Corso di FISICA TEORICA AVANZATA

Parte fenomenologica → QCD → Divergenze IR (anche QED)

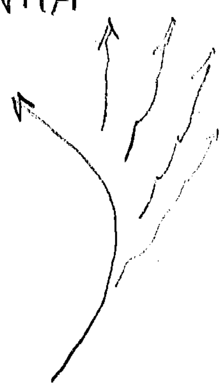
→ Definizione / Calcolo / Misure } quantità osservabili

Parte speculativa → SUSY   Bosoni ↕ Fermioni   (Dominici)

DIVERGENZE INFRAROSSE

Presenza di particelle a massa nulla in QFT

Nocciolo della questione: CARICA ACCELERATA ⇒ RADIAZIONE E.M.



Hp particelle prodotte con $m_\gamma > 0$

$$\Rightarrow E_{min} \geq m_\gamma c^2 \qquad N_{max} < \frac{E_{tot}}{m_\gamma c^2}$$

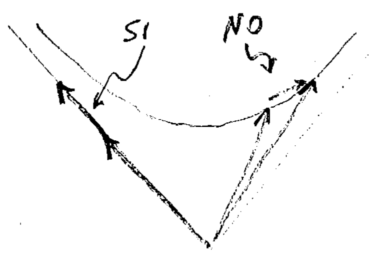
Hp $m_\gamma = 0$ $E_{min} = 0$ $N_{max} = \infty$

In pratica $P(N<\infty) = 0$

Non costa niente produrre fotoni <u>SOFFICI</u>

Hp $m_e = 0$ ⇒ $e \to e + \gamma$ spontaneamente

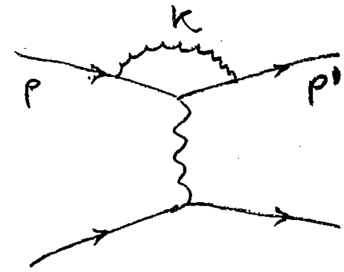
Non costa niente scindersi in 2 particelle <u>COLLINEARI</u>



In QED $\quad m_e \neq 0$

In QCD $\quad m_g = 0 \quad \Rightarrow$ [illegible] è tipico.

Concretamente, anche per un processo $e^- \mu^- \to e^- \mu^-$ le correzioni virtuali $\mathcal{O}(\alpha)$ sono:



- divergenti UV $\quad (k \to \infty)$

cura: rinormalizzazione

$$\psi_0 = \sqrt{Z_2}\,\psi_R$$
$$e_0 = \sqrt{Z_e}\,e_R$$

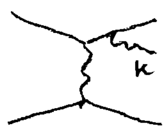
- divergenti IR $\quad (k \to 0)$

$$\sim \int_{m_\gamma}^{m_e} \frac{d\omega}{\omega} f(p,p') \sim \ln\frac{m_e}{m_\gamma} f(p,p')$$ dipende dal processo!

meccanismo di B.N.

cura: non distinguere stati energeticamente degeneri

$$\sigma_V + \int_{soft} \frac{d\sigma_R}{dk} dk = -\infty + \infty = \text{finito}$$

cioè $\displaystyle\int_{\omega_k < \varepsilon} dk \; \Big|$  $\Big|^2$ diverge ma cancella le divergenze soffici virtuali

Essenziale lo studio dell' IRRAGGIAMENTO

→ classico

→ campo e.m. quantistico da corrente elettrica classica

→ processi completamente quantistici (QED, QCD)

Irraggiamento da sorgente classica

$$j \downarrow A \downarrow \mathcal{E}, B \downarrow E$$

Consideriamo il campo e.m. prodotto da una corrente esterna data $j^\mu(x)$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu(x) \quad \iff \quad \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$$

In gauge di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ trovamo l'equazione delle onde non omogenee

$$\Box A^\mu = j^\mu \qquad (1)$$

La soluzione generale si esprime tramite le cosiddette FUNZIONI DI GREEN.

- Hp: $x \mapsto G(x)$ funzione scalare: $\Box G(x) = \delta^4(x)$

  Th: $A^\mu_G(x) = \int d^4y\, G(x-y)\, j^\mu(x)$ soddisfa (1)

- Se $a^\mu(x)$ è soluz. dell'omogenea $\Box a^\mu = 0$

  $\Rightarrow$ $a^\mu + A^\mu_G \equiv A^\mu$ soddisfa (1)

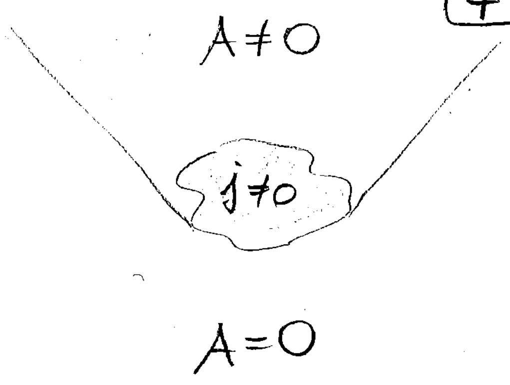
SOLUZ. GENERALE: $$A^\mu(x) = a^\mu(x) + \int G(x-y)\, j^\mu(y)\, d^4y \qquad (2)$$

La F.d.G. di $\Box$ non è unica; la scelta più conveniente dipende dal problema che vogliamo risolvere.

<u>EX</u> $A^\mu(x) = 0 \quad \forall\, t < \bar{t}$; $j^\mu(x) = 0 \ \forall\, t < \bar{t}$.

$A^\mu(x) \neq 0$ solo nel futuro del supporto di j^μ

$$\Rightarrow A^\mu(x) = \int G_{ret}(x-y)\, j^\mu(y)\, dy$$



Determiniamo G_{ret}

Andiamo nello spazio degli impulsi:

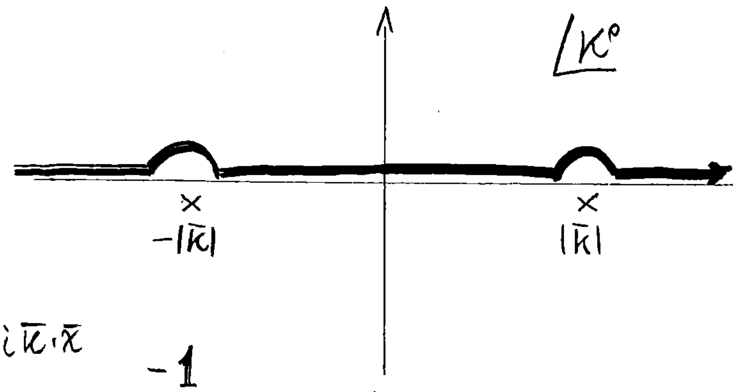
$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \tilde{G}(k)\, e^{-ikx}$$

$$\Box G(x) = \delta^4(x) \qquad \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx} (-k^2) \tilde{G}(k) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ikx}$$

$$-k^2 \tilde{G}(k) = 1 \qquad \Rightarrow \tilde{G}(k) = \frac{-1}{k^2} = \frac{-1}{k^{0\,2} - \vec{k}^2}$$

Ci sono due poli nella variabile k^0 a $\pm|\vec{k}|$

$$\tilde{G}_{\substack{ret\\adv}}(k) = \frac{-1}{(k^0 \pm i0)^2 - \vec{k}^2}$$



$$G_{ret}(x) = \int \frac{dk^0}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{-ik^0 t}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \frac{-1}{(k^0 + i0 - |\vec{k}|)(k^0 + i0 + |\vec{k}|)}$$

$$= i\theta(x^0) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \left(e^{-i\omega_k t} - e^{+i\omega_k t}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad : \omega_k = |\vec{k}|$$

$\vec{k} \to -\vec{k}$

$$= \theta(x^0) \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2\omega_k} \left(i e^{-ik\cdot x} + c.c.\right)$$

$$=: \theta(x^0) \int \widetilde{dk} \left(i e^{-ik\cdot x} + c.c.\right)$$

non è necessario introdurre qui $\widetilde{dk}$

$$G_{adv}(x) = -\theta(-x^0) \int \widetilde{dk} \left(i e^{-ik\cdot x} + c.c.\right)$$

$G^{(-)} := G_{ret} - G_{adv}$ genera un campo libero (vedi domani)

Decomponiamo in integrale di Fourier

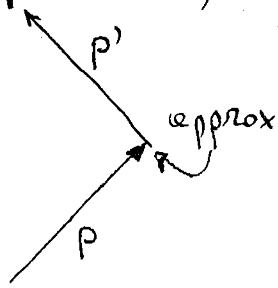
$$j^\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot x}\, \tilde{j}^\mu(k) \qquad : \qquad \tilde{j}^\mu(-k) = \tilde{j}^\mu(k)^*$$

Se j^μ è conservata, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \Rightarrow k_\mu \tilde{j}^\mu(k) = 0$

$$A^\mu(x) = \int G_{ret}(x-y)\, j(y)\, d^4y = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik\cdot x} \frac{-1}{(k^0+i0)^2 - \vec{k}^2}\, \tilde{j}^\mu(k)$$

Qui integrare in k^0 con il metodo dei residui dipende dalla struttura polare e asintotica di $\tilde{j}^\mu(k)$.

<u>EX</u> Carica classica che subisce un urto (improvviso).



Densità di corrente di una carica:

ferma in $\vec{x}_n$: $$j^\mu(t,\vec{x}) = e\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_n)\,(1,\vec{0})^\mu$$

$$= e\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \delta(t-\tau)\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_n)\,(1,\vec{0})^\mu$$

in generale $\rightarrow$ $$= e\int d\tau\, \delta^4(x - x_n(\tau))\, \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau)$$ covarianti di Lorentz

$$= e\int dt'\, \delta^4(x - x_n(t'))\, \frac{dx^\mu}{dt}(t')$$

$$= e\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_n(t))\,(1,\vec{v}(t))^\mu$$

$$= e\left[(1,\vec{v})^\mu\,\delta^3(\vec{x}-\vec{v}t)\,\theta(-t) + \underbrace{(1,\vec{v}')^\mu}_{\frac{p'^\mu}{E'}}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{v}'t)\,\theta(t)\right]$$

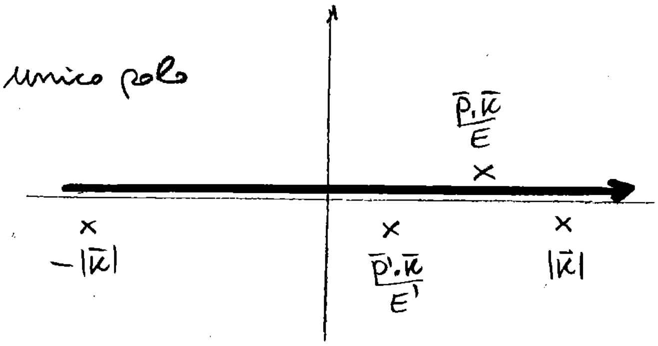
Es: Dimostrare che $\partial_\mu j^\mu = 0$

$$\tilde{j}^\mu(k) = e\left\{\frac{p^\mu}{E}\int_{-\infty}^{0} dt\, e^{ik^0t - i\vec{k}\cdot\vec{v}t + \varepsilon t} + \frac{p'^\mu}{E'}\int_0^\infty dt\, e^{ik^0t - i\vec{k}\cdot\vec{v}'t - \varepsilon t}\right\}$$

$$= e\left\{\frac{p^\mu}{iE\,k\cdot(1,\vec{v}) + \varepsilon} + \frac{p'^\mu}{-iE'\,k\cdot(1,\vec{v}') + \varepsilon}\right\} = ie\left[\frac{p'^\mu}{p'\cdot k + i\varepsilon} - \frac{p^\mu}{p\cdot k - i\varepsilon}\right]$$

$$A^\mu(x) = -ie\int\frac{dk^0}{2\pi}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-ik^0t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{(k^0+i0-|\vec{k}|)(k^0+i0+|\vec{k}|)}\left[\frac{p'^\mu}{E'k^0-\vec{p}'\cdot\vec{k}+i0}-\frac{p^\mu}{Ek^0-\vec{p}\cdot\vec{k}-i0}\right]$$

$\boxed{t<0}$ chiudo sopra; $k^0=\vec{v}\cdot\vec{k}$ unico polo



$$A^\mu(x) = -e\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{(\vec{v}\cdot\vec{k})^2-\vec{k}^2}\cdot\frac{p^\mu}{E}$$

Campo e.m. di una carica in moto uniforme, quindi che non irraggia.

Infatti, se $\vec{v}=0$ $\quad A^\mu(x) = +e(1,0)^\mu\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2}$

$$= \frac{e(1,0)^\mu}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \cancel{k^2}\,dk\int_{-1}^{1}d\cos\theta_{kx}\,d\varphi\,\frac{e^{ikr\cos\theta_{kx}}}{\cancel{k^2}} = \frac{e(1,0)^\mu}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{ikr}\,dk$$

$$= \frac{e(1,0)^\mu}{2\pi^2 r}\underbrace{\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{e}{4\pi r}(1,0)^\mu$$ potenziale Coulombiano elettrostatico.

$\boxed{t>0}$ chiudo sotto; 3 poli.

- Quello a $k^0=\vec{v}'\cdot\vec{k}$ mi dà il potenziale Coulombiano della particella uscente
- Gli altri due sono i responsabili dell'irraggiamento, cioè del campo di radiazione:

$$A^\mu_{rad}(x) = -(-i)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\frac{e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{x}}}{2\omega}\tilde{J}^\mu(\omega,\vec{k}) + \frac{e^{i\omega t+i\vec{k}\vec{x}}}{-2\omega}\tilde{J}(-\omega,k)\right]$$

Cambio $\vec{k}\to-\vec{k}$ nel 2° termine, uso $\tilde{J}(-\omega,-k)=\tilde{J}^*(\omega,k)$

$$A^\mu_{rad}(x) = \int d\tilde{k}\left[e^{-ik\cdot x}\, i\tilde{J}^\mu(k) + c.c.\right] \qquad (k^0=\omega_k)$$

$$= \mathrm{Re}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-ik\cdot x}\, \boxed{\frac{i\tilde{J}^\mu(k)}{\omega_k}} \longrightarrow =: A^\mu(\vec{k})$$

Solo i modi on-shell ($k^2=0$) di j^μ sono irraggiati

Calcoliamo ora l'energia irragiata:

$$E = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\vec{E}^2+\vec{B}^2) \quad ; \quad \vec{\mathcal{E}}(x) = \mathrm{Re}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-ik_\mu x^\mu}\,\mathcal{E}(\vec{k})$$

$$\begin{cases} \vec{E}(x) = -\vec{\nabla}A^0 - \partial^0\vec{A} \\ \vec{B}(x) = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) &= -i\vec{k}\,A^0(\vec{k}) + i\omega_k\vec{A}(\vec{k}) \\ \vec{B}(\vec{k}) &= i\vec{k}\times\vec{A}(\vec{k}) = \end{aligned}$$

Es: $\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = 0$; $\vec{B}(\vec{k}) = \hat{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$

$$E_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\int d^3x\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathcal{E}(k)e^{-ik\cdot x}+\mathcal{E}^*(k)e^{ikx}}{2}\cdot\frac{\mathcal{E}(k')e^{-ik'x}+\mathcal{E}^*(k')e^{ik'x}}{2}$$

$$e^{i(\omega-\omega')t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$e^{i(\omega+\omega')}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k}')$$

$$= \frac{1}{8}\int d^3k\left\{e^{i2\omega t}\,\mathcal{E}(k)\cdot\mathcal{E}(-k) + \mathcal{E}(k)\cdot\mathcal{E}^*(k) + c.c.\right\}$$

$$E_B = \frac{1}{8}\int d^3k\left\{e^{i2\omega t}\,B(k)\cdot B(-k) + B(k)\cdot B^*(k) + c.c.\right\}$$

↳ non ha il $-\hat{k}$ ma $+\hat{k}$ $\Rightarrow \mathcal{E}\cdot\mathcal{E}^*$

$$[\underset{1}{\hat{k}}\times\underset{2}{\mathcal{E}(k)}]\cdot[\underset{3}{-\hat{k}\times\mathcal{E}(-k)}] = -[(\underset{3}{\hat{k}\times\mathcal{E}(-k)})\times\underset{1}{\hat{k}}]\cdot\mathcal{E}(k) = -\mathcal{E}(-k)\cdot\mathcal{E}(k)$$

oppure

$$-\varepsilon_{ijk}\hat{k}_i\mathcal{E}_j\,\varepsilon_{lmk}\hat{k}_l\mathcal{E}'_m = -(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\hat{k}_i\hat{k}_l\mathcal{E}_j\mathcal{E}'_m = -\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}' + \underbrace{(\hat{k}\cdot\mathcal{E})}_{0}\underbrace{(\hat{k}\cdot\mathcal{E}')}_{0}$$

$$E = 4\cdot\frac{1}{8}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\mathcal{E}(k)\cdot\mathcal{E}^*(k) = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\left|\epsilon_\lambda(k)\cdot\mathcal{E}(k)\right|^2$$

$\hookrightarrow$ base di $\langle\vec{k}\rangle^\perp \subset \mathbb{R}^3$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\left|\epsilon_\lambda(k)\cdot\vec{A}(k)\,\omega_k\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1}^{2}\left|\epsilon_\lambda(k)\cdot\tilde{J}(k)\right|^2$$

Proiettando sulle polarizzazioni fisiche abbiamo semplificato il risultato, e lo abbiamo scritto l'energia in termini della $\vec{\tilde{J}}$. Ma possiamo fare di più: Abbiamo scelto le $\vec{\epsilon}_\lambda$ puramente spaziali.
Se le promuoviamo a 4 vettori con $\epsilon^0_\lambda = 0$, il prodotto scalare $\epsilon\cdot\tilde{J}$ lo leggiamo in 4 dimensioni, e vale (posto $n^\mu = (1,\vec{0})$) on shell

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon^\mu_\lambda(k)\,\epsilon^{*\nu}_\lambda(k) = -g^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{k^\mu n^\nu + n^\mu k^\nu}{k\cdot n} - \frac{n^2}{(k\cdot n)^2}k^\mu k^\nu}_{\text{non contribuiscono con correnti conservate}}$$

$$E = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(-\tilde{J}_\mu\tilde{J}^\mu\right) = \frac{e^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\frac{2P\cdot P'}{(P\cdot k)(P'\cdot k)} - \frac{m^2}{(P\cdot k)^2} - \frac{m^2}{(P'\cdot k)^2}\right]$$

$\boxed{\text{Nel SDR}: E=E'}$ $\quad k^\mu = \omega(1,\hat{k})$, $\quad P^\mu = E(1,\vec{v})$, $\quad P'^\mu = E(1,\vec{v}')$

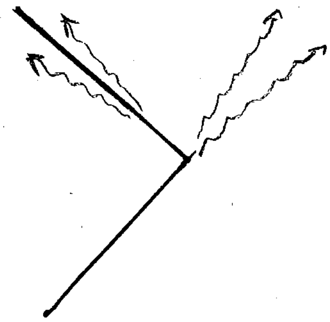
$$= \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int\frac{\omega^2 d\omega}{\omega^2}\times\underbrace{\int\frac{d\Omega_k}{4\pi}\left[\frac{2(1-\vec{v}\cdot\vec{v}')}{(1-\hat{k}\cdot\vec{v})(1-\hat{k}\cdot\vec{v}')} - \frac{m^2/E^2}{(1-\hat{k}\cdot\vec{v}')^2} - \frac{m^2/E^2}{(1-\hat{k}\cdot\vec{v})^2}\right]}_{=:\,I(\vec{v},\vec{v}')}$$

Cerchiamo ora di capire:

- dove è irraggiata l'energia, cioè in quali direzioni;
- quanta energia viene irraggiata e a quali frequenze

• Evidentemente ci sono dei picchi per $\hat{k} \parallel \vec{v}$ e $\hat{k} \parallel \vec{v}'$

Nel limite ultrarelativistico



$$|\vec{v}| \rightarrow 1 \leftarrow |\vec{v}'| \, , \quad \frac{m}{E} \rightarrow 0 \, ,$$

il primo termine sopravvive, ed è divergente per $\hat{k} = \vec{v}$ e $\hat{k} = \vec{v}'$:

$$\frac{1-\vec{v}\cdot\vec{v}'}{1-\vec{v}\cdot\vec{v}'} \left\{ \int^1 \frac{d\cos\theta_{kv}}{1-v\cos\theta_{kv}} + \int^1 \frac{d\cos\theta_{kv'}}{1-v'\cos\theta_{kv'}} \right\} \sim \ln\frac{1}{1-v} + \ln\frac{1}{1-v'}$$

Il calcolo esplicito dà

$$I(\vec{v},\vec{v}') = \frac{1}{2\beta_r} \ln\frac{1+\beta_r}{1-\beta_r} - 2 \overset{|q^2| \gg m^2}{\sim} 2\ln\frac{|q^2|}{m^2}$$ ove

$$\beta_r := \sqrt{1-\frac{m^4}{(p\cdot p')^2}} \simeq \sqrt{1-\left(\frac{2m^2}{q^2}\right)^2} \simeq 1 - 2\left(\frac{m^2}{q^2}\right)^2$$ velocità relativa

$q := (p-p')$ impulso trasferito nell'urto.

• $\int_0^\infty d\omega = \infty$. La div. UV è spuria (urto istantaneo)

Questo calcolo vale per $\omega = \frac{1}{d} < \frac{1}{t_{\text{interazione}}} =: \omega_{MAX}$

$$\int_0^{\omega_{MAX}} d\omega = \omega_{MAX} \qquad \frac{dE}{d\omega} \longrightarrow \frac{e^2}{(2\pi)^2} I(\vec{v},\vec{v}') \quad (\omega \ll \omega_{MAX})$$

- Se volessimo stimare il numero di fotoni

$$dE = \hbar\omega\, dN \qquad dN = \frac{d\omega}{\omega}$$

$$N = \int_0^{\omega_{MAX}} \frac{d\omega}{\omega} \frac{e^2}{(2\pi)^2} I(\vec{v},\vec{v}') = \infty \quad \text{(divergenza SOFFICE)}$$

RIF: Itzykson Zuber 1.3
Peskin Schröder 6.1