

Localizando Instalaciones

Daniel E. Cordovés Borroto

Email: dcordb97@gmail.com

4 de diciembre de 2020

Índice

1. Introducción	3
1.1. Formalizando el problema	3
1.2. Sobre la aplicación	3
2. Desarrollo	4
2.1. FastModel	4
2.2. Resolviendo FastModel	4
2.2.1. Hallando el óptimo	6
2.3. FuzzyModel	7
2.4. Resolviendo FuzzyModel	8
2.5. Sobre la suma de valores absolutos como restricción	8
2.6. Objetivos Difusos	9
2.7. La aplicación	10
3. Conclusiones	11

1. Introducción

En el siguiente reporte exponemos la solución a un problema de Modelos de Optimización:

- Dado dos conjuntos de instalaciones ¹ se desea seleccionar un lugar para crear una nueva instalación de forma tal que esté “cerca” del primer conjunto y “lejos” del segundo.

1.1. Formalizando el problema

El problema tiene una definición informal, especialmente por el uso de palabras como cerca y lejos, por lo que es necesario hacer algunas consideraciones:

1. Consideremos a cada instalación i como un punto (x_i, y_i) en el plano.
2. Denotemos con A al conjunto del cual se quiere estar cerca.
3. Denotemos con B al conjunto del cual se quiere estar lejos.
4. Denotemos a la x del i -ésimo punto de un conjunto S de puntos con $X(S_i)$ y a la y con $Y(S_i)$.
5. Denotemos con (X, Y) al punto solución.
6. Definamos como $f_A(X, Y)$ al valor de cercanía del punto solución al conjunto A .
7. Definamos como $f_B(X, Y)$ al valor de lejanía del punto solución al conjunto B .
8. Definamos como x_1, x_2, y_1, y_2 al rectángulo (cuyo punto inferior izquierdo es (x_1, y_1) y superior derecho (x_2, y_2)) en el cual se puede encontrar el punto solución.
9. Además, de cada instalación i tenemos un peso w_i ($w_i \geq 1$) que tiene asignado, que influye que tanto la solución se acerque o aleje de esta.

Ahora nuestro problema es buscar un punto (X, Y) tal que maximice $f_A(X, Y)$ y maximice $f_B(X, Y)$. A continuación proponemos dos modelos para la solución de este problema.

1.2. Sobre la aplicación

Debido a la naturaleza geométrica del problema en cuestión, desarrollamos una aplicación visual que permite mostrar la localización de cada instalación en el plano. La aplicación fue desarrollada en Python3 con el uso de las librerías Numpy, Matplotlib, PuLP y PySide2 (Qt).

¹Por ejemplo: edificios, casas, etc.

2. Desarrollo

Proponemos los modelos FastModel y FuzzyModel a continuación.

2.1. FastModel

$$\text{mín } f_A(X, Y) - f_B(X, Y) \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} f_A(X, Y) &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \left[|X(A_i) - X| + |Y(A_i) - Y| \right] \\ f_B(X, Y) &= \sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot \left[|X(B_j) - X| + |Y(B_j) - Y| \right] \\ x_1 &\leq X \leq x_2 \\ y_1 &\leq Y \leq y_2 \end{aligned}$$

Este modelo opta por minimizar la diferencia entre la “cercanía” y “lejanía” de las instalaciones al punto solución.

2.2. Resolviendo FastModel

Definición 1. Podemos minimizar (1) minimizando los términos con X y con Y de forma independiente.

Demostración. Si separamos por coordenadas en (1), nos queda:

$$\begin{aligned} S_1(X) &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot |X(A_i) - X| - \sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot |X(B_j) - X| \\ S_2(Y) &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot |Y(A_i) - Y| - \sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot |Y(B_j) - Y| \end{aligned}$$

por tanto (1) equivale a $\text{mín}\{S_1(X) + S_2(Y)\}$, que lo logramos minimizando cada término por separado.

Definición 2. Para todo i, j ($1 \leq i \leq |A|, 1 \leq j \leq |B|$):

1. Un conjunto T_x es de puntos originales para la coordenada x si $T_x = \{X(A_i), X(B_j), x_1, x_2\}$.

2. Un conjunto T_y es de puntos originales para la coordenada y si $T_y = \{Y(A_i), Y(B_j), y_1, y_2\}$.

Definición 3. Para todo conjunto S tal que $S' = \{-\infty, \infty\} \cup S$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos como:

1. $\inf(S, x)$ al mayor $y \in S'$ tal que $y \leq x$.
2. $\sup(S, x)$ al menor $y \in S'$ tal que $y \geq x$.

Colorario 1. No existe $t \in S \cap [\inf(S, x), \sup(S, x)]$ tal que $t \neq x$.

Demostración. La demostración es directa por la definición de ínfimo y supremo dada. \square

Definición 4. Para todo $x \in I$ donde $I = [\inf(T_x, x), \sup(T_x, x)]$ se cumple que $S_1(x)$ es una función lineal que depende de x .

Demostración.

Denotemos a:

- $m(x) = \{X(A_i) \mid X(A_i) < x\} \cup \{X(B_j) \mid X(B_j) < x\}$
- $M(x) = \{X(A_i) \mid X(A_i) > x\} \cup \{X(B_j) \mid X(B_j) > x\}$

Por el Colorario 1 sabemos que $m(x)$ y $M(x)$ no cambian en I . Lo que nos permite quitarnos el valor absoluto de las sumas. Al hacer esto, agrupamos los términos con y sin x , obteniendo una función lineal. \square

Definición 5. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $p = \inf(T_x, x)$ y $q = \sup(T_x, x)$ se cumple que $\min\{S_1(p), S_1(q)\} \leq S_1(x)$.

Demostración. Usando la Def. 4 sabemos que $S_1(x)$ se puede expresar como $m \cdot x + n$.

Analizamos tres casos:

1. Si $m > 0 \implies S_1(x)$ se minimiza en p .
2. Si $m < 0 \implies S_1(x)$ se minimiza en q .
3. Si $m = 0 \implies S_1(x)$ se minimiza en cualquier $t \in [p, q]$ (en particular en p o en q).

Por lo que queda demostrado. \square

Definición 6. Existe un punto solución $(X, Y)^2$ tal que $X \in T_x$ y $Y \in T_y$.

Demostración.

Por la Def. 1 sabemos que la coordenada x es independiente de la y , lo que nos permite minimizar X y Y por separado. Sin pérdida de generalidad demostremos que X es solución, ya que Y es un caso simétrico.

Supongamos que X no pertenece a T_x , entonces existen números p y q tal que $p, q \in T_x$ y $p \leq X \leq q$; en particular se cumple que $p = \inf(T_x, X)$ y $q = \sup(T_x, X)$.

Luego por la Def. 5 nos encontramos en una contradicción, dado que encontramos un óptimo con valor menor o igual a $S_1(X)$ que sí pertenece a T_x .

Por lo que X tiene que pertenecer a T_x . \square

Ahora por la Def. 6 nuestro problema se reduce a evaluar cada elemento del conjunto T_x y T_y en S_1 y S_2 respectivamente.

2.2.1. Hallando el óptimo

Vamos a mostrar como evaluar $S_1(X)$, ya que $S_2(Y)$ es simétrico.

En primer lugar ordenamos el conjunto A por su coordenada x . Denotemos como L al miembro izquierdo de $S_1(X)$ y como R al miembro derecho.

Definimos p como la menor posición i ($1 \leq i \leq |A|$) tal que $X(A_i) > X$. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} L_1 &= X \cdot (w(A_1) + \dots + w(A_{p-1})) - X(A_1) \cdot w(A_1) - \dots - X(A_{p-1}) \cdot w(A_{p-1}) \\ L_2 &= -X \cdot (w(A_p) + \dots + w(A_{|A|})) + X(A_p) \cdot w(A_p) + \dots + X(A_{|A|}) \cdot w(A_{|A|}) \\ L &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

En otras palabras, las coordenadas x de las instalaciones i ($1 \leq i < p$) son todas menores o iguales a X y el resto son mayores, por lo que podemos quitarnos el valor absoluto. Para R nos queda algo similar. Notar que esto es lo que nos queda luego de desarrollar la demostración de la Def. 4 (solo teniendo en cuenta L).

Ahora solo tenemos que fijar un $X \in T_x$, hay $O(n)$ de ellos, donde $n = |T_x| = |A| + |B| + 2$; y hallar L y R . Dado un X fijo podemos hallar el costo correspondiente en $O(\log n)$, porque solo tenemos que buscar p con una búsqueda binaria; y para hallar el costo podemos precalcular sumas acumulativas que nos van a permitir hallar la suma en un rango en $O(1)$.³ Por lo que podemos resolver el modelo en $O(n \log n)$.

²Notar que el modelo tiene las restricciones $x_1 \leq X \leq x_2$ y $y_1 \leq Y \leq y_2$.

³Más detalles sobre esto se pueden ver en el código.

2.3. FuzzyModel

$$\min f_A(X, Y) \quad (2)$$

$$\min f_B(X, Y) \quad (3)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} f_A(X, Y) &= \max_{1 \leq i \leq |A|} \left\{ w(A_i) \cdot \left[|X(A_i) - X| + |Y(A_i) - Y| \right] \right\} \\ f_B(X, Y) &= |X - xca| + |Y - yca| + |X - xcb| + |Y - ycb| \\ (xca, yca) &= \frac{\sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot (X(A_i), Y(A_i))}{|A|} \end{aligned} \quad (4)$$

$$(xcb, ycb) = \frac{\sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot (X(B_j), Y(B_j))}{|B|} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq X \leq x_2 \\ y_1 &\leq Y \leq y_2 \end{aligned}$$

Notar que (4) y (5) son las coordenadas de los centroides de A y B respectivamente. Anteriormente se intentó usar:

$$\max f_B(X, Y) = \min_{1 \leq j \leq |B|} \left\{ w(B_j) \cdot \left[|X(B_j) - X| + |Y(B_j) - Y| \right] \right\}$$

como segundo objetivo, pero esto probó tener una dificultad alta.

En este modelo tenemos dos objetivos que queremos satisfacer a la vez. Para esto usamos Teoría de conjuntos difusos y nos basamos en un resultado obtenido en [1].

La idea general es resolver (2) y (3) por separado y luego combinar ambas soluciones en un modelo nuevo que al resolverlo nos dará la solución del modelo original con dos objetivos.

2.4. Resolviendo FuzzyModel

En [1] exponen un esquema de solución para un problema de optimización con k objetivos. Seguimos ese esquema a continuación.

Denotemos a (2) como Z_1 y a (3) como Z_2 . Entonces el primer modelo lo podemos escribir como:

mín Z_1

Sujeto a:

$$\begin{aligned} w(A_i) \cdot \left[|X(A_i) - X| + |Y(A_i) - Y| \right] &\leq Z_1 \quad \forall i (1 \leq i \leq |A|) \\ x_1 &\leq X \leq x_2 \\ y_1 &\leq Y \leq y_2 \end{aligned}$$

Es decir, Z_1 es el máximo que queremos minimizar, por tanto las distancias desde (X, Y) hasta $(X(A_i), Y(A_i))$ tienen que ser menores o iguales a Z_1 . Denotemos a la solución de este modelo como (X_1, Y_1) .

2.5. Sobre la suma de valores absolutos como restricción

El modelo anterior tiene restricciones que tienen una suma de dos valores absolutos:

$$w(A_i) \cdot \left[|X(A_i) - X| + |Y(A_i) - Y| \right] \leq Z_1 \quad \forall i (1 \leq i \leq |A|)$$

Esto lo podemos resolver si introducimos variables p_i, q_i tal que:

$$\begin{aligned} p_i &\geq |X(A_i) - X| \\ q_i &\geq |Y(A_i) - Y| \end{aligned}$$

Y por tanto añadimos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} p_i &\geq X(A_i) - X \\ p_i &\geq X - X(A_i) \\ q_i &\geq Y(A_i) - Y \\ q_i &\geq Y - Y(A_i) \\ w(A_i) \cdot (p_i + q_i) &\leq Z_1 \end{aligned}$$

En el segundo modelo al quitarle los valores absolutos nos queda:

mín Z_2

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
Z_2 &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \\
t_1 &\geq X - xca \\
t_1 &\geq xca - X \\
t_2 &\geq Y - yca \\
t_2 &\geq yca - Y \\
t_3 &\geq X - xcb \\
t_3 &\geq xcb - X \\
t_4 &\geq Y - ycb \\
t_4 &\geq ycb - Y \\
x_1 &\leq X \leq x_2 \\
y_1 &\leq Y \leq y_2
\end{aligned}$$

Denotemos a la solución de este modelo como (X_2, Y_2) .

2.6. Objetivos Difusos

En [1] definen los objetivos difusos de un problema de optimización con k objetivos con la siguiente función de pertenencia:

$$\mu_k(Z^k(X, Y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z^k(X, Y) \leq L^k \\ \frac{U^k - Z^k(X, Y)}{U^k - L^k} & \text{si } L^k \leq Z^k(X, Y) \leq U^k \\ 0 & \text{si } Z^k(X, Y) \geq U^k \end{cases} \quad (6)$$

Donde U^k es la peor cota superior del objetivo k y L^k es la mejor cota inferior del objetivo k . En nuestro problema nos quedaría:

$$\begin{aligned}
U^1 &= \max \left\{ Z^1(X_1, Y_1), Z^1(X_2, Y_2) \right\}; & L^1 &= Z^1(X_1, Y_1) \\
U^2 &= \max \left\{ Z^2(X_1, Y_1), Z^2(X_2, Y_2) \right\}; & L^2 &= Z^2(X_2, Y_2)
\end{aligned}$$

Básicamente, μ le asigna un valor real entre 0 y 1 a cada objetivo, que dice que tan bueno es, o dicho de otra forma, que tanto pertenece ese objetivo al conjunto óptimo.

Luego teniendo en cuenta los L^k, U^k y (6) estamos en condiciones de formular el modelo final, guiándonos por [1]:

máx λ

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq \mu_1(Z_1) \\
\lambda &\leq \mu_2(Z_2) \\
w(A_i) \cdot \left[|X(A_i) - X| + |Y(A_i) - Y| \right] &\leq Z_1 \quad \forall i (1 \leq i \leq |A|) \\
|X - xca| + |Y - yca| + |X - xcb| + |Y - ycb| &= Z_2 \\
x_1 \leq X &\leq x_2 \\
y_1 \leq Y &\leq y_2
\end{aligned} \tag{7}$$

Ponemos (7) con valores absolutos para ahorrar en espacio.

Notar que lo que planteamos acá no es más que maximizar el mínimo de las funciones de pertenencia de cada uno de los objetivos. La solución (X, Y) de este modelo lineal sería la solución del modelo inicialmente planteado.

2.7. La aplicación

La aplicación nos permite entrar los conjuntos A y B ; además de los límites x_1, x_2, y_1, y_2 y graficarlos. Una vez graficados es posible interactuar con el gráfico haciendo zoom o moviendo las coordenadas visibles. También permite guardar y cargar los valores entrados a la aplicación para una futura visualización.

Debido a que esto es un reporte más bien teórico, no ponemos las instrucciones de la aplicación acá. Estas se pueden encontrar en el botón de ayuda de la propia aplicación.

3. Conclusiones

Se cumplieron los objetivos planteados:

- Presentamos dos modelos distintos para resolver el problema inicial.
- Desarrollamos una aplicación para el análisis y la visualización de las posiciones de las instalaciones.

Referencias

- [1] Mohammad Reza Kazemi Ali Shahabi Amin Vafadar Nikjoo. *Bi-criteria single facility location problem with limited distances*. Department of Industrial Engineering, Mazandaran University of Science & Technology, Babol, Iran, 2012.