T_s^\dagger = \mathbb{1}$ ma $T_s^\dagger T_s = T_d T_s \neq \mathbb{1}$.

OSSERVAZIONE: Per un operatore isometrico T, da $T^\dagger T = \mathbb{1}$ deduciamo che T è invertibile come biiezione da $\mathcal{H}$ ad $\mathrm{Im}\,(T)$, ossia l'inversa è definita solo sull'immagine di T, che può essere un sottospazio proprio di $\mathcal{H}$ (e neanche denso in $\mathcal{H}$), dato che T non è necessariamente suriettiva. Scriveremo quindi $T^{-1} = T^\dagger|_{\mathrm{Im}\,(T)}$.

Quello che manca ad un operatore isometrico per essere una biiezione in $\mathcal{H}$ è la suriettività:

Definizione 5.12 *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Un operatore $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ si dice* unitario *se è isometrico e suriettivo.*

Teorema 5.22 *Un operatore U è unitario se e solo se*

$$U^\dagger U = \mathbb{1} = U U^\dagger \qquad \Longleftrightarrow \qquad U^{-1} = U^\dagger \ . \tag{5.67}$$

Dimostrazione: Se U è unitario, essendo isometrico, dall'eq. (5.66) si ha che $U^\dagger U = \mathbb{1}$. Poichè U è suriettivo, l'eq. (5.65) comporta che il dominio di $U^\dagger$ è tutto $\mathcal{H}$. Per ogni $y \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(U^\dagger)$ esiste $x \in \mathcal{H}$ tale che $y = Ux$, $U^\dagger y = U^\dagger U x = x$, $UU^\dagger y = Ux = y$ quindi $UU^\dagger = \mathbb{1}$.

Viceversa, supponiamo valida la relazione operatoriale (5.67). Le identità operatoriali indicano l'isometria di U e $U^\dagger$; le stesse identità operatoriali indicano l'uguaglianza dei domini dei vari operatori, per cui

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}(U^\dagger) = \mathcal{D}(\mathbb{1}) = \mathcal{H} \\ &U^\dagger U x = x \quad \forall\, x \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(U^\dagger) = \mathcal{H} \\ &U U^\dagger x = x \quad \forall\, x \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Im}\,(U) = \mathcal{H} \ . \end{aligned}$$

Quindi U e $U^\dagger$ sono anche suriettivi e pertanto unitari. C.V.D.

ESEMPIO: La trasformata di Fourier $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$, essendo biiezione isometrica (vedi sez. 4.3.2), è un operatore unitario.

Sia A un operatore continuo. Abbiamo visto che il suo esponenziale è dato da

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^\infty \frac{A^n}{n!} \ .$$

L'esponenziale dell'aggiunto è

$$\mathrm{e}^{A^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^\dagger)^n}{n!} \ .$$

Dalle proprietà enunciate nel teorema 5.11, troviamo che $(A^\dagger)^n = (A^n)^\dagger$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(A^\dagger)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(A^n)^\dagger}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!} \right)^\dagger$$

Possiamo passare al limite per $N \to \infty$ perchè l'aggiunzione preserva la norma e quindi è una funzione continua. In definitiva

$$\mathrm{e}^{A^\dagger} = (\mathrm{e}^A)^\dagger$$

Sia ora $A = \mathrm{i}B$ con B autoaggiunto e continuo. Vale $A^\dagger = (\mathrm{i}B)^\dagger = \mathrm{i}^* B^\dagger = -\mathrm{i}B = -A$, o come si dice, B è antiautoaggiunto, e vale

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\right)^\dagger = \left(\mathrm{e}^{A}\right)^\dagger = \mathrm{e}^{A^\dagger} = \mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\right)^{-1} \ . \tag{5.68}$$

Quindi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}$ è un operatore unitario. Riassumendo:

Proposizione 5.23 *Se A è un operatore continuo nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora*

$$\mathrm{e}^{A^\dagger} = (\mathrm{e}^A)^\dagger \ . \tag{5.69}$$

Se B è un operatore continuo autoaggiunto, allora l'operatore

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} \tag{5.70}$$

è unitario.

Esempio: Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ l'operatore di *traslazione*

$$U_a : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \ , \qquad [U_a f](x) := f(x-a) \tag{5.71}$$

è un operatore unitario.

Esempio: Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ ed $R \in O(n, \mathbb{R})$ una matrice $n \times n$ ortogonale: $R^T R = \mathbb{1}$. Allora l'operatore di *rotazione*

$$U_R : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \ , \qquad [U_R f](x) := f(R^{-1}x) \tag{5.72}$$

è un operatore unitario.

Esempio: Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $k = 1, \cdots, n$, l'operatore di *moltiplicazione*

$$X_k : D_k \to \mathcal{H} \ , \qquad [X_k f](x) := x_k f(x) \ , \qquad D_k := \{f \in \mathcal{H} : [x \mapsto x_k f(x)] \in \mathcal{H}\} \tag{5.73}$$

è un operatore autoaggiunto.

5.3.7 Operatori chiusi

Molti operatori che rappresentano importanti osservabili in meccanica quantistica non sono continui, come ad esempio gli operatori posizione in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, impulso, momento angolare, hamiltoniana, ecc..

Per questi ed altri operatori non limitati un nuovo concetto, quello di chiusura, sostituisce quello di continuità, nel senso che garantisce alcune proprietà basilari per l'uso in fisica e matematica.

Definizione 5.13 *Siano X e Y spazi normati ed A un'applicazione lineare da X a Y. A è detto* chiuso *se, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ nel dominio di A tale che*

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \in X \\ Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in Y \end{cases} \quad \text{allora} \quad \begin{cases} x \in \mathcal{D}(A) \\ Ax = y \ . \end{cases} \tag{5.74}$$

Equivalentemente, un operatore è chiuso se è chiuso il suo *grafico*, cioè l'insieme

$$\text{graf}(A) := \{(x, Ax) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(X)\} \ . \tag{5.75}$$

Nota: Notiamo la differenza rispetto al concetto di continuità. Qui l'esistenza del limite $Ax_n \to y$ è assunta per ipotesi, mentre nella continuità è conseguenza del fatto che $x_n \to x$.

Definizione 5.14 *Se un operatore non limitato A non è chiuso, ma ammette una estensione chiusa, A si dice* chiudibile. *L'estensione minimale è detta la* chiusura *di A e si indica con $\overline{A}$.*

In questo caso si può dimostrare che il grafico della chiusura coincide con la chiusura del grafico:

$$\text{graf}(\bar{A}) = \overline{\text{graf}(A)} \ . \tag{5.76}$$

Esempio: Sia $X = C([a,b], ||\cdot||_\infty)$ lo spazio delle funzioni continue definite su un intervallo limitato (non necessariamente chiuso) con la sup-norma ed A l'operatore di derivazione definito sul sottospazio delle funzioni con derivata continua: $A : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, $f \mapsto Af = f'$. Chiaramente A non è limitato (cfr. esempio a pag. 124). È però chiuso. Infatti, supponiamo che $f_n \to f \in X$ e $Af_n = f_n' \to g \in X$. Tradotto in parole, la successione f_n converge uniformemente ad f e anche la successione delle derivate f_n' converge uniformemente ad una funzione continua g. Allora, per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata, f è derivabile ed $f' = g$ continua, cioè $f \in C^1 = \mathcal{D}(A)$ e $Af = g$.

Come preannunciato, la chiusura è una proprietà particolarmente utile nel nostro studio di operatori autoaggiunti e unitari. Enunciamo a questo scopo una serie di teoremi per operatori su spazi di Hilbert.

Proposizione 5.24 *Ogni operatore limitato è chiuso.*

Dimostrazione: Infatti il loro dominio è tutto lo spazio $\mathcal{H}$ o può essere esteso a tutto $\mathcal{H}$. Inoltre dalla continuità segue che

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = A \lim_{n\to\infty} x_n = Ax \,.$$

C.V.D.

Corollario 5.25 *Ogni operatore unitario è chiuso.*

Teorema 5.26 *Sia A un operatore simmetrico. Allora la sua chiusura esiste, è unica ed inoltre*

$$\left(\overline{A}\right)^\dagger = A^\dagger \,. \tag{5.77}$$

Teorema 5.27 *Sia A un operatore densamente definito. Allora*

1. *L'aggiunto di A è chiuso: $A^\dagger = \overline{A^\dagger}$;*

2. *Se A è chiudibile, $\overline{A}^\dagger = A^\dagger$;*

3. *A è chiudibile se e solo se $\mathcal{D}(A^\dagger)$ è denso in $\mathcal{H}$, ed in tal caso vale*

$$A^{\dagger\dagger} = A \,; \tag{5.78}$$

Corollario 5.28 *Ogni operatore autoaggiunto A è chiuso.*

5.3.8 L'aggiunto dell'operatore di derivazione

Derivazione su funzioni definite in $\mathbb{R}$

Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Consideriamo l'operatore di *derivazione* definito sul suo dominio naturale

$$\begin{aligned} \partial : \mathcal{D}(\partial) \to \mathcal{H} \,, \qquad & [\partial f](x) = f'(x) \\ \mathcal{D}(\partial) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \exists f' \in L^2(\mathbb{R})\} \,. & \end{aligned} \tag{5.79}$$

Ci proponiamo di determinare il suo aggiunto. Data una funzione $g \in \mathcal{H}$, al variare di $f \in \mathcal{D}(\partial)$ vogliamo esprimere il prodotto scalare $(g|\partial f)$ come $(\bar{g}|f)$ con una qualche funzione $\bar{g} \in \mathcal{H}$. Se ciò è possibile, allora $g \in \mathcal{D}(\partial^\dagger)$ e $\partial^\dagger g = \bar{g}$. Esplicitamente

$$\int_{\mathbb{R}} g^*(x) f'(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \bar{g}^*(x) f(x)\, \mathrm{d}x \,. \tag{5.80}$$

Vediamo che questa uguaglianza si può ottenere con un'integrazione per parti:

$$\int_a^b g^*(x) f'(x)\, \mathrm{d}x = [g^*(x) f(x)]_a^b - \int_a^b g'^*(x) f(x)\, \mathrm{d}x \,, \tag{5.81}$$

purché i termini di bordo si annullino all'infinito ($a \to -\infty$, $b \to +\infty$) e purché

$$\bar{g}(x) = -g'(x) \quad \iff \quad \bar{g} = -\partial g \,. \tag{5.82}$$

Quindi l'operatore candidato ad essere l'aggiunto di ∂ è $\partial^\dagger = -\partial$. La questione però è delicata, perché L^2 ed il suo prodotto scalare sono definiti in termini dell'integrale di Lebesgue, e la formula di integrazione per parti non è garantita per tutte le funzioni di L^2 derivabili (quasi ovunque).

Il fatto è questo: il teorema fondamentale del calcolo integrale vale anche per l'integrale di Lebesgue:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \quad \text{quasi ovunque, per ogni } f \in L^2(\mathbb{R}) \tag{5.83}$$

cioè la derivata dell'integrale è uguale alla funzione stessa (a parte in un insieme di punti di misura nulla). Ma non è detto che l'integrale della derivata sia uguale (quasi ovunque e a meno di una costante di integrazione) alla funzione stessa. Basta pensare a funzioni con discontinuità a salto, come la Θ di Heaviside:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \qquad \Theta'(x) = 0 \quad \forall\, x \neq 0\,, \qquad \int_a^x \Theta'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{5.84}$$

Ovviamente potremmo limitarci a funzioni C^1, che costituiscono un insieme denso in L^2, ma tale limitazione è troppo restrittiva. La condizione adatta per giustificare l'integrazione per parti è quella di considerare funzioni *assolutamente continue*:

Definizione 5.15 *Una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ si dice* assolutamente continua *se esiste una funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.85}$$

per un qualche $a \in \mathbb{R}$.

L'eq. (5.83) implica che ogni primitiva di una funzione L^1 è assolutamente continua. Se indichiamo con C_A l'insieme delle funzioni assolutamente continue,[5] vale $C^1 \subset C_A \subset C^0$. Siccome C^1 è denso in L^2, anche C_A è denso in L^2.

Esempio: Un esempio classico di funzione continua ma non assolutamente continua è la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0)\,. \end{cases} \tag{5.86}$$

Si vede facilmente che f' non è integrabile in un intervallo che comprenda l'origine, quindi non vale l'eq. (5.85) per $a < 0\,,\ x > 0$.

C_A è chiuso rispetto alla somma e moltiplicazione di funzioni, e grazie alla proprietà (5.85) vale la formula di integrazione per parti (5.81) se $f, g \in C_A$.

A questo punto siamo a cavallo: se definiamo come dominio per la derivata

$$\mathcal{D}(\partial) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C_A : \exists f' \in L^2(\mathbb{R})\}\,, \tag{5.87}$$

allora per ogni $f \in \mathcal{D}(\partial)$ vale

$$(g|\partial f) = \int_{\mathbb{R}} g^*(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} [-g'(x)]^* f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.88}$$

[5]Non c'è una notazione standard per l'insieme delle funzioni assolutamente continue.

se e solo se anche $g \in \mathcal{D}(\partial)$; il termine di bordo si annulla perché

$$f \in C_A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \ .$$

In definitiva,

$$\mathcal{D}(\partial^\dagger) = \mathcal{D}(\partial) \ , \qquad \partial^\dagger = -\partial \tag{5.89}$$

e quindi l'operatore di derivazione sul dominio (5.87) è anti-autoaggiunto. Moltiplicandolo per un numero immaginario, otteniamo pertanto un operatore autoaggiunto, per esempio

$$P \equiv -\mathrm{i}\partial \ , \qquad \mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(\partial) \ , \qquad P^\dagger = P \ . \tag{5.90}$$

Derivazione su funzioni definite in un intervallo limitato

Se consideriamo lo spazio $L^2([a,b])$ con $a, b \in \mathbb{R}$, quindi per funzioni definite su un intervallo limitato, il termine di bordo nella formula di integrazione per parti (5.81) non si annulla in generale per le funzioni in

$$D_{[a,b]} := \{f \in L^2([a,b]) \cap C_A : \exists f' \in L^2([a,b])\} \ ; \tag{5.91}$$

affinché questo succeda, dobbiamo restringere il dominio di ∂. Ciò si può fare in vari modi, ma le condizioni da imporre devono essere omogenee, per mantenere la struttura di spazio vettoriale del dominio.

Se imponiamo

$$\mathcal{D}(\partial) = D^{(0)}_{[a,b]} := \{f \in D_{[a,b]} : f(a) = 0 = f(b)\} \ , \tag{5.92}$$

allora il termine di bordo nell'eq. (5.81) si annulla per ogni

$$g \in \mathcal{D}(\partial^\dagger) = D_{[a,b]} \supset \mathcal{D}(\partial) \ ,$$

quindi l'operatore

$$P^{(0)} := -\mathrm{i}\partial \ , \qquad \mathcal{D}(P^{(0)}) = D^{(0)}_{[a,b]}$$

è simmetrico ma non autoaggiunto: il suo aggiunto

$$P^{(0)\dagger} = -\mathrm{i}\partial \ , \qquad \mathcal{D}(P^{(0)\dagger}) = D_{[a,b]} \supset \mathcal{D}(P^{(0)})$$

è diverso da $P^{(0)}$, anche se ha la stessa espressione differenziale; in effetti l'aggiunto è un'estensione propria di $P^{(0)}$.

Esercizio: Verificare che, se si restringe ulteriormente il dominio di $-\mathrm{i}\partial \equiv \hat{P}$ a

$$\mathcal{D}(\hat{P}) = \{f \in D^{(0)}_{[a,b]} : f' \in D_{[a,b]}\} \ ,$$

allora $\mathcal{D}(\hat{P}^\dagger) = D_{[a,b]}$ ed ha senso definire l'operatore $\hat{P}^\dagger\hat{P}$ con dominio $\mathcal{D}(\hat{P})$ ed azione $(-\mathrm{i}\partial)^2 = -\partial^2$. Si può facilmente verificare che esso è autoaggiunto. Questo è l'operatore che compare nel termine cinetico dell'hamiltoniana della buca di potenziale infinita tra a e b in meccanica quantistica. Mostrare che le autofunzioni normalizzate di $H = \hat{P}^\dagger\hat{P}$ sono le $e_n(x) =$

$\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\big(nK(x-a)\big)$ con $n \in \mathbb{N}^*$, $K := \frac{\pi}{b-a}$ ed autovalore corrispondente $E_n = n^2K^2$. Dimostrare infine, utilizzando i risultati sulle serie di Fourier, che il sistema $\{e_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ è ortonormale e completo per $L^2([a,b])$.

Usando invece condizioni al contorno periodiche per il dominio di ∂

$$D^{(\mathrm{per})}_{[a,b]} = \{f \in D_{[a,b]} : f(a) = f(b)\}\ , \tag{5.93}$$

allora la formula (5.81) diventa

$$\int_a^b g^*(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = [g(b)-g(a)]^*\,f(a) - \int_a^b g'^*(x)f(x)\,\mathrm{d}x\ , \tag{5.94}$$

ed il termine di bordo si annulla per ogni $f \in D^{(\mathrm{per})}_{[a,b]}$ se e solo se anche $g \in D^{(\mathrm{per})}_{[a,b]}$. Quindi con questo dominio ∂ è antiautoaggiunto, mentre risultano autoaggiunti i suoi multipli immaginari, come

$$P \equiv -\mathrm{i}\partial\ , \qquad \mathcal{D}(P) = D^{(\mathrm{per})}_{[a,b]}\ , \qquad P^\dagger = P\ . \tag{5.95}$$

Nota: Si possono ottenere altri operatori autoaggiunti $P_{(\theta)}$ imponendo condizioni al contorno del tipo

$$\mathcal{D}(P_{(\theta)}) = \{f \in D_{[a,b]} : f(b) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f(a)\}\ , \quad \theta \in [0, 2\pi[\ .$$

In particolare, per $\theta = \pi$, si hanno le condizioni al bordo antiperiodiche $f(b) = -f(a)$. Questi operatori, nonostante l'azione sia sempre quella di $-\mathrm{i}\partial$, sono tuttavia diversi tra loro.

Esercizio: Determinare il dominio con condizioni periodiche al bordo che rende autoaggiunto l'operatore "hamiltoniano" $H = -\partial^2$ in $\mathcal{H} = L^2([a,b])$; trovare un sistema ortonormale di autofunzioni e dimostrare che è completo in $\mathcal{H}$. Verificare che gli autovalori corrispondenti sono diversi da quelli ottenuti nell'esercizio precedente (buca infinita).

Traccia di svolgimento: Partire da P^2 con P definito nell'eq. (5.95). Restringere il dominio di P^2 in modo che $\mathrm{Im}\,(P) = \mathcal{D}(P)$, ossia

$$\mathcal{D}(H) = \{f \in D^{(\mathrm{per})}_{[a,b]} : f' \in D^{(\mathrm{per})}_{[a,b]}\}\ .$$

In questo modo i termini di bordo della formula

$$\int_a^b g^*\partial^2 f = \big[g^*f' - g'^*f\big]_a^b + \int_a^b (\partial^2 g)^* f$$

si annullano se e solo se $g \in \mathcal{D}(H)$, quindi H è autoaggiunto. L'equazione agli autovalori è risolta dalle funzioni $\alpha\sin\big((k_n(x-a)\big) + \beta\cos\big((k_n(x-a)\big)$. Imponendo l'appartenenza al dominio di H troviamo che
$k_n = nk$ con $k := \frac{2\pi}{b-a}$. Come sistema autofunzioni linearmente indipendenti e normalizzate si può prendere
$\left\{\sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\big(nk(x-a)\big) : n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\big(nk(x-a)\big) : n \in \mathbb{N}\right\}$ che è il SONC in forma reale di $L^2([a,b])$.

L'operatore H appena studiato rappresenta (a meno del fattore costante $\hbar^2/2m$) l'hamiltoniana di una particella vincolata a muoversi liberamente su una circonferenza di lunghezza $b-a$, ossia in un sistema unidimensionale in cui i punti a e b sono identificati. Osservare come lo spazio di Hilbert coincida con quello della particella confinata nella buca infinita, ma gli operatori hamiltoniani corrispondenti sono invece diversi, con diversi autovettori ed autovalori.

Esercizio: Abbiamo visto che $\Pi = P^{(0)\dagger}$ è un'estensione propria di $P^{(0)}$, in particolare è densamente definito. Mostrare che $\Pi^\dagger = P^{(0)\dagger\dagger} = P^{(0)}$, quindi $\Pi^\dagger \subset \Pi$ ove l'inclusione è propria (i domini sono diversi). Come si concilia questo fatto con l'equazione (5.46)?

Riferimenti ed approfondimenti

Gli argomenti di questo capitolo sono generalmente esposti in testi di geometria (p.es. [Rub]) per le nozioni più elementari, specialmente in dimensione finita, e in testi di analisi funzionale per le nozioni più elaborate tipiche degli spazi a dimensione infinita (p.es. [BaNa, KoFo]). Si consiglia anche la lettura di [Cic, Pra] e soprattutto delle dispense [Ort, Mar, BFS].