Capitolo 1

Date: 2021-03-31 13:05 +0200 Revision: 325 : e4130306dc3b

La funzione esponenziale complessa

1.1 Riassunto sui numeri complessi

NOTA: In questo capitolo sui numeri complessi, i simboli x, y, t denoteranno variabili reali, w, z indicheranno generici numeri complessi, j, k, n, m indicheranno numeri interi.

Il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ permette di svolgere numerosi problemi in ambito matematico e fisico. Tuttavia non costituisce un campo completamente soddisfacente. Le sue principali carenze si trovano in ambito algebrico: non tutti i polinomi di variabile reale a coefficienti reali ammettono delle radici. Basti pensare all'equazione di secondo grado $x^2 + 1 = 0$ che sarebbe risolta solo da un ipotetico numero il cui quadrato è negativo: $x^2 = -1$. La situazione è ancora più spinosa pensando alle equazioni di terzo grado: esiste una formula risolutiva a volte richiede la radice quadrata di numeri negativi anche nel caso in cui l'equazione possieda tre radici reali.

I numeri complessi sono stati concepiti per risolvere questo problema. Ne rivediamo per sommi capi la costruzione e le principali proprietà.

Proprietà costitutive dei numeri complessi Quello che si cerca è un'*estensione* dell'insieme dei numeri reali, ossia un insieme che

(i) contenga i numeri reali come sottoinsieme proprio;

(ii) che preservi per quanto possibile le proprietà delle operazioni fondamentali: somma (+) e prodotto ($\cdot$) valide per i numeri reali;

(iii) che ammetta elementi con quadrato negativo.

Partendo da quest'ultima richiesta *(iii)*, si definisce un nuovo numero, chiamato *unità immaginaria* $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$, per il quale valga $\mathrm{i}^2 := \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$. Dalla *(ii)* richiediamo che sia possibile moltiplicare l'unità immaginaria per qualsiasi numero reale, e ammettendo che valgano le proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione, si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{i} \cdot x)^2 := (\mathrm{i} \cdot x) \cdot (\mathrm{i} \cdot x) = (\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}) \cdot (x \cdot x) = -(x^2) \; . \tag{1.1}$$

Pertanto, moltiplicando "i" per un numero reale, possiamo estrarre la radice quadrata di un qualsiasi numero negativo: se $p > 0 \implies \sqrt{-p} = \mathrm{i} \cdot \sqrt{p}$, ove l'ultima radice quadrata è quella solita, definita per numeri positivi e a valori positivi: $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Nota: Sempre per le suddette proprietà della moltiplicazione, $(-\mathrm{i})^2 = [(-1)\cdot \mathrm{i}]^2 = -1$, quindi anche $(-\mathrm{i}\cdot\sqrt{p})^2 = -p$, pertanto il numero reale negativo $-p$ ammette due radici: $\pm\mathrm{i}\sqrt{p}$.

L'insieme dei multipli reali dell'unità immaginaria

$$\mathbb{I} = \{\mathrm{i}\cdot x : x \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

si chiama *insieme dei numeri immaginari*.

Sempre dalla *(ii)* assumiamo di poter sommare numeri reali e numeri immaginari, cioè di poter trattare come numeri le combinazioni del tipo $z = x + \mathrm{i}\cdot y$ con x e y reali. I coefficienti reali x e y si chiamano rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria*[1] del numero complesso z, e si scrive $x = \mathrm{Re}\,(z)$, $\quad y = \mathrm{Im}\,(z)$.

Si definisce *insieme dei numeri complessi* la totalità di queste combinazioni lineari:

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}\cdot y : x, y \in \mathbb{R}\}\ . \tag{1.3}$$

Due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.

La definizione (1.3) sta in piedi perché è possibile dotare $\mathbb{C}$ di due operazioni ("somma" e "prodotto") che godono delle stesse proprietà fondamentali delle omonime operazioni tra numeri reali. Infatti, imponendo le proprietà commutativa, associativa e distributiva della somma e del prodotto anche tra numeri reali ed immaginari, è facile ricavare che

$$(x_1 + \mathrm{i}\cdot y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\cdot y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}\cdot(y_1 + y_2) \tag{1.4a}$$

$$(x_1 + \mathrm{i}\cdot y_1)\cdot(x_2 + \mathrm{i}\cdot y_2) = (x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2) + \mathrm{i}(x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1)\ . \tag{1.4b}$$

Innanzi tutto, osserviamo che i risultati di queste due operazioni sono ancora numeri complessi. Inoltre si verifica facilmente che le due operazioni appena introdotte soddisfano le stesse proprietà delle analoghe operazioni sui reali.

Esercizio: Verificare che la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado $az^2 + bz + c = 0$ a coefficienti reali $a, b, c \in \mathbb{R}$ nell'incognita z fornisce sempre due radici $z_{1,2}$ dell'equazione, anche nel caso di discriminante negativo. Verificare che tale formula è corretta anche nel caso di un'equazione di secondo grado con coefficienti complessi $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Elementi neutri, opposto, inverso In $\mathbb{C}$ esiste l'elemento neutro della somma (1.4a), ed è dato da $0_\mathbb{C} := 0 + \mathrm{i}\cdot 0$. L'opposto di un numero complesso $z = (x + \mathrm{i}\cdot y)$ è $-z = (-x) + \mathrm{i}(-y)$.

Esite altresì l'elemento neutro del prodotto (1.4b) dato da $1_\mathbb{C} := 1 + \mathrm{i}\cdot 0$. L'inverso di un numero complesso $z = (x + \mathrm{i}\cdot y)$ è

$$z^{-1} := \frac{1_\mathbb{C}}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2+y^2}\ . \tag{1.5}$$

[1] Più correttamente si dovrebbe dire *coefficiente dell'immaginario*.

Il sottogruppo dei reali Il sottoinsieme dei numeri complessi con parte immaginaria nulla è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto date in (1.4): esso è pertanto sottogruppo di $\mathbb{C}$ sia rispetto alla somma, sia rispetto al prodotto, e si verifica facilmente che esso è isomorfo al corpo dei numeri reali:

$$\mathcal{R} := \{z = x + \mathrm{i} \cdot 0 : x \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R} \,, \tag{1.6}$$

l'isomorfismo essendo $z \mapsto \mathrm{Re}\, z$. Quindi, quando ci riferiamo ai numeri reali, possiamo egualmente pensare agli elementi di $\mathbb{R}$ oppure agli elementi di $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$ con parte immaginaria nulla.

L'insieme dei numeri immaginari $\mathbb{I}$ è sottogruppo di $\mathbb{C}$ rispetto all'addizione, ma non rispetto alla moltiplicazione. In particolare non contiene un elemento neutro rispetto alla moltiplicazione.

Il piano complesso La moltiplicazione tra un numero reale $c \in \mathbb{R}$ ed un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ha l'effetto di moltiplicare per c sia le parti reale ed immaginaria di z:

$$c \cdot (x + \mathrm{i} \cdot y) = (c + \mathrm{i} \cdot 0) \cdot (x + \mathrm{i} \cdot y) = (c \cdot x) + \mathrm{i}(c \cdot y) \,. \tag{1.7}$$

Siccome per specificare univocamente un numero complesso è necessario e sufficiente specificare le sue parti reale ed immaginaria, vediamo che $\mathbb{C}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \qquad x + \mathrm{i} \cdot y \mapsto (x, y) \tag{1.8}$$

Sappiamo che $\mathbb{R}^2$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alla somma e prodotto per scalari:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.9a}$$

$$. : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad c.(x, y) = (cx, cy) \,. \tag{1.9b}$$

Anche $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto alla somma (1.4a) ed alla moltiplicazione per numeri reali (1.7), e si verifica immediatamente che la corrispondenza (1.8) è un isomorfismo tra questi spazi vettoriali. È molto utile rappresentare $\mathbb{C}$ con il piano $\mathbb{R}^2$. Infatti, in questo contesto la somma tra numeri complessi diventa la somma tra due vettori effettuata mediante la regola del parallelogramma, mentre la moltiplicazione per scalari corrisponde ad una dilatazione del vettore stesso. L'opposto di un numero complesso è rappresentato dal vettore opposto, e la differenza tra numeri complessi (cioè la somma di z_1 con $-z_2$) corrisponde al vettore che congiunge la punta di z_2 con z_1. L'insieme $\mathcal{R}$ dei numeri reali corrisponde alla retta $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}$ da identificare con l'asse delle ascisse nella rappresentazione cartesiana, mentre $\mathbb{I}$ corrisponde all'asse delle ordinate.

La grossa differenza tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ è la struttura molto più ricca di $\mathbb{C}$ che deriva dall'operazione di moltiplicazione di cui $\mathbb{R}^2$ non è dotato.

Alla lunghezza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ facciamo corrispondere il *modulo* del numero complesso $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ e che indichiamo con $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2} \in \mathbb{R}_+$. Solo $0_\mathbb{C}$ ha modulo nullo. Tutti gli altri numeri complessi hanno modulo strettamente positivo.

Coniugazione complessa Abbiamo visto che $(-\mathrm{i})$ ha la stessa proprietà di (i), cioè di avere per quadrato il numero (-1). Quindi tutta la costruzione fatta per definire il corpo $\mathbb{C}$ si può rifare sostituendo $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$. In altre parole, la trasformazione chiamata *coniugazione complessa*

$$^* : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z = x + \mathrm{i} \cdot y \mapsto z^* := x + (-\mathrm{i}) \cdot y = x - \mathrm{i} \cdot y \tag{1.10}$$

produce un insieme di numeri che gode delle stesse proprietà algebriche di $\mathbb{C}$ ed è ad esso isomorfo:

$$z_1^* + z_2^* = (z_1 + z_2)^* \,, \qquad z_1^* \cdot z_2^* = (z_1 \cdot z_2)^* \,. \tag{1.11}$$

Il numero z^* si chiama il *complesso coniugato* del numero z. Si ha:

$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\, z = 2\,\mathrm{Re}\, z^* \,, \qquad z - z^* = \mathrm{i} \cdot 2\,\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{i} \cdot 2\,\mathrm{Im}\,(z^*) \tag{1.12}$$

$$z \cdot z^* = \mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2 = |z|^2 = |z^*|^2 \quad \Longrightarrow \quad z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} \,. \tag{1.13}$$

Nel piano complesso, la coniugazione corrisponde alla riflessione speculare rispetto alla retta dei numeri reali. In particolare $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$, anzi, ${}^*|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

La coniugazione complessa è un'involuzione, cioè applicata due volte si riduce all'identità: $(z^*)^* = z$.

D'ora in avanti ometteremo il simbolo $\cdot$ che abbiamo usato per denotare l'operazione di moltiplicazione. Ometteremo anche il suffisso ${}_{\mathbb{C}}$ con cui abbiamo specificato gli elementi neutri di $\mathbb{C}$, in quanto essi coincidono con gli elementi neutri di $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$.

Coordinate polari È abbastanza notevole che nel piano complesso si riesca da dare una rappresentazione geometrica semplice del prodotto (1.4b). A questo scopo, introduciamo le cordinate polari[2] nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, parametrizzando le coordinate (x, y) del generico vettore di $\mathbb{R}^2$ in termini di lunghezza (o modulo) $r \in \mathbb{R}_+$ ed angolo polare (o argomento) $\phi \in \mathbb{R}$. Le stesse coordinate polari parametrizzano anche i numeri complessi:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) \qquad \begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) = \phi \,. \end{cases} \tag{1.14}$$

NOTA: Il modulo di $0_{\mathbb{C}}$ è 0, l'argomento di $0_{\mathbb{C}}$ non è definito.

Denotiamo con $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario. Introduciamo (con G. H. Hardy) la funzione

$$\mathrm{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{U} \,, \qquad \phi \mapsto \mathrm{cis}(\phi) = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi \tag{1.15}$$

("cis" sta per "coseno i seno") che dà la "direzione" del generico numero complesso:

$$\mathrm{cis}(\arg z) = z/|z| \quad \Longleftrightarrow \quad z = r\,\mathrm{cis}(\phi) = |z|\,\mathrm{cis}(\arg z) \,. \tag{1.16}$$

Se ora moltiplichiamo due numeri complessi scritti con coordinate polari, otteniamo

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + \mathrm{i}\, r_1 r_2(\cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1) \\ &= r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + \mathrm{i}\sin(\phi_1 + \phi_2)] = |z_1|\,|z_2|\,\mathrm{cis}(\phi_1 + \phi_2) \,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

[2] Assumiamo note le funzioni $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dalla trigonometria. Più avanti ne daremo una definizione puramente analitica, cioè usando solamente le strutture di $\mathbb{C}$.

Riconosciamo che il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, mentre l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1|\,|z_2|\,, & \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} \\ \left|\frac{1}{z}\right| &= \frac{1}{|z|}\,, & \arg\frac{1}{z} &= -\arg(z) \pmod{2\pi} \\ |z^*| &= |z|\,, & \arg(z^*) &= -\arg(z) \pmod{2\pi}\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

In altre parole: nella moltiplicazione, i moduli si moltiplicano, gli argomenti si sommano.

Nota: L'argomento di un vettore o di un numero complesso è definito a meno di una costante multipla di 2π, e si dice anche "modulo 2π" (qui la parola "modulo" non c'entra niente con il modulo di un numero). Quindi anche la somma degli argomenti è definita "modulo 2π". Si usa la notazione

$$a = b \pmod{2\pi} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{Z} : a = b + m\,2\pi\,.$$

.

Esercizio: Mostrare che cis è suriettiva ma non iniettiva.

Pertanto, moltiplicare per z un dato numero complesso w significa

- dilatare w di un fattore $|z|$;
- ruotare il vettore così ottenuto di un angolo $\arg(z)$.

Siccome le dilatazioni (dette anche "omotetie") e le rotazioni commutano, si possono attuare anche in ordine inverso. Equivalentemente, si può partire da z, dilatarlo di un fattore $|w|$ e quindi ruotare di un angolo $\arg(w)$.

Quindi se l'operazione "somma di z" equivale ad una traslazione nel piano complesso, l'operazione "moltiplicazione per z" equivale ad una roto-omotetia. In particolare, siccome $|\mathrm{i}| = 1$ e $\arg(i) = \pi/2$, moltiplicare per (i) equivale a ruotare di un angolo retto in verso positivo (antiorario).

Lo stesso dicasi per le trasformazioni inverse: la sottrazione di un numero complesso corrisponde alla traslazione inversa, mentre la divisione per il numero complesso $z \neq 0$ equivale a dilatare di un fattore $1/|z|$ ed a ruotare di un angolo $-\arg(z)$.

Potenze Dato un numero intero $m \in \mathbb{Z}$, si definisce la potenza m-esima del numero complesso z in completa analogia a quanto si fa per i numeri reali:

$$\begin{aligned} & z^0 := 1 = 1\,\mathrm{cis}(0) \\ & z^1 := z = r\,\mathrm{cis}(\phi) \\ (n \geq 1) \qquad & z^n := z \cdot z^{n-1} = r^n\,\mathrm{cis}(n\phi) \\ (n < 0) \qquad & z^n := \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}\,\mathrm{cis}(-n\phi)} = r^n\,\mathrm{cis}(n\phi)\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Vediamo che, in ogni caso, cioè $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $z^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\phi)$. Quindi, elevare un numero complesso z ad una potenza intera $n \in \mathbb{Z}$ ha per risultato un numero complesso il cui modulo è la potenza n-esima del modulo di z, mentre l'argomento è n volte l'argomento di z.

Radici Cerchiamo ora le radici intere positive di un numero complesso $z = r\,\mathrm{cis}(\phi) \in \mathbb{C}^*$. Dato $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, vogliamo trovare quei numeri complessi $w = \rho\,\mathrm{cis}(\theta)$ (se esistono) tali che $w^n = z$. Da quanto scritto a proposito delle potenze, si tratta di determinare ρ e θ tali che

$$\rho^n\,\mathrm{cis}(n\theta) = r\,\mathrm{cis}(\phi) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \phi + k\,2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \rho = r^{1/n} \\ \theta = \frac{\phi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \tag{1.20}$$

Vediamo così che, per ogni $z \neq 0$, ci sono diverse radici distinte, tutte con lo stesso modulo (dato dalla radice n-esima di $|z|$). La più "naturale" è quella con $k = 0$, che ha per argomento $\arg(z)/n$, come ci si poteva aspettare intuitivamente. Le altre radici sono ruotate di un multiplo intero di $2\pi/n$ rispetto alla "naturale". Per $k = 1, \cdots, n-1$ queste radici sono distinte. Ma per $k = n$ si ritrova la radice "naturale", poiché l'argomento ne differisce di 2π. Per $k > n$ o $k < 0$ ritroviamo le medesime radici. In definitiva, ci sono n radici distinte.

Come caso importante, ricaviamo le radici n-esime dell'unità. Il loro modulo è evidentemente 1, il loro argomento vale $k(2\pi/n) : k = 0, 1, \cdots, n-1$. Per $k = 0$ otteniamo la radice "naturale" 1. Nel piano complesso l'insieme delle radici n-esime dell'unità formano un poligono regolare con n vertici localizzati nell'insieme dei numeri unitari $\mathbb{U}$, uno dei quali è il numero 1.

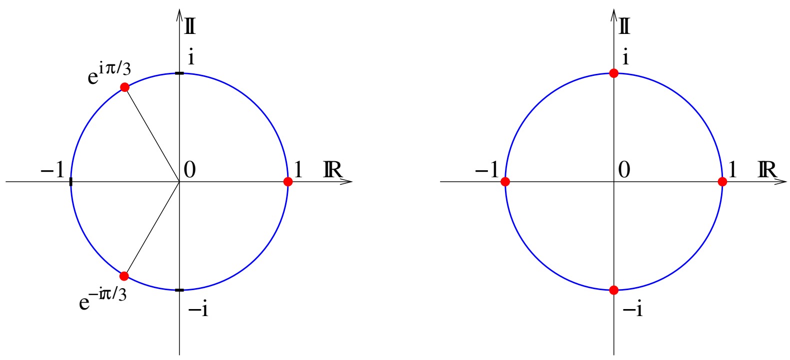

Figura 1.1: Radici cubiche (sinistra) e radici quarte (destra) dell'unità.

Osservazione: Siccome $z = z \cdot 1$, le radici n-esime di z sono date da una qualsiasi delle radici di z (per esempio quella "naturale"), moltiplicata per le n radici dell'unità.

Polinomi Avendo definito le potenze intere dei numeri complessi, possiamo definire i polinomi a coefficienti complessi nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad : \quad a_i \in \mathbb{C}\,. \tag{1.21}$$

Se $a_n \neq 0$ il polinomio si dice di grado n-esimo. L'insieme dei polinomi in campo complesso nella indeterminata z si indica con $\mathbb{C}[z]$

Teorema 1.1 (fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ di grado maggiore o uguale ad 1 ammette almeno una soluzione (o radice) $\bar{z} \in \mathbb{C}$, ossia $\exists\,\bar{z} \in \mathbb{C} : P(\bar{z}) = 0$.*

Corollario 1.2 *Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ di grado maggiore o uguale ad 1 si può scomporre come prodotto di n polinomi di primo grado.*

Dimostrazione: Ovviamente i polinomi di primo grado ammettono l'unica radice $\bar{z} = -a_0/a_1$. Dato invece un polinomio $P_n(z)$ di grado $n > 1$, sia z_n una sua radice, che sicuramente esiste per il teorema fondamentale. Allora, applicando il metodo di divisione dei polinomi tra $P_n(z)$ e $z - z_n$, si ottiene per quoziente un polinomio P_{n-1} di grado $n-1$, il quale avrà una radice $z_{n-1} \in \mathbb{C}$. Continuando così si trova

$$P_n(z) = a_n(z - z_n)(z - z_{n-1}) \cdots (z - z_1) \tag{1.22}$$

C.V.D.

Questa è la proprietà più importante di $\mathbb{C}$: essere un corpo algebricamente chiuso.

1.2 Richiami di topologia

Fino a qui abbiamo applicato un numero finito di operazioni sui numeri complessi. Il passo successivo è quello di considerare delle serie infinite. Per dare senso ad espressioni del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ in $\mathbb{C}$, dobbiamo stabilire i concetti topologici di limite, convergenza, ecc., che si sono visti in $\mathbb{R}$.

Poichè dal punto di vista insiemistico $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, è naturale dotare $\mathbb{C}$ della topologia prodotto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Questo significa che una base di intorni[3] in $\mathbb{C}$ può essere costruita come prodotti cartesiani degli intorni di $\mathbb{R}$: se $X \subset \mathbb{R}$ è intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$ è intorno di $y_0 \in \mathbb{R}$, allora $Z = \{x + iy \in \mathbb{C} : x \in X,\ y \in Y\} \subset \mathbb{C}$ è intorno di $x_0 + iy_0$ in $\mathbb{C}$. Se per esempio in $\mathbb{R}$ consideriamo come intorno del punto x un qualsiasi intervallo aperto $]a, b[$ contenente x, in $\mathbb{R}^2$ un qualsiasi rettangolo aperto $]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ che contenga il punto (x, y) ne è suo intorno; in $\mathbb{C}$ il rettangolo aperto $\{z \in \mathbb{C} : a_1 < \mathrm{Re}\,(z) < a_2\ , b_1 < \mathrm{Im}\,(z) < b_2\}$ è intorno di z_0 se e solo se $a_1 < \mathrm{Re}\,(z_0) < a_2\ , b_1 < \mathrm{Im}\,(z_0) < b_2$.

Avendo stabilito gli intorni di $\mathbb{C}$, possiamo definire il concetto di convergenza:

Definizione 1.1 *Una successione di numeri complessi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al numero complesso $\bar{z}$ se, per ogni intorno U di $\bar{z}$ esiste un intero $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $z_n \in U$ per ogni $n \geq n_U$. In tal caso si scrive $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.*

Questa topologia, oltre ad essere naturale, è anche estremamente adatta alla struttura algebrica di $\mathbb{C}$, perché le operazioni di somma e di prodotto sono funzioni continue in questa topologia.

Spazi metrici In realtà $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, in cui la distanza tra due punti è data dal modulo della differenza tra tali punti: $d : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Ricordiamo che, dato un insieme X anche senza strutture, una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ è detta *metrica* o *distanza* se soddisfa le seguenti proprietà:

[3] Una famiglia $\mathcal{B}_p$ di sottoinsiemi dello spazio topologico T si dice *base per gli intorni* di $p \in T$ se *(i)* ogni $U \in \mathcal{B}_p$ è intorno di p; *(ii)* ogni intorno V di p contiene un $U \in \mathcal{B}_p$. L'unione $\mathcal{B} = \bigcup_{p\in T} \mathcal{B}_p$ forma una base per gli intorni di T.

D_0 $\quad d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X$ (positività)

D_1 $\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

D_2 $\quad d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x, y \in X$ (simmetria)

D_3 $\quad d(x,y) + d(y,z) > d(x,z) \quad \forall, x, y, z \in X$ (disuguaglianza triangolare)

Definizione 1.2 *Uno* spazio metrico *è una coppia (X, d) formata da un insieme X e da una distanza d su X.*

Esercizio: Verificare che $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ soddisfa D_1, D_2, D_3.

Definizione 1.3 *Dato uno spazio metrico (X, d), indichiamo con* palla aperta *di centro $x \in X$ e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ l'insieme $B(x, r[\ := \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Corrispondentemente, la* palla chiusa *è $B(x, r] := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.*

La topologia indotta dalla metrica è costituita dalla base di intorni fornita dalle palle aperte $B(z, r[\ := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$ ove z è il centro della palla e $r > 0$ è il raggio. Per ovvie ragioni, in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ useremo la parola *cerchio* o *disco* come sinonimo di palla. Siccome ogni cerchio aperto di centro z contiene un rettangolo aperto di cui z è elemento, ed ogni rettangolo aperto di cui z è elemento contiene un cerchio aperto di centro z, la topologia indotta dalla metrica è equivalente alla topologia prodotto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ descritta in precedenza.

Completezza In uno spazio metrico possiamo quantificare, mediante la distanza, il concetto di vicinanza fornito dagli intorni di uno spazio topologico. In particolare, se abbiamo una successione di elementi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X, la cui distanza diventa sempre più piccola al crescere di n, ci possiamo chiedere se questa successione ammetta un limite, cioè converga a qualche elemento di X. Precisiamo questa idea:

Definizione 1.4 *Una successione di elementi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di uno spazio metrico (X, d) è detta* fondamentale *o* di Cauchy *se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$.*

È banale osservare che ogni successione convergente è di Cauchy (esercizio). Il viceversa non è sempre vero. In analisi, svolgono un ruolo di fondamentale importanza gli spazi metrici in cui le successioni di Cauchy sono sempre convergenti.

Definizione 1.5 *Uno spazio metrico (X, d) si dice* completo *se ogni successione di Cauchy in (X, d) converge nella topologia indotta dalla metrica.*

L'esempio più semplice e non banale di spazio metrico completo è $\mathbb{R}$. Ricordiamo altresì che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non è completo.

Teorema 1.3 $\mathbb{C}$ *è completo (nella topologia indotta dalla metrica $d(w, z) = |w - z|$)*

Dimostrazione: Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $\mathbb{C}$. Allora la successione di numeri reali $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costituita dalle parti reali $x_n := \mathrm{Re}\,(z_n)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, infatti $|x_n - x_m| \leq \sqrt{|x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2} = |z_n - z_m|$. Pertanto tale successione è convergente, per la completezza di $\mathbb{R}$, e converge ad un numero $x \in \mathbb{R}$. Analogamente la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle parti immaginarie è di Cauchy e pertanto converge ad un $y \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che (z_n) converge a $z = x + \mathrm{i}y$. Dalla convergenza di (x_n), fissato $\eta > 0$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x| \leq \eta \quad \forall n \geq n_1$. Analogamente esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che $|y_n - y| \leq \eta \quad \forall n \geq n_2$. Sia $\bar{n} = \max\{n_1, n_2\}$. Allora, $\forall n \geq \bar{n}$ si ha $|z_n - z|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 \leq 2\eta^2$. Prendendo $\eta = \varepsilon/\sqrt{2}$ ed $n_\varepsilon = \bar{n}$ si rientra nella definizione di successione convergente. C.V.D.

Spazi vettoriali normati Come abbiamo visto, $\mathbb{C}$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione per scalari reali. In realtà, la proprietà distributiva della moltiplicazione tra numeri complessi, $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$, coincide con la linearità richiesta alla moltiplicazione per scalari λ affinché sia compatibile con la somma vettoriale. Pertanto l'insieme dei numeri complessi è anche $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

In seguito descriveremo molte proprietà matematiche che possono riferirsi tanto al campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, o al campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, o ad altri campi ancora. In questo caso, useremo la notazione $\mathbb{K}$ per indicare un campo generico, anche se alla fine conviene avere in mente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definizione 1.6 *Sia X uno spazio vettoriale su un corpo $\mathbb{K}$ di scalari. Una* norma *su X è una funzione $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}_+$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

N_0 $\quad ||x|| \geq 0 \,\forall\, x \in X$ *(positività)*

N_1 $\quad ||x|| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0_X$ *(positività stretta);*

N_2 $\quad ||\lambda x|| = |\lambda|\,||x|| \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{K}\,, \quad \forall\, x \in X$ *(omogeneità assoluta della norma);*

N_3 $\quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall\, x, y \in X$ *(sub-addiditività della norma, o disuguaglianza triangolare).*

Definizione 1.7 *Uno* spazio vettoriale normato *è una coppia $(X, ||\cdot||)$ dove X è spazio vettoriale e $||\cdot||$ è una norma.*

La norma di un vettore va pensata come la lunghezza di un vettore.

OSSERVAZIONE: La distanza tra numeri complessi definita dal modulo della differenza gode delle proprietà della norma sopra elencate. Possiamo quindi affermare che $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ è spazio vettoriale normato, sia inteso come $\mathbb{R}$-spazio che come $\mathbb{C}$-spazio.

NOTA: Gli spazi vettoriali normati e completi nella topologia indotta dalla norma si chiamano *spazi di Banach.* Si ricava subito che $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono spazi di Banach. Anche $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi di Banach, sia rispetto alla norma euclidea che rispetto alla norma prodotto.

Ordine Siamo quindi riusciti a costruire un corpo numerico algebricamente chiuso e completo, senza rinunciare alle proprietà fondamentali delle operazioni costitutive di somma e prodotto ereditate da $\mathbb{R}$. Rispetto ad $\mathbb{R}$ abbiamo guadagnato la notevole proprietà di chiusura algebrica. Ci chiediamo: non abbiamo perso niente in questa estensione algebrica?

Dal punto di vista assiomatico, $\mathbb{R}$ è caratterizzato da 4 gruppi di assiomi:

- gruppo commutativo ed associativo rispetto all'addizione;
- gruppo commutativo ed associativo rispetto alla moltiplicazione;
- completezza
- ordine totale, per cui $\mathbb{R} = \mathbb{R}^*_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^*_+$, ordine preservato
  - dall'addizione (si ha $x \leq y \implies x + a \leq y + a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$);
  - dalla moltiplicazione per numeri maggiori di 0 ($x \leq y \implies ax \leq ay$ per ogni $a \geq 0$).

Le proprietà dichiarate dai primi tre gruppi sono condivise anche da $\mathbb{C}$. Ciò che a $\mathbb{C}$ manca sono le proprietà di ordinamento: non si può introdurre un ordinamento totale in $\mathbb{C}$ che goda delle proprietà caratteristiche dei numeri reali. Questo è ciò che abbiamo perso.

1.3 Serie di potenze

Dopo aver stabilito i necessari concetti preliminari di convergenza e completezza, possiamo finalmente passare a considerare le somme infinite di numeri complessi.

Definizione 1.8 *Sia* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *successione in* $\mathbb{C}$. *Si chiama* ridotta N-esima *o* serie parziale N-esima *la somma finita* $S_N := \sum_{n=0}^{N} z_n$ *(sul cui significato non c'è dubbio, date le proprietà commutativa ed associativa di* $\mathbb{C}$*).*

Definizione 1.9 *Si chiama* serie infinita *della successione* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *il limite (se esiste)* $\lim_{N\to\infty} S_N$ *e si indica con* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Proposizione 1.4 *Condizione necessaria per la convergenza della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *è che la successione degli* z_n *sia infinitesima, cioè che* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ *o, equivalentemente, che* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

Chiaramente tale condizione non è sufficiente, come si può vedere in numerosi controesempi (p. es. la serie armonica con $z_n = 1/n$). Ricordiamo invece due criteri sufficienti per la convergenza delle serie:

Teorema 1.5 (Criterio del rapporto) *Condizione sufficiente affinché la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converga è che esista* $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < 1$ *ed* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tali che* $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq p \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Teorema 1.6 (Criterio della radice) *Condizione sufficiente affinché la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converga è che esista* $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < 1$ *ed* $\bar{n} \in \mathbb{N}$ *tali che* $\sqrt[n]{|z_n|} \leq p \quad \forall n \geq \bar{n}$.

In particolare, se esiste il limite $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$, la serie converge se $l < 1$ e diverge se $l > 1$. Analogamente se esiste $l' = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$. Si dimostra che se esiste l, allora esiste anche l' e si ha $l = l'$.

Ricordiamo anche un paio di teoremi utili per stabilire la convergenza di una serie.

Definizione 1.10 *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *si dice* assolutamente convergente *se è convergente (in* $\mathbb{R}$*) la serie dei moduli:* $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$.

Teorema 1.7 *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Teorema 1.8 (Criterio del confronto) *Se la successione* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è maggiorata in modulo da una successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di numeri positivi (cioè* $|z_n| \le a_n$*) la cui serie converge (*$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$*), allora la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ *converge.*

Come in analisi reale, tra le serie più importanti ci sono le serie di potenze. Basti pensare allo sviluppo di Taylor di una funzione derivabile attorno ad un punto del suo dominio.

Definizione 1.11 *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *successione di numeri complessi, e* $z_0 \in \mathbb{C}$*. La* serie di potenze *di punto iniziale* z_0 *e coefficienti* (a_n) *è la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.23}$$

(in cui è sottointeso che per $z = z_0$ *e* $n = 0$ *si ha* $0^0 = 1$*).*

Per il momento conviene pensare alla serie (1.23) come ad una successione di somme parziali n-esime che dipende da z, che può convergere oppure no.

Per studiare la convergenza di (1.23) possiamo limitarci a studiare il caso $z_0 = 0$, cioè la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ . \tag{1.24}$$

Definizione 1.12 *Chiamiamo* insieme di convergenza *di (1.24) l'insieme* C_a *degli* $z \in \mathbb{C}$ *tali che la serie converga (il pedice* a *in* C_a *indica la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

Chiaramente $0 \in \mathbb{C}_a$ che quindi non è mai vuoto. Cerchiamo ora dei criteri per determinare tale insieme di convergenza.

Lemma 1.9 (di Abel) *Sia* $w \in \mathbb{C}$ *tale che il termine generale* $a_n w^n$ *della serie (1.24) sia limitato. Allora, per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *tale che* $|z| < |w|$ *la serie (1.24) è assolutamente convergente.*

Dimostrazione: Per ipotesi $\exists\, M \in \mathbb{R}_+$ tale che $|a_n w^n| \le M$ per ogni n. Ne segue che

$$|a_n z^n| = |a_n w^n (z^n/w^n)| = |a_n w^n||z/w|^n \le M|z/w|^n \ .$$

Siccome la serie di termine generale $M|z/w|^n$ converge (è la serie geometrica reale di ragione $|z/w| < 1$), per il criterio del confronto la serie di termine generale $|a_n z^n|$ converge, e stabilisce la convergenza assoluta della serie di termine generale $a_n z^n$. C.V.D.

Corollario 1.10 *Se $w \in C_a$, allora tutto il cerchio aperto $B(0,|w|[$ di centro 0 e raggio $|w|$ è contenuto in C_a.*

Dimostrazione: Infatti se $w \in C_a$ allora il termine generale $a_n w^n$ è infinitesimo e quindi limitato. Allora, per il lemma di Abel, la serie di potenze è (assolutamente) convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |w|$. C.V.D.

Definizione 1.13 *Data la serie di potenze* (1.24)*, si chiama* raggio di convergenza

$$R_a = \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{|z| : z \in C_a\} , \tag{1.25}$$

estremo superiore dei moduli degli z per cui detta serie converge. R_a è un numero reale positivo oppure è $+\infty$.

Teorema 1.11 *L'insieme di convergenza C_a contiene il cerchio aperto di raggio R_a ed è contenuto nel cerchio chiuso con lo stesso raggio: $B(0,R_a[\subset C_a \subset B(0,R_a]$. Inoltre in $B(0,R_a[$, che è l'interno del cerchio di convergenza) si ha convergenza assoluta.*

Dimostrazione: Se $z \in B(0,R_a[$, allora $|z| < R_a$ ed esiste $w \in C_a$ tale che $|z| < |w| \leq R_a$ (se non esistesse un tale w, R_a non sarebbe il sup dei moduli dei punti di convergenza). Perciò la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ e per il lemma di Abel la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente, in particolare convergente. Se poi z è esterno al cerchio chiuso $B(0,R_a]$, cioè $|z| > R_a$, certamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ non è convergente (per definizione di R_a). Il lemma di Abel mostra addirittura che la successione $a_n z^n$ non è nemmeno limitata. Se lo fosse, preso $w \in \mathbb{C} : R_a < |w| < |z|$ avremmo dal lemma che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ convergerebbe, contro l'ipotesi $R_a < |w|$. C.V.D.

Da quanto visto qui sopra, per determinare il raggio di convergenza è sufficiente considerare la serie con $z = r$ reale positivo:

$$\begin{aligned} R_a &= \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{r \geq 0 : \text{ la successione } a_n r^n \text{ è limitata}\} \\ &= \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ è convergente}\} \\ &= \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ è convergente}\} \end{aligned}$$

In sintesi:

- Se $R_a = 0$ allora $C_a = \{0\}$;
- Se $R_a = +\infty$ allora $C_a = \mathbb{C}$: la serie converge (assolutamente) in tutto il piano complesso;
- Se R_a è finito e maggiore di 0, l'insieme di convergenza è costituito dal cerchio aperto di raggio R_a ed eventualmente da punti della sua circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R_a\}$, chiamata *circonferenza di convergenza.* Su questa circonferenza ci sono vari tipi di comportamento: alcune serie convergono dappertutto, altre non convergono mai, altre ancora in alcuni sottoinsiemi; nei punti in cui c'è convergenza, non è detto che questa sia assoluta.

Teorema 1.12 (Criterio di Hadamard) *Per ogni serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *il raggio di convergenza è*

$$R_a = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1.26}$$

(in cui si intende che $1/0 = +\infty$ *e* $1/(+\infty) = 0$*).*

Dimostrazione: Applicare il criterio della radice e tenere in conto che l'insieme di convergenza ha la forma di un cerchio. C.V.D.

In altri termini, il criterio di Hadamard dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza non nullo se e solo se esistono numeri positivi $s > 0$ tali che sia $|a_n| < s^n$ per n sufficientemente grandi, cioè per $n \geq n_s$. Anzi, il raggio di convergenza è $1/\alpha$ ove α è l'estremo inferiore di tali s.

Esempio: La **serie geometrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n . \tag{1.27}$$

Dalla nota identità $z^{N+1} - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^N)$ valida per ogni $N \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, la ridotta N-esima di tale serie vale

$$S_N(z) := \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1) , \qquad S_N(1) = N + 1 .$$

Se $|z| > 1$ allora $\lim_{N\to\infty} |z^{N+1}| = +\infty$ e la serie diverge. Se $|z| < 1$ allora $\lim_{N\to\infty} |z^{N+1}| = 0$ e la serie converge al valore $1/(1-z)$. È immediato verificare l'accordo di queste affermazioni con il criterio del rapporto ($l = |z|$) e della radice ($l' = |z|$). Cosa succede sulla circonferenza di convergenza? Se $z = 1$, $S_N(1) = N + 1$ diverge per $N \to \infty$. Se $|z| = 1$ ma $z \neq 1$ allora z^{N+1} non ha limite. Infatti, se così fosse, anche z^N avrebbe lo stesso limite, diciamo $\lambda \in \mathbb{C}$, ed ovviamente $|\lambda| = 1$. Ma allora da un lato avremmo $\lim_{n\to\infty} z^{N+1}/z^N = \lambda/\lambda = 1$, dall'altro avremmo $\lim_{n\to\infty} z^{N+1}/z^N = z \neq 1$, contro l'ipotesi. Quindi la serie geometrica non converge in alcun punto della circonferenza di convergenza.

Esempio: La **serie logaritmica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n . \tag{1.28}$$

Indichiamo con $w_n = (-1)^{n-1} z^n / n$ il termine generale della serie. Dal criterio del rapporto $|w_{n+1}/w_n| = |z|\, n/(n+1) \xrightarrow{n\to\infty} |z|$ si vede che per $|z| < 1$ la serie converge, mentre per $|z| > 1$ no, dal momento che $|w_n|$ diverge. Di conseguenza il raggio di convergenza è 1 (e dal criterio di Cauchy-Hadamard deduciamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Si può dimostrare (con il criterio di Abel-Dirichlet) che tale serie converge (ma mai assolutamente) su tutti i punti della circonferenza di convergenza $\mathbb{U}$ eccettuato il punto -1, in cui la serie diventa la serie armonica.

Esempio: La **serie dilogaritmica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} . \tag{1.29}$$

Anche per questa serie è facile vedere che il raggio di convergenza vale 1. Stavolta si ha convergenza (assoluta) su tutto il cerchio di convergenza, inclusa la circonferenza, infatti $|z^n/n^2| \leq 1/n^2$ per ogni $z : |z| \leq 1$, e sappiamo che $\sum_{n=1} 1/n^2 = \zeta(2)$ è finito.

ESEMPIO: La **serie esponenziale**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \; . \tag{1.30}$$

Usando criterio del rapporto $|a_{n+1}/a_n| = |z|/(n+1) \to 0$ si trova che il raggio di convergenza è infinito, e quindi la serie converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$. Questa serie definisce la più importante funzione della matematica, la funzione *esponenziale complessa*, che studieremo più a fondo in seguito.

Sempre con lo stesso metodo vediamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ non converge per alcun $z \neq 0$, e quindi ha raggio di convergenza 0.

1.4 Le serie di potenze come serie di funzioni

Avendo stabilito l'insieme di convergenza delle serie di potenze, possiamo trattare queste ultime come funzioni tra numeri complessi:

Definizione 1.14 *Data una serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, la sua* funzione somma*, o semplicemente* somma*, è la funzione* $f_a : C_a \to \mathbb{C}$ *definita da* $f_a(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$*, dove* C_a *è l'insieme di convergenza della serie.*

In altre parole, finora abbiamo considerato una serie di potenze fissando un particolare punto $z \in \mathbb{C}$ e studiando la corrispondente serie numerica, confrontando eventualmente il risultato con la serie numerica relativa ad altri punti $z' \neq z$. Ora invece vogliamo considerare queste serie come *serie di funzioni*.

1.4.1 Convergenza negli spazi di funzioni

Pensiamo quindi alle funzioni $f_0(z) = a_0\,,\; f_1(z) = a_1 z\,, \cdots,\; f_n(z) = a_n z^n\,, \cdots$ con dominio ristretto all'insieme di convergenza. Siccome per ogni $z \in C_a$ la serie numerica converge, possiamo affermare che la serie di funzioni $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente in tutto C_a. Tuttavia la semplice convergenza puntuale non offre proprietà matematiche molto interessanti. Perciò ci chiediamo se la convergenza di una generica serie di potenze non sia più forte della semplice convergenza puntuale, ad esempio se la convergenza sia uniforme. Ricordiamo che

Definizione 1.15 *Data una funzione* $f : X \to \mathbb{K}$ *(con* X *insieme arbitrario), si pone*

$$||f||_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

che si legge norma-infinito *o* sup-norma *di* f*; essa è un numero reale positivo se* f *è limitata, altrimenti è* $||f||_\infty = +\infty$.

Definizione 1.16 *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *successione di funzioni da* X *a* $\mathbb{K}$*, e sia anche* $f : X \to \mathbb{K}$*. Si dice che* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente *ad* f *se, per ogni* $\varepsilon > 0$*, esiste* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$||f - f_n||_\infty \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon \; .$$

L'uniformità della convergenza sta nel fatto che il numero n_ε dipendente da ε ma non da x. Per $n \geq n_\varepsilon$ la distanza tra f_n ed f è minore di ε per tutti gli $x \in X$, cioè il grafico di f_n sta dentro il "tubo" con "asse" f e raggio ε.

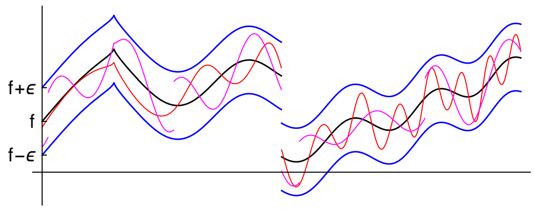

Figura 1.2: Rappresentazione di un intorno $B_\infty(f, \varepsilon[$ di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nella metrica uniforme.

Siccome per ogni $x \in X$ vale $|f(x) - f_n(x)| \leq ||f - f_n||_\infty$, segue immediatamente la

Proposizione 1.13 *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f su X, allora converge anche puntualmente (o semplicemente) ad f.*

Il viceversa non vale, come si può verificare con innumerevoli controesempi.

Indichiamo con $\mathbb{K}^X$ l'insieme di tutte le funzioni da X in $\mathbb{K}$ e con $B(X, \mathbb{K})$ l'insieme delle funzioni limitate[4] definite su X a valori in $\mathbb{K}$. Equivalentemente, $\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ e $B(X, \mathbb{K}) = \{f \in \mathbb{K}^X : ||f||_\infty < \infty\}$. Se dal contesto è chiaro quale sia il codominio $\mathbb{K}$ delle funzioni, si usa anche l'abbreviazione $B(X)$ per indicare l'insieme delle funzioni limitate su X. La sup-norma permette di definire una *topologia* su $\mathbb{K}^X$. Come base di intorni si possono prendere le palle aperte del tipo

$$B(f, r[= \{g \in \mathbb{K}^X : ||f - g||_\infty < r\} .$$

In $\mathbb{K}^X$ la sup-norma non definisce una distanza, infatti ci sono funzioni con sup-norma infinita, ad esempio $]0, 1] \ni x \mapsto 1/x$, e quindi funzioni la cui "distanza" sarebbe infinita: $||f - g||_\infty = +\infty$.

La sup-norma definisce invece una distanza su $B(X)$, lo spazio delle funzioni limitate. Questa distanza è addirittura una norma (da cui il nome "sup-norma"):

Proposizione 1.14 *$B(X)$ è spazio normato (e quindi metrico) rispetto alla* distanza uniforme *(o sup-norma) $d(f, g) := ||f - g||_\infty$.*

Dimostrazione:
(N1) $||f||_\infty = 0$ se e solo se f è identicamente nulla: ovvio.
(N2) $||cf||_\infty = |c| \, ||f||_\infty$ per ogni $c \in \mathbb{C}$, infatti $|(cf)(x)| = |c\, f(x)| = |c| \, |f(x)|$ per ogni x, e prendendo il sup la disuguaglianza resta valida.
(N3) $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$, infatti $|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
per ogni x, e prendendo il sup si conclude. C.V.D.

[4]La prima notazione si giustifica notando che, se A e B sono insiemi finiti di cardinalità $a, b \in \mathbb{N}$ rispettivamente, allora la cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni $f : A \to B$ vale b^a. La seconda notazione deriva dall'iniziale di *bounded* che significa limitato/e in inglese.

Proposizione 1.15 *Ogni successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che sia uniformemente di Cauchy su X è uniformemente convergente su X.*

Dimostrazione: Per ogni $x \in X$ si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty$, quindi per ogni x fissato, la successione $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$. Ma $\mathbb{K}$ è completo per ipotesi, quindi tale successione converge ad un numero in $\mathbb{K}$, che chiamiamo $f(x)$.

Dimostriamo ora che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq n_\varepsilon$ si ha $||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$, quindi per ogni x vale $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. In questa formula teniamo fissi m ed x e facciamo tendere $n \to \infty$. Si ottiene $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ per ogni x e $m \geq n_\varepsilon$, quindi $||f - f_m||_\infty \leq \varepsilon$ per ogni $m \geq n_\varepsilon$. C.V.D.

Da notare che, nella precedente proposizione, non è richiesto che le funzioni f_n siano limitate in X. Ad esempio, se $X = \mathbb{R}^*$, le funzioni $f_n(x) = 1/x + 1/(n+1)$, formano una successione uniformemente di Cauchy e convergono uniformemente ad $f(x) = 1/x$. Se però restringiamo la nostra attenzione alle funzioni limitate, ricaviamo un importante

Corollario 1.16 *Lo spazio $B(X)$ è completo (quindi di Banach) nella sup-norma, cioè ogni successione uniformemente di Cauchy di funzioni limitate converge uniformemente ad una funzione limitata.*

Dimostrazione: Rispetto al teorema precedente manca solo da dimostrare che la funzione limite f è limitata se le f_n sono limitate. Riprendendo la disuguaglianza $|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ si deriva subito che $|f(x)| \leq |f_m(x)| + \varepsilon \leq ||f_m||_\infty + \varepsilon$ per ogni x, quindi $||f||_\infty \leq ||f_m||_\infty + \varepsilon$, perciò f è limitata. C.V.D.

Supponiamo ora che sul dominio X ci sia una topologia, cioè che ci sia un modo per stabilire quali funzioni $f : X \to \mathbb{K}$ sono continue. Indichiamo con $C(X, \mathbb{K})$ (o $C(X)$) l'insieme delle funzioni continue da X a $\mathbb{K}$, e con $C_b(X) = C(X) \cap B(X)$ l'insieme delle funzioni continue e limitate.

Teorema 1.17 *Il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua. In altre parole: $C(X)$ è chiuso in $B(X)$ nella topologia della convergenza uniforme.*

Teorema 1.18 *Lo spazio $C_b(X)$ è completo (quindi di Banach) nella topologia della convergenza uniforme.*

Dimostrazione: Consideriamo una successione di Cauchy di funzioni continue. Dal teorema 1.15 questa successione converge uniformemente ad una funzione. Dal teorema 1.17 tale funzione limite è continua. C.V.D.

Teorema 1.19 (del limite per la convergenza uniforme) *Siano X spazio topologico, $D \subset X$, $x_0 \in X$ di accumulazione per D. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni con dominio D, convergente uniformemente ad una funzione $f : D \to \mathbb{K}$. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste finito in $\mathbb{K}$ il limite*

$$\lim_{D\ni x\to x_0} f_n(x) = l_n \ ,$$

allora $l := \lim_{n\to\infty} l_n$ esiste finito in $\mathbb{K}$, la funzione f ha limite per $x \to x_0$ e tale limite è l.

Definizione 1.17 *Sia* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *serie di funzioni limitate,* $f_n \in B(X)$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*. Si dice che tale serie* converge totalmente *su* X *se la serie delle sup-norme* $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty$ *è convergente (in* $\mathbb{R}_+$*, essendo una serie di numeri reali positivi).*

Proposizione 1.20 *Se* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge totalmente, allora converge uniformemente ad una* $f \in B(X)$*.*

Dimostrazione: Invocando i precedenti teoremi, basta dimostrare che la successione delle ridotte di una serie totalmente convergente è di Cauchy nella metrica uniforme. Indichiamo con $S_N = \sum_{n=0}^N f_n \in B(X)$ la ridotta N-esima della serie di funzioni e con $\sigma_N = \sum_{n=0}^N ||f_n||_\infty \in \mathbb{R}$ la ridotta della serie delle sup-norme. Si ha

$$||S_{N+p} - S_N||_\infty = ||\sum_{n=N+1}^{N+p} f_n||_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} ||f_n||_\infty = |\sigma_{N+p} - \sigma_N| \ ,$$

Per ipotesi la serie $\sum_{n=0}^\infty ||f_n||_\infty$ è convergente, quindi la successione delle ridotte σ_N è di Cauchy. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|\sigma_{N+p} - \sigma_N| \leq \varepsilon$ qualunque sia $p \in \mathbb{N}$. Ma questo, per la disuguaglianza appena trovata, equivale ad affermare che $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è successione di Cauchy. C.V.D.

La convergenza totale è una condizione molto forte, più forte della convergenza uniforme. Infatti ci sono serie di funzioni che convergono uniformemente ma non totalmente.

Esempio: Data la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f_n(x) = (1/n)\chi_{[n-1,n[}(x)$ che vale $1/n$ nell'intervallo $[n-1, n[$ e 0 altrove, si ha $||f_n|| = 1/n$, pertanto $\sum_{n=1}^\infty ||f_n|| = +\infty$ (serie armonica) e la serie di funzioni $\sum_{n=1}^\infty f_n$ non converge totalmente. Tuttavia la serie converge uniformemente alla funzione a scalino

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1/n & n-1 \leq x < n \end{cases} \tag{1.31}$$

infatti $||(\sum_{n=1}^N f_n) - f|| = 1/(N+1)$ che tende a 0 per $N \to \infty$.

Nella pratica non è sempre facile calcolare le sup-norme delle f_n. A volte può essere più facile dare dei limiti superiori a tali norme, si riesce cioè a maggiorare $|f_n(x)|$ con costanti $c_n \leq 0$. Se queste costanti formano una serie convergente, allora è facile dimostrare che la serie di funzioni converge totalmente:

Proposizione 1.21 *Sia* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *serie in* $B(X)$*; se* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di costanti reali positive tali che la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ *sia convergente e tali che* $|f_n(x)| < c_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $x \in X$*, allora* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge totalmente su* X*.*

Dimostrazione: L'ipotesi $|f_n(x)| < c_n$ per ogni x equivale a $||f_n||_\infty \leq c_n$; se $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge, allora, per il criterio del confronto, anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||_\infty$ converge. C.V.D.

Esempio: La serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2} \tag{1.32}$$

converge totalmente in $\mathbb{R}$. Infatti $|\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ ed ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

Proposizione 1.22 *Ogni serie di potenze converge totalmente (e quindi uniformemente) su ogni cerchio (anche chiuso) di raggio strettamente minore del raggio di convergenza*

Dimostrazione: Sia $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ serie di potenze con raggio di convergenza R_a, e consideriamo il disco $B(0,r]$ di raggio $r < R_a$. Indichiamo con f_n la funzione $z \mapsto a_n z^n$ con dominio $B(0,r]$, termine generale della serie di funzioni $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ che sappiamo convergere puntualmente ad f. Calcoliamo la sup-norma di f_n. Per ogni z in questo disco, $|z| \leq r$, si ha $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$, quindi $||f_n||_\infty \leq |a_n| r^n$ (in realtà vale il segno di uguaglianza). Siccome $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge per ipotesi, la serie di potenze è totalmente convergente. C.V.D.

In generale peroò non si ha convergenza totale all'interno del cerchio di convergenza $B(0,r[$. Ad esempio, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ che ha raggio di convergenza $R = 1$ ha per funzione somma $f(z) = 1/(1-z)$, che non è limitata in $B(0,1[$, quindi non può esserci in esso né convergenza uniforme né convergenza totale.

1.4.2 Operazioni elementari con le serie di potenze

Sappiamo che le operazioni elementari tra numeri (addizione e moltiplicazione) si traducono in operazioni tra successioni, serie e funzioni. Ad esempio, per queste ultime si pone

$$\begin{aligned} [\lambda f_a](z) &:= \lambda \cdot f_a(z) && (\lambda \in \mathbb{C}\,, \quad z \in C_a) \\ [f_a + f_b](z) &:= f_a(z) + f_b(z) && (z \in C_a \cap C_b) \\ [f_a \cdot f_b](z) &:= f_a(z) \cdot f_b(z) && (z \in C_a \cap C_b) \end{aligned} \tag{1.33}$$

Nel caso in cui le funzioni f_a e f_b siano definite da serie di potenze, è facile vedere che le funzioni λf_a, $f_a + f_b$ e $f_a \cdot f_b$ sono funzioni somma di serie di potenze:

Proposizione 1.23 *Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ serie di funzioni, f_a ed f_b le rispettive funzioni somma. Allora:*

- *la funzione λf_a è la funzione somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) z^n$ che ha per raggio di convergenza C_a;*
- *la funzione $f_a + f_b$ coincide in $C_a \cap C_b$ con la funzione somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ il cui raggio di convergenza $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$;*
- *la funzione $f_a \cdot f_b$ coincide in $C_a \cap C_b$ con la funzione somma della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ove $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ed il cui raggio di convergenza $R_{a*b} \geq \min\{R_a, R_b\}$; (la successione $c := a * b$ è detta* prodotto di convoluzione *delle successioni a e b)*

Dimostrazione: I primi due casi, prodotto per uno scalare complesso e addizione di funzioni, è un semplice esercizio. Per il prodotto di funzioni, l'idea è quella di sommare

$$\Big(\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l\Big) \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\Big) = \sum_{(l,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_l\, b_m\, z^{l+m}$$

sulle strisce ad $l + m = n$ costante del "reticolo" $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cambiando variabili di sommatoria $l = k$, $m = n - k$ con $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Per stabilire la convergenza di questa somma bisogna introdurre il concetto più generale di sommabilità su insiemi infiniti non ordinati, e sfruttare la convergenza assoluta delle serie "a" e "b". C.V.D.

1.4.3 Derivazione di serie di potenze

Consideriamo ora la derivata di una funzione in senso complesso. Analogamente al caso reale, la derivata complessa è definita come il limite del rapporto incrementale:

Definizione 1.18 *Sia $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ e $z \in D$ punto di accumulazione per D. La* derivata *di f in z è definita come il limite*

$$f'(z) := \lim_{D \ni w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \tag{1.34}$$

se tale limite esiste in $\mathbb{C}$.

Più avanti studieremo a fondo la nozione di derivata complessa e le sorprendenti proprietà delle funzioni derivabili in senso complesso. Qui ci limitiamo ad osservare che

Proposizione 1.24 *Se $f : D \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z \in D \subset \mathbb{C}$, è anche continua in z.*

Proposizione 1.25 *Le regole di derivazione delle somme, dei prodotti e delle funzioni composte, valide nel caso reale, si estendono senza difficoltà al caso complesso; in particolare, se $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ è un polinomio, si ha che anche la sua derivata è un polinomio: $p'(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}$, e sia p che p' sono definiti su tutto $\mathbb{C}$.*

A questo punto consideriamo la derivata $f'_a(z)$ di una funzione somma $f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ di una serie infinita. È ancora lecito portare la derivata dentro il segno di sommatoria? Insomma, ci chiediamo se e quando la derivata della funzione somma $f'_a(z)$ sia uguale alla funzione somma della *serie derivata* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, (che è ancora una serie di potenze). Stabiliamo innanzitutto il raggio di convergenza della serie derivata:

Lemma 1.26 *Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Dimostrazione: Detti R_a ed R'_a i raggi di convergenza rispettivamente della serie e della serie derivata, dimostriamo per prima cosa che $R'_a \leq R_a$. Se $|z| < R'_a$, la serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge. Essendo $|a_n z^n| = |z| \, |a_n z^{n-1}| \leq |n a_n z^{n-1}|$ per $n \geq |z|$, si ricava che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge.

Dimostriamo ora che $R_a \leq R'_a$. Sia $|z| < R_a$ e mostriamo che la serie derivata converge in z. Preso $w \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |w| < R_a$ si ha

$$|n a_n z^{n-1}| = n |a_n| |w|^{n-1} \left| \frac{z}{w} \right|^{n-1} = \left(\frac{n}{|w|} \left| \frac{z}{w} \right|^{n-1} \right) |a_n w^n| \, .$$

Il termine entro le parentesi tonde tende a 0 per grandi n, infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{L^{n-1}} = 0$ per $L = |w/z| > 1$. Quindi, per $n \geq \bar{n}$ abbastanza grande $\left(\frac{n}{|w|}\left|\frac{z}{w}\right|^{n-1}\right) < 1$ e di conseguenza $|na_n z^{n-1}| < |a_n w^n|$ per $n \geq \bar{n}$. Ma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ è assolutamente convergente ($|w| < R_a$), quindi anche $\sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$ è assolutamente convergente. C.V.D.

Teorema 1.27 (di derivazione termine a termine) *All'interno del cerchio di convergenza la somma di una serie di potenze è derivabile, e la derivata della somma coincide con la somma della serie derivata.*
(Si dice anche: all'interno del cerchio di convergenza, la somma di una serie è derivabile termine a termine.)

Dimostrazione: Indichiamo con R_a il raggio di convergenza della serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ che, come appena visto, coincide con quello della sua serie derivata $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} na_n z^{n-1}$. Fissato z tale che $|z| < R_a$ dobbiamo provare che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $0 < |w - z| \leq \delta$ si ha

$$\left|\frac{f_a(w) - f_a(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \leq \varepsilon\ .$$

Si ha $f_a(w) - f_a(z) = \sum_{n-1}^{\infty} a_n(w^n - z^n)$. Usando l'identità

$$w^n - z^n = (w - z)(w^{n-1} + zw^{n-2} + \cdots + wz^{n-2} + z^{n-1}) = (w - z)\sum_{k=1}^{n} w^{n-k} z^{k-1}$$

si trova

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_a(w) - f_a(z)}{w - z} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sum_{k=1}^{n} w^{n-k} z^{k-1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n}\left[w^{n-k} z^{k-1}\right] - nz^{n-1}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{N} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\right|\ .\end{aligned}$$

Vogliamo ora maggiorare ciascuno dei due termini finali con $\varepsilon/2$, scegliendo opportunamente N e δ.

Cominciamo dal secondo: sia $r \in \mathbb{R}_+$ tale che $|z| < r < R_a$ ed anche $|w| \leq r$. Vale allora

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left|\sum_{k=1}^{n} w^{n-k} z^{k-1}\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |na_n z^{n-1}| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=1}^{n} |w|^{n-k}|z|^{k-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq 2\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}\end{aligned}$$

e poiché la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n|a_n|r^{n-1}$ è convergente, il suo resto N-esimo può essere reso minore di $\varepsilon/2$ scegliendo $N = N_\varepsilon$ abbastanza grande.

Il primo termine (con $N = N_\varepsilon$) è il modulo della somma *finita*

$$\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} a_n I_n(w,z) \ , \qquad I_n(w,z) := \sum_{k=1}^{n} [w^{n-k} z^{k-1}] - n z^{n-1} \ .$$

$I_n(w,z)$ è una funzione continua di w per ogni n e z, che tende a 0 per $w \to z$. Pertanto il primo termine, somma finita di quantità infinitesime, tende a 0 per $w \to z$, e quindi può essere reso minore in modulo di $\varepsilon/2$ purchè $|w - z| \le \delta$ (e $\delta \le r - |z|$) con δ abbastanza piccolo. C.V.D.

Si può procedere applicando il precedente teorema anche alle derivate successive: all'interno del cerchio di convergenza, la derivata m-esima della somma della serie di potenze che stiamo considerando è

$$f_a^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n z^{n-m} \ , \qquad f_a^{(m)}(0) = m!\, a_m \ . \tag{1.35}$$

Vediamo quindi che l'm-esimo termine della successione a è legato alla derivata m-esima della funzione somma in 0. Possiamo quindi scrivere

$$f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!} z^n \ , \tag{1.36}$$

che altro non è che la *serie di Maclaurin* di una funzione infinitamente derivabile in un intorno di 0. Abbiamo così dimostrato il

Corollario 1.28 *La somma di una serie di potenze è indefinitamente derivabile all'interno del cerchio di convergenza, e la serie di potenze stessa è la serie di Maclaurin della sua somma.*

Possiamo anche dedurre che due serie distinte non possono dar luogo alla stessa funzione somma. Più precisamente:

Corollario 1.29 *Se le serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ hanno raggi di convergenza non nulli, ed $f_a(z) = f_b(z)$ in un intorno di 0, allora $a = b$, cioè $a_n = b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Infatti le derivate di ogni ordine in 0 dipendono solo dal comportamento della funzione in un intorno di zero, per cui $f_a^{(n)}(0) = f_b^{(n)}(0)$ per ipotesi; inoltre $a_n = f_a^{(n)}(0)/n!$ e $b_n = f_b^{(n)}(0)/n!$ per il corollario precedente. In altre parole, la corrispondenza $a \mapsto f_a$, ristretta alle $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ per cui f_a ha un dominio non banale, è iniettiva.

Essendo derivabile, la funzione somma di una serie di potenze è anche continua all'interno del cerchio di convergenza. Sorge spontanea la domanda: tale funzione è continua in tutto l'insieme di convergenza C_a? In generale la risposta è "no": nei punti di C_a al bordo la funzione può non essere continua. Abbiamo però continuità se ci avviciniamo a questi punti in particolari restrizioni dell'insieme di convergenza:

Teorema 1.30 (di Abel) *Sia c punto di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; allora la somma f_a della serie è continua sul segmento $[0,c] = \{tc : t \in [0,1]\}$ che congiunge l'origine con c.*

Osservazione: Si può dimostrare che la somma di una serie di potenze è continua su ogni segmento che abbia un estremo all'interno del cerchio di convergenza, e l'altro in un punto di convergenza sulla circonferenza, ossia su insiemi come quello disegnato in fig. 1.3, in cui dal punto di convergenza sulla circonferenza ci si rivolge all'interno in un angolo con lati non tangenti alla circonferenza stessa.

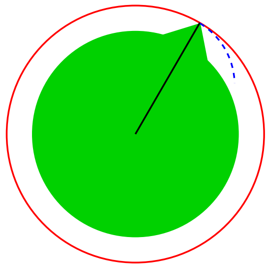

Figura 1.3: Circonferenza di convergenza (rosso) e regione di continuità della serie di potenze (verde). La linea tratteggiata blu rappresenta un possibile restrizione lungo la quale non si ha continuità della somma della serie.

Tuttavia, in generale non c'è continuità nell'intero insieme di convergenza C_a: possono infatti esistere successioni di punti $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ interni al cerchio di convergenza che si avvicinano tangenzialmente ad un punto di convergenza c sulla circonferenza, $\lim_{j\to\infty} c_j = c$ e per cui $\lim_{j\to\infty} f(c_j)$ non esiste.

1.4.4 Integrazione di serie di potenze

È utile leggere a rovescio il teorema di derivazione termine a termine 1.27, ed interpretarlo come

Teorema 1.31 (di integrazione termine a termine) *Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ ha raggio di convergenza $0 < R_a \leq +\infty$, le serie di potenze*

$$c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} , \tag{1.37}$$

dove c_0 è una costante arbitraria, hanno tutte R_a come raggio di convergenza e all'interno del cerchio di convergenza hanno per funzione somma g una primitiva in senso complesso della somma f_a della serie data: $g'(z) = f_a(z)$ se $|z| < R_a$.

Esempio: Se $|z| < 1$ allora

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots .$$

Integrando termine a termine troviamo

$$\int \frac{1}{1+z}\, \mathrm{d}z = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int z^n \,\mathrm{d}z = c + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = c + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{z^m}{m}$$

che, a meno della costante di integrazione c, è la serie logaritmica incontrata in precedenza, la quale per z reale, $-1 < z < 1$, sappiamo valere $\log(1+z)$. Viceversa, derivando termine a termine logaritmica, otteniamo la serie geometrica.

1.5 La funzione esponenziale complessa

1.5.1 Considerazioni generali

Tratteremo in questa parte la funzione esponenziale complessa. È la più importante delle funzioni elementari, oltre alle funzioni di tipo algebrico (polinomi e radici). Infatti tutte le funzioni elementari della matematica quotidiana, come il logaritmo, le funzioni trigonometriche e loro inverse, sono tutte figlie della funzione esponenziale. Anzi, una loro definizione rigorosa si basa proprio sulla funzione esponenziale complessa. Infatti, la definizione geometrica di seni e coseni data alle scuole medie, pur avendo il notevole e giusto vantaggio di aiutare la nostra intuizione e fornircene una rappresentazione mentale, è alquanto mal fondata.

Restando nel campo dei numeri reali, chi potrebbe sospettare una qualche relazione tra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche? Queste funzioni sembrano essere definite e derivate da ambiti molto diversi, e per scopi totalmente differenti. Forse avrete notato una certa somiglianza tra gli sviluppi di Taylor della funzione esponenziale e quelli del seno e del coseno:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{1.38}$$

$$\cos(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} = \sum_{n \text{ pari}} \frac{(-1)^{n/2}}{n!} x^n \tag{1.39}$$

$$\sin(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!} x^n \,. \tag{1.40}$$

Se con un po' di spirito avventuroso proviamo a considerare la serie esponenziale con argomento immaginario $x = \mathrm{i}\alpha : \alpha \in \mathbb{R}$, e ci ricordiamo che $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, ecc., è facile ottenere la seguente identità formale[5]

$$\exp(\mathrm{i}\alpha) = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha) \tag{1.41}$$

la quale non è altro che la celebrata *formula di Eulero*. Intravediamo così una prima parentela tra esponenziale, seno e coseno. Ci volle però il genio di Gauss per analizzare e comprendere fino in fondo lo stretto legame tra queste funzioni, legame che si stabilisce nel campo dei numeri complessi.

Restiamo ancora in ambito reale. Sappiamo che la funzione esponenziale reale $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ stabilisce un omomorfismo tra il gruppo additivo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +)$ ed il gruppo moltiplicativo dei reali strettamente positivi $(R^*_+, \cdot)$, nel senso che $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$. Dal punto di vista insiemistico, exp è biiettiva (iniettiva e suriettiva), quindi è un isomorfismo di gruppi. Inoltre dal punto di vista topologico, exp è un omeomorfismo, cioè è continua, con inversa continua.

Nota: L'esponenziale reale non è l'unico isomorfismo continuo da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^*_+$: scelto un qualunque numero reale $a > 0$, la funzione $f_a(x) = a^x$ gode delle stesse proprietà. L'esponenziale reale è

[5] L'aggettivo "formale" in matematica connota un risultato ottenuto applicando le regole formali o i risultati di teoremi agli enti in esame, senza preoccuparsi se l'applicazione di tali regole sia sempre lecita, cioè giustificata da adeguate ipotesi. Ad esempio, scambiare incondizionatamente l'ordine dei limiti, manipolare serie infinite senza preoccuparsi della loro convergenza, ecc..

quella funzione "potenza" che ha per base il numero di Nepero $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718\ldots$, ossia è quell'isomorfismo f per il quale vale $f(1) = \mathrm{e}$. Domanda: perché si è scelto il numero di Nepero come base della funzione esponenziale? Risposta: Perché $\exp'(x) = \exp(x)$, mentre scegliendo un'altra base ci sarebbe un fattore moltiplicativo costante tra la funzione e la sua derivata.

Cerchiamo quindi una funzione continua (che continuiamo a chiamare exp) la quale sia omomorfismo tra il gruppo additivo dei numeri complessi $(\mathbb{C}, +)$ ed il gruppo moltiplicativo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, ove $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è l'insieme dei numeri complessi senza lo zero. Ovviamente l'omomorfismo deve mandare l'elemento neutro dell'addizione nell'elemento neutro della moltiplicazione:

$$\exp(0) = 1\ . \tag{1.42}$$

Ci rendiamo subito conto che non è possibile che una tale funzione sia iniettiva: sia $\varepsilon \in \mathbb{U}$ una radice n-esima non banale dell'unità, cioè $\varepsilon^n = 1$ e $\varepsilon \neq 1$ (ad esempio $\varepsilon = \mathrm{i}$ se $n = 4$) e $z \in \mathbb{C}$ tale che $\exp(z) = \varepsilon$, quindi $z \neq 0$. Allora deve valere

$$\exp(nz) = \exp(z + \cdots + z) = \exp(z)\cdots\exp(z) = \varepsilon\cdots\varepsilon = \varepsilon^n = 1 = \exp(0)\ .$$

Quindi sia 0 che nz hanno lo stesso esponenziale.

È anche facile intuire (ma non dimostrare) che il piano $(\mathbb{C})$ ed il piano "bucato" $\mathbb{C}^*$ non possono essere omeomorfi. Ci sono quindi ragioni sia algebriche che topologiche che impediscono ad exp di essere biiettiva, e quindi isomorfismo.

1.5.2 Definizione dell'esponenziale complesso

Come nel caso reale, ci sono infiniti omomorfismi da $(\mathbb{C}, +)$ e $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Proviamo a cercare la funzione esponenziale complessa nella forma di una serie di potenze, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e per la quale valga

$$\exp'(z) = \exp(z) \tag{1.43}$$

(derivata in senso complesso, come in (1.34)). Dalla (1.42) vediamo innanzitutto che $a_0 = 1$. Derivando termine a termine, troviamo

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n + \cdots \tag{1.44}$$

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad = a_1 + 2a_2 z + \quad \cdots \quad + n\, a_n\, z^{n-1} + \cdots \tag{1.45}$$

e la (1.43) è soddisfatta purché $a_{n-1} = n a_n$ per ogni $n \geq 1$. Con la condizione iniziale $a_0 = 1$, si dimostra facilmente per induzione che $a_n = 1/n!$, come nel caso reale. Arriviamo così alla

Definizione 1.19 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si definisce*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\ . \tag{1.46}$$

Il criterio del rapporto garantisce che la serie di potenze è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$, e quindi il suo raggio di convergenza è infinito. Quindi la funzione esponenziale è continua e derivabile in tutto il campo complesso, e vale l'eq. (1.43).

Siccome i coefficienti della serie esponenziale sono reali, la funzione esponenziale complessa ristretta ai numeri reali assume valori reali, anzi, coincide con la funzione esponenziale reale. In particolare exp(1) è il numero di Nepero. Perciò anche per la versione complessa si adotta la notazione "a potenza"

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) \qquad (z \in \mathbb{C}) \ . \tag{1.47}$$

Verifichiamo ora che tale funzione è l'omomorfismo che cerchiamo:

Teorema 1.32 (Formula di addizione per la funzione esponenziale complessa) *Per ogni $w, z \in \mathbb{C}$ si ha*

$$\mathrm{e}^{w+z} = \mathrm{e}^w\, \mathrm{e}^z \tag{1.48}$$

Dimostrazione: Indicando con D la derivata rispetto alla variabile z, ed applicando le regole di derivazione per prodotti e per funzioni composte si ha

$$D(\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z}) = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z} + \mathrm{e}^z(-\mathrm{e}^{c-z}) = 0 \ .$$

Quindi la funzione $z \mapsto \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z}$ è costante, ed il suo valore può essere determinato a $z = 0$ e vale e^c. Pertanto $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{c-z} = \mathrm{e}^c$ per ogni $z, c \in \mathbb{C}$. Scegliendo $c = w + z$ si dimostra la tesi. C.V.D.

Corollario 1.33 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\mathrm{e}^z \neq 0$. Inoltre $(\mathrm{e}^z)^{-1} = \mathrm{e}^{-z}$.*

Dimostrazione: Vale $1 = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{z-z} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z}$. C.V.D.

Queste proprietà sono sufficienti per stabilire che $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ è omomorfismo di gruppi.

Proposizione 1.34 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $\mathrm{e}^{(z^*)} = (\mathrm{e}^z)^*$.*

Dimostrazione: Siccome $(z^*)^n = (z^n)^*$, il coniugato della somma finita $\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}$ è $\sum_{n=0}^N \frac{(z^*)^n}{n!}$. Poiché il coniugio $z \mapsto z^*$ è funzione continua in $\mathbb{C}$, si può passare al limite per $N \to \infty$ e si ottiene $(\mathrm{e}^z)^* = \mathrm{e}^{(z^*)}$. C.V.D.

Proposizione 1.35 *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}$. Equivalentemente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x$.*

Dimostrazione: Si ha $|\mathrm{e}^z|^2 = \mathrm{e}^z\, \mathrm{e}^{z^*} = \mathrm{e}^{z+z^*} = \mathrm{e}^{2\mathrm{Re}\, z} = (\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z})^2$ e non c'è ambiguità di segno nel prendere le radici reali perché $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z} > 0$. C.V.D.

1.5.3 Le funzioni trigonometriche complesse

Poiché exp è omomorfismo di gruppi, $\exp(x+\mathrm{i}y) = \exp(x)\,\exp(\mathrm{i}y)$ è completamente determinata dal suo comportamento per argomenti reali e immaginari puri. Abbiamo visto che $\exp(x)$ per x reale coincide con l'esponenziale reale. Indaghiamo ora sull'esponenziale dei numeri immaginari $\mathrm{i}y \in \mathbb{I}$. Dalla proposizione precedente vediamo che $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^0 = 1$, cioè l'esponenziale di un numero immaginario è un numero unitario e possiamo quindi scrivere $\exp(\mathbb{I}) \subset \mathbb{U}$. Addirittura $\mathrm{e}^z \in \mathbb{U} \iff z \in \mathbb{I}$. Osservando che $\mathbb{I}$ è sottogruppo additivo di $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{U}$ è un sottogruppo moltiplicativo di $\mathbb{C}^*$, possiamo affermare che la restrizione di exp ai numeri immaginari è omomorfismo da $\mathbb{I}$ in $\mathbb{U}$, non iniettivo per quanto detto in precedenza, ma suriettivo.

Parametrizzando l'insieme dei numeri immaginari con numeri reali moltiplicati per l'unità immaginaria ($\mathbb{I} = \mathrm{i}\mathbb{R}$), abbiamo che la funzione

$$\mathrm{cis} : \mathbb{R} \to \mathbb{U} \qquad t \mapsto \mathrm{cis}(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \tag{1.49}$$

è omomorfismo continuo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ nel gruppo moltiplicativo $(\mathbb{U}, \cdot)$, e fornisce la definizione rigorosa della funzione introdotta euristicamente nell'eq. (1.15).

Al variare di t a "velocità" costante in $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ruota alla stessa velocità in $\mathbb{U}$: $|\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/\mathrm{d}t| = |\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 1$. Intuiamo così che cis avvolge infinite volte $\mathbb{R}$ attorno alla circonferenza unitaria, e che quindi cis è suriettiva.

Partendo da $t = 0 \implies \mathrm{cis}(0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, al crescere di $t > 0$ $\mathrm{cis}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ruota in senso antiorario, infatti $\mathrm{cis}'(0) = \mathrm{i}$, e ad un certo punto raggiungerà il numero -1 per la prima volta. Quale sarà il valore di t corrispondente? È π. Più precisamente:

Definizione 1.20 *Chiamiamo π il minimo numero reale positivo t per cui sia* $\mathrm{cis}(\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Per vedere che questa è una buona definizione, consideriamo $E = \{t \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -1$. Essendo cis suriettiva, E non è vuoto, ed è simmetrico per riflessione attorno all'origine: $-E = E$, ossia, se $t \in E$ allora $-t \in E$, poichè $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^* = -1$ Inoltre E è un insieme chiuso, essendo controimmagine di una funzione continua (cis) dell'insieme chiuso $\{-1\}$. Quindi anche $E \cap [0, +\infty[$ è chiuso ed ammentte un minimo, diverso da 0 poiché $\mathrm{cis}(0) = 1$. C.V.D.

Esercizio: Mostrare che π così definito è la lunghezza d'arco della semicirconferenza unitaria, e quindi è il ben noto rapporto tra circonferenza e diametro.

Proseguendo nella rotazione antioraria, si ha che 2π è il minimo numero strettamente positivo per cui $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1$. Deduciamo quindi che la funzione cis è periodica con periodo 2π. Riassumiamo di seguito alcune proprietà importanti della funzione esponenziale complessa:

$$\mathrm{e}^z = 1 \iff z \in \mathrm{i}\,2\pi\,\mathbb{Z} \tag{1.50}$$

$$\mathrm{e}^z = -1 \iff z = \mathrm{i}(2k+1)\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{1.51}$$

$$\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}2\pi} = \mathrm{e}^z \quad \text{l'esponenziale complessa è periodica di periodo } \mathrm{i}2\pi \text{ (immaginario)} \tag{1.52}$$

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w \iff \mathrm{e}^{z-w} = 1 \iff w = z + \mathrm{i}\,2\pi\,k \qquad (k \in \mathbb{Z})\,. \tag{1.53}$$

Come ogni funzione a valori complessi, cis è determinata dalle sue parti reale ed immaginaria, che *per definizione* sono le funzioni coseno e seno:

$$\cos(t) := \mathrm{Re}\,(\,\mathrm{cis}\,t) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} \tag{1.54a}$$

$$\sin(t) := \mathrm{Im}\,(\,\mathrm{cis}\,t) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} \tag{1.54b}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\ . \tag{1.54c}$$

Queste sono le ben note *formule di Eulero* che legano la funzione esponenziale complessa alle funzioni trigonometriche reali fondamentali.

Estendiamo tali funzioni trigonometriche in campo complesso a partire dalle rispettive serie di potenze. Da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}$ separiamo la parte reale (proveniente dai termini con $n = 2k$ pari) dalla parte immaginaria (proveniente dai termini con $n = 2k+1$ dispari), e troviamo

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{1.55}$$

$$\cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \cdots \tag{1.56}$$

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots\ . \tag{1.57}$$

Queste serie di potenze valgono per ogni $t \in \mathbb{R}$, ma possiamo facilmente vedere (mediante il criterio del rapporto) che convergono assolutamente anche per ogni $t \in \mathbb{C}$ complesso, avendo raggio di convergenza infinito. Le rispettive funzioni somma *definiscono* cos e sin : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Queste risultano continue e derivabili in tutto il piano complesso, e derivando termine a termine si dimostra che

$$D\cos = -\sin\ , \qquad D\sin = \cos \tag{1.58}$$

come per le versioni reali. Inoltre le formule di Eulero (1.54) restano valide per ogni $t \in \mathbb{C}$.

Tutta la teoria delle funzioni trigonometriche può essere fondata e ricostruita rigorosamente con le definizioni appena date. Osserviamo innanzitutto che, siccome la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $\mathrm{i}2\pi$, le funzioni sin e cos sono periodiche di periodo 2π anche in piano complesso. Inoltre, le formule di addizione

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta \tag{1.59}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta \tag{1.60}$$

non sono altro che le parti reale ed immaginaria dell'identità fondamentale $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha\pm\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\beta}$.

Riferimenti ed approfondimenti

Gli argomenti di questo capitolo sono generalmente esposti in testi di analisi 1 o analisi 2, p.es. [DM1, Giu1, Giu2, BPS1, BPS2]. In particolare, questo capitolo segue da vicino [DM1]. Un libro molto bello sull'analisi complessa (che studieremo ulteriormente nel cap. 8) è [Ahl]. Come approfondimento consiglio anche la lettura di [SvTi].

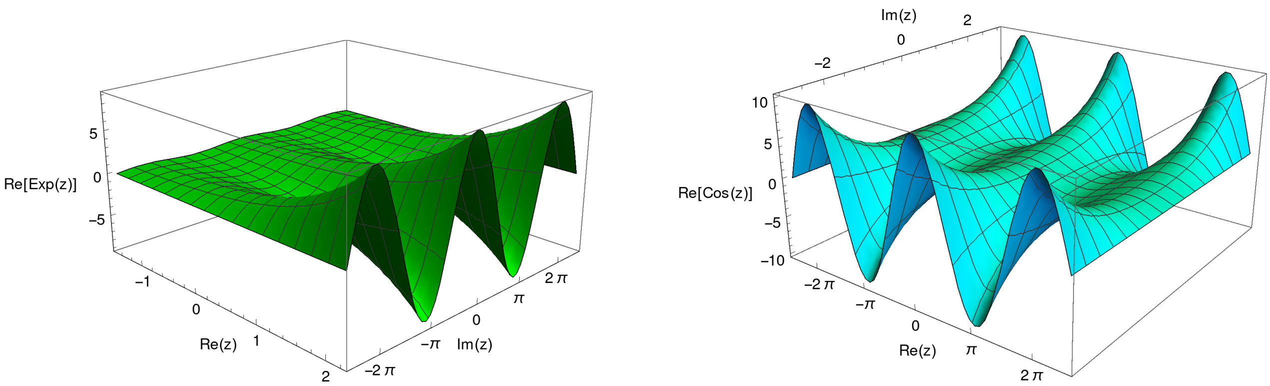

Figura 1.4: Parte reale della funzione esponenziale complessa (sinistra) e del coseno complesso (destra).