Cancellazione divergenze IR a tutti gli ordini

È davvero notevole il fatto che in QED si riescano
- a calcolare i contributi dominanti delle emissioni di fotoni soffici reali e virtuali a tutti gli ordini perturbativi,
- a sommare tutti questi contributi in una semplice forma esponenziale, e quindi
- a dimostrare la cancellazione delle divergenze IR per l'intera serie perturbativa.

A questo proposito seguiamo il metodo di Weinberg (Phys. Rev. 140 B (1965) p. 516) → Peskin Schröder 6.5, Muta 6.2

Consideriamo un'ampiezza di transizione $M^{(0)}_{\beta\alpha}$ che non coinvolge fotoni soffici, né tra le particelle esterne, né tra i quanti virtuali all'interno dei rispettivi diagrammi di Feynman.
Quello che vogliamo fare è
- determinare $M_{\beta\alpha}$, ossia l'ampiezza che include fotoni virtuali soffici
- $\dfrac{d\sigma_{\beta\alpha}(\Delta)}{d\Phi_\beta}$, cioè la sezione d'urto del processo $\alpha \to \beta$ + (fotoni soffici con energia totale $< \Delta$)

Precisiamo cosa intendiamo per fotoni soffici virtuali: intendiamo fotoni virtuali la cui energia è minore di un certo valore Λ che funge da separatore tra ciò che consideriamo "soffice" e ciò che consideriamo "duro". P. es. $\Lambda^2 \ll m_e^2, |P_i \cdot P_j|, |q_i^2|$ interni, ecc.

Quindi $M^{(0)}_{\beta\alpha}(\Lambda)$ dipende da Λ.

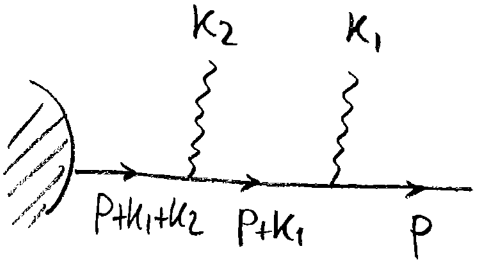
Abbiamo già visto che, quando "attacchiamo" un fotone soffice ad una gamba on-shell di impulso P_e, $M_{\beta\alpha}$ si modifica per l'aggiunta di un fattore di inserzione soffice

$$M \to M \times e_e \eta_e \frac{P_e \cdot \varepsilon_{k,\lambda}}{P_e \cdot K + i\eta_e 0} \quad : \begin{cases} e_e = \text{carica elettrica} \\ \eta_e = \begin{matrix} +1 & (\text{uscente}) \\ -1 & (\text{entrante}) \end{matrix} \end{cases}$$

Invece, se attacchiamo un fotone soffice ad una gamba off-shell con $P_e^2 \neq m_e^2$, non si genera un fattore divergente per $K \to 0$.

Tuttavia bisogna prestare un po' di cautela quando attacchiamo più di un fotone soffice (reale o virtuale che sia) ad una stessa gamba esterna.

Nel caso in cui ci siano 2 fotoni soffici K_1, K_2 emessi da un elettrone che termina con un impulso P, troviamo la struttura di Dirac



$$\bar{u}(p)(-ie\gamma^{\mu_1})\frac{i(\hat{p}+\hat{k}_1+m)}{(p+k_1)^2-m^2}(-ie\gamma^{\mu_2})\frac{i(\hat{p}+\hat{k}_1+\hat{k}_2+m)}{(p+k_1+k_2)^2-m^2}$$

$$\simeq e^2\,\bar{u}(p)\frac{\gamma^{\mu_1}(\hat{p}+m)}{2p\cdot k_1}\gamma^{\mu_2}\frac{(\hat{p}+m)}{2p\cdot(k_1+k_2)}$$

in cui abbiamo trascurato i termini $\hat{k}_j$ nei numeratori ed i termini quadratici k_i^2, $k_i \cdot k_j$ nei denominatori.
Anticommutando le matrici di Dirac $\{\gamma^\mu, \hat{p}\} = 2p^\mu$ e sfruttando la relazione $\bar{u}(p)(\hat{p}-m)=0$ troviamo un semplice fattore $2p^{\mu_1} \cdot 2p^{\mu_2}$ che moltiplica $\bar{u}(p)$ nel numeratore.
Tenendo in conto del denominatore otteniamo il fattore di inserzione

$$\frac{e p^{\mu_1}}{p \cdot k_1} \frac{e p^{\mu_2}}{p \cdot (k_1+k_2)}$$

A questa configurazione va aggiunta quella in cui prima è emesso k_1 e poi k_2, che produce un fattore di inserzione analogo al precedente con $k_1 \leftrightarrow k_2$.
Sommando i due termini otteniamo la "corrente" di emissione di 2 fotoni soffici

$$e^2 p^{\mu_1} p^{\mu_2} \left(\frac{1}{p \cdot k_1} + \frac{1}{p \cdot k_2} \right) \frac{1}{p \cdot (k_1+k_2)} = e^2 p^{\mu_1} p^{\mu_2} \frac{\cancel{p \cdot (k_1+k_2)}}{p \cdot k_1 \; p \cdot k_2} \cdot \frac{1}{\cancel{p \cdot (k_1+k_2)}}$$

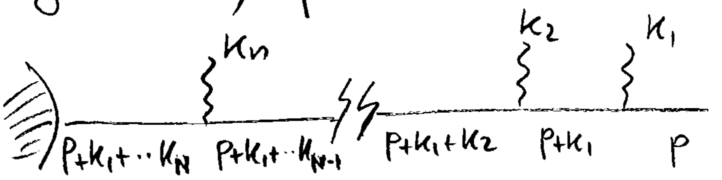
$$= \frac{e p^{\mu_1}}{p \cdot k_1} \frac{e p^{\mu_2}}{p \cdot k_2} = J_w^{\mu_1}(p) J_w^{\mu_2}(p)$$

I due contributi si combinano per dare due fattori di emissione singola! Questo fatto descrive (ed è conseguenza) della indipendenza delle due emissioni, cioè in pratica i due fotoni sono emessi in modo indipendente, l'emissione dell'uno non influenza l'altra.

Questa notevole proprietà persiste nell'emissione di un numero arbitrario di fotoni.

Ciò è ovvio se i fotoni sono emessi da gambe diverse.

Se invece abbiamo N fotoni emessi dalla stessa gamba, p. es. uscente, abbiamo



$$\rightsquigarrow \frac{e^n\, p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_n}}{p\cdot k_1\;\; p\cdot(k_1+k_2)\;\cdots\; p\cdot(k_1+\cdots+k_N)}$$

Anche in questo caso dobbiamo sommare sulle $n!$ configurazioni ottenute permutando gli n fotoni.

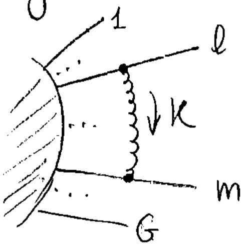
La formula notevole che ci semplifica drasticamente la vita, nota come IDENTITÀ ICONALE, asserisce che

$$\sum_{\text{permutazioni } \sigma} \frac{1}{p\cdot k_{\sigma_1}\;\; p\cdot(k_{\sigma_1}+k_{\sigma_2})\cdots p\cdot(k_{\sigma_1}+\cdots+k_{\sigma_N})} = \frac{1}{p\cdot k_1}\,\frac{1}{p\cdot k_2}\cdots\frac{1}{p\cdot k_N}$$

che si può dimostrare per induzione su N, avendola già verificata per N=2.

CORREZIONI VIRTUALI

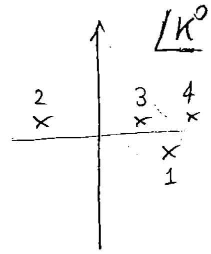
Iniziamo considerando un fotone virtuale di impulso k collegato a due gambe esterne di impulso p_l e p_m distinte ($l \neq m$) di un certo diagramma con G gambe esterne, la cui ampiezza è $\mathcal{M}^{(0)}_{\beta\alpha}$:



$$= \mathcal{M}^{(0)}_{\beta\alpha} \cdot \int \frac{e_l \eta_l p_l^{\mu}}{p_l\cdot k + i\eta_l 0} \cdot \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2-\lambda^2+i0} \cdot \frac{e_m \eta_m p_m^{\nu}}{p_m\cdot(-k)+i\eta_m 0}\, d^4k$$

$$= \mathcal{M}^{(0)}_{\beta\alpha}(+i)\,\frac{e_l e_m \eta_l \eta_m}{(2\pi)^4}\int \frac{dk^0 d^3\vec{k} \quad p_l\cdot p_m}{[k^0-(\omega_k-i0)][k^0+(\omega_k-i0)][E_l k^0-\vec{k}\cdot\vec{p}_l+i\eta_l 0][E_m k^0-\vec{k}\cdot\vec{p}_m-i\eta_m 0]}$$

4 poli: $k^0 = \omega_k - i0,\ -\omega_k + i0,\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_l}{E_l} - i\eta_l 0,\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}_m}{E_m} + i\eta_m 0$

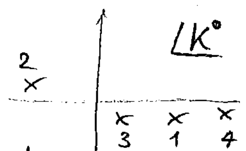


Se l è entrante ($\eta_l = -1$) ed m è uscente ($\eta_m = +1$) solo il 1° polo è sotto l'asse reale. Chiudo sotto:

$$\Rightarrow \mathcal{M}^{(0)}_{\beta\alpha} \cdot e_l e_m \eta_l \eta_m \underbrace{\int^{\Lambda} d\tilde{k}\, \frac{p_l\cdot p_m}{p_l\cdot k\ \ p_m\cdot k}}_{\text{il nostro amico}} \in \mathbb{R}$$

il nostro amico $\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\lambda}^{\Lambda}\frac{d\omega_k}{\omega_k}\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\,\frac{p_l\cdot p_m}{p_l\cdot\frac{k}{\omega}\ \ p_m\cdot\frac{k}{\omega}} = \frac{1}{2(2\pi)^2}\ln\frac{\Lambda}{\lambda}\,\frac{1}{\beta_{lm}}\ln\frac{1+\beta_{lm}}{1-\beta_{lm}}$

Lo stesso identico risultato si trova se l è uscente ed m entrante chiudendo stavolta nel semipiano superiore



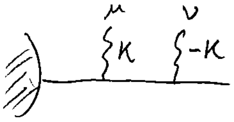
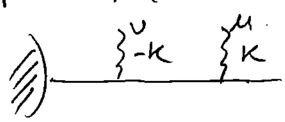
Se invece l ed m sono entrambi uscenti o entranti, non si può evitare il contributo di uno dei poli 3 o 4. Quello che si ottiene è un termine identico al precedente (quindi reale) più un termine aggiuntivo dal polo 3 o 4 che è puramente IMMAGINARIO, e lo indichiamo iC_{lm} con $C_{lm} \in \mathbb{R}$.

Sommando sulle possibili coppie (l,m) di gambe si ha

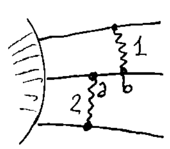
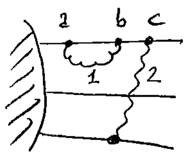
$$M^{(1)}_{\beta\alpha} = M^{(0)}_{\beta\alpha} \cdot \frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\sum_{l,m=1}^{G} \frac{e_l e_m \eta_l \eta_m}{2(2\pi)^2}\,\frac{1}{\beta_{lm}} \ln\frac{1+\beta_{lm}}{1-\beta_{lm}}}_{-A\ :\ A>0} \ln\frac{\Lambda}{\lambda} + i\underbrace{\sum_{l,m} C_{lm}}_{C}\Bigg]$$

dipendono dalle particelle esterne $\{\alpha,\beta\}$

Il fattore $\frac{1}{2}$ ci vuole perché

- se $l \neq m$ nella somma stiamo contando due volte $(l<m) + (l>m)$ lo stesso diagramma virtuale
- se $l=m$ c'è un unico termine nella somma, ma il fatto di avere usato $\frac{p^\mu}{p\cdot k}\cdot\frac{p^\nu}{p\cdot(-k)}$ include i due contributi  + 

mentre per includere  ne basta uno solo.

Se ci sono 2 fotoni virtuali soffici abbiamo diagrammi del tipo  ,  ecc.

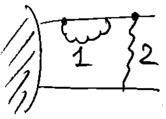
In tutti i casi bisogna sommare su tutti diagrammi ottenuti permutando i punti sulla stessa gamba $(a,b,c,\dots)$ e così facendo si generano i fattori di inserzione indipendenti $\frac{p^{\mu_1}}{p\cdot k_1}\,\frac{p^{\mu_2}}{p\cdot k_2}\dots$ su ogni gamba, che possono quindi essere contratti mediante i propagatori $\frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2-\lambda^2}$ per ogni fotone. In definitiva, abbiamo

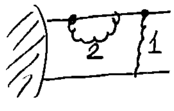
$$M^{(2)}_{\beta\alpha} = M^{(0)}_{\beta\alpha}\left[\frac{1}{2}\sum_{lm}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\,\frac{-i g_{\mu\nu}}{k_1^2}\,\frac{e_l \eta_l p_l^\mu}{p_l\cdot k_1}\,\frac{e_m\eta_m p_m^\nu}{p_m\cdot(-k_1)}\right]\left[\frac{1}{2}\sum_{lm}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\,\frac{-i g^{\alpha\beta}}{k_2^2}\dots\right]\cdot\frac{1}{2!}$$

$$= M^{(0)}_{\beta\alpha}\cdot\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2}A\ln\frac{\Lambda}{\lambda} + i\frac{C}{2}\right]$$

In questo modo abbiamo tenuto in conto tutti i modi in cui il fotone k_1 si può attaccare alle gambe esterne, e anche tutti i modi con cui si può attaccare il fotone k_2.

Tuttavia, siccome i fotoni sono indistinguibili, stiamo contando due volte ogni configurazione, p. es.



+


, da cui la necessità del fattore $\frac{1}{2!}$

Ragionando in modo analogo, l'ampiezza con N fotoni soffici attaccati in tutti i modi alle gambe esterne dure è data da N prodotti identici di attaccare ciascun fotone, ricordando il fattore di simmetria $\frac{1}{N!}$ dovuto all'indistinguibilità dei fotoni.

In conclusione

$$M^{(N)}_{\beta\alpha} = M^{(0)}_{\beta\alpha}\,\frac{1}{N!}\left[-\frac{1}{2}A\ln\frac{\Lambda}{\lambda}+\frac{i}{2}C\right]^N$$

e, sommando su N, troviamo l'ampiezza rivestita di tutti i fotoni virtuali soffici:

$$M^{(\lambda)}_{\beta\alpha} = M^{(0)}_{\beta\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}A\ln\frac{\Lambda}{\lambda}}\, e^{i\frac{C}{2}}$$

Per il calcolo della sezione d'urto, ci serve

$$|M_{\beta\alpha}|^2 = |M^{(0)}_{\beta\alpha}|^2\, e^{-A\ln\frac{\Lambda}{\lambda}} = |M^{(0)}_{\beta\alpha}|^2\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^A$$

e C sparisce.

Vediamo quindi come le correzioni virtuali, divergenti ordine per ordine nella serie perturbativa, si siano combinate per fornire un risultato finito.

Ma attenzione: per $\lambda\to0$ $|M_{\beta\alpha}|^2\to0$, cioè la sezione d'urto si annulla!

Questo è l'effetto dei fotoni virtuali soffici: sopprimere la sezione d'urto.

E a ben vedere, questo risultato è sensato: la probabilità che avvenga un processo di diffusione tra particelle cariche senza emissione di fotoni soffici è zero.

Passiamo quindi ad includere le

EMISSIONI REALI !!

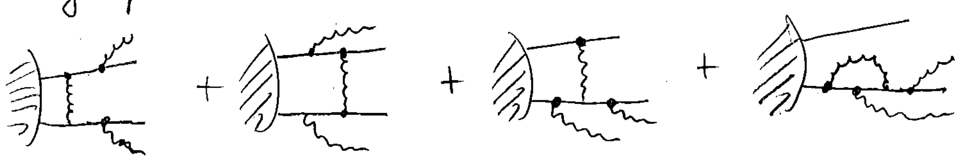
È chiaro a questo punto che l'ampiezza per emettere N fotoni soffici $k_1 \dots k_N$ in aggiunta a tutte le correzioni virtuali ad $M^{(0)}_{\beta\alpha}$ è

$$M_{(k_1 \dots k_N \beta)\alpha} = M_{\beta\alpha} \prod_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{G} \frac{e_\ell \eta_\ell \, P_\ell \cdot \mathcal{E}^*(k_j)}{P_\ell \cdot k_j}$$

in cui ogni fotone k_j può essere emesso da ciascuna delle particelle dure P_ℓ.

Osserviamo che avere usato un fattore di inserzione $\frac{P^\mu}{P \cdot K}$ per ogni fotone significa che stiamo permutando su tutti gli ordinamenti dei punti di emissione nelle varie gambe, sia per emissioni reali che soffici.

Graficamente, stiamo tenendo in conto i diagrammi



ecc.

Per il calcolo della sezione d'urto differenziale nelle sole particelle dure, $\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Phi_\beta}$, dobbiamo:

- Fare il modulo quadro dell'ampiezza per ogni configurazione delle particelle finali
- Sommare sulle polarizzazioni dei fotoni soffici (in quanto essi non vengono osservati)
- Integrare sullo spazio delle fasi dei fotoni soffici
- Sommare sul numero di fotoni soffici emessi.

→ • La somma sulle polarizzazioni di ciascun fotone soffice coinvolge $\sum_{\lambda} P_\ell^\mu \overset{*}{\varepsilon}_\mu(K_j)\, \varepsilon_\nu(K_j)\, P_m^\nu = -P_\ell \cdot P_m$

avendo sfruttato la conservazione della corrente di Weinberg

$J_W^\mu(K) = \sum_\ell \dfrac{e_\ell \eta_\ell P_\ell^\mu}{P_\ell \cdot K}$ che ci permette di rimpiazzare

$\sum_\lambda \overset{*}{\varepsilon}_\mu(K)\, \varepsilon_\nu(K) \longrightarrow -g_{\mu\nu}$ $\Rightarrow |M \prod_j \sum_\ell|^2 = |M|^2 \prod_j \sum_\ell \sum_m^*$

$$= |M|^2 \prod_j \sum_{\ell m} \frac{-e_\ell e_m \eta_\ell \eta_m P_\ell \cdot P_m}{P_\ell \cdot K_j \;\; P_m \cdot K_j}$$

→ • L'integrazione sullo spazio delle fasi di N fotoni soffici è un po' delicata. Potremmo richiedere che ciascun fotone abbia energia $\omega_j < \Delta$ risoluzione dei rivelatori. Ma con tanti fotoni, $N \gg 1$, può succedere che l'energia trasferita ai fotoni soffici, $E_{soff} \sim N \cdot \Delta$ costituisca una frazione consistente dell'energia totale del sistema, e quindi l'approssimazione che le particelle dure finali P_β siano indisturbate dai fotoni soffici verrebbe a cadere.

È più ragionevole imporre la condizione che la somma delle energie dei fotoni soffici emessi non superi una certa soglia Δ.

Vogliamo quindi integrare la seguente quantità:

$$\frac{1}{N!}\int d\tilde{K}_1\, d\tilde{K}_2 \cdots d\tilde{K}_N\ \Theta\left(\Delta-\sum_j \omega_j\right) |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_{j=1}^{N} \sum_{\ell m} \frac{-e_\ell e_m \eta_\ell \eta_m\, p_\ell\cdot p_m}{(p_\ell\cdot K_j)(p_m\cdot K_j)}$$

in cui abbiamo incluso il fattore di simmetria $1/N!$

La presenza della Θ rompe la fattorizzazione dell'integrale.

Per ottenere N integrali indipendenti sfruttiamo la rappresentazione

$$\Theta(\Delta-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{-2\pi i}\left[\underbrace{\frac{e^{-i(\Delta-\omega)x}}{x+i0}}_{\Theta} - \underbrace{\frac{e^{i(\Delta+\omega)x}}{x+i0}}_{0}\right] = \int \frac{dx}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{x}\, e^{i\omega x}$$

0 perchè $\Delta+\omega>0 \quad \forall\, \Delta,\omega>0$

In ogni integrale compare il fattore $e^{i\omega_j x}$, quindi gli N integrali sono uguali tra loro:

$$\Rightarrow |M_{\beta\alpha}|^2 \int \frac{dx}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{x}\ \frac{1}{N!}\left[-\sum_{\ell m} e_\ell e_m \eta_\ell \eta_m \int^{\Delta} d\tilde{K}\, e^{i\omega_K x}\frac{p_\ell\cdot p_m}{p_\ell\cdot K\ \ p_m\cdot K}\right]^N$$

in cui ho imposto che anche l'energia del singolo fotone non superi la soglia Δ.

Ci ricordiamo che $\int d\tilde{K}$ diverge per $\omega_K\to 0$, ma il fattore esponenziale ci complica l'integrale in ω_K.

Allora lo dividiamo in due termini:

$$e^{i\omega x} = 1 + \left(e^{i\omega x}-1\right)$$

è $O(\omega)$ e dà un contributo IR finito:

dà la div IR $\displaystyle\int_\lambda^\Delta \frac{d\omega}{\omega} = \ln\frac{\Delta}{\lambda}$ $\qquad$ $\displaystyle\int_\lambda^\Delta \frac{d\omega}{\omega}\left(e^{i\omega x}-1\right) = \int_0^\Delta \frac{d\omega}{\omega}\left(e^{i\omega x}-1\right)$

Entrambi i termini moltiplicano il solito integrale angolare funzione di $\beta_{\ell m}$, e nella somma $-\sum_{\ell m} e_\ell e_m \cdots$ riproducono la precedente quantità A definita nel virtuale

Quindi il modulo quadro dell'ampiezza integrato su N fotoni soffici con $\sum \omega_j < \Delta$ è

$$|M_{(\beta N)\alpha}|^2 = |M_{\beta\alpha}|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{x} \frac{1}{N!} A^N \left[\ln\frac{\Delta}{\lambda} + \int_0^\Delta \frac{d\omega}{\omega}\left(e^{i\omega x} - 1\right)\right]^N$$

e, sommando su N da 0 ad ∞ riproduciamo anche per l'emissione reale una serie esponenziale, il cui esponente ha 2 termini:

- uno contiene il logaritmo divergente IR
- l'altro contiene una funzione regolare di Δ e x, da integrare in x.

In conclusione

$$|M_{(\gamma_{soft}\,\beta)\alpha}|^2 = |M_{\beta\alpha}|^2 \, e^{A \ln\frac{\Delta}{\lambda}} \int \frac{dx}{\pi} \frac{\mathrm{sen}(\Delta x)}{x} \exp\left\{A \int_0^\Delta \frac{d\omega}{\omega}\left(e^{i\omega x} - 1\right)\right\}$$

$$=: |M_{\beta\alpha}|^2 \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^A \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi} \frac{\mathrm{sen}\, t}{t} \exp\left\{A \int_0^1 \frac{dw}{w}\left(e^{iwt} - 1\right)\right\}}_{b(A) \text{ funzione solo di } A}$$

Poiché $A > 0$, vediamo che nel limite $\lambda \to 0$ la probabilità di emissione reale diverge, tendendo a $+\infty$.

CANCELLAZIONE DELLE DIVERGENZE IR

Ricordando l'espressione di $|M_{\beta\alpha}|^2 = |M^{(0)}_{\beta\alpha}|^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^A$ che include tutte le correzioni virtuali, otteniamo la probabilità di emissione completa

$$|M_{(\gamma_{soft}\,\beta)\alpha}|^2 = |M^{(0)}_{\beta\alpha}|^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^A \left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)^A b(A)$$

$$= |M^{(0)}_{\beta\alpha}|^2 \left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^A b(A)$$

in cui divergenze virtuali e reali si compensano per dare un risultato finito e definito positivo.

OSSERVAZIONI:

- Nel limite $\Delta \to 0$ $\quad \frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Phi_\beta} = \frac{d\sigma^{(0)}_{\beta\alpha}}{d\Phi_\beta}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^A b(A)$

  tende a zero restando positiva, e risolvendo così il problema che si presentava ad $O(\alpha)$

- $\frac{d\sigma_{\beta\alpha}}{d\Phi_\beta}$ non dipende dal parametro arbitrario Λ, in quanto anche $\frac{d\sigma^{(0)}_{\beta\alpha}}{d\Phi_\beta}$ dipende da Λ in modo da cancellare la dipendenza della $d\sigma_{\beta\alpha}$ completa.

- La formula che abbiamo trovato predice la dipendenza da Δ della $d\sigma_{\beta\alpha}$ per tutti i valori di Δ da 0 ad un Δ_{max}, che deve essere molto più piccolo delle energie o delle masse che caratterizzano il processo $\alpha \to \beta$.