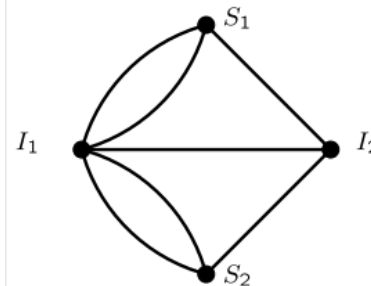
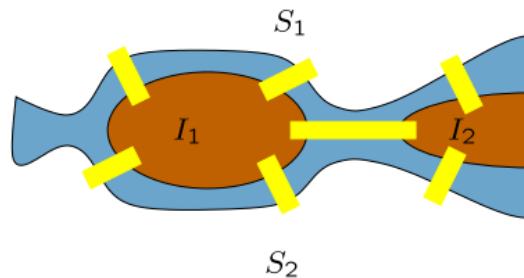


# LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

## Cây có hướng & Cây khung tối thiểu

Phạm Nguyên Khang  
BM. Khoa học máy tính, CNTT  
[pnkhang@cit.ctu.edu.vn](mailto:pnkhang@cit.ctu.edu.vn)



Cần Thơ, 2017

# Xây dựng hệ thống dẫn nước



Nhà máy nước



# Xây dựng hệ thống dẫn nước



Nhà máy nước



**Xây hệ thống dẫn  
nước sao cho: nhà  
nào cũng có nước  
để sử dụng**

# Xây dựng hệ thống dẫn nước

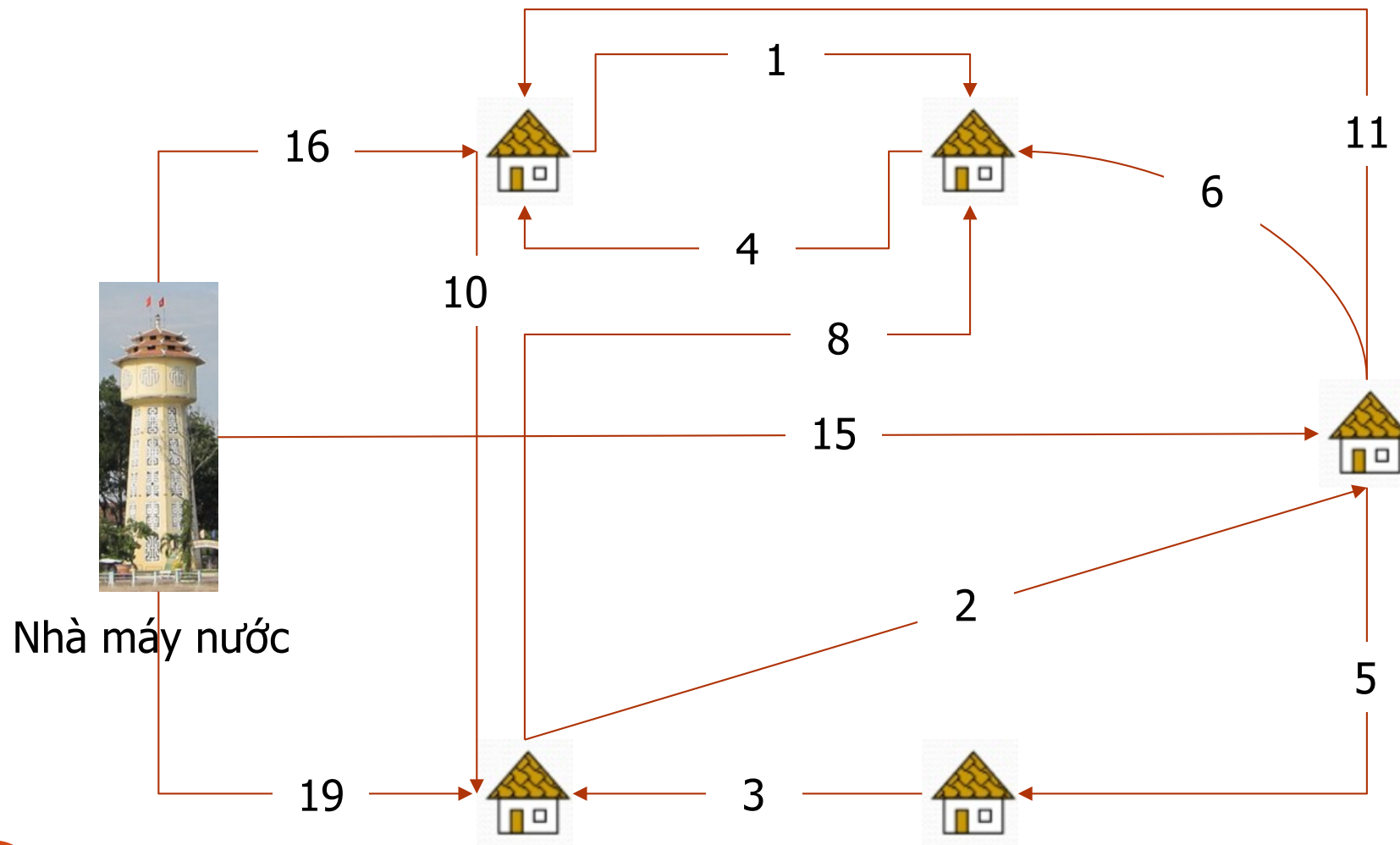


Nhà máy nước

**Xây hệ thống dẫn  
nước sao cho: nước  
từ nhà máy nước  
có thể đi đến được  
mọi nhà**



# Xây dựng hệ thống dẫn nước



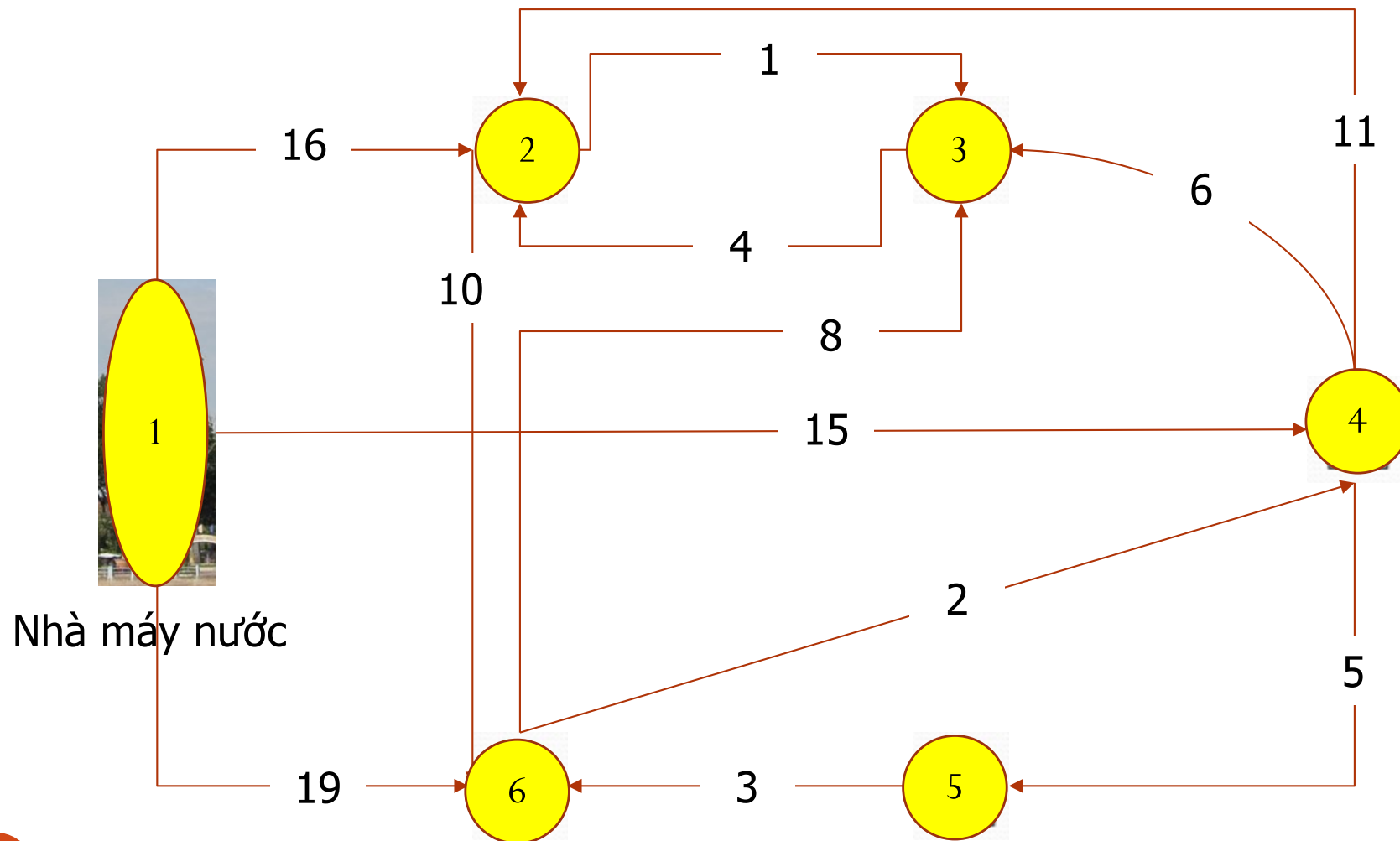
# Xây dựng hệ thống dẫn nước



# Xây dựng hệ thống dẫn nước

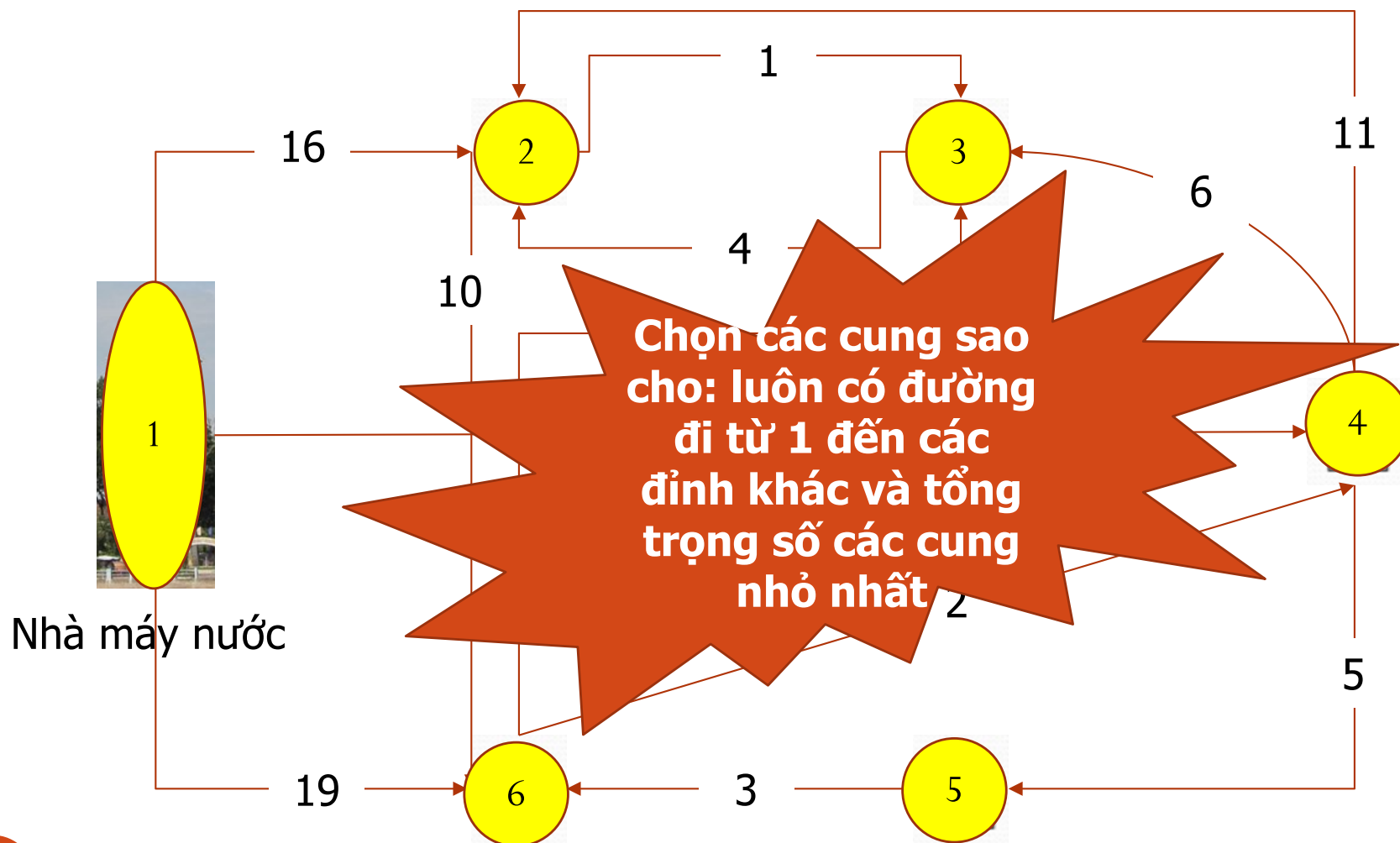
- Đỉnh: nhà/nhà máy nước, gọi tắt là địa điểm
- Cung: đường ống nối giữa các địa điểm với nhau.  
Nước chỉ chảy 1 chiều => cung có hướng
- Trọng số cung: chi phí xây dựng đường ống tương ứng
- Đồ thị có hướng, có trọng số

# Xây dựng hệ thống dẫn nước



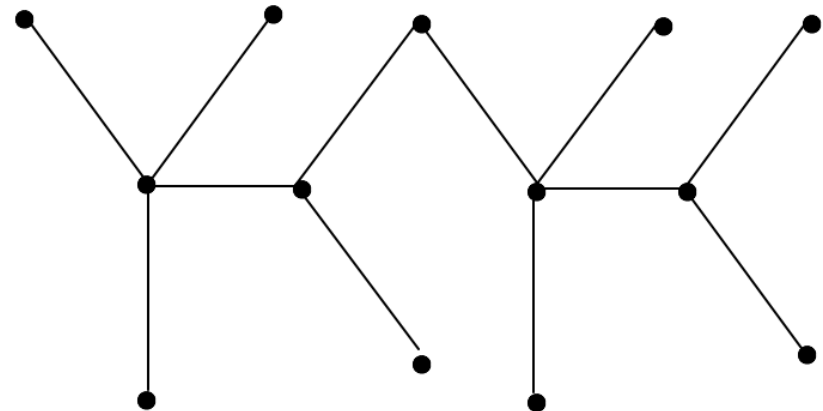
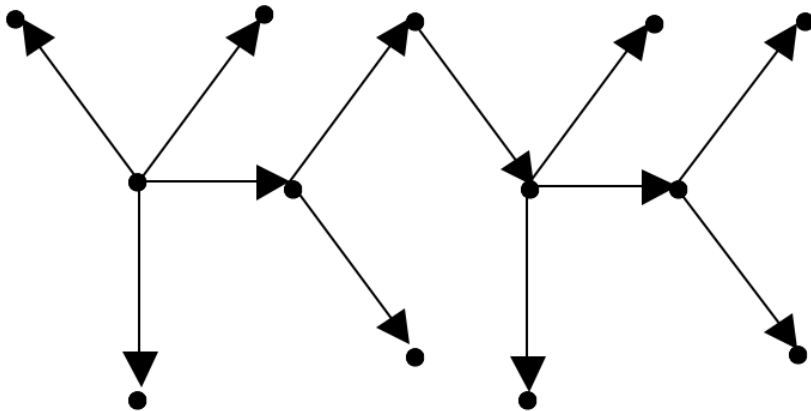


# Xây dựng hệ thống dẫn nước



# Cây có hướng

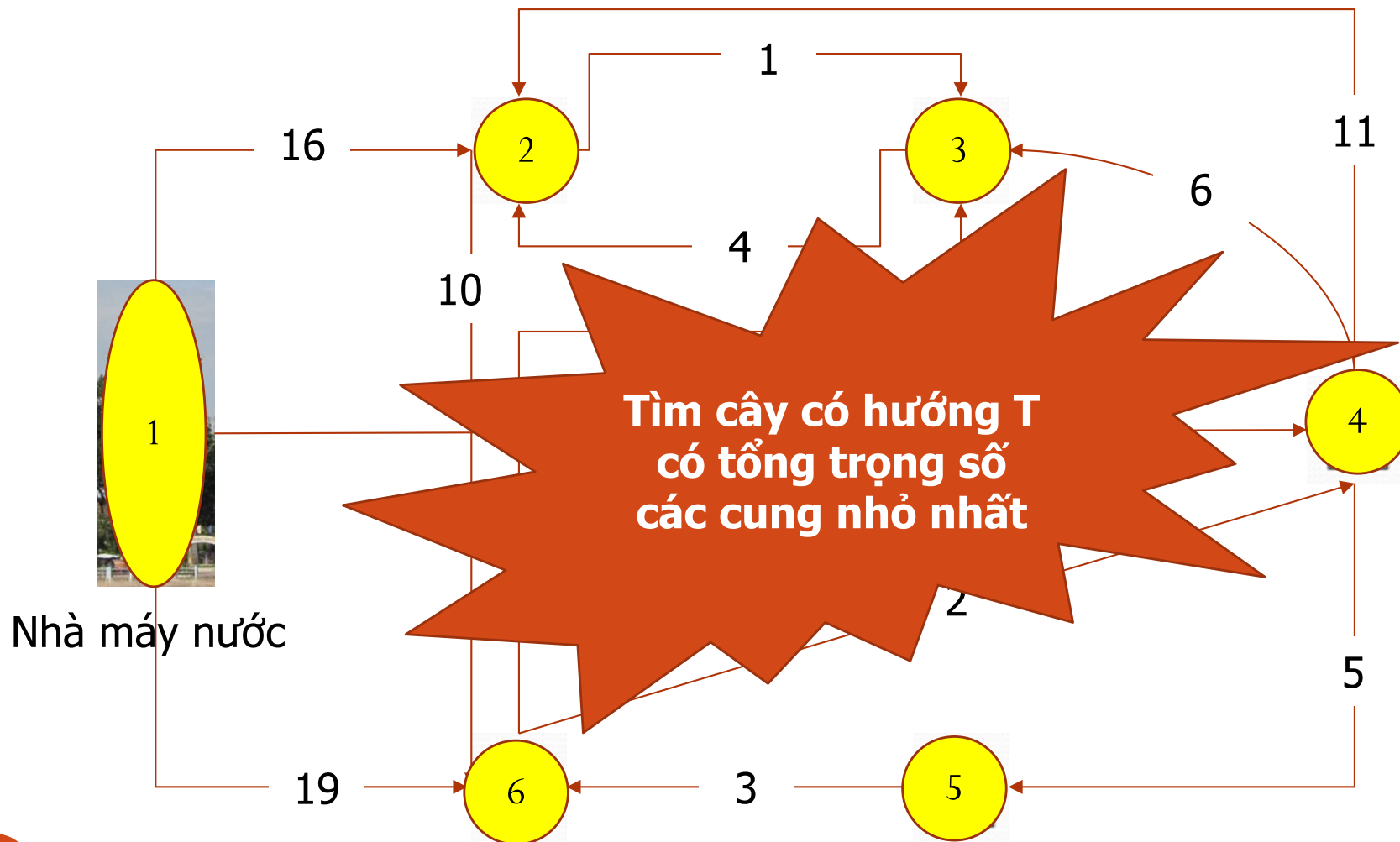
- Định nghĩa:
  - Đồ thị có hướng  $G = \langle V, E \rangle$  là **một cây có hướng, gốc  $r$**  khi và chỉ khi:
    - $G$  không có chu trình vô hướng
    - Luôn có đường đi từ  $r$  đến các đỉnh khác



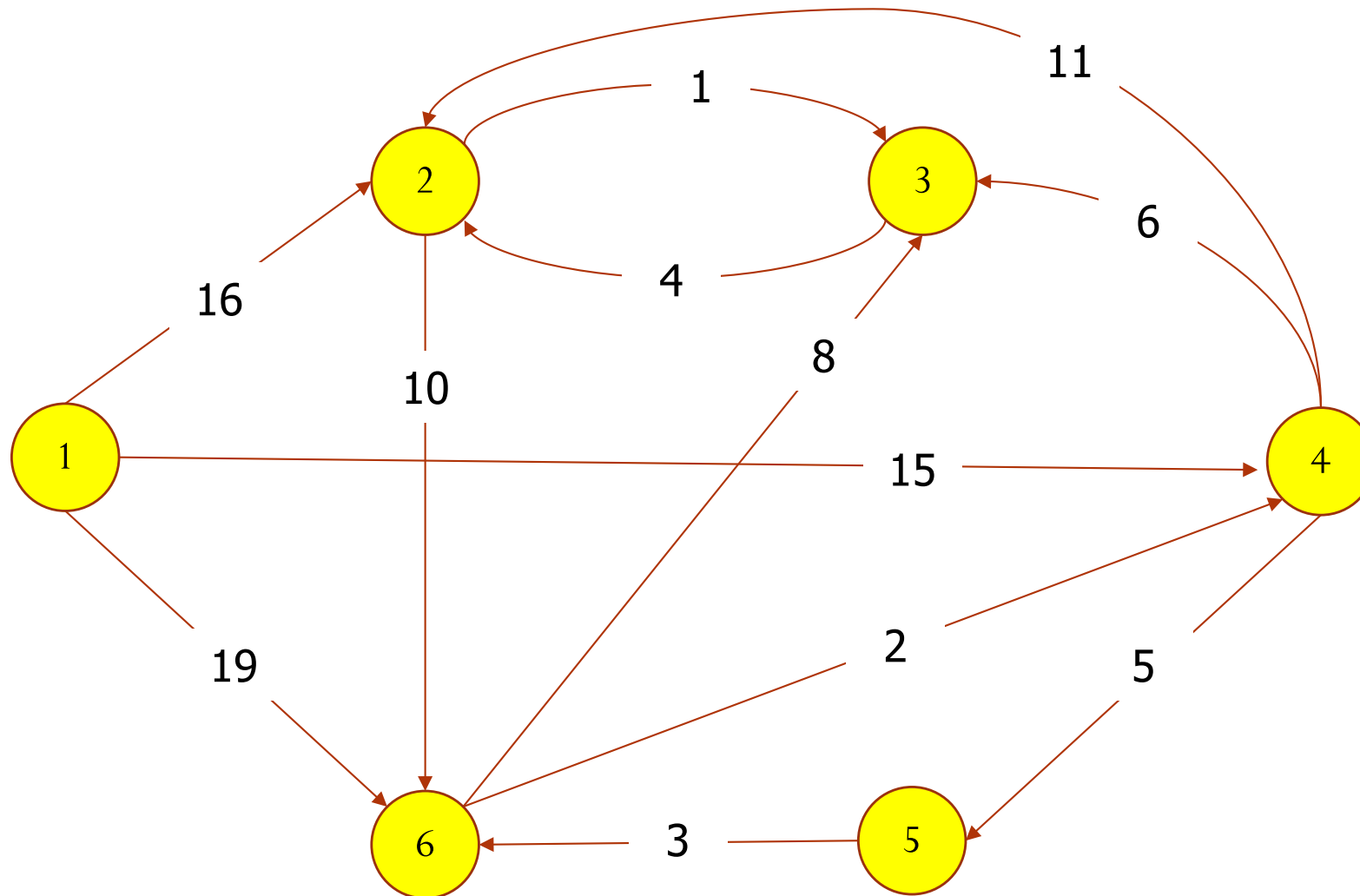
# Cây có hướng

- Các tính chất (định lý):  $G$  là cây có hướng gốc  $r$ 
  1. Tồn tại đỉnh  $r$  được nối với mỗi một đỉnh khác bằng một đường đi duy nhất xuất phát từ  $r$ .
  2. Gần liên thông mạnh và cực tiểu đối với tính chất này.
  3. Liên thông và tồn tại một đỉnh  $r$  có bậc trong bằng không và bậc trong của những đỉnh khác  $r$  là bằng 1.
  4. Không có chu trình và tồn tại một đỉnh  $r$  có bậc trong bằng không và bậc trong của những đỉnh khác  $r$  là bằng 1.
  5. Gần liên thông mạnh và không có chu trình.
  6. Gần liên thông mạnh và có  $n-1$  cung.
- Xem Giáo trình Toán rời rạc

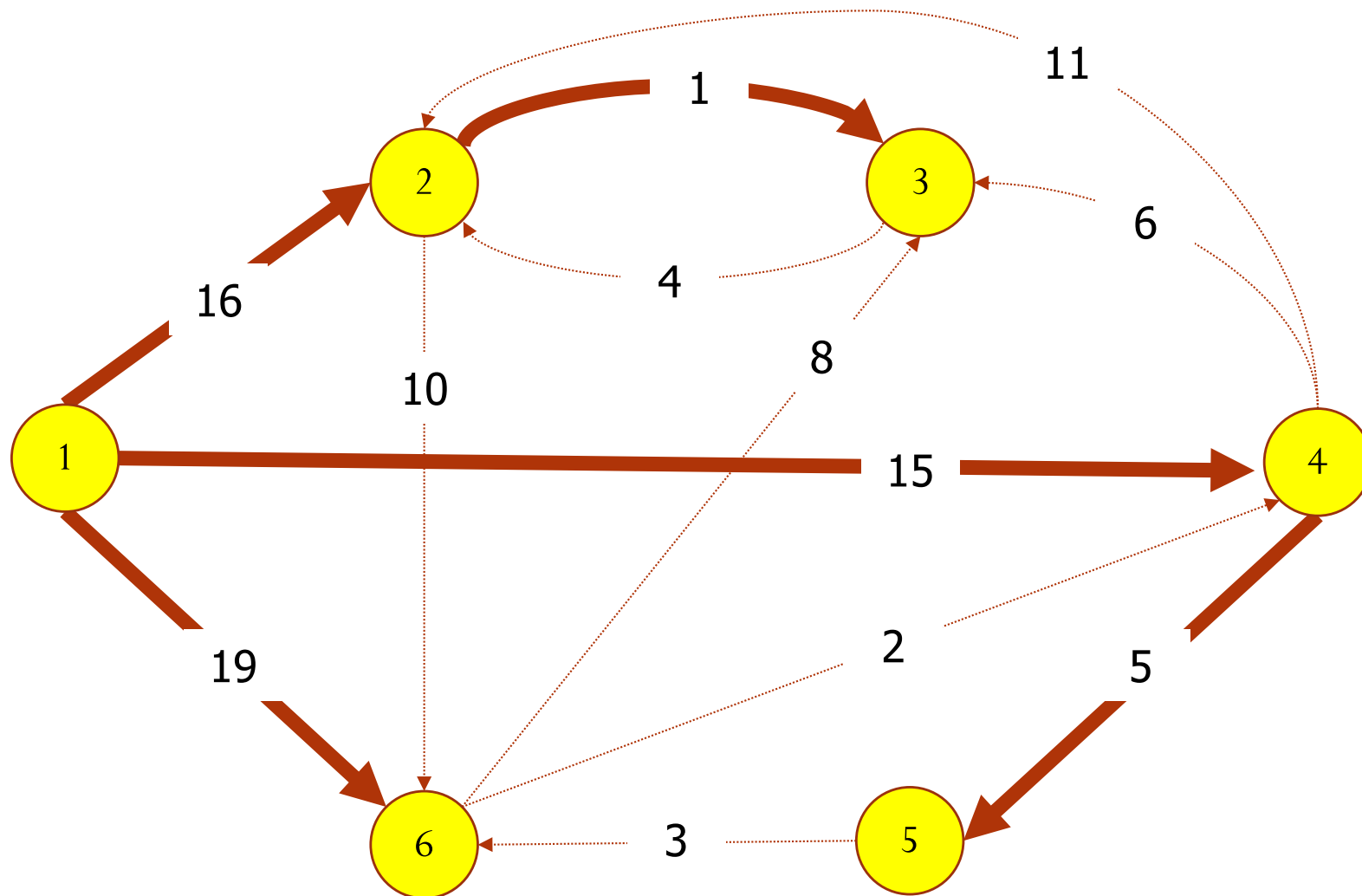
# Xây dựng hệ thống dẫn nước



# Xây dựng hệ thống dẫn nước



# Xây dựng hệ thống dẫn nước



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Pha co
  - Gọi đồ thị gốc là  $G_0$ ,  $t = 0$
  - Lặp
    - **Xây dựng đồ thị xấp xỉ  $H_t$  từ  $G_t$**
    - Nếu  $H_t$  không chứa chu trình => **thoát vòng lặp chuyển sang pha giãn**
    - **Ngược lại co  $G_t$  thành  $G_{t+1}$**
    - $t = t + 1$
- **Pha giãn**

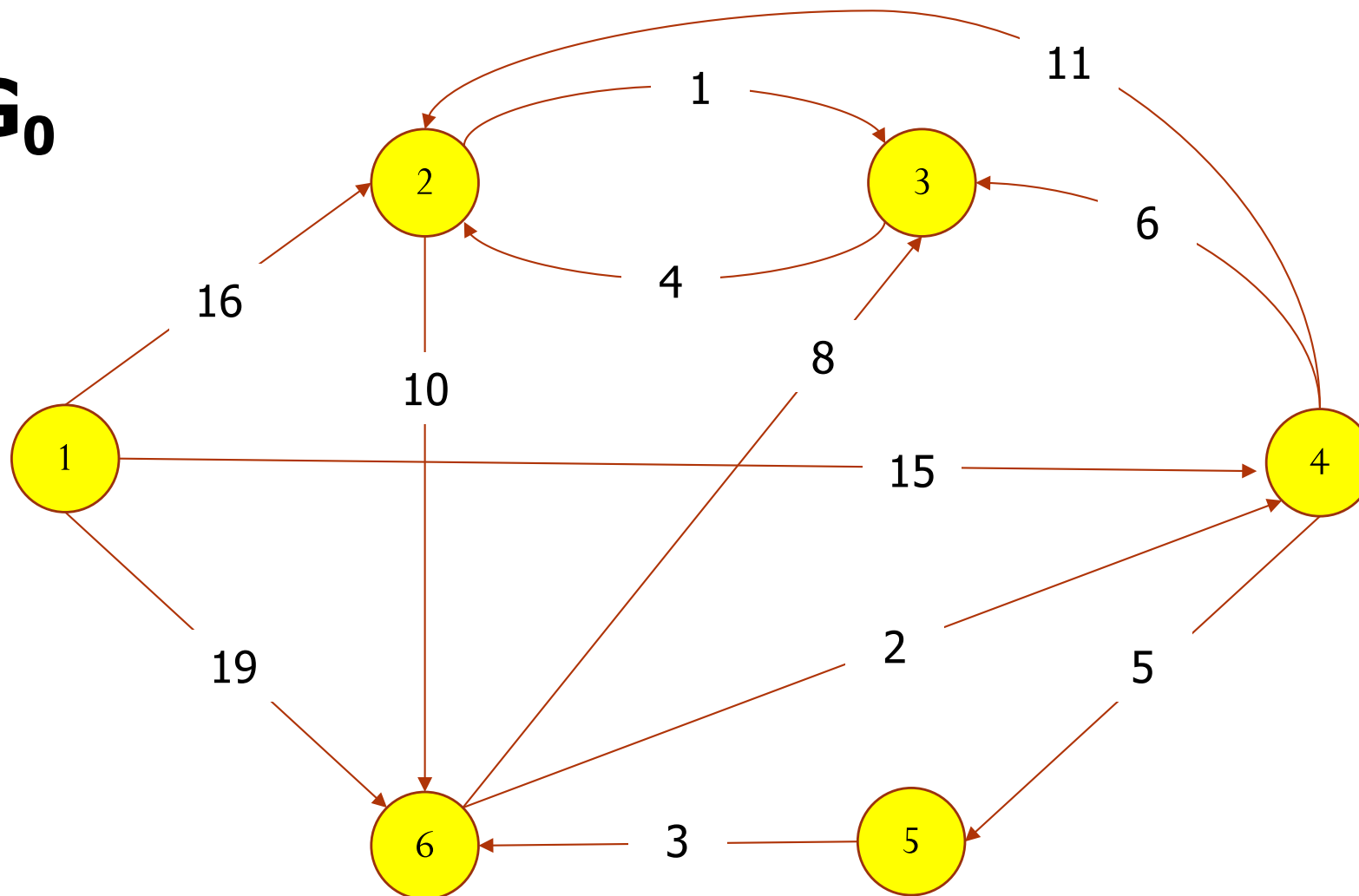
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Xây dựng đồ thị xấp xỉ  $H_t$  từ  $G_t$ 
  - Trừ gốc ra, với mỗi đỉnh còn lại **giữ lại 1 cung đi đến nó có trọng số nhỏ nhất** (bỏ các cung khác đi).
- Bài tập:
  - Bước lặp 0
    - Xây dựng đồ thị  $H_0$  từ  $G_0$

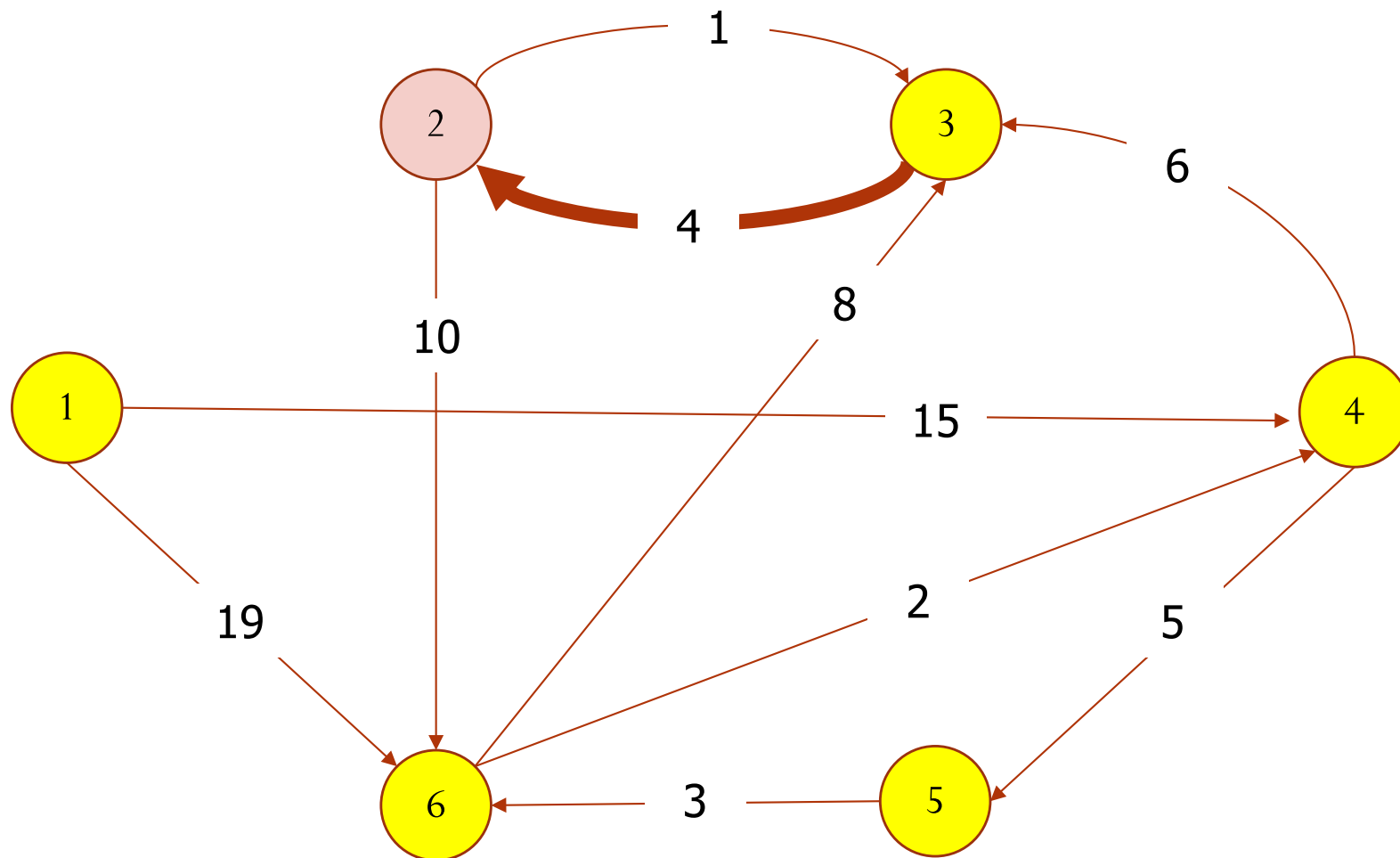


# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

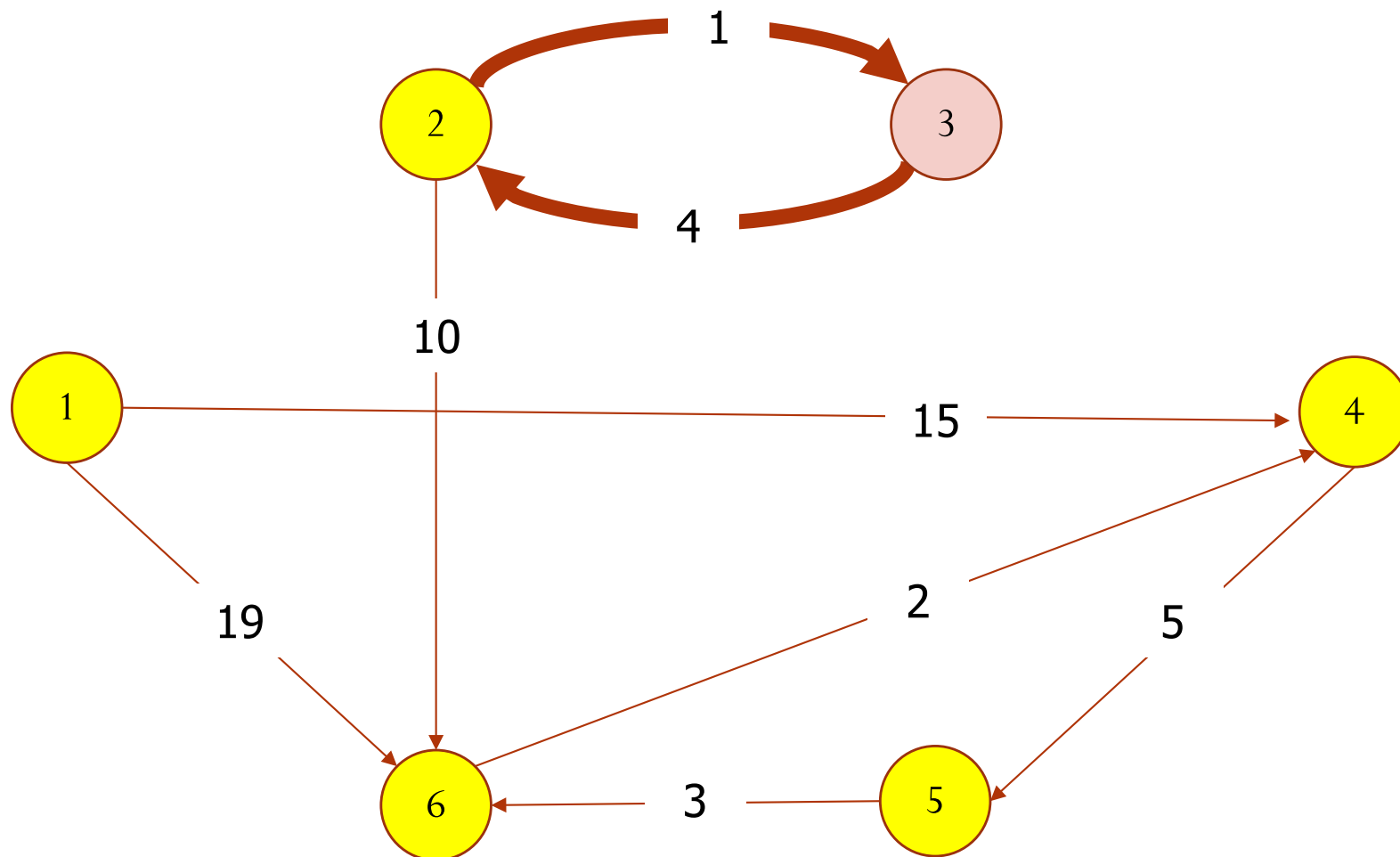
**G<sub>0</sub>**



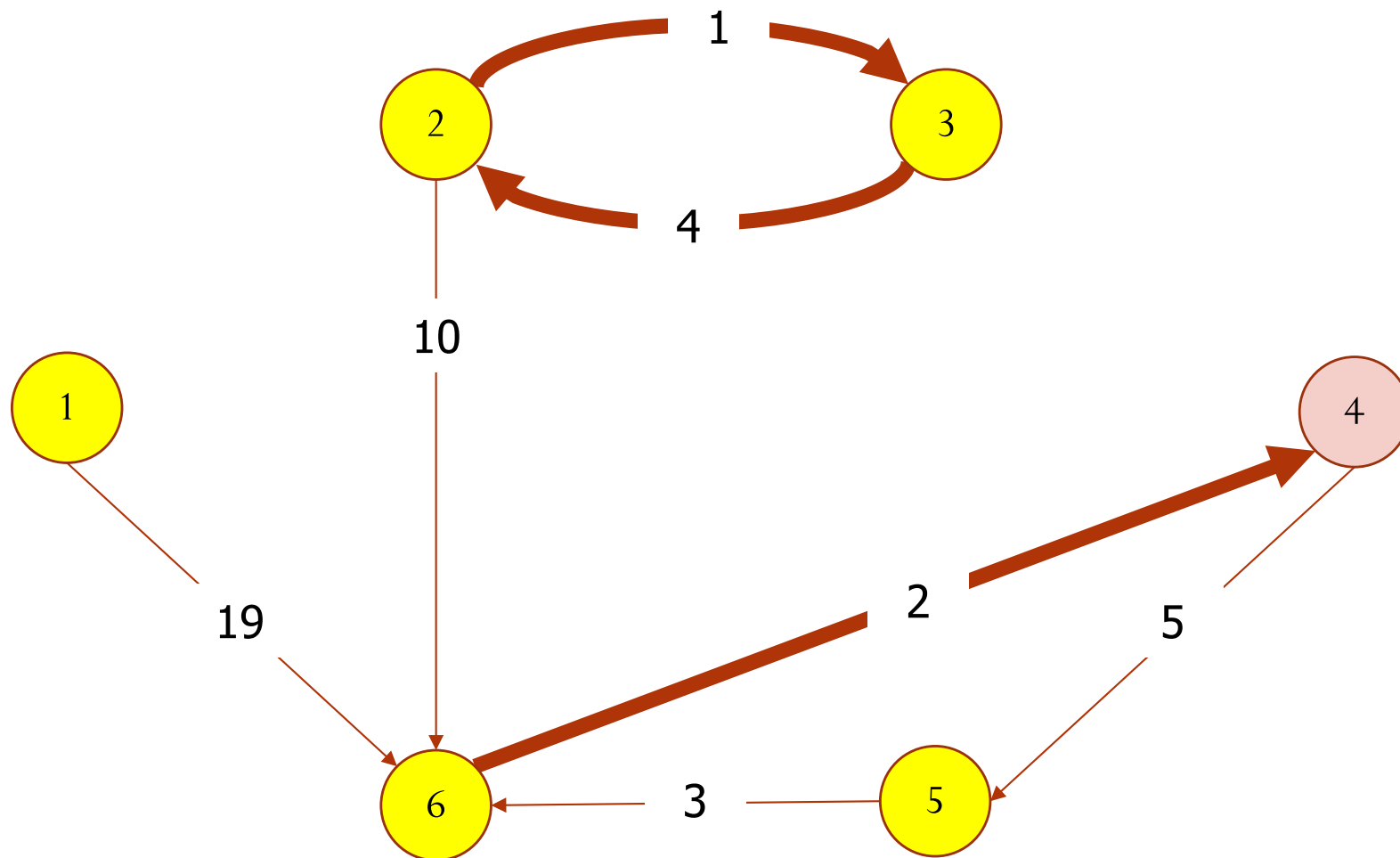
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds



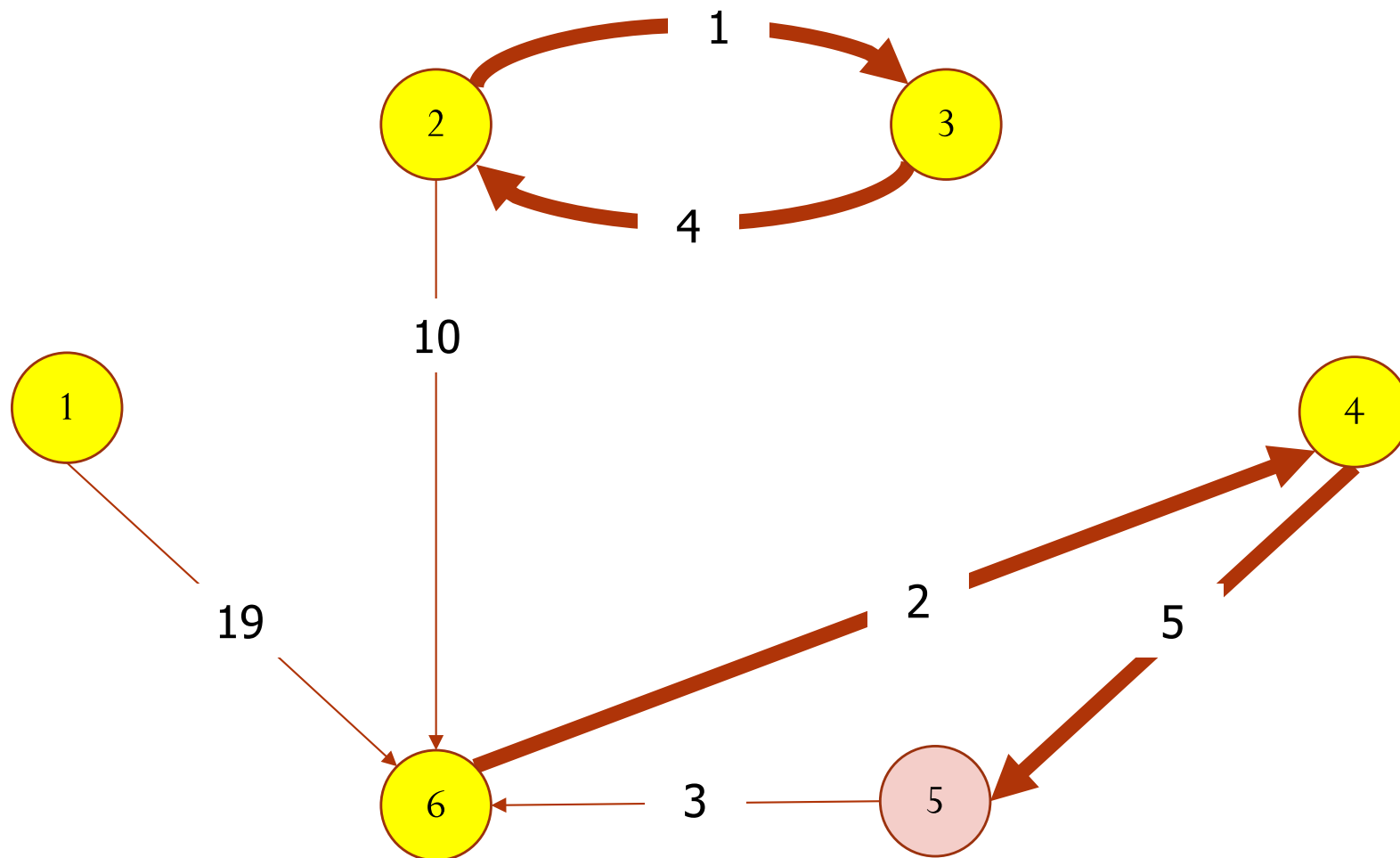
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

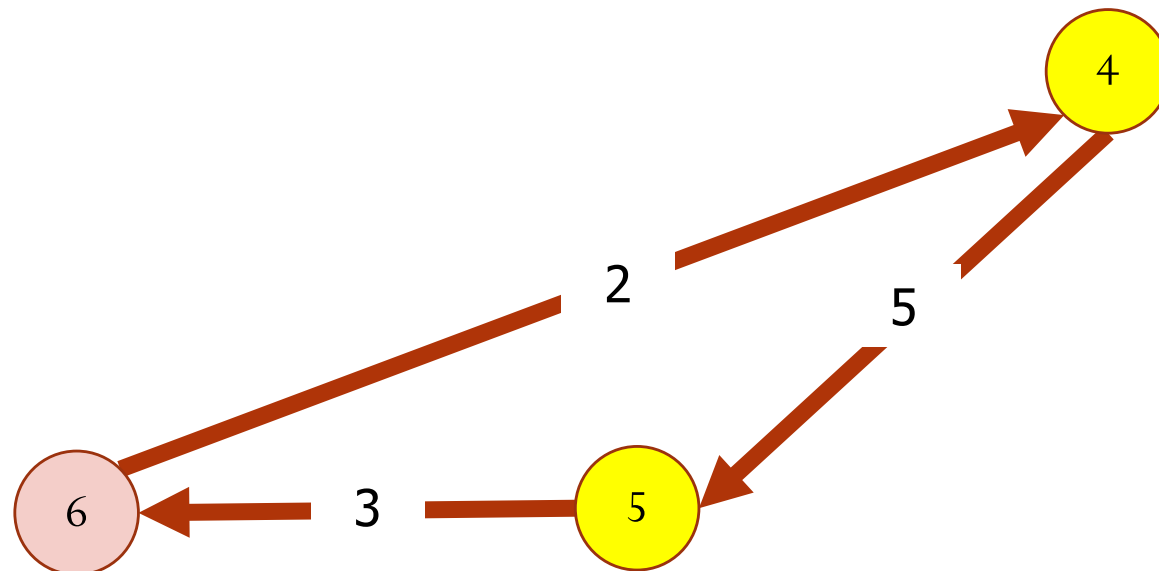
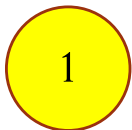
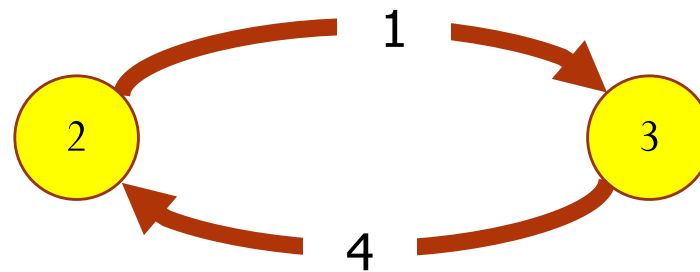


# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds



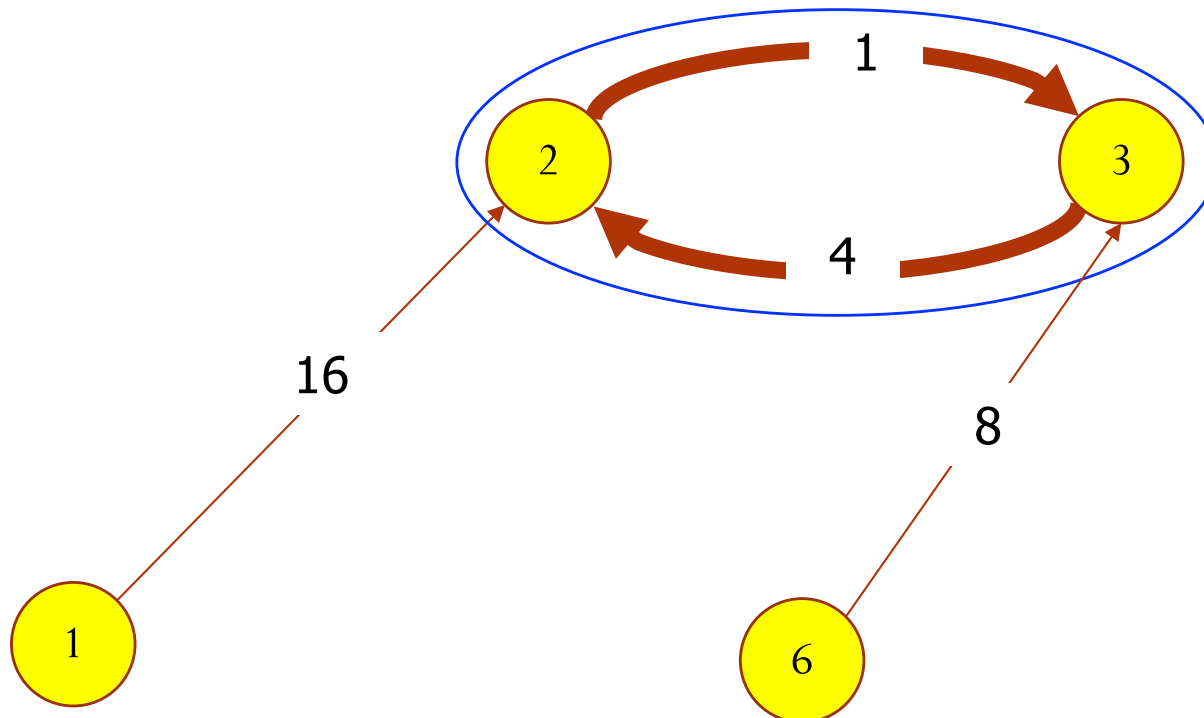
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**H<sub>0</sub>**



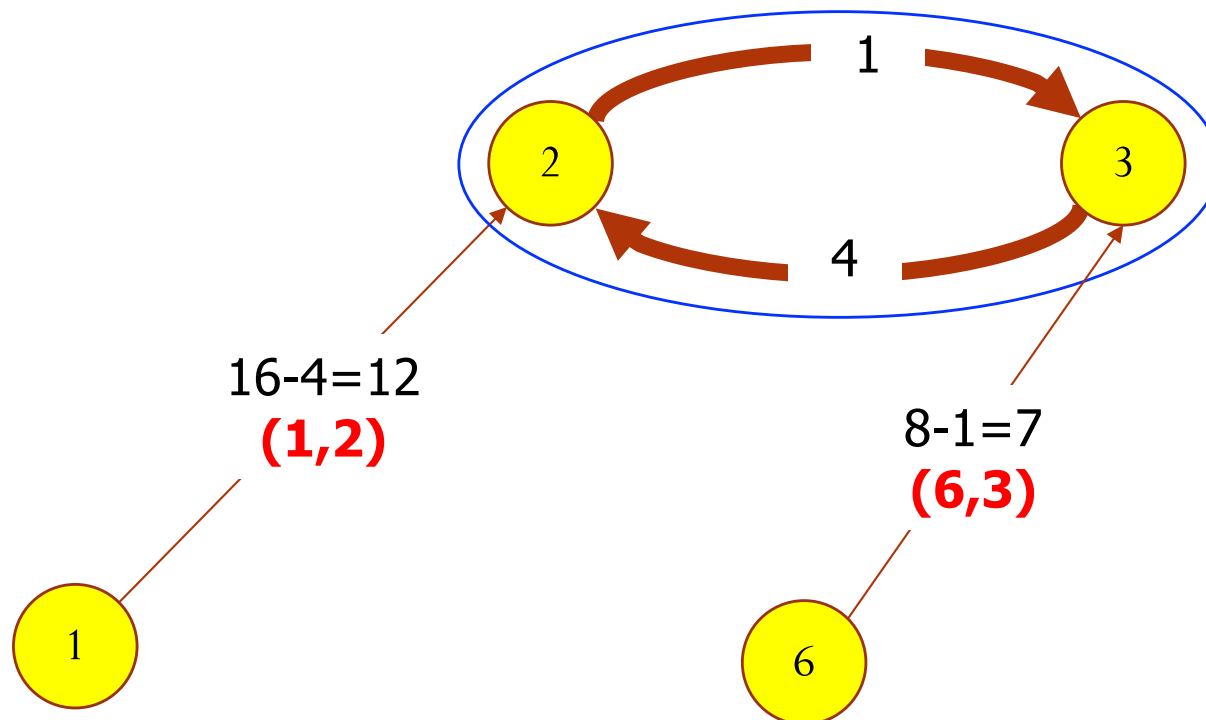
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Co đồ thị  $G_t$  thành  $G_{t+1}$ 
  - Gom các đỉnh trong chu trình thành đỉnh mới
  - Điều chỉnh trọng số của các cung có liên quan (cung từ ngoài đi đến 1 đỉnh trong chu trình)



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Co đồ thị  $G_t$  thành  $G_{t+1}$ 
  - Gom các đỉnh trong chu trình thành đỉnh mới
  - Điều chỉnh trọng số của các cung có liên quan (cung từ ngoài đi đến 1 đỉnh trong chu trình)

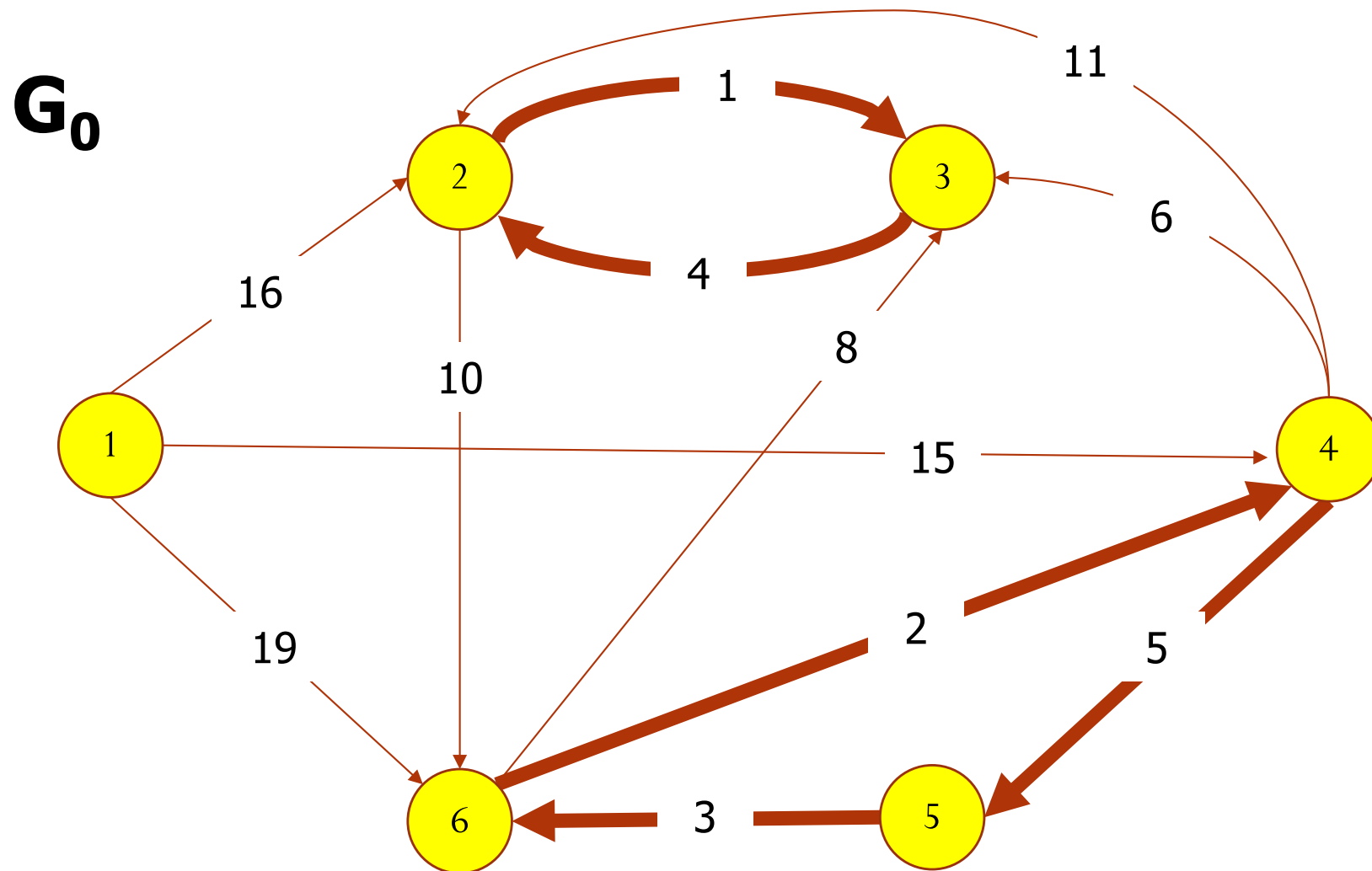




# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

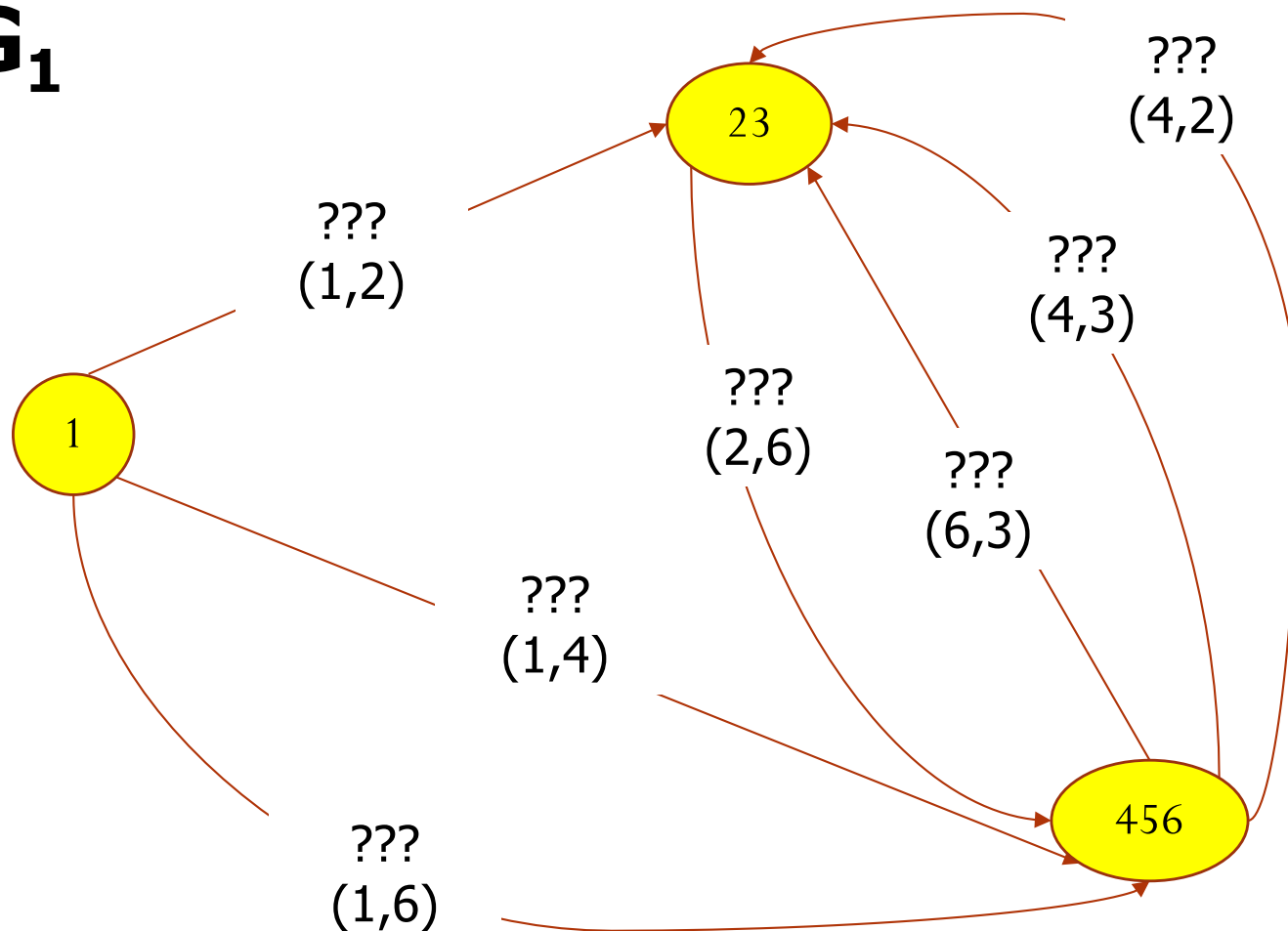
- Bài tập:
  - Co đồ thị  $G_0$  thành  $G_1$  (theo 2 chu trình tìm được ở  $H_0$ )

# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds



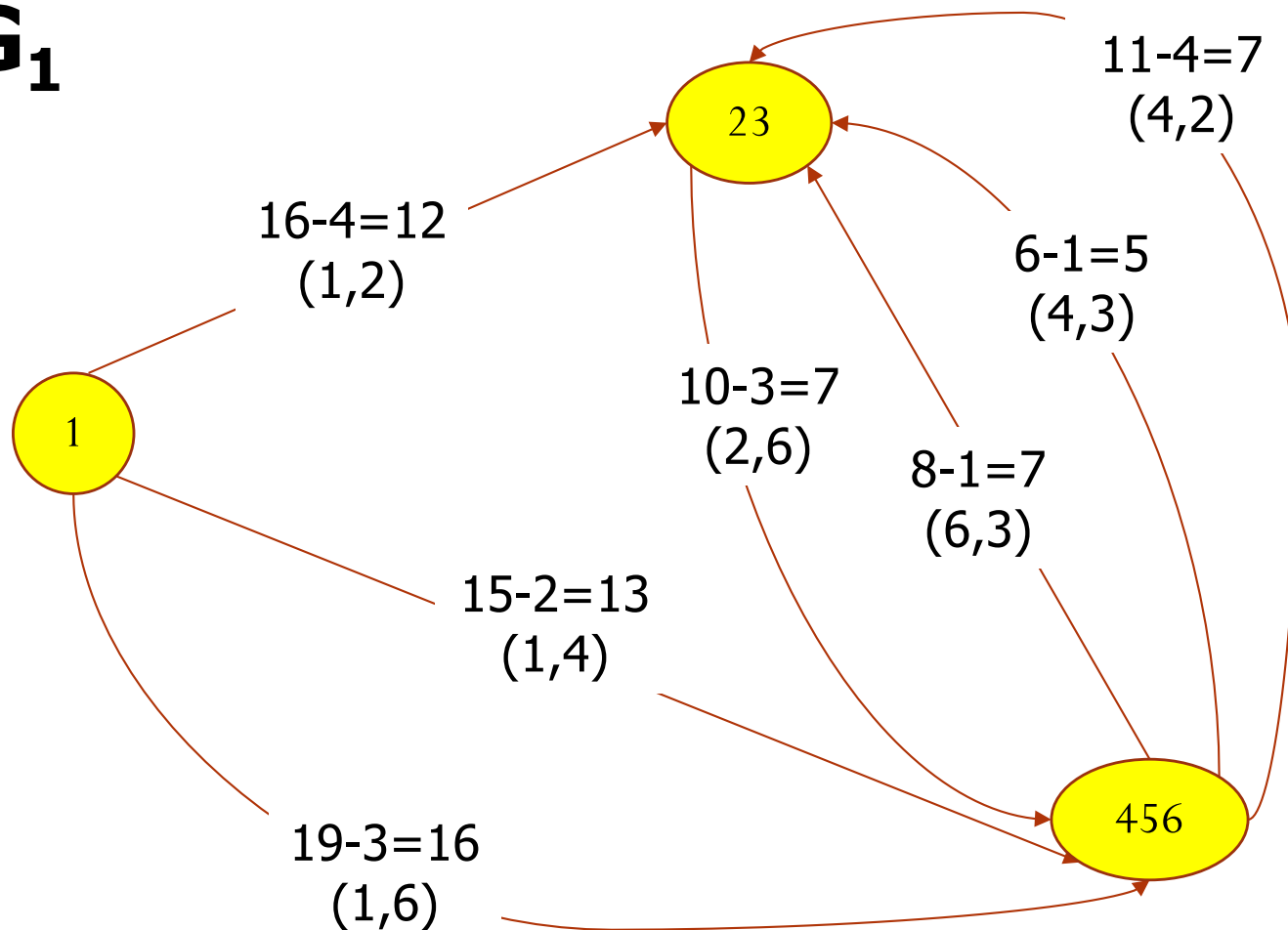
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>1</sub>**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>1</sub>**

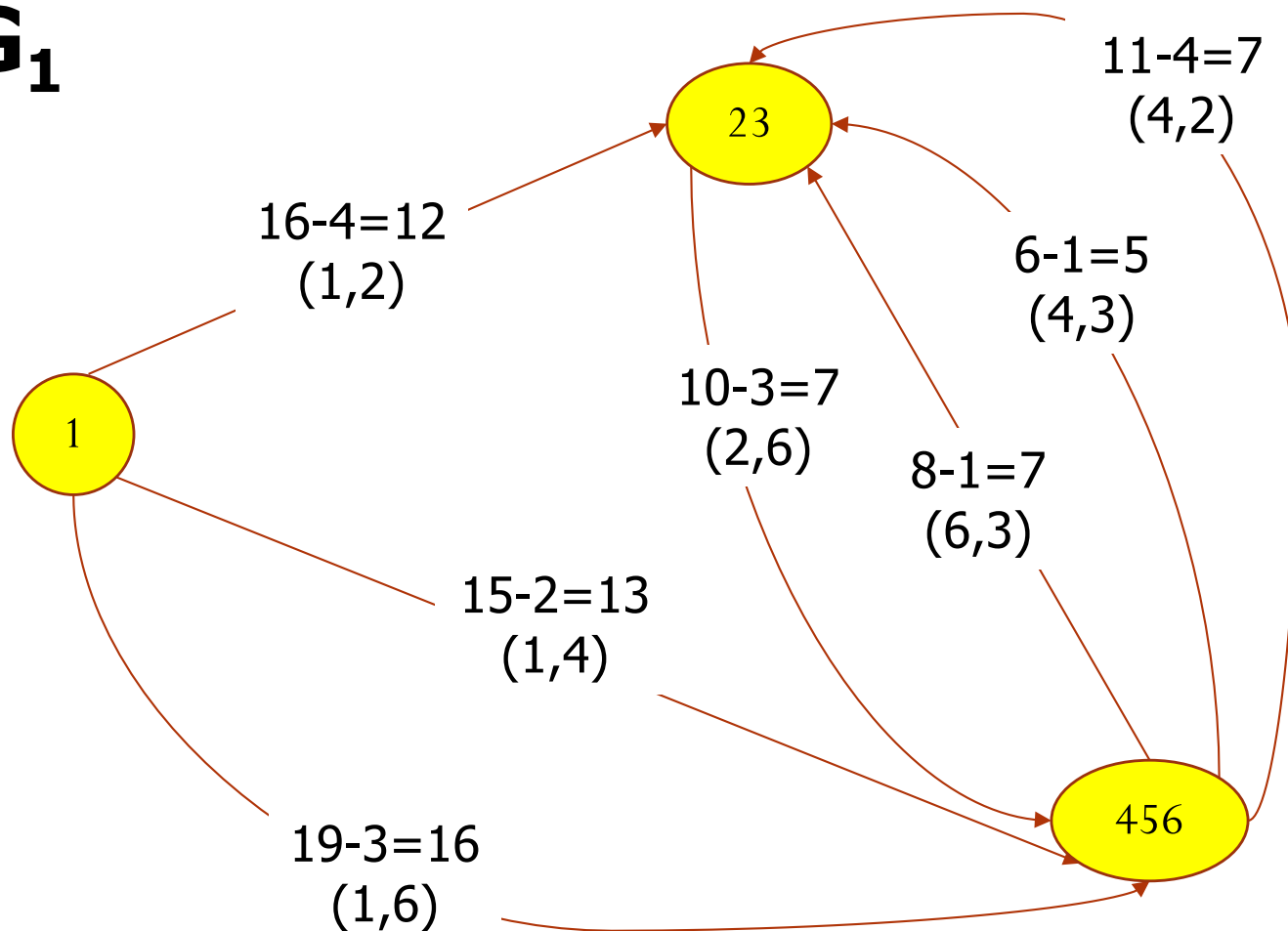


# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Bước lặp 1
  - Xây dựng đồ thị xấp xỉ  $H_1$

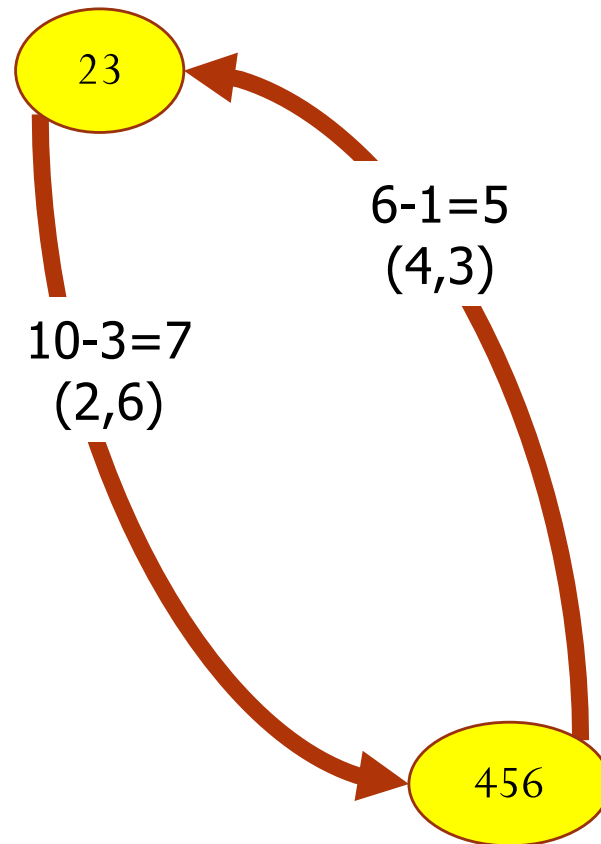
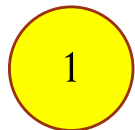
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>1</sub>**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**H<sub>1</sub>**



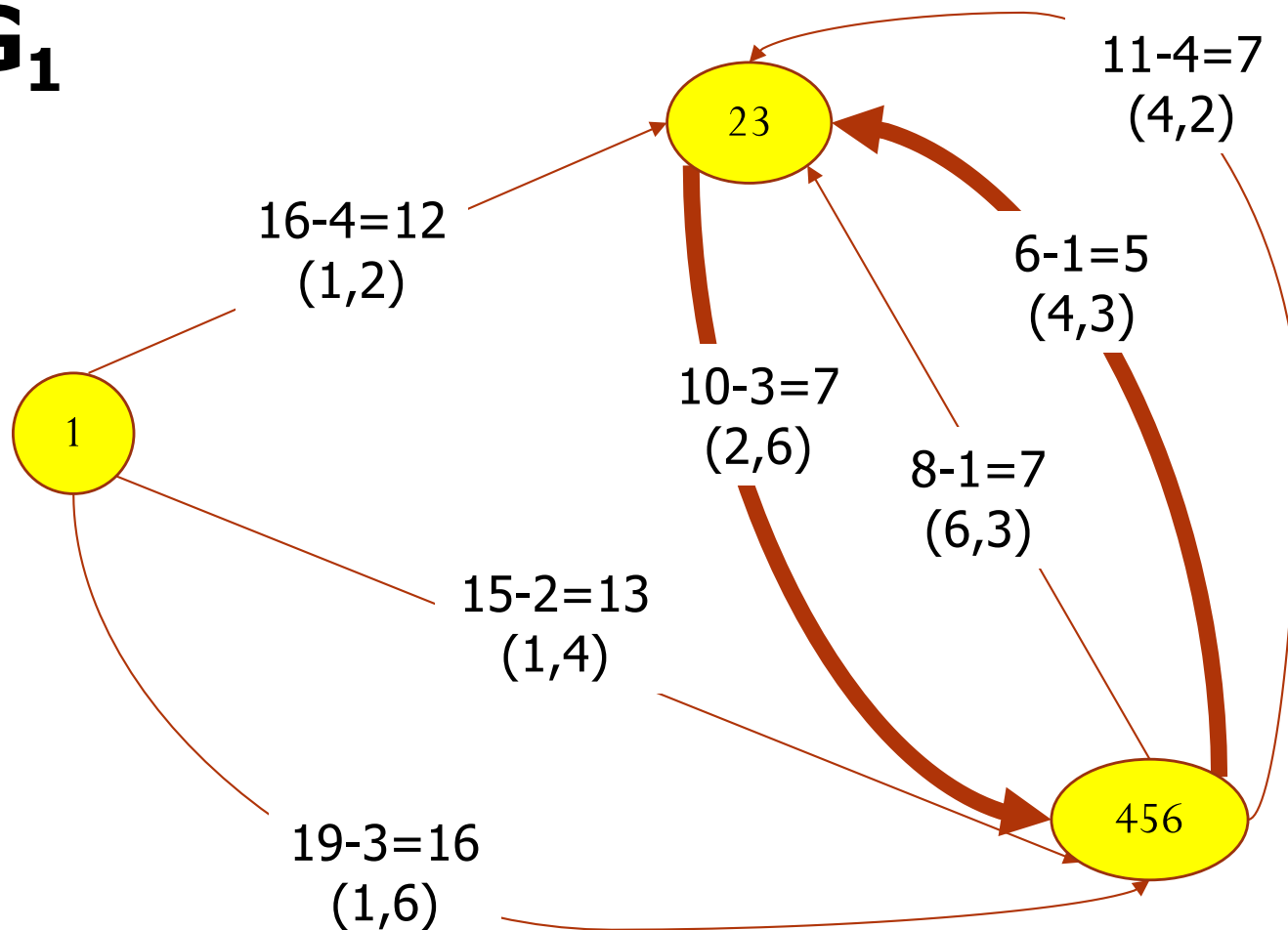
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Bài tập:
  - Co đồ thị  $G_1$  thành  $G_2$  (theo 1 chu trình tìm được ở  $H_1$ )



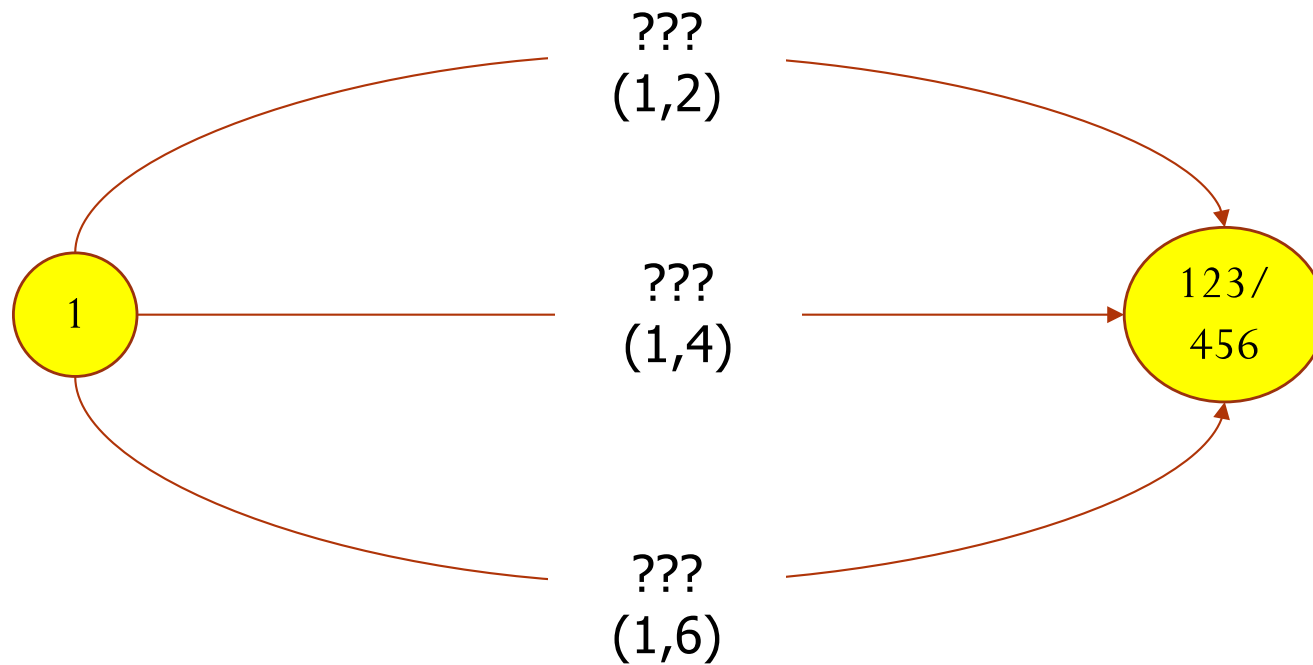
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>1</sub>**



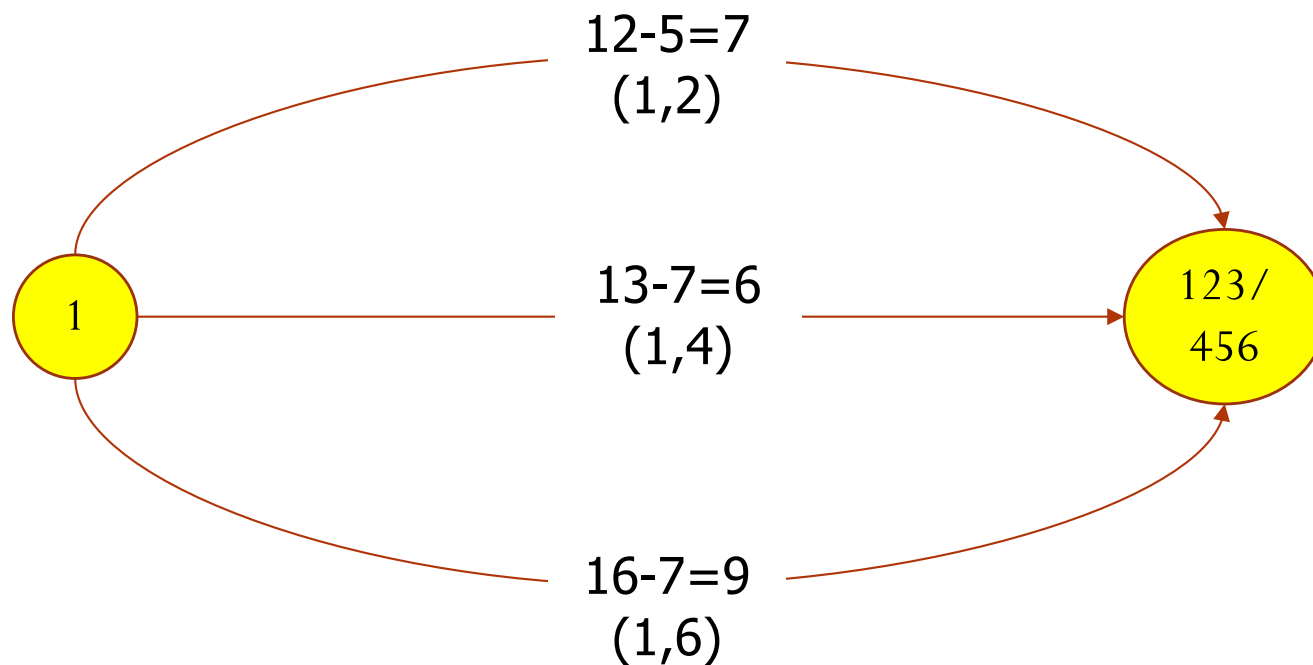
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>2</sub>**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>2</sub>**

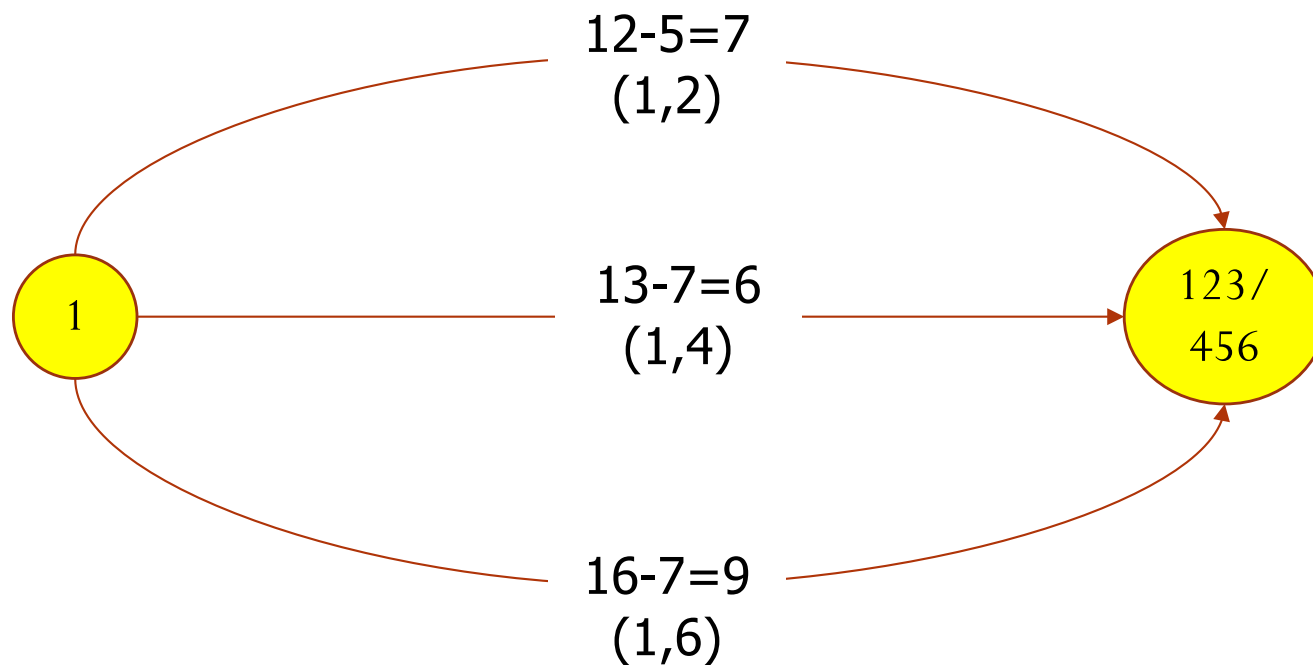


# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Bước lặp 2
  - Xây dựng đồ thị xấp xỉ  $H_2$

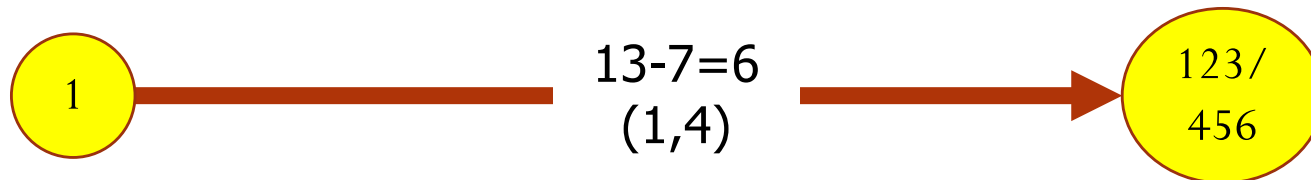
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**G<sub>2</sub>**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

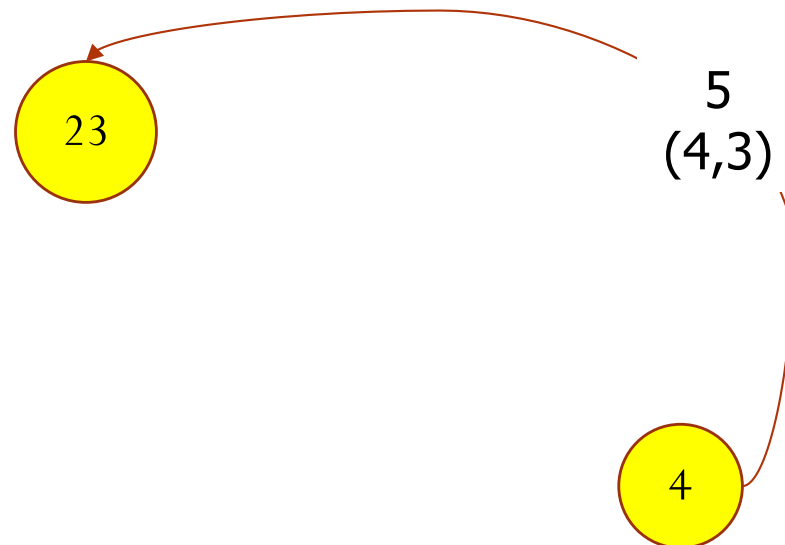
**H<sub>2</sub>**



**H<sub>2</sub> không chứa chu trình => thoát vòng lặp, chuyển sang pha giãn**

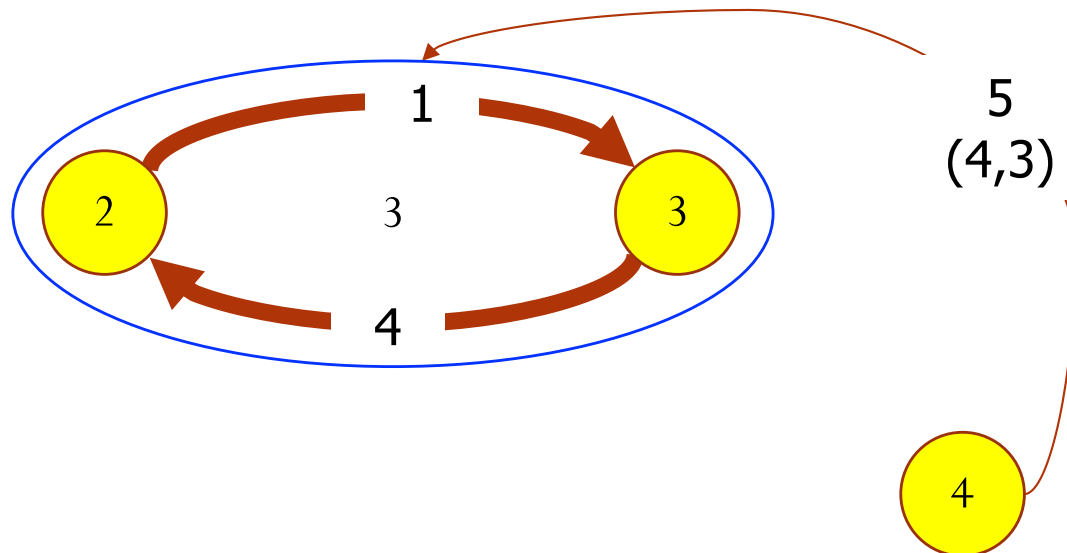
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co)  $\Rightarrow$  chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

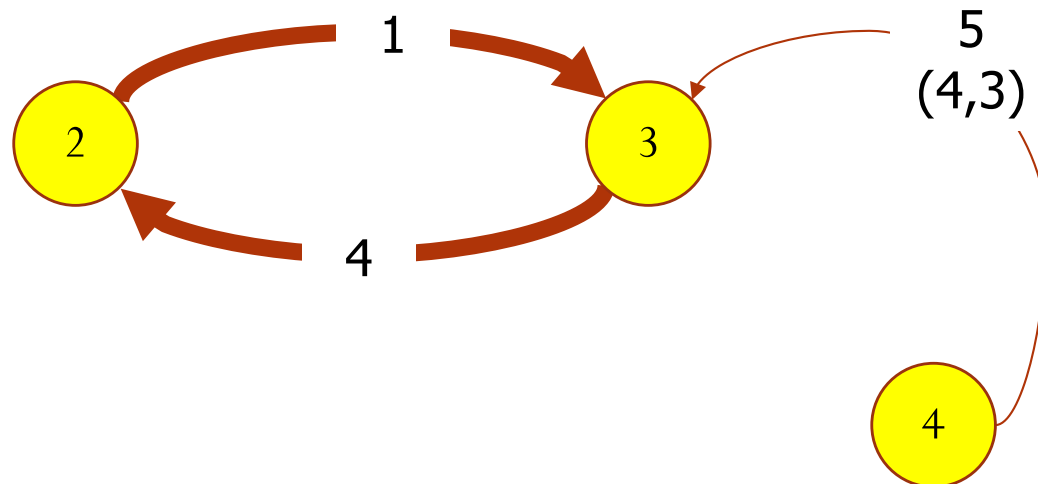
- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) => chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình





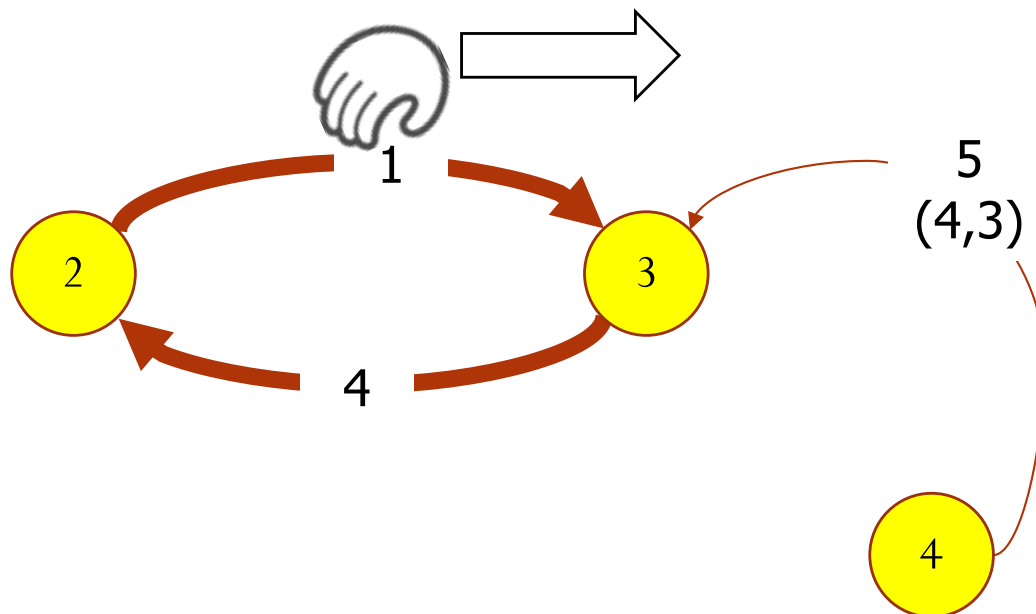
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co) => chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



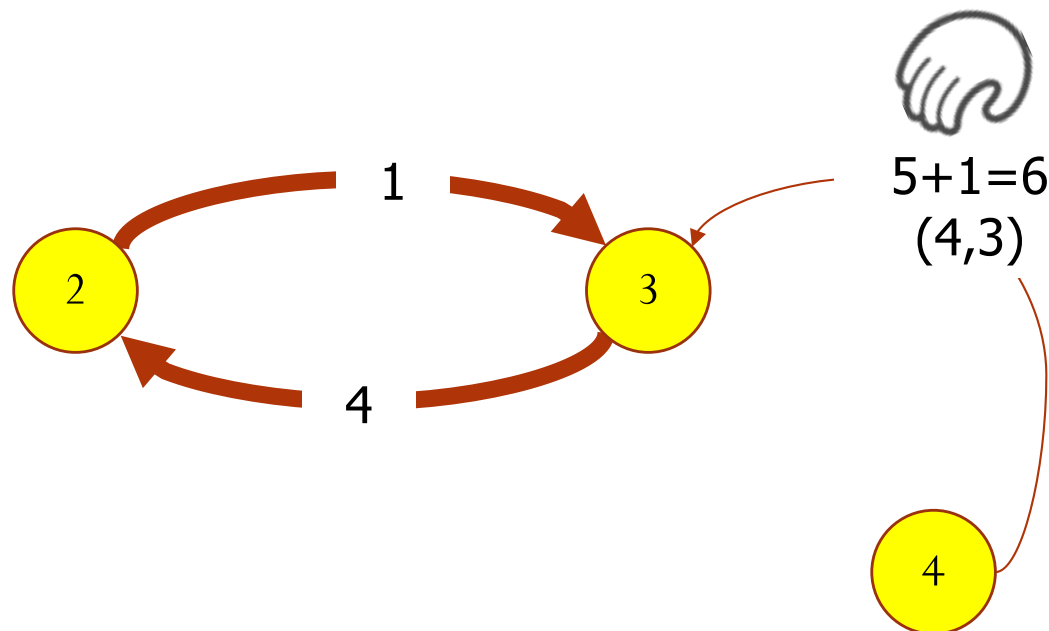
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co)  $\Rightarrow$  chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



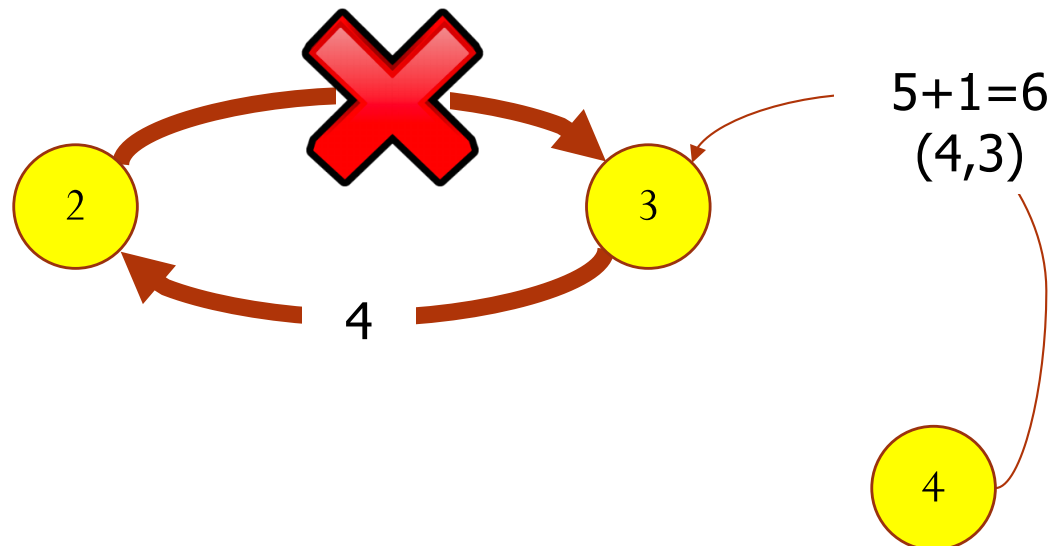
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co)  $\Rightarrow$  chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



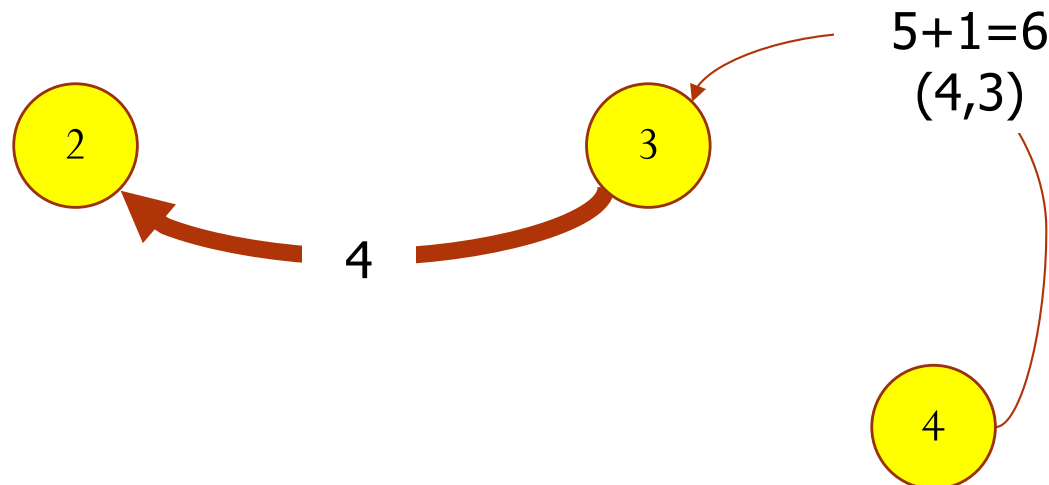
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co)  $\Rightarrow$  chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- **Giãn  $H_{t+1}$  thành cây khung của đồ thị  $G_t$** 
  - Mở đỉnh (được gom lại trong pha co)  $\Rightarrow$  chu trình
  - Điều chỉnh trọng số của cung đi đến chu trình
  - Xoá bỏ 1 cung trong chu trình



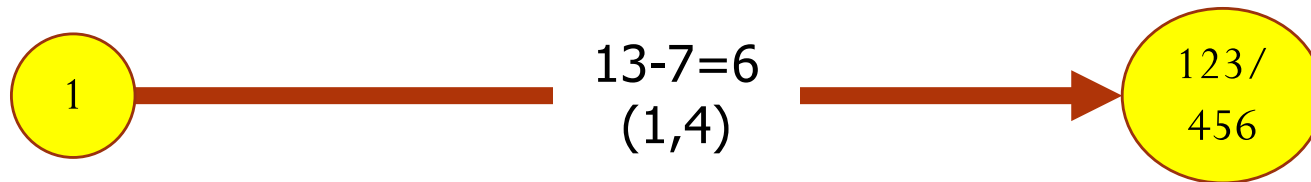
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

- Bài tập:
  - Giãn cây  $T_2 = H_2$  thành  $T_1$  (cây khung của  $G_1$ )
  - Giãn cây  $T_1$  thành  $T_0$  (cây khung của  $G_0$ ) = cây khung cần tìm

# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_2 = H_2$**        **$T_2 = H_2$  là cây khung của  $G_2$**

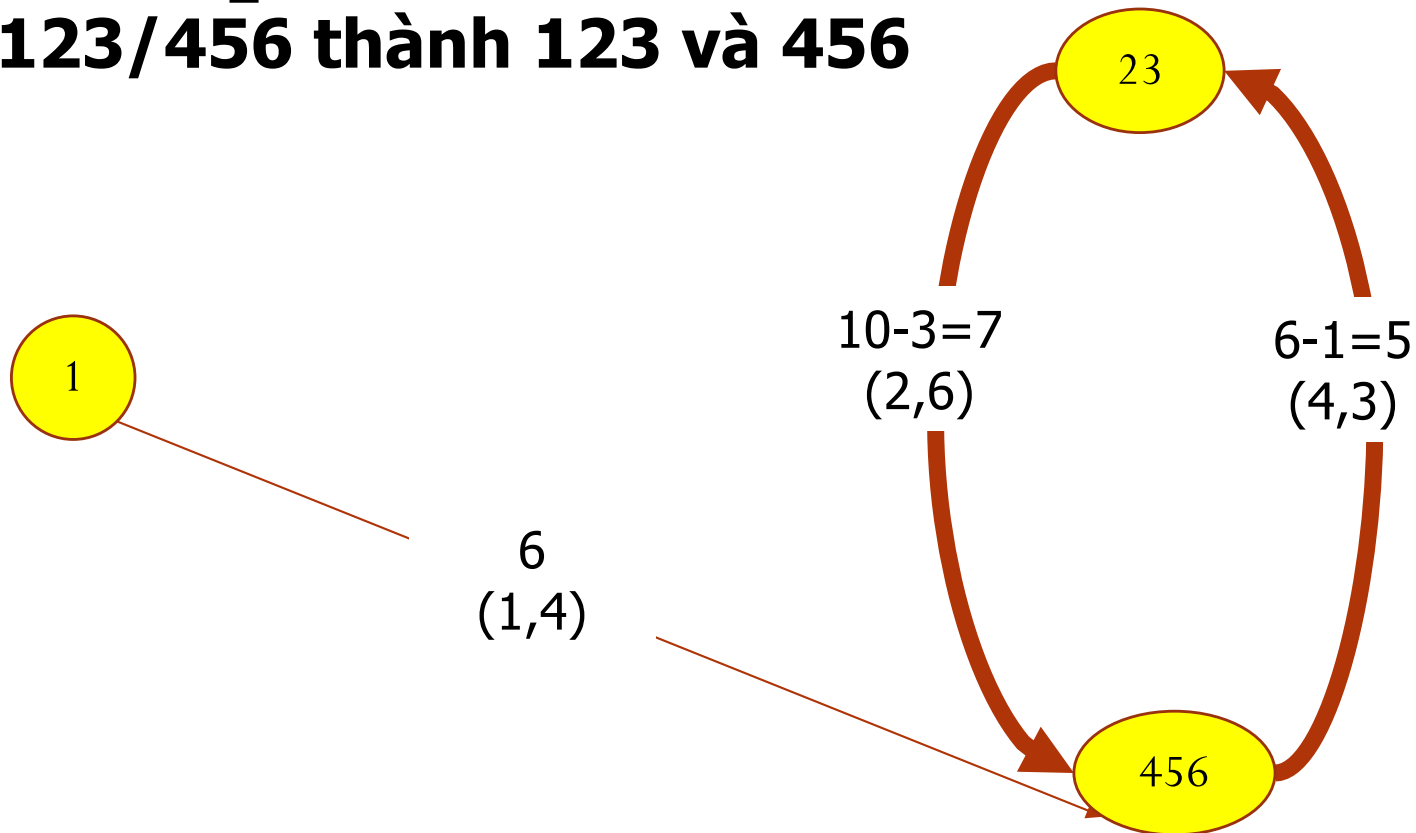
**Giãn  $T_2$  để có cây khung  $T_1$  của  $G_1$**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_2 \Rightarrow T_1$**

**Mở 123/456 thành 123 và 456**

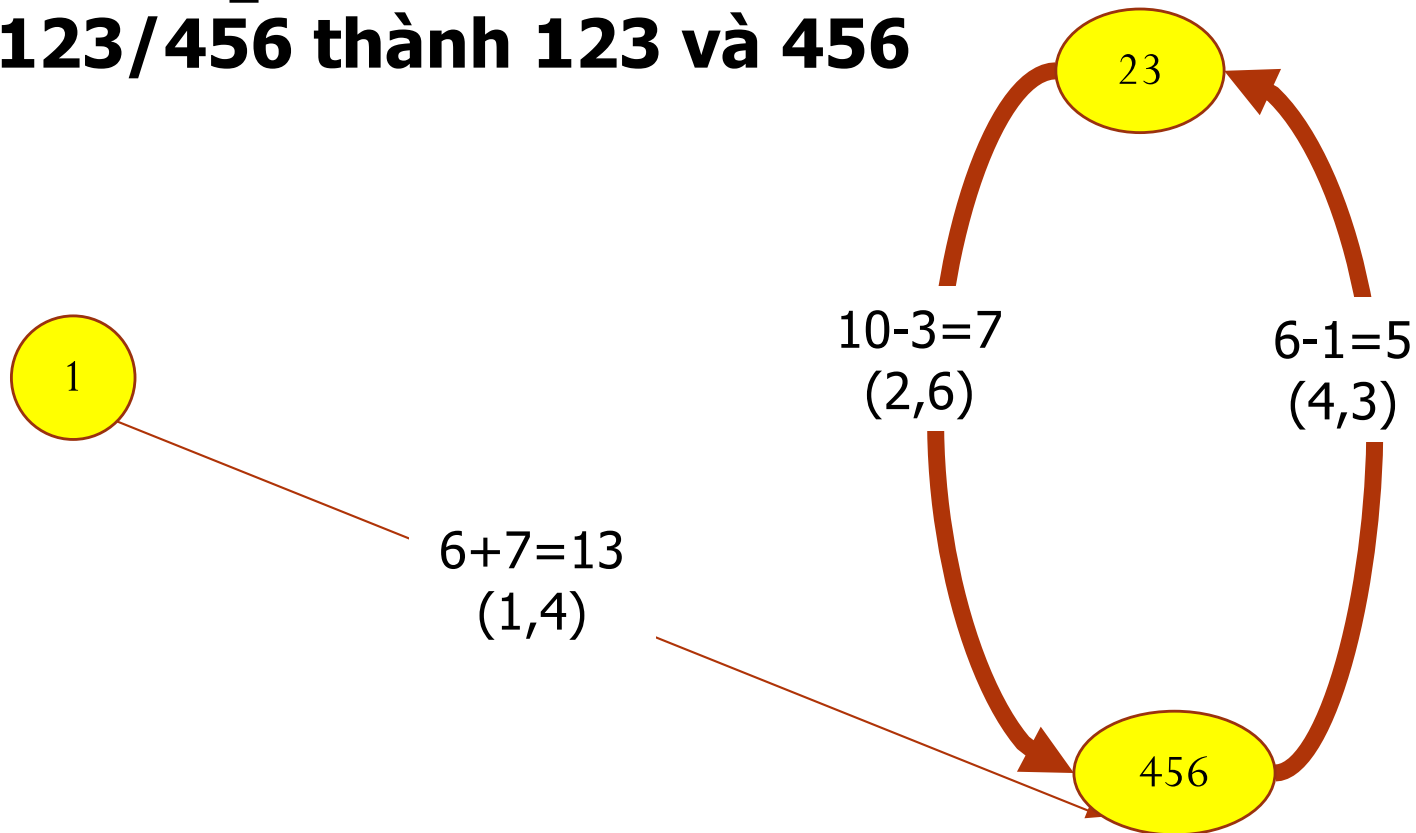




# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_2 \Rightarrow T_1$**

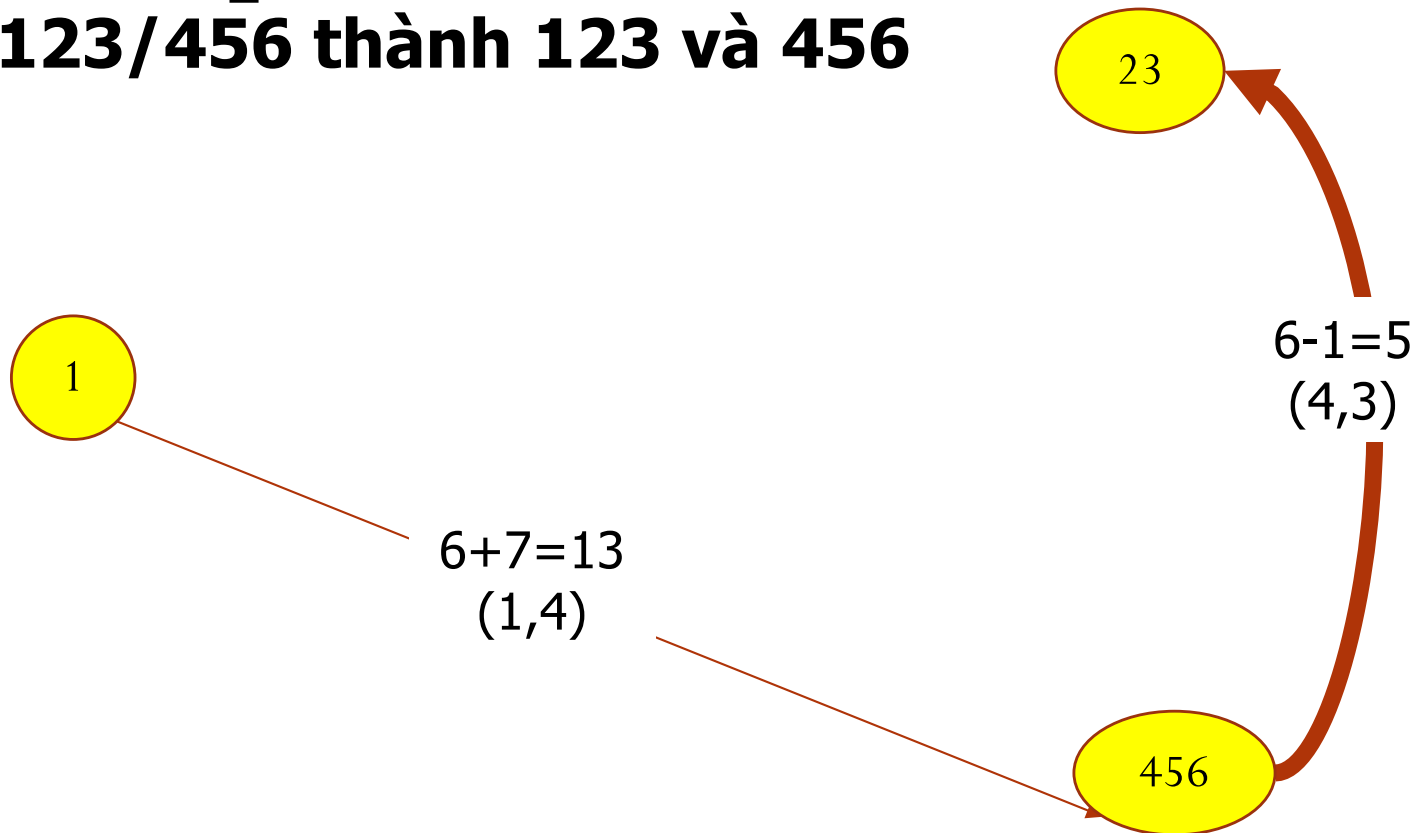
**Mở 123/456 thành 123 và 456**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

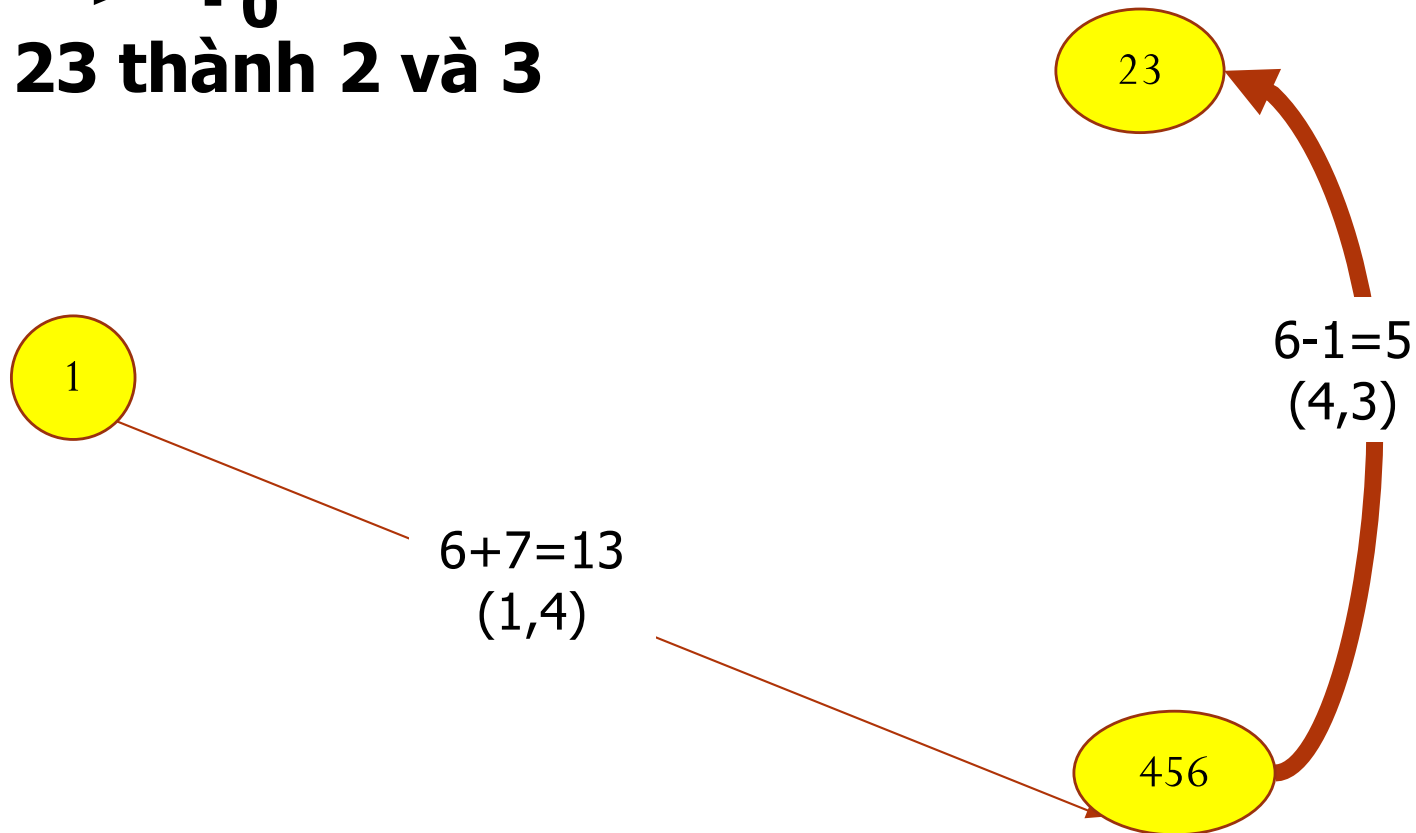
**$T_2 \Rightarrow T_1$**

**Mở 123/456 thành 123 và 456**



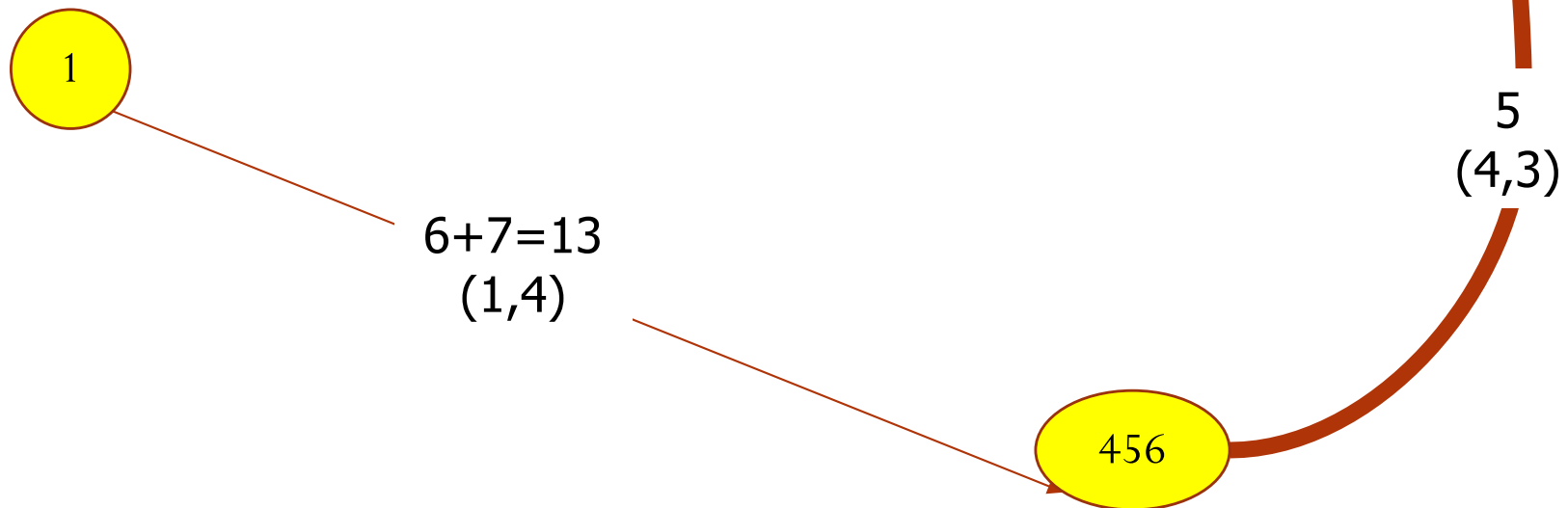
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_1 \Rightarrow T_0$**   
**Mở 23 thành 2 và 3**



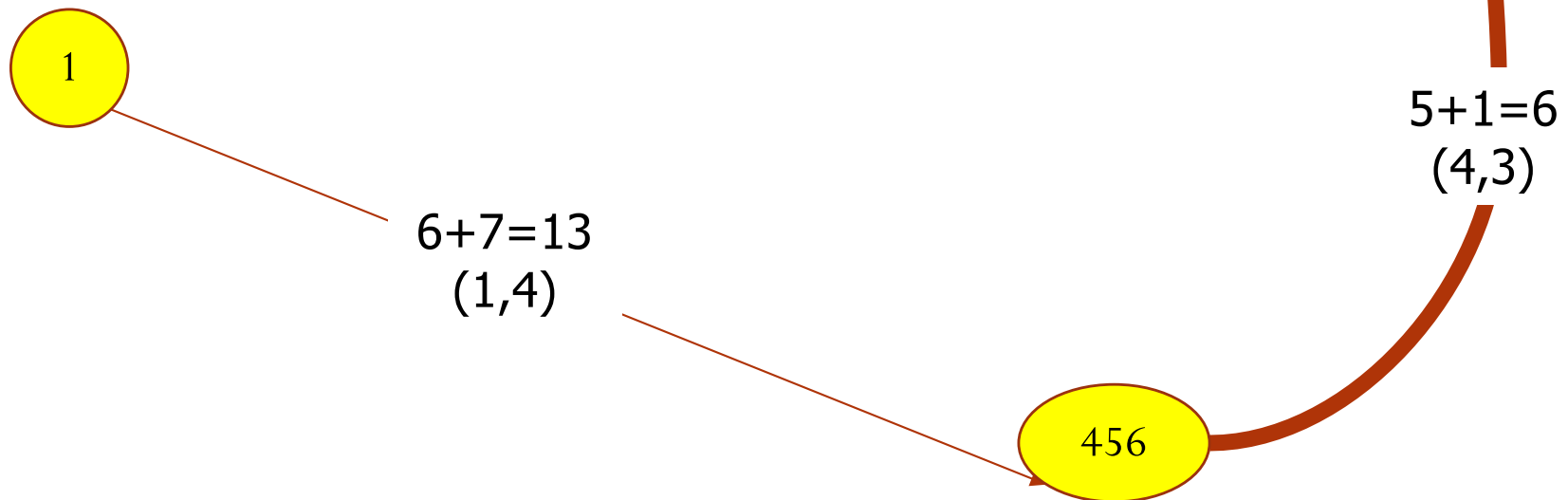
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_1 \Rightarrow T_0$**   
**Mở 23 thành 2 và 3**



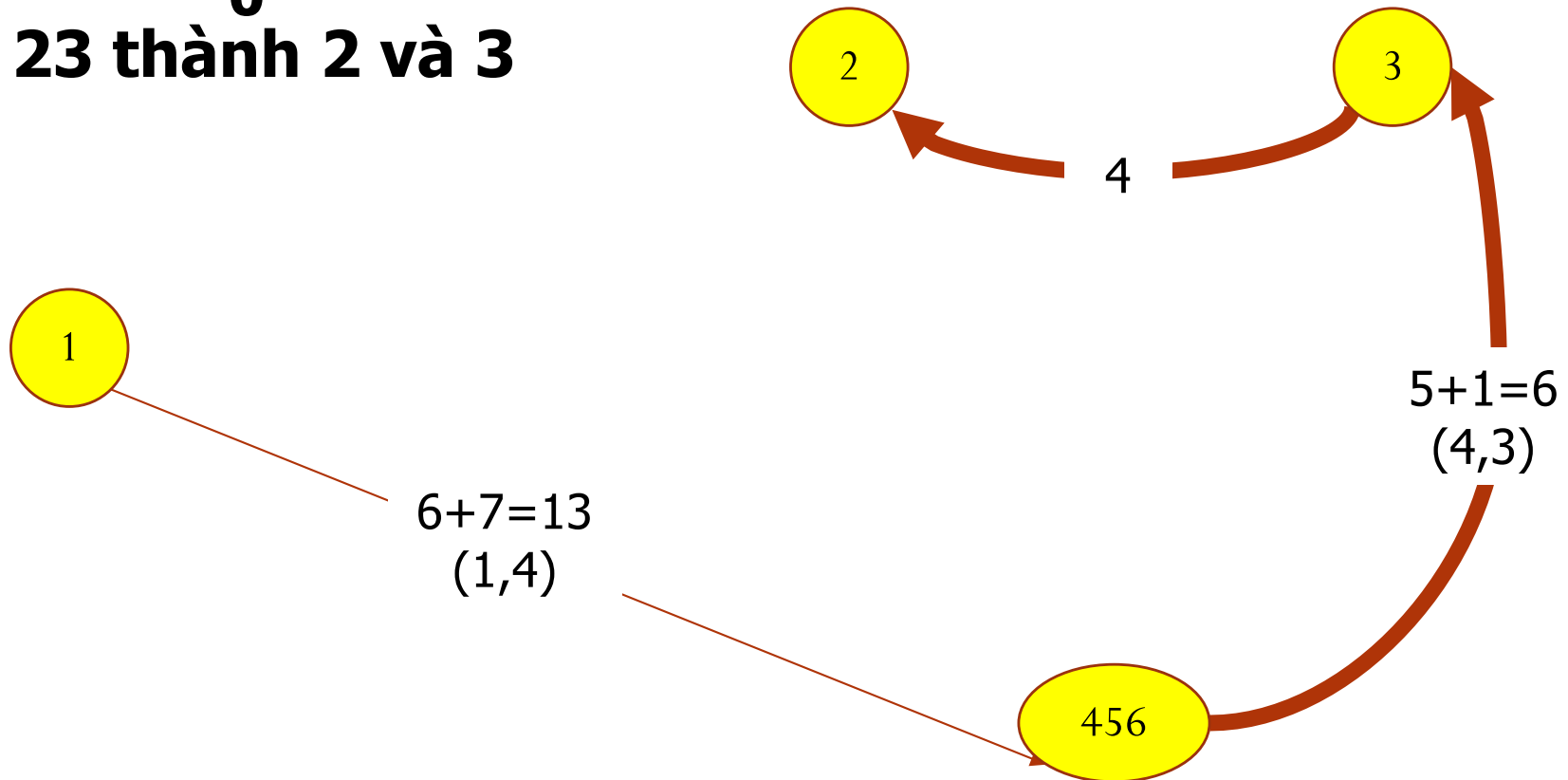
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_1 \Rightarrow T_0$**   
**Mở 23 thành 2 và 3**



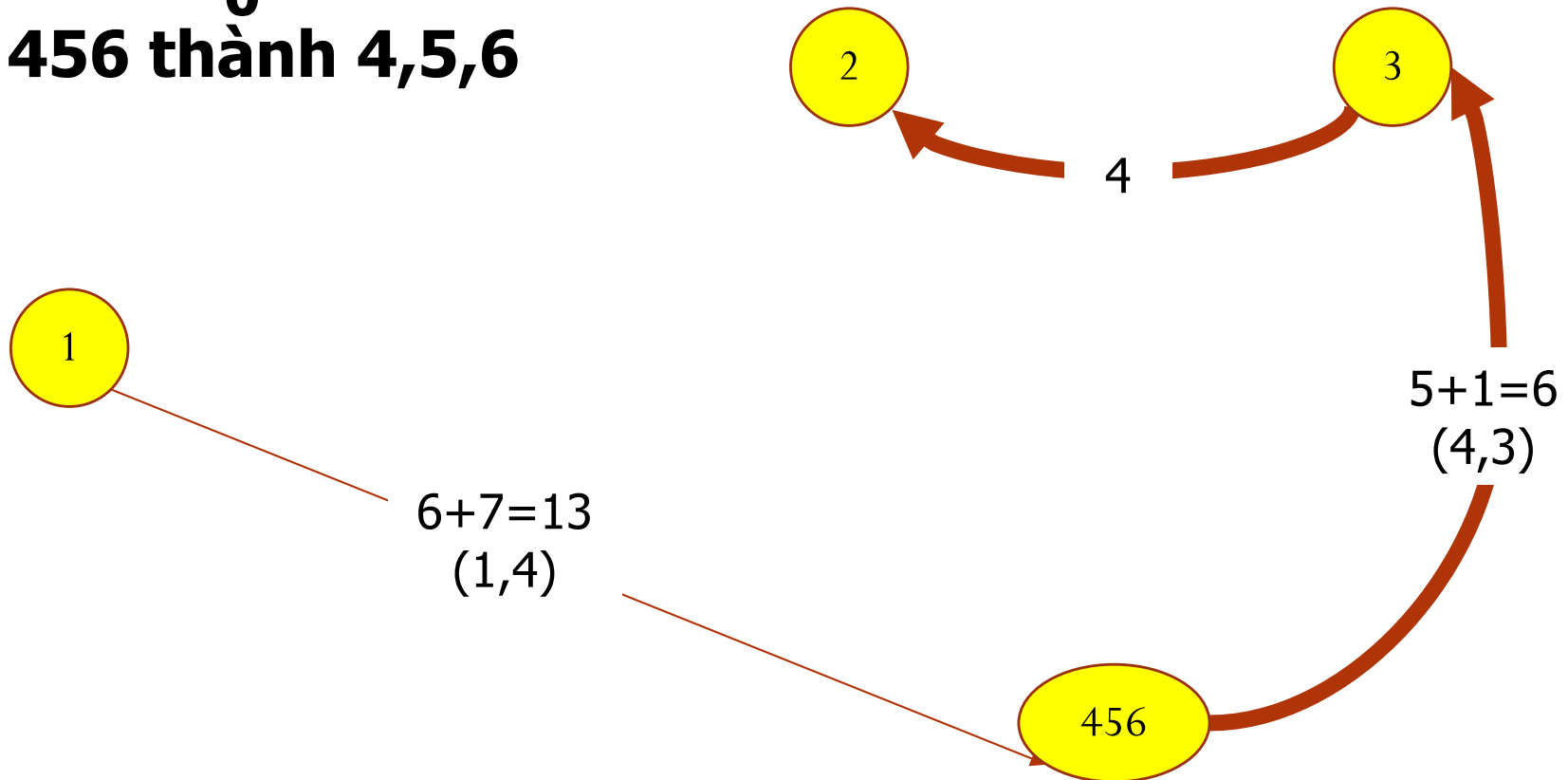
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_1 \Rightarrow T_0$**   
**Mở 23 thành 2 và 3**



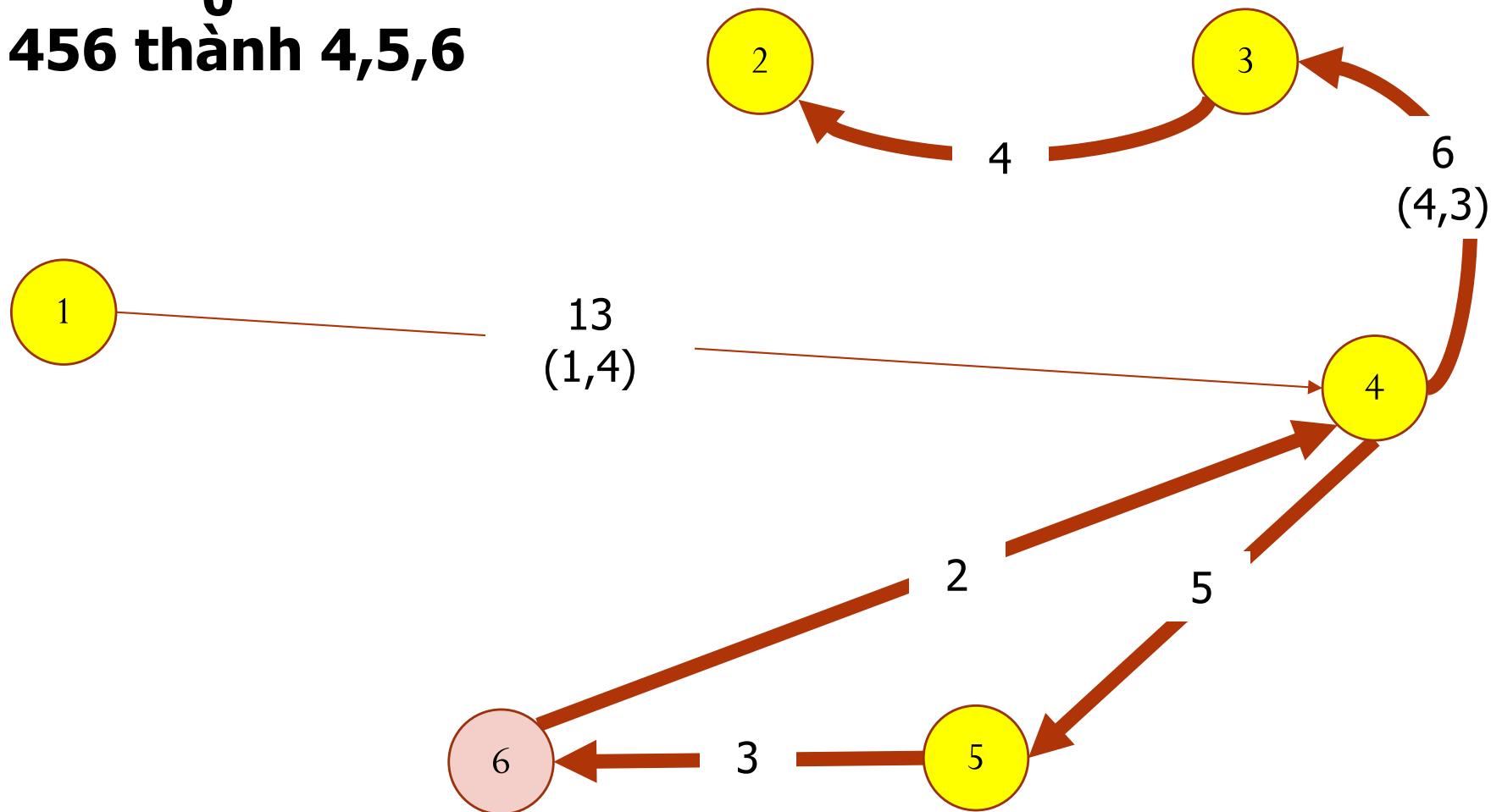
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_1 \Rightarrow T_0$**   
**Mở 456 thành 4,5,6**



# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

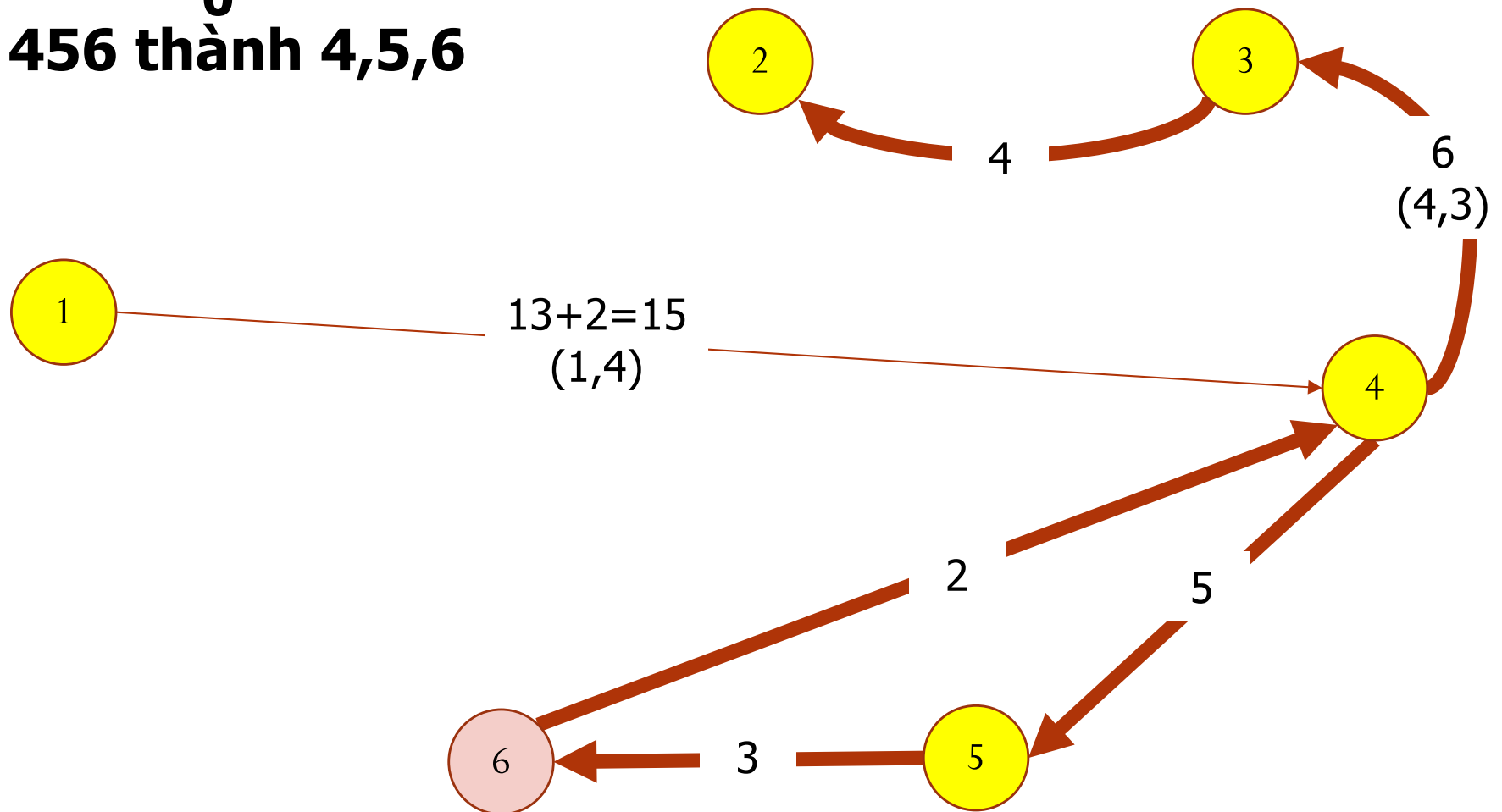
$T_1 \Rightarrow T_0$   
Mở 456 thành 4,5,6





# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

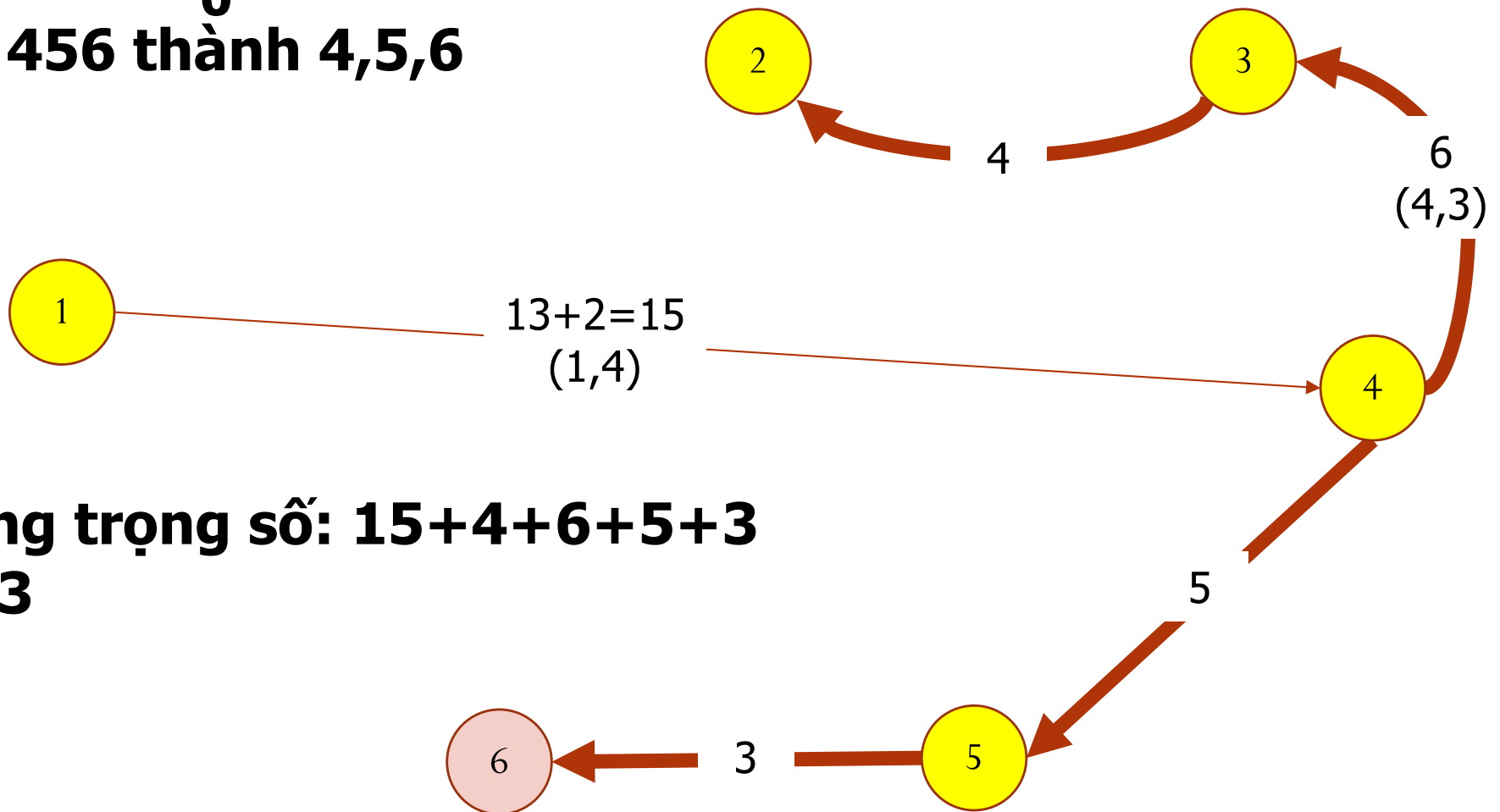
$T_1 \Rightarrow T_0$   
Mở 456 thành 4,5,6



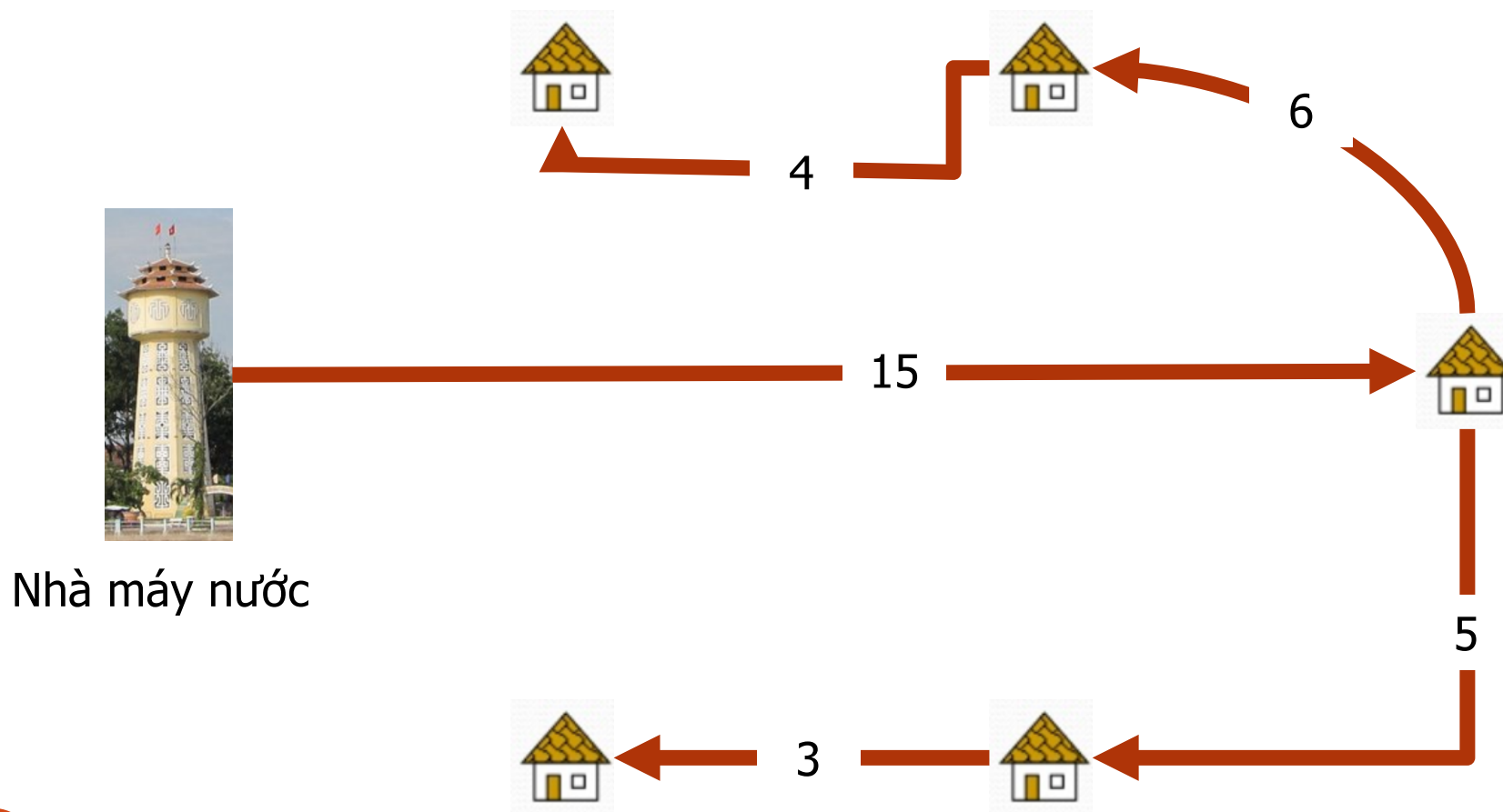
# Giải thuật Chu-Liu/Edmonds

**$T_1 \Rightarrow T_0$**

**Mở 456 thành 4,5,6**



# Xây dựng hệ thống dẫn nước



# Bài tập

- Cho đồ thị
  1. Áp dụng GT Chu-Liu/Edmonds tìm cây khung có hướng có trọng lượng nhỏ nhất. Vẽ cây KQ. Tính tổng trọng số các cung
  2. Áp dụng GT Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh khác. Vẽ cây đường đi ngắn nhất.
  3. So sánh 2 cây kết quả.
  4. Có thể dùng GT Dijkstra để tìm cây khung có hướng có trọng lượng nhỏ nhất được không ?

