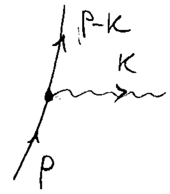
È possibile generalizzare la fattorizzazione delle singolarità ad ordini perturbativi più elevati, includendo tutte le specie partoniche presenti.

Presentiamo un procedimento euristico (la dimostrazione rigorosa è molto più complessa) basato sul conteggio di potenze in una gauge fisica.

Consideriamo un generico diagramma in cui viene emesso un gluone $\varepsilon(k)$ da una particella (quasi) on-shell p_i

- $\widetilde{dk} \propto \frac{d^3k}{2k^0} \propto k^0 dk^0\, d\varphi\, \underbrace{d\cos\theta} \rightarrow d\theta^2$ per $\theta \to 0$

- Elemento di matrice:

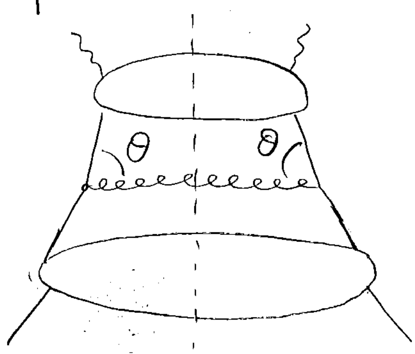


propagatore: $\frac{1}{(p-k)^2} = \frac{1}{-2p_i k} = \frac{1}{-2p^0k^0(1-\cos\theta)} \overset{\theta\to 0}{\propto} \frac{1}{\theta^2}$

vertice: $p_\mu \varepsilon^\mu(k) \propto \theta \to 0$ perchè $\varepsilon \perp k$.

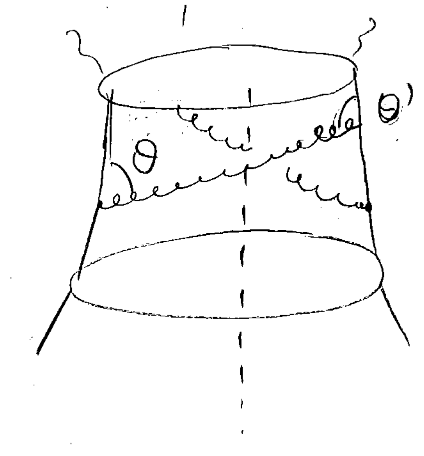
(in gauge fisica!) Se $\theta \to 0 \Rightarrow k \parallel p \Rightarrow \varepsilon \perp p \Rightarrow p\cdot\varepsilon \to 0$

$|\text{Elemento di matrice}|^2$:



TERMINE DI QUADRATO

$\frac{\theta}{\theta^2} \cdot \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$ singolarità collineare

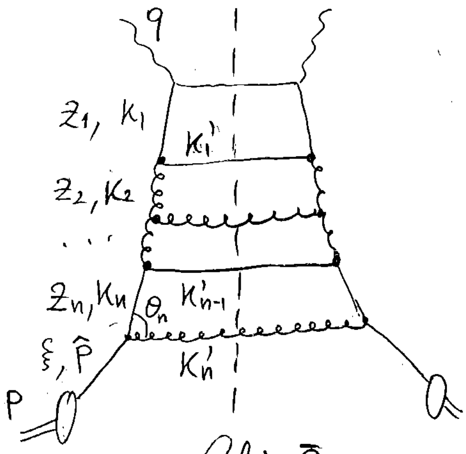


TERMINE DI INTERFERENZA

$\frac{\theta}{\theta^2} \cdot \frac{\theta'}{\theta'^2} \sim \frac{1}{\theta\theta'}$ non sufficientemente singolare da dare una divergenza.

I termini di interferenza non danno divergenze collineari. (10

I diagrammi (regolarizzati dal taglio IR Λ) che danno logaritmi collineari $\sim \ln Q^2/\Lambda^2$ hanno una struttura a scala.

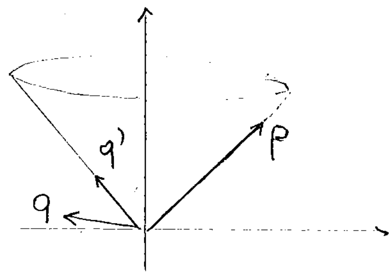


Usiamo la parametrizzazione di Sudakov per gli impulsi interni $k_1 \cdots k_n$:

$$k_i = z_i P - \bar{z}_i q' + k_{iT}$$

LONGITUDINALE — TRASVERSO (euclideo)

Ove $q' = q + xP$ di tipo luce.



Gli $\bar{z}_i$ sono determinati dalle condizioni $k_i'^{\,2} = 0$.

Il fatto che i k_i' siano rivolti nel futuro ($k_i'^{\,0} > 0$) implica l'ordinamento degli z_i: $x \leq z_1 \leq z_2 \ldots \leq z_n \leq \xi \leq 1$

Osserviamo il primo vertice dal basso: $\hat{p} \to k_n + k_n'$.

Se $k_{nT} \to 0 \Rightarrow \dfrac{d\theta_n^2}{\theta_n^2} \simeq \dfrac{dk_{nT}^2}{k_{nT}^2}$ come visto prima.

Al vertice appena sopra $k_n \to k_{n-1} + k_{n-1}'$ abbiamo una analoga divergenza collineare $\dfrac{d\theta_{n-1}^2}{\theta_{n-1}^2} \simeq \dfrac{dk_{n-1,T}^2}{k_{n-1,T}^2}$, perchè il k_n sia on shell.

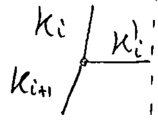
Più precisamente, la divergenza logaritmica vale fino a che $k_{n-1,T}$ è molto maggiore di $k_{n,T}$, per cui il sistema $k_{n-1} + k_{n+1}'$ vede k_n on-shell. Quando $k_{n-1,T}$ è dell'ordine di $k_{n,T}$, k_{n-1} si accorge che k_n non è on-shell e la decrescita $\dfrac{1}{k_{n-1,T}^2}$ si arresta.

$$\begin{cases} k_n' = (1-z_n)P + \bar{z}_n q' - k_{nT} \\ 0 = k_n'^{\,2} = (1-z_n)\bar{z}_n 2P\cdot q' - k_{nT}^2 \\ k_n^2 = -z_n \bar{z}_n 2P\cdot q' - k_{nT}^2 = \dfrac{-k_{nT}^2}{1-z_n} \end{cases}$$

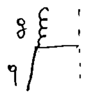
Lo stesso vale per i vertici superiori: la regione con i termini logaritmici è ristretta dalla condizione $\Lambda^2 \ll k_{nT}^2 \ll k_{n-1,T}^2 \ll \ldots \ll k_{1T}^2 \lesssim Q^2$

In questa regione ogni vertice contribuisce con un fattore

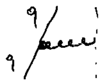
$$\frac{\alpha_s(k_{iT}^2)}{2\pi} P_{a_i a_{i+1}}\left(\frac{z_i}{z_{i+1}}\right) \frac{dk_{iT}^2}{k_{iT}^2} dz_i$$



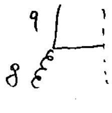
In cui $P_{ba}(z)$ è la funzione di scissione (splitting) che interviene nella scissione partonica $a \to b+b'$.

Abbiamo già calcolato 

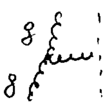
$$P_{gq}(z) = C_F \frac{1+(1-z)^2}{z}$$



$$P_{qq}(z) = C_F \frac{1+z^2}{1-z}$$

Le altre sono: 

$$P_{qg}(z) = T_R n_F \left[z^2+(1-z)^2\right]$$



$$P_{gg}(z) = 2C_A\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)\right]$$

Notiamo le proprietà di simmetria che si intuiscono scambiando i partoni figli $b \longleftrightarrow b'$ che hanno fraz. d'impulso $z \longleftrightarrow 1-z$ rispettivam.

$$\left.\begin{aligned} P_{gq}(z) &= P_{qq}(1-z) \\ P_{qg}(z) &= P_{qg}(1-z) \\ P_{gg}(z) &= P_{gg}(1-z) \end{aligned}\right\} 0<z<1$$

Vediamo ora come calcolare le $\left\{\begin{matrix}\text{funzioni di struttura} \\ \text{densità partoniche}\end{matrix}\right\}$ risommate.

Con 3 pioli

$$F(x,Q^2) = \sum_{a_1 a_2 a} \int_x^1 dz_1 \int_x^{z_1} dz_2 \int_x^{z_2} d\xi \; \hat{F}_{a_1}\left(\frac{x}{z_1}\right) P_{a_1 a_2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) P_{a_2 a}\left(\frac{z_2}{\xi}\right) f_a(\xi) \quad \Big\} A_2(x)$$

$$\int_{\Lambda^2}^{Q^2} \frac{\alpha_s(k_1^2)}{2\pi}\frac{dk_1^2}{k_1^2} \int_{\Lambda^2}^{k_1^2} \frac{\alpha_s(k_2^2)}{2\pi}\frac{dk_2^2}{k_2^2} \quad \Big\} B_2(Q^2)$$

(usiamo α_s mobile)

• B) $\alpha_s(k^2) = \dfrac{1}{b_0 \ln \frac{k^2}{\Lambda_{QCD}^2}} =: \dfrac{1}{b_0 l}$ $\quad dl = \dfrac{dk^2}{k^2}$ $\quad$ (qui $\Lambda > \Lambda_{QCD}$)

$$\Rightarrow B_2 = \frac{1}{(2\pi b_0)^2} \int_{l_\Lambda}^{l_Q} \frac{dl_1}{l_1} \int_{l_\Lambda}^{l_1} \frac{dl_2}{l_2} = (\lambda := \ln l) = \frac{1}{(2\pi b_0)^2} \int_{\lambda_\Lambda}^{\lambda_Q} d\lambda_1 \int_{\lambda_\Lambda}^{\lambda_1} d\lambda_2 = \frac{(\lambda_Q - \lambda_\Lambda)^2}{2!(2\pi b_0)^2}$$

Ripetendo il calcolo per un numero arbitrario di scambi,

$$B_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{d_2-d_1}{2\pi b_0}\right)^n = \frac{1}{n!\,(2\pi b_0)^n}\ln^n\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2\pi b_0}\ln\frac{\alpha_s(\Lambda^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right]^n$$

• A) Abbiamo una convoluzione nelle frazioni di impulso

$$A_2(x) = \left[\hat{F}_{a_1} * P_{a_1a_2} * P_{a_2a} * f_a\right](x) \qquad \text{(somme su indici ripetuti)}$$

Le convoluzioni si diagonalizzano (cioè si riducono a prodotti) mediante la trasformata di Mellin (equivalente a Laplace con $z=e^{-s}$)

$$\tilde{A}(\omega) := \int_0^1 \frac{dx}{x}\, x^{\omega} A(x) \quad \text{con inversa} \quad A(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{d\omega}{2\pi i}\, x^{-\omega}\tilde{A}(\omega) \quad \exists\, c>c_0$$

ascissa di convergenza

Vale $\widetilde{[A_1 * A_2]}(\omega) = \tilde{A}_1(\omega)\tilde{A}_2(\omega)$

$\Rightarrow \tilde{A}_2(\omega) = \tilde{\hat{F}}_{a_1}\,\tilde{P}_{a_1a_2}\,\tilde{P}_{a_2a}\,\tilde{f}_a$ tutte funzioni di ω.

Per generalizzare il calcolo per un numero arbitrario di scambi, consideriamo il precedente prodotto in forma matriciale rispetto agli indici partonici, con $(\hat{F}_{a_1})$ vettore riga, $(P_{a_1a_2})$ matrice, (f_a) colonna.

$\Rightarrow \tilde{A}_n(\omega) = \tilde{\hat{F}}(\omega)\left[\tilde{P}(\omega)\right]^n\tilde{f}(\omega)$. Sommando su n troviamo

$$\Rightarrow \tilde{F}(\omega,Q^2) = \tilde{\hat{F}}(\omega)\sum_n \frac{1}{n!}\left[\frac{\tilde{P}(\omega)}{2\pi b_0}\ln\frac{\alpha_s(\Lambda^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right]^n\tilde{f}(\omega)$$

$$= \tilde{\hat{F}}(\omega)\exp\left\{\frac{\gamma(\omega)}{b_0}\ln\frac{\alpha_s(\Lambda)}{\alpha_s(Q^2)}\right]\tilde{f}(\omega) = \tilde{\hat{F}}(\omega)\left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)}\right]^{-\frac{\gamma(\omega)}{b_0}}\tilde{f}(\omega)$$

in cui abbiamo introdotto la

matrice di dimensione anomala $\gamma_{ab}(\omega) := \frac{1}{2\pi}\tilde{P}_{ab}(\omega)$

Separando $\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu_F^2)}\,\frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)}$ otteniamo infine

$$F_i(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z}\, C_i\left(\frac{x}{z},\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) f(z,\mu_F^2)$$

in cui $\tilde{C}_i(\omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}) := \tilde{\hat{F}}(\omega) \left[\frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu_F^2)} \right]^{-\frac{\gamma(\omega)}{b_0}}$

$$\tilde{f}(\omega, \mu_F^2) := \left[\frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)} \right]^{-\frac{\gamma(\omega)}{b_0}} \tilde{f}(\omega)$$

Le funzioni coefficiente C_i coinvolgono solamente scale dure ($Q^2, \mu_F^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$) e sono calcolabili con la teoria delle perturbazioni.

Le densità partoniche (PDF) invece hanno assorbito le divergenze infrarosse, regolarizzate dalla dinamica di lunghe distanze, e quindi dipendono in modo essenziale dalla fisica non perturbativa, che attualmente non siamo in grado di calcolare da principi primi.

Se assumiamo che le PDF siano quantità finite, grazie alla loro proprietà di universalità possiamo pensare di misurarne il valore usando un sufficiente numero di risultati sperimentali, mediante la seguente procedura:

- fissiamo un valore $\mu_F \gg \Lambda_{QCD}$ per la scala di fattorizzazione

- Consideriamo un insieme di osservabili O_i con l'adrone h nello stato iniziale, ed esprimiamo $O_i(Q^2) = C_i\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) \otimes f(\mu_F^2)$

sempre con la notazione matriciale e la convoluzione $\otimes$.

- Parametrizziamo le PDF con una qualche forma funzionale, teoricamente o fenomenologicamente motivata, p.es. $f_{a/h}(x, \mu_F^2) = A\, x^B (1-x)^C (1 + D\sqrt{x} + E x^2)$

in cui i parametri $A, B, C, \cdots$ dipendono da a, h, μ_F.

- Calcoliamo le funzioni coefficiente $C_{i,a}\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(Q^2)\right)$ in teoria delle perturbazioni.

- Adattiamo i parametri $A_a, B_a, C_a, \ldots, \alpha_s$ (fit) in modo da riprodurre nel miglior modo possibile i dati sperimentali, tramite la formula di fattorizzazione collineare scritta in alto. Ad esempio, si minimizza la somma degli scarti quadratici tra calcolo teorico $O_{TEO} = C \otimes f$ e misura sperimentale.

Il problema di questa procedura è che, scegliendo un unico valore di μ_F, se abbiamo a disposizione dati sperimentali in un ampio dominio di Q^2, il calcolo perturbativo delle C_i presenterà dei termini $\left(\alpha_S \ln \frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)^n$ nella serie perturbativa, e per $\frac{Q^2}{\mu_F^2} \gg 1$ avremo i ben noti problemi di convergenza.

Si potrebbe pensare di usare $\mu_F = Q$ per i vari osservabili.
Se fosse necessario "misurare" le PDF non solo come funzioni di a e x ma anche di $\mu_F^2 = Q^2$, perderemmo tutto il potere predittivo della QCD, in quanto i dati sperimentali servirebbero solo per determinare le PDF.
Noi invece vorremmo predire le osservazioni, usandone solo una parte per determinare le PDF.
Ciò è effettivamente possibile perché, note le PDF ad una scala $\mu_F^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$, i loro valori ad un'altra scala $\mu_F'^2 > \mu_F^2$ sono determinati da equazioni di evoluzione governate dalla dinamica di corte distanze, ossia perturbativa.

Abbiamo infatti

$$\frac{\partial \tilde{f}(\omega,\mu_F^2)}{\partial \ln \mu_F^2} = -\frac{\gamma(\omega)}{b_0}\underbrace{\frac{\partial \ln \alpha_s(\mu_F^2)}{\partial \ln \mu_F^2}}_{\beta(\alpha_s(\mu_F^2)) \simeq -b_0\alpha_s}\underbrace{\left[\frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{\alpha_s(\Lambda^2)}\right]^{-\frac{\gamma(\omega)}{b_0}}\tilde{f}(\omega)}_{\tilde{f}(\omega,\mu_F^2)}$$

$$= \alpha_s(\mu_F^2)\,\gamma(\omega)\,\tilde{f}(\omega,\mu_F^2)$$

Osserviamo come, nel limite di $b_0 \to 0$ a fissa $\alpha_s(\mu_F^2)$, cioè con costante di accoppiamento non mobile, avremmo trovato $B_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{\alpha_s}{2\pi}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right]^n$ e quindi

$$\tilde{f}(\omega,\mu_F^2) = \exp\left\{\alpha_s\gamma(\omega)\ln\frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}\right\}\tilde{f}(\omega) = \left(\frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}\right)^{\alpha_s\gamma(\omega)}\tilde{f}(\omega)$$

ossia $\tilde{f}(\omega,\mu_F^2)$ risomma una serie infinita di logaritmi dominanti del tipo $\left(\alpha_s \ln\frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}\right)^n$ (LL)

Sempre per α_s fissa avremmo

$$\frac{\partial \tilde{f}(\omega,\mu_F^2)}{\partial \ln \mu_F^2} = \alpha_s\,\gamma(\omega)\,\tilde{f}(\omega,\mu_F^2)$$

Le correzioni perturbative di ordine superiore che non abbiamo ancora tenuto in conto nel calcolo di $\beta(\alpha_s)$ o di $\gamma(\omega;\alpha_s) = \gamma_0(\omega) + \alpha_s\gamma_1(\omega) + \dots$ non sono accompagnate da un $\ln\frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}$ perchè non sono correzioni divergenti IR, non sono cioè sensibili al taglio Λ

Sono quindi correzioni logaritmiche sottodominanti (next-to-leading log : NLL), cioè sono soppresse per un fattore relativo $\sim \alpha_s(\mu_F^2) \ll 1$.

Abbiamo così risolto i due problemi evidenziati in precedenza:

- la sensibilità alla dinamica IR è riassorbita in una serie di misure che ci permettono di determinare le PDF ad una scala μ_F^2 una volta per tutte, in quanto le PDF sono universali
- le PDF risommano i LL $\sim \left(\alpha_s(\mu_F^2) \ln \frac{\mu_F^2}{\Lambda^2}\right)^n$ a tutti gli ordini. Ciò che si trascura è $O(\alpha_s)$ relativo, e comunque si può calcolare mediante il calcolo ad ordine successivo della funzione $\beta(\alpha_s)$ e della dimensione anomala $\gamma(\omega;\alpha_s)$ (ossia delle $P_{ab}(z;\alpha_s)$)

Nello spazio delle frazioni d'impulso le equazioni di evoluzione diventano convoluzioni, cioè equazioni integro-differenziali, note come

EQUAZIONI DI ALTARELLI-PARISI (DGLAP)

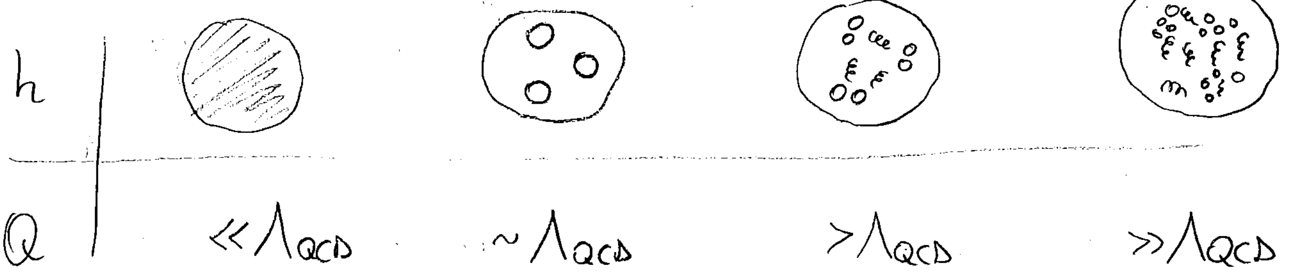
(DOKSHITZER, GRIBOV, LIPATOV)

$$\frac{\partial f_a(z,\mu_F^2)}{\partial \ln \mu_F^2} = \frac{\alpha_s(\mu_F^2)}{2\pi} \sum_b \int_z^1 \frac{d\xi}{\xi} P_{ab}\left(\frac{z}{\xi}, \alpha_s(\mu_F^2)\right) f_b(\xi, \mu_F^2)$$

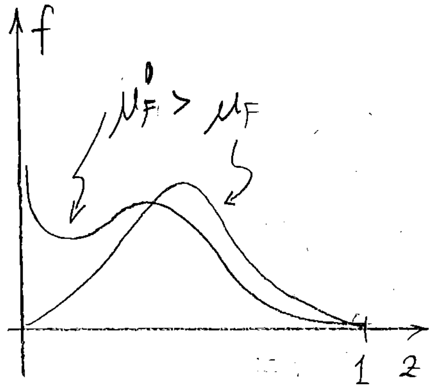
L'interpretazione probabilistica che ne emerge è la seguente:

un partone di tipo b e frazione di impulso ξ osservato ad una scala μ_F^2 ha una probabilità $d\mathrm{Prob} = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ab}\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\mu_F^2}{\mu_F^2}$ di scindersi in un partone di tipo b e frazione d'impulso $z<\xi$ (più un secondo partone di tipo b' e fraz. d'impulso $\xi - z$) se osservato con maggior risoluzione ad una scala $\mu_F^2 + d\mu_F^2$.

In altre parole, con una maggiore risoluzione del fotone virtuale riusciamo a distinguere le fluttuazioni quantistiche $a \to b + b'$ che avvengono nell'adrone a causa dell'interazione forte.



L'aumento della probabilità di scissione al crescere della scala dura fa sì che le PDF si impoveriscano di partoni a grandi $z \lesssim 1$ e si arricchiscano di partoni a piccolo $z \ll 1$.



La dipendenza delle PDF da Q^2 (scegliendo $\mu_F^2 \sim Q^2$) è la spiegazione teorica del fatto sperimentale delle violazioni dello scaling di Bjorken, cioè della dipendenza (logaritmica) delle funzioni di struttura da Q^2; mentre nel modello a partoni ingenuo si osserva indipendenza da Q^2.

EVOLUZIONE DI (NON) SINGOLETTO DI SAPORE.

Ci sono 13 specie partoniche: 6 sapori, 6 antisapori, 1 gluone.
La QCD conserva, tra le altre cose, la coniugazione di carica, il sapore, il numero barionico.

Al 1° ordine in QCD sono possibili

$$q_i \to q_i + g$$
$$g \to q_i + \bar{q}_i$$
$$g \to g + g$$

$$\Rightarrow P_{q_i q_j} = \delta_{ij} P_{qq}$$

$$\left.\begin{aligned} P_{g q_i} &= P_{gq} \\ P_{q_i g} &= P_{qg} \end{aligned}\right\} \text{ ignorando le masse dei quark.}$$

Qui $i = u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s} \ldots$ indica (anti)sapore dei quark.

Inglobando $\frac{\alpha_s}{2\pi}$ in P, possiamo scrivere in notazione compatta (usiamo anche $f_i := f_{q_i}$ e $\dot{f} := \frac{\partial f}{\partial \ln \mu_F^2}$)

$$\left\{\begin{aligned} \dot{f}_i &= P_{qq} f_i + P_{qg} f_g \\ \dot{f}_g &= \sum_i P_{gq} f_i + P_{gg} f_g \end{aligned}\right\} \text{ 13 equazioni accoppiate}$$

Il processo $q_i \to g \to q_j$ mescola i sapori e accoppia le 13 equazioni. Le possiamo disaccoppiare quasi completamente definendo la PDF del "mare di quark"

$f_S := \sum_i f_i$ detta anche di "singoletto"

e le densità di "non singoletto" ← riferite alla trasformaz. sotto $SU(n_f)$ di sapore

$$f_{NSi} := f_i - \frac{1}{2n_f} f_S$$

$$\Rightarrow \dot{f}_{NSi} = \dot{f}_i - \frac{1}{2n_f}\sum_j \dot{f}_j = P_{qq} f_i + \cancel{P_{qg} f_g} - \frac{1}{2n_f}\sum_{j=1}^{2n_f}\left(P_{qq} f_j + \cancel{P_{qg} f_g}\right) = P_{qq} f_{NSi}$$

disaccoppiate;

$$\left\{\begin{aligned} \dot{f}_S &= \sum_{i=1}^{2n_f}\left(P_{qq} f_i + P_{qg} f_g\right) = P_{qq} f_S + 2n_f P_{qg} f_g \\ \dot{f}_g &= \sum_i P_{gq} f_i + P_{gg} f_g = P_{gq} f_S + P_{gg} f_g \end{aligned}\right\} \text{ 2 equazioni accoppiate.}$$

La conservazione del sapore e dell'impulso impone dei vincoli che devono essere soddisfatti dal modello a partoni (anche migliorato):

$$N_i := \int_0^1 dz \left[f_{q_i}(z) - f_{\bar{q}_i}(z)\right] = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 dz\, P_{qq}(z) = 0$$

↑ indip. da μ_F

$$1 = \int_0^1 dz \left[f_S(z) + f_g(z)\right] \quad \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 z\left[P_{qq} + P_{gq}\right] dz = 0 \\ &\int_0^1 z\left[P_{gg} + 2n_f P_{qg}\right] dz = 0 \end{aligned}\right.$$