Capitolo 7

Date: 2021-03-31 13:05 +0200 Revision: 325 : e4130306dc3b

Forme differenziali

7.1 Il differenziale

Ricordiamo alcuni concetti base del calcolo differenziale per funzioni tra spazi normati.

Definizione 7.1 *Siano X e Y $\mathbb{K}$-spazi normati, $D \subset X$, $f : D \to Y$ funzione, $x_0 \in D$ punto interno a D ed $u \in X$ un vettore di X. La* derivata (direzionale) *di f in x_0 rispetto al vettore u è definita come*

$$\partial_u f(x_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{K}^*}} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} \tag{7.1}$$

se tale limite esiste in Y.

Chiaramente, affinché la precedente definizione abbia senso, X ed Y devono essere spazi vettoriali sul medesimo campo $\mathbb{K}$. La derivata rispetto ad un vettore proporzionale ad u è proporzionale alla derivata rispetto ad u:

Proposizione 7.1 *Nelle condizioni della precedente definizione, se $\lambda \in \mathbb{K}$, $v = \lambda u \in X$ e se esiste $\partial_u f(x_0)$ allora esiste anche $\partial_v f(x_0)$ e si ha*

$$\partial_{\lambda u} f(x_0) = \lambda \partial_u f(x_0) \ . \tag{7.2}$$

Nel caso in cui $X = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) e si consideri la derivata direzionale rispetto al vettore della base canonica $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, tale derivata è indicata con il termine di *derivata parziale* rispetto alla k-esima variabile $x_k \in \mathbb{K}$:

$$\partial_k f(x) \equiv \partial_{e_k} f(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \ , \qquad (x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k) \ . \tag{7.3}$$

Definizione 7.2 *Siano X e Y $\mathbb{K}$-spazi normati, $D \subset X$, $f : D \to Y$ funzione, $x_0 \in D$ punto interno a D. Si dice che f è* differenziabile *in x_0 se esiste una funzione lineare e continua $T : X \to Y$, cioè $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che sia*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} \frac{||f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)||_Y}{||x - x_0||_X} = 0 \ . \tag{7.4}$$

In altre parole, f è differenziabile in x_0 se e solo se esiste una funzione affine (lineare + costante) continua $f_a : x \mapsto f(x_0) + T(x - x_0)$ tale che la norma di $||f(x) - f_a(x)||_Y$ sia $o(||x - x_0||_X)$, ossia infinitesima di ordine superiore a $||x - x_0||_X$ al tendere di x ad x_0. In pratica f_a è la funzione affine che meglio approssima f in un intorno di x_0

Definizione 7.3 *Nelle condizioni della precedente definizione, se f è differenziabile in x_0, la funzione lineare $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ si chiama* differenziale (totale) *di f in x_0 e si indica con uno dei seguenti simboli:*

$$f'(x_0) \ , \qquad Df(x_0) \ , \qquad \mathrm{d}f(x_0) \ . \tag{7.5}$$

Spesso l'azione di una funzione lineare T su un vettore $u \in X$ è rappresentata con le notazioni equivalenti

$$T(u) \equiv T.u \equiv T\,u \ . \tag{7.6}$$

È un facile esercizio verificare la seguente

Proposizione 7.2 *Se $f : D \to Y$ è differenziabile in $x \in D \subset X$, allora f è derivabile rispetto a qualsiasi vettore $u \in X$ e si ha*

$$\partial_u f(x) = \mathrm{d}f(x).u \ . \tag{7.7}$$

In particolare, per le derivate parziali si ha

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \mathrm{d}f(x).e_k \ . \tag{7.8}$$

Cioè il vettore $\partial_u f(x) \in Y$ è dato dall'azione del differenziale $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ sul vettore $u \in X$.

OSSERVAZIONE: La derivabilità e la differenziabilità di una funzione dipendono dalla topologia degli spazi vettoriali ma non dalla loro norma. Se diverse norme inducono la stessa topologia, le derivate direzionali ed il differenziale di una funzione non cambiano.

Naturalmente, ogni funzione affine (in particolare lineare) è differenziabile, ed il suo differenziale coincide con la parte lineare della funzione: Sia $a \in Y$, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$,

$$f : X \to Y \ , \quad f(x) = a + T.x \qquad \Longrightarrow \qquad df(x) = T \quad \text{per ogni } x \in X \ . \tag{7.9}$$

L'esistenza delle derivate parziali di una funzione f in un punto x è una condizione necessaria ma non sufficiente a garantire la differenziabilità della funzione in x (anzi, nemmeno la continuità!). Neanche la derivabilità rispetto a qualsiasi vettore $u \in X$ è sufficiente. La condizione seguente si rivela perciò assai utile:

Teorema 7.3 (del differenziale totale) *Sia $D \subset \mathbb{K}^n$, sia Y un $\mathbb{K}$-spazio normato, x interno a D, $f : D \to Y$ funzione. Se le derivate parziali $(\partial_k f)_{k=1\dots,n}$ esistono in un'intorno di x e sono continue in x, allora f è differenziabile in x.*

7.2 Forme differenziali

Ci focalizziamo ora al caso $Y = \mathbb{K}$. Sia X un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale a dimensione finita ed $f : D \to \mathbb{K}$ con $D \subset X$ aperto. Se f è differenziabile in un punto $x \in D$, il suo differenziale è una applicazione lineare $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, cioè un elemento del duale X^* di X, spazio delle funzioni lineari da X a $\mathbb{K}$. Metto in evidenza il fatto che non introduciamo qui nessun prodotto scalare, quindi non abbiamo il concetto di ortogonalità .

Dal corso di geometria sappiamo che, in dimensione finita, X ed X^* sono spazi vettoriali con la stessa dimensione, e che, fissata una base in X, è naturalmente associata la *base duale* in X^*. Rivediamone la procedura. Se in X si è scelta una base (qualsiasi, non necessariamente ortonormale) $(e_k)_{k=1,\dots,n}$, ogni vettore $u \in X$ si decompone in modo univoco nella somma vettoriale

$$u = \sum_{k=1}^{n} e_k u_k$$

in cui i numeri $u_k \in \mathbb{K}$ sono chiamati coefficienti del vettore u. In pratica, $X \cong \mathbb{K}^n$. Le *funzioni coordinate* rispetto alla base si indicano spesso con $x_1, \dots x_n$, ove $x_k : X \to \mathbb{K}$ è la funzione che ad $u \in X$ fa corrispondere il coefficiente k-esimo di u, cioè la sua componente rispetto al k-esimo vettore della base:

$$x_k(u) = u_k$$

Le funzioni coordinate sono chiaramente lineari, quindi coincidono con il loro differenziale $\mathrm{d}x_k$ in ogni punto dello spazio, sicché vale $\mathrm{d}x_k.u = u_k$.

Come già detto, lo spazio duale X^* ha la stessa dimensione n dello spazio X, ed inoltre la scelta della base $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ in X individua la *base duale* $(\tilde{e}_j)_{j=1,\dots,n}$ in X^*, definita dalla relazione

$$\tilde{e}_j.e_k = \delta_{jk} \ , \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{e}_j.u = \tilde{e}_j.\left(\sum_{k=1}^{n} e_k u_k\right) = u_j \ . \tag{7.10}$$

Vediamo quindi che i differenziali delle coordinate sono esattamente i vettori della base duale di X^*, denoteremo quindi $\tilde{e}_k = \mathrm{d}x_k$.

Poichè il differenziale di una funzione nel punto x è un'applicazione lineare, la sua azione sul vettore u si può scrivere come

$$\mathrm{d}f(x).u = \mathrm{d}f(x).\left(\sum_{k=1}^{n} e_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{d}f(x).e_k] u_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\ (\mathrm{d}x_k.u) \ ,$$

il che ci permette di esprimere il differenziale della funzione in termini della base duale

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\ \mathrm{d}x_k \ , \tag{7.11}$$

ove i coefficienti dello sviluppo sono dati dalle derivate parziali. Ribadiamo che la scelta della base $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ può essere qualsiasi, anche non ortonormale.

Esempio: Se X è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita munito di prodotto scalare (simmetrico), sappiamo che ad ogni funzionale $\phi \in X^*$ è associato biunivocamente un vettore $x_\phi \in X$ tale che l'azione di ϕ corrisponde al prodotto scalare per x_ϕ:

$$\phi.u = (x_\phi|u) \quad \forall\, u \in X\ .$$

Pertanto, data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ differenziabile in p, al suo differenziale $\mathrm{d}f(p) \in X^*$ possiamo associare un unico vettore, chiamato **gradiente** di f in p e denotato con il simbolo $\nabla f(p)$ tale che

$$\mathrm{d}f(p).v = (\nabla f(p)|v) \quad \forall\, v \in X\ . \tag{7.12}$$

Introducendo in X una base ortonormale $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ e le relative coordinate cartesiane, dall'eq. (7.11) si ricava subito che le componenti del gradiente sono proprio le derivate parziali di f in p:

$$\nabla f(p) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(p)\, e_k = \big(\partial_1 f(p), \partial_2 f(p), \cdots, \partial_n f(p)\big)\ , \tag{7.13}$$

in cui abbiamo usato una notazione matriciale (vettore riga) nell'ultima uguaglianza. Sottolineiamo che, mentre l'esistenza del gradiente è una nozione intrinseca una volta stabilito il prodotto scalare, la sua espressione (7.13) in termini delle derivate parziali è vera solamente se tali coordinate sono cartesiane, cioè relative ad una base ortonormale di X.

Facciamo ora variare x nell'aperto D ove f è differenziabile; possiamo pensare al differenziale $\mathrm{d}f$ come una funzione che ad ogni punto $x \in D$ associa un funzionale lineare $\mathrm{d}f(x) \in X^*$, cioè

$$\mathrm{d}f : D \to X^*\ .$$

Naturalmente possiamo considerare generiche funzioni $\omega : D \to X^*$, anzi, in fisica e matematica funzioni di questo tipo sono frequenti ed importanti, e sono chiamate con un termine ben preciso.

Definizione 7.4 *Sia D aperto nel $\mathbb{K}$-spazio X di dimensione finita n. Una* forma differenziale di grado *1, od 1-*forma *(di classe C^l, $l \geq 0$) su X è una funzione $\omega : D \to X^*$ (di classe C^l) da D nel duale X^* di X, cioè $\omega \in C^l(D, X^*)$.*

Nel seguito considereremo solamente forme reali, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Se in X sono state introdotte coordinate lineari mediante la scelta di una base, indicando con $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ la corrispondente base duale di X^*, ogni 1-forma di classe C^l si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\omega(x) = \omega_1(x)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \omega_n(x)\,\mathrm{d}x_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\,\mathrm{d}x_k\ , \tag{7.14}$$

dove le n funzioni $\omega_k \in C^l(D, \mathbb{R})$ sono detti *coefficienti della 1-forma ω* (nella base data).

Ci proponiamo ora di capire quando una 1-forma si possa scrivere come il differenziale di una qualche funzione "scalare" $f : D \to \mathbb{R}$, e di studiarne le proprietà .

Definizione 7.5 *Una 1-forma ω definita sull'aperto $D \subset X$ si dice* esatta *in D se esiste una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ tale che sia*

$$\mathrm{d}f(x) = \omega(x) \quad \textit{per ogni } x \in D\ . \tag{7.15}$$

Ogni funzione scalare f tale che $\mathrm{d}f = \omega$ è detta una primitiva *di ω*

Se f e g sono entrambe primitive di ω, allora $\mathrm{d}(f-g) = \mathrm{d}f - \mathrm{d}g = \omega - \omega = 0$. Le funzioni a differenziale nullo su un aperto sono quelle localmente costanti, cioè costanti nelle componenti connesse di D.

Proposizione 7.4 *Se D è aperto connesso ed $\omega : D \to X^*$ è esatta, due primitive di ω differiscono per una costante.*

Esempio: In termodinamica, un sistema costituito da un'unica fase di una quantità fissata di una sostanza chimicamente definita è completamente descritto da due variabili di stato, p. es. volume V e pressione P. Quindi ogni stato del sistema è rappresentato da un punto in $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2 = X$. Le 1-forme di base sono $\mathrm{d}V$ e $\mathrm{d}P$. La 1-forma lavoro è

$$\omega \equiv \delta L = P\,\mathrm{d}V \quad \iff \quad \omega = \omega_V\,\mathrm{d}V + \omega_P\,\mathrm{d}P\,, \quad \omega_V(V,P) = P\,, \quad \omega_P(V,P) = 0\,.$$

Questo significa che, se un sistema compie una trasformazione quasi-statica infinitesima dallo stato iniziale (V_0, P_0) allo stato finale $(V_0 + \Delta V, P_0 + \Delta P)$, allora il lavoro infinitesimo compiuto $\Delta L \in \mathbb{R}$ è dato dall'azione della forma lavoro $\delta L(V_0, P_0) \in X^*$ sullo spostamento infinitesimo $(\Delta V, \Delta P) \in X$:

$$\Delta L = \delta L.(\Delta V, \Delta P) = P_0\,\mathrm{d}V.(\Delta V, \Delta P) = P_0\,\Delta V\,.$$

La forma lavoro non è esatta, come verificheremo tra pochissimo.

Non ogni forma è esatta, anzi, in qualche senso potremmo dire che le forme esatte sugli spazi di dimensione $n \geq 2$ sono una sparuta minoranza. Infatti, se ω è differenziabile, possiamo ricavare subito una condizione necessaria per l'esattezza di ω che limita drasticamente l'insieme delle possibili forme esatte. Asserire che ω è differenziabile equivale ad asserire che i suoi coefficienti $\omega_k(x)$ dell'eq. (7.14) sono differenziabili;
asserire che ω è esatta equivale ad affermare l'esistenza di una $f : D \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale che $\partial_k f(x) = \omega_k(x)$ per ogni $x \in D$, $k = 1, \ldots, n$;
pertanto f deve essere due volte differenziabile in D, e quindi le derivate parziali miste devono commutare:

$$\partial_j \partial_k f(x) = \partial_k \partial_j f(x) \quad \text{per ogni } x \in D\,. \tag{7.16}$$

Definizione 7.6 *Una 1-forma differenziale differenziabile $\omega : D \to X^*$ si dice* chiusa *se i suoi coefficienti in una base coordinata soddisfano le condizioni*

$$\partial_j \omega_k(x) = \partial_k \omega_j(x) \quad \textit{per ogni } x \in D\,, j, k = 1, \ldots, n\,. \tag{7.17}$$

Proposizione 7.5 *Condizione necessaria affinché una 1-forma differenziale differenziabile sia esatta è che essa sia chiusa.*

La condizione (7.17) è anche detta *condizione di integrabilità* della 1-forma.

L'essere chiusa, per una 1-forma differenziale differenziabile, è una proprietà intrinseca, ossia non dipende dal sistema di coordinate. Se $\omega : D \to X^*$ è differenziabile, allora $\omega'(x) \in \mathcal{L}(X, X^*)$ può essere identificata con una forma bilineare su X, ponendo

$$\omega'(x) : X \times X \to \mathbb{R}\,, \qquad \omega'(x).(u,v) = \big(\omega'(x).u\big).v \quad \text{per ogni } u, v \in X.$$

Allora ω è chiusa se $\omega'(x)$ è una forma bilineare *simmetrica* per ogni $x \in D$: $\omega'(x).(u,v) = \omega'(x).(v,u)$. Questa proprietà è intrinseca, e non dipende dal sistema di coordinate. Introducendo le coordinate è facile vedere che la simmetria di $\omega'(x)$ equivale alla condizione di chiusura (7.17).

Esempio: La 1-forma lavoro dell'esercizio precedente non è chiusa:

$$\partial_V \omega_P = \partial_V 0 = 0 \ , \quad \partial_P \omega_V = \partial_P P = 1 \ ,$$

quindi non può neanche essere esatta.

Una 1-forma chiusa non è necessariamente esatta. È però vero che le 1-forme chiuse sono esatte almeno localmente.

Definizione 7.7 *Una 1-forma $\omega : D \to X^*$ si dice* localmente esatta *se per ogni $x \in D$ esiste un intorno aperto U di x in D tale che $\omega|_U$ sia esatta.*

Per verificare che una forma chiusa è localmente esatta, mostriamo che essa è esatta in ogni plurirettangolo aperto contenuto nel suo dominio.

Lemma 7.6 *Sia $P = \prod_{k=1}^n I_k$ un plurirettangolo aperto in $\mathbb{R}^n$ i cui lati $I_k : k = 1, \ldots, n$ sono intervalli aperti di $\mathbb{R}$, e sia $\omega : P \to \mathbb{R}^{n*}$ 1-forma chiusa di classe C^1; fissato $(a_1, \ldots, a_n) \in P$, la funzione*

$$f : P \to \mathbb{R} \ , \qquad f(x_1, \ldots, x_n) := \int_{a_1}^{x_1} \omega_1(\xi_1, a_2, \ldots, a_n) \, \mathrm{d}\xi_1 + \cdots \tag{7.18}$$
$$+ \int_{a_{n-1}}^{x_{n-1}} \omega_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, a_n) \, \mathrm{d}\xi_{n-1} + \int_{a_n}^{x_n} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) \, \mathrm{d}\xi_n$$

è una primitiva di $\omega(x) = \sum_{k=1}^n \omega_k(x) \, \mathrm{d}x_n$ in P; quindi ω è esatta.

Dimostrazione: Dimostriamo il teorema per induzione su n. Per $n = 1$, cioè in $\mathbb{R}$, la condizione di chiusura non si applica, mentre essere di classe C^1 è sovrabbondante: è sufficiente che la 1-forma $\omega(x) = \omega_1(x) \, \mathrm{d}x$ sia continua. Infatti, il teorema fondamentale del calcolo integrale dice proprio che $f(x) = \int_a^x \omega_1(\xi) \, \mathrm{d}\xi$ è una primitiva di ω, cioè $f'(x) = \omega_1(x)$ ovvero $\omega(x) = \omega_1(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}f(x)$.

La prima situazione non banale è il caso $n = 2$, in cui si capisce il nocciolo della questione. Consideriamo quindi, come mostrato in fig. 7.1,

$$f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R} \ , \qquad f(x_1, x_2) := \int_{a_1}^{x_1} \omega_1(\xi_1, a_2) \, \mathrm{d}\xi_1 + \int_{a_2}^{x_2} \omega_2(x_1, \xi_2) \, \mathrm{d}\xi_2 \ ;$$

siccome $f(x_1, x_2)$ è definita mediante integrali su intervalli limitati delle funzioni differenziabili $\omega_{1,2}$, si può derivare sotto il segno di integrale ottenendo

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = \omega_1(x_1, a_2) + \int_{a_2}^{x_2} \partial_1 \omega_2(x_1, \xi_2) \, \mathrm{d}\xi_2 \ .$$

Per ipotesi la forma è chiusa, $\partial_1 \omega_2 = \partial_2 \omega_1$, quindi

$$\int_{a_2}^{x_2} \partial_1 \omega_2(x_1, \xi_2) \, \mathrm{d}\xi_2 = \int_{a_2}^{x_2} \partial_2 \omega_1(x_1, \xi_2) \, \mathrm{d}\xi_2 = \omega_1(x_1, x_2) - \omega_1(x_1, a_2) \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_1 f(x_1, x_2) = \omega_1(x_1, x_2) \ .$$

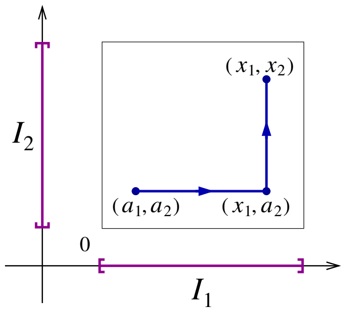

Figura 7.1: Cammino di integrazione per il calcolo della primitiva con $n = 2$.

La derivata rispetto ad x_2 dà subito

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = \omega_2(x_1, x_2) \ .$$

Ragioniamo ora per induzione: se $j < n$ l'ipotesi induttiva dice che la derivata rispetto alla j-esima variabile dei primi $(n-1)$ termini è $\omega_j(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n)$; derivando l'ultimo termine sotto il segno di integrale, come è lecito, si ha

$$\partial_j f(x_1, \dots, x_n) = \omega_j(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) + \int_{a_n}^{x_n} \partial_j \omega_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \, \mathrm{d}\xi_n \ .$$

Usando la proprietà di chiusura $\partial_j \omega_n = \partial_n \omega_j$ si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_j f(x_1, \dots, x_n) &= \omega_j(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) + \int_{a_n}^{x_n} \partial_n \omega_j(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) \, \mathrm{d}\xi_n \\ &= \omega_j(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) + \omega_j(x_1, \dots, x_n) - \omega_j(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \\ &= \omega_j(x_1, \dots, x_n) \ . \end{aligned}$$

C.V.D.

Teorema 7.7 *Sia D aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega \in C^1(D, \mathbb{R}^{n*})$ 1-forma differenziabile. ω è localmente esatta se e solo se è chiusa.*

Dimostrazione: Se ω è localmente esatta, essendo esatta in almeno un intorno di ogni punto, è ivi esatta e quindi chiusa.

Viceversa, poiché D è aperto, ogni suo punto $x \in D$ ammette un intorno rettangolare $P \subset D$. Per il precedente lemma, essendo ω chiusa in D e quindi in P, ω è esatta in P e quindi localmente esatta. C.V.D.

L'essere localmente esatta non implica l'essere esatta, come mostra il seguente classico esempio.

Esempio: Nel piano privato dell'origine si consideri la forma $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^{2*}$ definita da

$$\omega(x, y) = \frac{-y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2} \ .$$

Si verifica subito che ω è di classe C^∞ e che è chiusa:

$$\partial_2\omega_1 = \partial_y \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_1\omega_2 = \partial_x \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \ .$$

Sul piano privato della semiretta reale negativa $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ tale forma è esatta: una primitiva è la funzione "argomento principale" $\arg : D \to]-\pi,\pi[$ (vedi eq. (1.14)), come si può verificare senza difficoltà. Essendo D connesso, ogni primitiva f di ω su D deve differire da arg per una costante c. Ma allora non ci può essere una primitiva g di ω in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, perchè essa dovrebbe essere continua e coincidere con $f+c$ in D. Tuttavia f è discontinua con un salto di 2π attraverso il semiasse reale negativo:

$$\lim_{y\to 0^+} f(x,y) - \lim_{y\to 0^-} f(x,y) = 2\pi \qquad \text{per ogni } x<0 \ .$$

7.3 Integrazione su cammini

Definizione 7.8 *Sia X uno spazio di dimensione finita, $D \subset X$ aperto, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo compatto. Un* cammino *in D è una funzione $\gamma : I \to D$ continua e di classe C^1 a tratti (vedi nota 2 per la definizione di funzione C^1 a tratti). Se $I = [a,b]$ con $a<b$, $\gamma(a)$ è l'*origine*, $\gamma(b)$ è l'*estremità *del cammino. Un cammino si chiama* circuito *— basato su $\gamma(a)$ — se origine ed estremità coincidono: $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

È importante notare che il cammino non rappresenta solo l'immagine (detta anche *sostegno* o *traiettoria*) in D della funzione γ, ma la funzione stessa. Funzioni diverse con lo stesso sostegno corrispondono a cammini diversi.

In seguito, quando scriveremo $I = [a,b]$ o simili, intenderemo sempre che $a = \min(I) < b = \max(I)$.

Definizione 7.9 *Se due cammini $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to D$ e $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to D$ sono tali per cui l'estremità di γ_1 coincide con l'origine di γ_2, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, definiamo la* giustapposizione *dei due cammini come il cammino*

$$\gamma_1.\gamma_2 : [a_1, b_1+b_2-a_2] \to D \ , \qquad [\gamma_1.\gamma_2](t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & a_1 \le t \le b_1 \\ \gamma_2(t-b_1+a_2) & b_1 < t \le b_1+b_2-a_2 \ . \end{cases} \tag{7.19}$$

Naturalmente la cosa si può ripetere per giustapporre più cammini che abbiano in successione l'estremità dell'uno coincidente con l'estremità dell'altro.

Viceversa, dato un cammino $\gamma : [a,b] \to D$, può essere comodo suddividerlo come giustapposizione di cammini "parziali" $\gamma = \gamma_1.\gamma_2.\cdots.\gamma_L$

$$\gamma_l : [a_l, b_l] \to D \ , \quad \gamma_l(t) = \gamma(t) \ , \quad a_1 = a \ , \quad a_{l+1} = b_l \ , \quad b_L = b \ .$$

Ad esempio, dato un cammino C^1 a tratti, lo si può sempre suddividere nella giustapposizione di un numero finito di cammini C^1 (solitamente detti *curve*).

Un'altra operazione che si può introdurre per i cammini è quella di inversione: dato un cammino $\gamma : [a,b] \to D$ definiamo il *cammino inverso*

$$\overleftarrow{\gamma} : [a,b] \to D \ , \qquad \overleftarrow{\gamma}(t) := \gamma(a+b-t) \tag{7.20}$$

che ha quindi lo stesso sostegno, lo stesso dominio, ma origine, estremità e verso di percorrenza invertite.

Vogliamo adesso introdurre l'importante concetto di integrazione di una 1-forma lungo un cammino. L'idea intuitiva si può presentare così: dato un cammino γ, possiamo approssimarlo come una successione di "spostamenti" $\Delta x_j = x_j - x_{j-1} : j = 1, \ldots, N$ dove gli $(x_j)_{j=0,\ldots,N}$ sono punti ordinati lungo il sostegno: $x_j = \gamma(t_j)$, $a = t_0 < \cdots < t_{j-1} < t_j < \cdots < t_N = b$ con origine $x_0 = \gamma(a)$ ed estremità $x_N = \gamma(b)$. Se in D è definita la 1-forma ω, ad ogni Δx_j possiamo applicare la 1-forma $\omega(x_j)$ al vettore Δx_j. Sommando questi numeri su tutti i $j = 1, \ldots, N$, otteniamo un'approssimazione di quello che intendiamo per integrale della 1-forma ω lungo γ. Alla fine vogliamo prendere il limite per $||\Delta x_j|| \to 0$, quindi la somma finita tende ad una serie in $\mathbb{R}$. Si può dimostrare che, se ω è continua, tale limite esiste finito. Siccome $\Delta x_j \simeq \gamma'(t_j)\Delta t_j$, vorremmo che

$$\int_\gamma \omega := \lim_{\substack{||\Delta x_j|| \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=1}^N \omega(x_j).\Delta x_j = \lim_{\substack{|\Delta t_j| \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{j=1}^N \omega\big(\gamma(t_j)\big).\gamma'(t_j)\ \Delta t_j \ . \tag{7.21}$$

Sulla base di questo ragionamento euristico, diamo una definizione rigorosa.

Definizione 7.10 *Sia $\omega : D \to X^*$ 1-forma di classe C^0, $\gamma : I \to D$ cammino. L'*integrale *(curvilineo) di ω sul cammino γ è definito come*

$$\int_\gamma \omega := \int_I \omega\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \ . \tag{7.22}$$

In coordinate, $X \cong \mathbb{R}^n$,

$$\int_\gamma (\omega_1\, \mathrm{d}x_1 + \cdots + \omega_n\, \mathrm{d}x_n) := \sum_{k=1}^n \int_I \omega_k\big(\gamma(t)\big)\ \gamma_k'(t)\ \mathrm{d}t \ . \tag{7.23}$$

Esercizio: Mostrare che l'integrazione di ω lungo il cammino inverso $\overleftarrow{\gamma}$ dà l'opposto dell'integrale su γ:

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} \omega = -\int_\gamma \omega \ . \tag{7.24}$$

Suggerimento: il dominio di integrazione non cambia, ω viene valutata negli stessi punti mentre $(\overleftarrow{\gamma})' = -\gamma'$ in ciascun punto del sostegno.

A ben vedere, l'introduzione euristica si è basata sui vettori "spostamento" Δx_j che sono definiti come differenze di punti nel sostegno di γ e sulla valutazione della 1-forma ω su punti del supporto: la funzione γ non ha giocato alcun ruolo, se non nel determinare il sostegno ed il verso di percorrenza. In altre parole, riparametrizzando il cammino, dovremmo ottenere lo stesso risultato.

Proposizione 7.8 *Sia* $\omega : D \to X^*$ *1-forma di classe* C^0, $\gamma : [a,b] \to D$ *cammino, e* $p : [c,d] \to [a,b]$ *continua,* C^1 *a tratti con* $a = p(c)$ *e* $b = p(d)$, *in modo che* $\gamma \circ p : [c,d] \to D$ *sia un cammino con lo stesso sostegno di* γ *che conserva l'ordine — cioè* $c < d \Longrightarrow p(c) < p(d)$ *— o come si dice, una* riparametrizzazione *di* γ. *Allora l'*integrale *di* ω *non varia per la riparametrizzazione del cammino di integrazione:*

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma \circ p} \omega \,. \tag{7.25}$$

Se invece p *inverte l'ordine — cioè* $c < d \Longrightarrow b = p(c) > p(d) = a$ *— allora*

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma \circ p} \omega \,. \tag{7.26}$$

Dimostrazione: Supponiamo $a = p(c) < b = p(d)$ con $c < d$. Allora, posto $\beta = \gamma \circ p$, dal teorema di integrazione per sostituzione si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d \omega\Big(\gamma\big(p(\tau)\big)\Big).\gamma'\big(p(\tau)\big)\,p'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_c^d \omega\big(\beta(\tau)\big).\beta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

in cui nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\beta'(\tau) = \frac{\mathrm{d}\gamma\big(p(\tau)\big)}{\mathrm{d}\tau} = \gamma'\big(p(\tau)\big)p'(\tau)\,.$$

Se invece p inverte l'ordine di c e d, per quanto detto dell'integrale lungo il cammino inverso, il segno dell'integrale è invertito. C.V.D.

La proprietà di invarianza dell'integrale per riparametrizzazioni (che conservano l'ordine) è fondamentale per poter definire in modo intrinseco l'integrale delle 1-forme.

È immediato vedere che l'integrale di una 1-forma su una giustapposizione di cammini è uguale alla somma degli integrali lungo ciascun cammino:

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \tag{7.27}$$

ed analogamente per una giustapposizione di un numero finito di cammini.

Un modo alternativo per motivare la definizione (7.10) dell'integrale di 1-forme è il seguente: dato un cammino $\gamma : [a,b] \to D$ con sostegno nell'aperto D, ed una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ di classe C^1, la funzione composta $g := f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una "normale funzione reale" C^1 a tratti, per cui si ha

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f'\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

in cui abbiamo sfruttato la regola di derivazione delle funzioni composte $g'(t) = f'\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t)$ per ogni $t \in [a,b]$ (eccettuato al più un numero finito di punti). Nella precedente equazione $f'\big(\gamma(t)\big) \in X^*$ è una 1-forma (esatta) applicata al vettore $\gamma'(t) \in X$ tangente alla curva γ in t. Quindi se poniamo $\omega(x) := f'(x)$ abbiamo

$$f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_a^b \omega\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

che altro non è che la (7.22) per $I = [a,b]$.

Abbiamo così anche mostrato (o definito) che l'integrale di una 1-forma esatta ($\omega = f'$) lungo un cammino γ è uguale alla differenza dei valori che una (qualunque) sua primitiva f assume all'estremità ed all'origine del cammino. In particolare, l'integrale non dipende dal cammino una volta fissati origine ed estremo.

Teorema 7.9 *Sia D aperto di X e $\omega \in C^0(D, X^*)$. Sono equivalenti:*

1. *ω è esatta in D.*

2. *Se β e γ sono cammini in D con la stessa origine e la stessa estremità, allora $\int_\beta \omega = \int_\gamma \omega$.*

3. *Per ogni circuito γ di D, $\oint_\gamma \omega = 0$.*

Dimostrazione: Innanzitutto non è restrittivo supporre che i cammini β e γ siano definiti sullo stesso intervallo $[a, b]$, per esempio riparametrizzando β mediante una trasformazione affine $t = m\tau + q$ con $m > 0$ e q opportuni.

1 ⇒ 2. Fatta sopra: se ω è esatta ed f è una sua primitiva, abbiamo appena visto che

$$f\big(\beta(b)\big) - f\big(\beta(a)\big) = \int_\beta \omega\ , \qquad f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big) = \int_\gamma \omega\ .$$

Ma per ipotesi $\beta(a) = \gamma(a)$ e $\beta(b) = \gamma(b)$, quindi i membri nelle equazioni qui sopra sono uguali.

2 ⇒ 3. Vogliamo mostrare che se γ è un circuito, cioè se $\gamma(a) = \gamma(b) = x_0 \in D$, allora $\oint_\gamma \omega = 0$. Consideriamo il circuito β "fermo in x_0", cioè con sostegno il solo punto x_0, $\beta(t) = x_0$ per ogni $t \in [a, b]$. Allora $\beta'(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$, quindi $\int_\beta \omega = 0$. Ma per ipotesi l'integrale su γ è uguale a quello su β, quindi è nullo.

3 ⇒ 2. Se β e γ sono due circuiti con la stessa origine e la stessa estremità, la giustapposizione $\gamma.\overleftarrow{\beta}$ è un circuito basato a $\gamma(a) = \beta(a)$ (vedi fig. 7.2) Pertanto

$$0 = \int_{\gamma.\overleftarrow{\beta}} \omega = \int_\gamma + \int_{\overleftarrow{\beta}} \omega = \int_\gamma \omega - \int_\beta \omega$$

e quindi $\int_\gamma \omega = \int_\beta \omega$ come si voleva.

2 ⇒ 1. Svolgiamo il nostro ragionamento su una componente connessa D_c di D, in quanto un cammino continuo non può avere sostegno su componenti connesse distinte. Fissato $p_0 \in D_c$, per ogni $x \in D_c$ esiste un cammino γ_x con sostegno in D_c, avente origine in p_0 ed estremità x; se *definiamo* $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$, tale definizione dipende solo da p_0 ed x, e non da γ, per ipotesi. Fissato $x_0 \in D_c$, dimostriamo che $f'(x_0)$ esiste e coincide con $\omega(x_0)$. Con centro x_0 prendiamo una palla con raggio δ tale che $B(x_0, \delta[\subset D_c$, in modo che il segmento $[x_0, x]$ sia contenuto in D_c per ogni $x \in B(x_0, \delta[$. Vale allora

$$f(x) = \int_{\gamma_{x_0}} \omega + \int_{[x_0,x]} \omega = f(x_0) + \int_{[x_0,x]} \omega$$

in cui γ_{x_0} è un qualsiasi cammino da p_0 ad x_0 mentre $[x_0, x]$ è il cammino rettilineo $[0, 1] \ni t \mapsto x_0 + (x - x_0)t$. Posto

$$g(x) = \int_{[x_0,x]} \omega = \int_0^1 \omega\big(x_0 + (x - x_0)t\big).(x - x_0)\ \mathrm{d}t$$

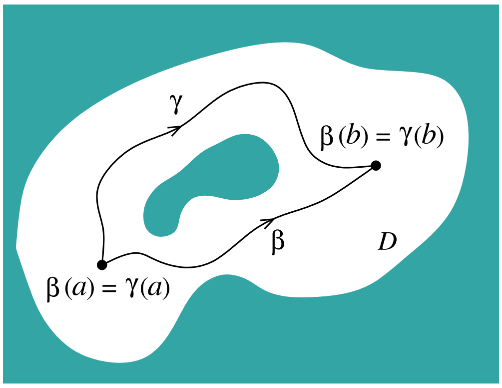

Figura 7.2: Cammini con la stessa origine e la stessa estremità in D.

vogliamo dimostrare che $g'(x_0) = \omega(x_0)$, da cui segue la tesi che $f'(x_0) = g'(x_0) = \omega(x_0)$, in quanto $f(x) - g(x) = f(x_0)$ costante.

Bisogna provare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - \omega(x_0).(x - x_0)}{||x - x_0||_X} = 0 \, .$$

Osservando che $g(x_0) = 0$ e che si può scrivere $\omega(x_0).(x - x_0) = \int_0^1 \omega(x_0).(x - x_0)\, \mathrm{d}t$, il modulo della precedente frazione oggetto del limite diventa

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 \frac{\left[\omega\big(x_0 + (x - x_0)t\big) - \omega(x_0)\right].(x - x_0)}{||x - x_0||_X}\, \mathrm{d}t \right| \\ &\le \int_0^1 \left| \left[\omega\big(x_0 + (x - x_0)t\big) - \omega(x_0)\right]. \frac{(x - x_0)}{||x - x_0||_X} \right| \, \mathrm{d}t \\ &\le \int_0^1 ||\omega\big(x_0 + (x - x_0)t\big) - \omega(x_0)||_{X^*}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

e l'ultima espressione tende a 0 per $x \to x_0$, passando al limite sotto il segno di integrale, grazie alla continuità di ω in x_0. C.V.D.

OSSERVAZIONE: Nella dimostrazione del teorema precedente abbiamo dimostrato che $g'(x_0) = \omega(x_0)$ richiedendo come unica proprietà di ω la continuità in x_0, senza sfruttare la sua esattezza. Abbiamo quindi dimostrato che:

Proposizione 7.10 *Sia $\omega \in C^0(D, X^*)$, $x_0 \in D$, $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta[\subset D$. La funzione $g : B(x_0, \delta[\to \mathbb{R}$ definita da*

$$g(x) = \int_{[x_0, x]} \omega = \int_0^1 \omega\big(x_0 + (x - x_0)t\big).(x - x_0)\, \mathrm{d}t$$

è differenziabile in x_0 e si ha $\mathrm{d}g(x_0) = \omega(x_0)$.

Come osservato, non è richiesto che ω sia esatta o chiusa. Però se ω non è chiusa, allora integrando ω da x_0 ad x lungo cammini diversi dal cammino rettilineo $[x_0, x]$ potrebbe dare risultati diversi per $g(x)$ che potrebbe risultare non differenziabile oppure differenziabile ma con differenziale diverso da $\omega(x_0)$.

ESERCIZIO: Riprendendo l'esempio di un sistema termodinamico rappresentato nel piano (V, P), il lavoro compiuto dal sistema per andare dallo stato (V_0, P_0) allo stato (V_1, P_1) attraverso una trasformazione quasi statica rappresentata dal cammino γ è dato dall'integrale $L = \int_\gamma \delta L$. Questo integrale dipende dalla particolare trasformazione effettuata, cioè da γ. Esiste poi la 1-forma *calore* δQ che, integrata lungo un cammino, esprime il calore Q assorbito dal sistema in tale trasformazione. Anche δQ non è esatta. Il primo principio della termodinamica asserisce che la differenza $\mathrm{d}E := \delta Q - \delta L$ è esatta, e quindi è data dal differenziale di una funzione di stato $E(V, P)$ chiamata *energia interna*. Nel caso dei gas perfetti, governati dall'equazione di stato $PV = nRT$ con T temperatura assoluta, si ha $(c_P = c_V + R)$

$$\begin{aligned} T &= \frac{PV}{nR} , & \mathrm{d}T &= \frac{1}{nR}(P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P) \\ E &= nc_V T , & \mathrm{d}E &= \frac{c_V}{R}(P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P) \\ \delta L &= P\,\mathrm{d}V , & \delta Q &= \mathrm{d}E + \delta L = \frac{c_P}{R}P\,\mathrm{d}V + \frac{c_V}{R}V\,\mathrm{d}P . \end{aligned}$$

7.4 Omotopia tra circuiti

La nozione di omotopia fra circuiti è la traduzione in termini precisi dell'idea di deformare in modo continuo un circuito (cammino chiuso) in un altro, richiedendo che ogni stadio della deformazione sia un circuito. Per semplicità, l'intervallo base delle curve considerate sarà sempre lo stesso, $[a, b]$ con $a < b$.

Definizione 7.11 *Siano $\beta, \gamma : [a, b] \to D$ circuiti. Un'* omotopìa *(di circuito) da β a γ in D è una funzione continua $h : [a, b] \times [0, 1] \to D$ tale che*

(i) $h(t, 0) = \beta(t)$, $h(t, 1) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a, b]$;

(ii) $h(a, \lambda) = h(b, \lambda)$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$

Due circuiti collegati da un omotopia si dicono omòtopi.

In altre parole, fissato $\lambda \in [0, 1]$, dalla condizione (ii)

$$\gamma_\lambda : [a, b] \to D , \qquad \gamma_\lambda(t) = h(t, \lambda)$$

è un circuito. Al variare di λ, $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ è una famiglia ad un parametro di circuiti: per $\lambda = 0$ si ha $\gamma_0 = \beta$, per $\lambda = 1$ si ha $\gamma_1 = \gamma$. Vedere l'illustrazione nella fig. 7.3

Si verifica facilmente che, nell'insieme dei circuiti di D, la relazione di omotopia è una relazione di equivalenza.

L'utilità della nozione di omotopia nello studio delle forme è legata al seguente

Teorema 7.11 *Se ω è una 1-forma continua e localmente esatta in D, e β e γ sono circuiti omotopi in D, allora*

$$\int_\beta \omega = \int_\gamma \omega$$

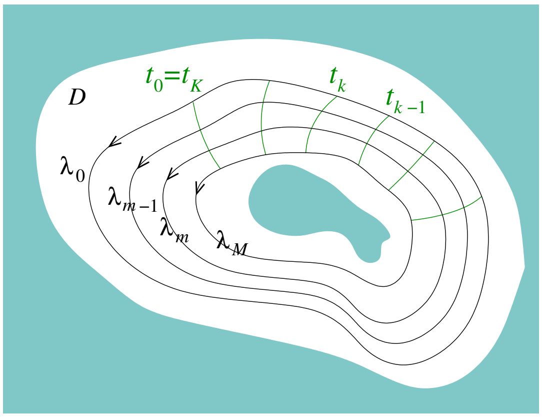

Figura 7.3: Circuiti omotopi in D con $0 = \lambda_0 < \lambda_{m-1} < \lambda_m < \lambda_M = 1$ nella dimostrazione del teorema 7.11.

Dimostrazione: Non diamo la dimostrazione completa, illustriamo solo l'idea, che è quella di suddividere il dominio della funzione $h : [a, b] \times [0, 1]$ che realizza l'omotopia in una griglia di $K \cdot M$ rettangolini compatti $Q_{km} = [t_{k-1}, t_k] \times [\lambda_{m-1}, \lambda_m]$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_K = b$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_M = 1$ in modo che ciascuna immagine (circuitino) $h(Q_{km}) \subset D$ sia contenuta in un intorno nel quale la forma ω sia esatta. Quindi l'integrale di ω in ogni circuitino è nulla.

Consideriamo ora due circuiti $\gamma_{\lambda_{m-1}}$ e γ_{λ_m} "primi vicini", cioè relativi a λ_{m-1} e a λ_m. La somma su k degli integrali di ω sui circuitini $(Q_{km})_{k=1,\dots,K}$ che hanno un tratto in $\gamma_{\lambda_{m-1}}$ ed uno in γ_{λ_m} è 0. Ma tale somma è anche uguale a $\int_{\gamma_{\lambda_{m-1}}} \omega - \int_{\gamma_{\lambda_m}} \omega$ se i circuitini sono orientati concordemente a $\gamma_{\lambda_{m-1}}$ nel tratto comune, perchè ogni segmento a fisso t_k che raccorda i due circuiti fa parte di due circuitini, $h(Q_{k-1,m})$ e $h(Q_{km})$ ed è percorso in verso opposto. Quindi i contributi dovuti ai segmenti tra il circuito $(m-1)$-esimo ed il circuito m-esimo si elidono, mentre i restanti contributi ricostruiscono l'integrale sul circuito $(m-1)$-esimo e quello del circuito m-esimo inverso. Quindi $\int_{\gamma_{\lambda_{m-1}}} \omega = \int_{\gamma_{\lambda_m}} \omega$ per ogni $m = 1, \dots, M$ e pertanto $\int_\beta \omega = \int_\gamma \omega$. C.V.D.

Definizione 7.12 *Si dice che un circuito di $D \subset X$ è* nullomòtopo *se è omotopo in D ad un circuito costante.*

Definizione 7.13 *Uno spazio topologico si dice* semplicemente connesso *se è connesso per archi, ed ogni circuito nello spazio è nullomotopo entro lo spazio stesso.*

Teorema 7.12 *Se D è aperto semplicemente connesso di X, ed $\omega \in C^0(D, X^*)$ è localmente esatta, allora ω è esatta. In particolare, sugli aperti semplicemente connessi le 1-forme chiuse di classe C^1 sono esatte.*

Dimostrazione: Dal precedente teorema 7.11, se D è semplicemente connesso, allora ogni circuito è omotopo al circuito costante. L'integrale di ω su un circuito costante è 0. Quindi l'integrale di ω su qualsiasi circuito di D è 0. Allora, per il teorema 7.9, ω è esatta. La seconda affermazione si basa sul teorema 7.7 la quale afferma che ogni 1-forma di classe C^1 chiusa è localmente esatta. C.V.D.

In sostanza, una 1-forma ω localmente esatta può non essere esatta solamente se il suo dominio non è semplicemente connesso. Per sottoinsiemi del piano, non essere semplicemente connessi corrisponde alla presenza di "buchi" nel dominio, che possono essere circondati da circuiti sui quali l'integrale di ω non è nullo. Se l'insieme D ha un numero finito di "buchi", che possono essere punti o altri insiemi compatti mancanti, si può dimostrare che ω localmente esatta è esatta se e solo se sono nulli gli integrali di ω su ciascuno di n circuiti scelti arbitrariamente, in modo però che ciascun circuito circondi uno ed un solo "buco".

La nozione di forma chiusa data nella definizione 7.6 richiede la differenziabilità della forma, ma non la continuità del differenziale. Il teorema 7.7 afferma che per forme C^1 (differenziabili con differenziale continuo) l'essere chiuse equivale ad essere localmente esatte. Il seguente teorema affema che ciò è vero anche per forme solo differenziabiili.

Teorema 7.13 (di Goursat) *Sia D aperto di $X \cong R^n$, $\omega : D \to X^*$ forma differenziabile chiusa. Allora ω è localmente esatta.*