Localizando Instalaciones

Daniel E. Cordovés Borroto

Email: dcordb97@gmail.com

25 de noviembre de 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente reporte exponemos la solución a un problema de Modelos de Optimización:

- Dado dos conjuntos instalaciones [1] se desea seleccionar un lugar para crear una nueva instalación de forma tal que esté "cerca" del primer conjunto y "lejos" del segundo.

El problema tiene una definición informal, especialmente por el uso de palabras como cerca y lejos, por lo que es necesario hacer algunas consideraciones:

1. Vamos a pensar en cada instalación i como un punto (x_i, y_i) en el plano.
2. Denotemos con A al conjunto del cual se quiere estar cerca.
3. Denotemos con B al conjunto del cual se quiere estar lejos.
4. Denotemos a la x del i-ésimo punto de un conjunto S de puntos con $X(S_i)$ y a la y con $Y(S_i)$.
5. Denotemos con (X, Y) al punto solución.
6. Definamos como $f_A(X, Y)$ al valor de cercanía del punto solución al conjunto A.
7. Definamos como $f_B(X, Y)$ al valor de lejanía del punto solución al conjunto B.
8. Definamos como x_1, x_2, y_1, y_2 como el rectángulo (cuyo punto inferior izquierdo es (x_1, y_1) y superior derecho (x_2, y_2)) en el cual se puede encontrar el punto solución.
9. Además, de cada instalación i tenemos un peso $w_i (w_i \geq 1)$ que tiene asignado, que influye que tanto la solución se acerque o aleje de esta.

Ahora nuestro problema es buscar un punto (X, Y) tal que maximice $f_A(X, Y)$ y minimice $f_B(X, Y)$. A continuación proponemos dos modelos para la solución de este problema.

1.1. Sobre la aplicación

Debido a la naturaleza geométrica del problema en cuestión, desarrollamos una aplicación visual que permite mostrar la localización de cada instalación en el plano. La aplicación fue desarrollada en Python3 con el uso de las librerías Numpy, Matplotlib y PySide2 (Qt).

[1] Por ejemplo: edificios, casas, etc.

2. Desarrollo

Proponemos los modelos FastModel y FussyModel a continuación.

2.1. FastModel

$\text{mín}\, f_A(X,Y) - f_B(X,Y)$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} f_A(X,Y) &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \Big[\big|X(A_i) - X\big| + \big|Y(A_i) - Y\big|\Big] \\ f_B(X,Y) &= \sum_{i=1}^{|B|} w(B_i) \cdot \Big[\big|X(B_i) - X\big| + \big|Y(B_i) - Y\big|\Big] \\ x_1 \leq\ & X \leq x_2 \\ y_1 \leq\ & Y \leq y_2 \end{aligned}$$

Este modelo opta por minimizar la diferencia entre la "cercanía" y "lejanía" de las instalaciones al punto solución.

Resulta que este modelo puede ser resuelto sin usar Simplex. Más aún, podemos decir que siempre existe un punto de solución óptimo cuyas coordenadas están entre las coordenadas de las instalaciones originales. A continuación lo explicamos.

2.1.1. Separando coordenadas

Vamos a separar las coordenadas en esa sumatoria. Efectivamente, la coordenada x es independiente de la y. Nos queda:

$$\begin{aligned} S_X &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \big|X(A_i) - X\big| - \sum_{i=1}^{|B|} w(B_i) \cdot \big|X(B_i) - X\big| \\ S_Y &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \big|Y(A_i) - Y\big| - \sum_{i=1}^{|B|} w(B_i) \cdot \big|Y(B_i) - Y\big| \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que queremos minimizar $S_X + S_Y$, que lo logramos minimizando cada término por separado.

Vamos a resolver solo la coordenada x, de forma similar se puede resolver la y.

2.1.2. Hallando el óptimo

Queremos minimizar S_X, para esto supongamos que X es la solución y ordenemos de forma no decreciente los conjuntos A y B por su coordenada X. Centrémonos ahora en el miembro izquierdo de S_X, denotémolos como L y al derecho como R.

Definimos p como la menor posición i ($1 \leq i \leq |A|$) tal que $X(A_i) > X$. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} L_1 &= X \cdot (w(A_1) + \ldots + w(A_{p-1})) - X(A_1) \cdot w(A_1) - \ldots - X(A_{p-1}) \cdot w(A_{p-1}) \\ L_2 &= -X \cdot (w(A_p) + \ldots + w(A_{|A|})) + X(A_p) \cdot w(A_p) + \ldots + X(A_{|A|}) \cdot w(A_{|A|}) \\ L &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

En otras palabras, las coordenadas x de las instalaciones i desde 1 hasta p son todas menores o iguales a X y el resto son mayores. Por lo que podemos quitarnos el valor absoluto. Para R nos queda algo similar.

Lo importante acá es notar que tanto L como R son funciones lineales con variable X, y por tanto su suma S_X también lo es.

Ahora estamos en condiciones de concluir que X debe pertenecer a las x's originales (o x_1, x_2 que son los "bordes" del conjunto solución para esa coordenada).

Supongamos que no, entonces existen dos coordenadas que pertenecen a las originales tal que X está entre ellas, digamos que s y t ($s \leq X \leq t$), pero como S_X es una función lineal entonces claramente su mínimo se alcanza en s o en t. Por lo que se cumple que X pertenece a las coordenadas x's originales (o a los "bordes" x_1 y x_2).

Ahora solo tenemos que fijar un X, hay $O(|A| + |B|)$ de ellos, y hallar L y R. Dado un X fijo podemos hallar el costo correspondiente en $O(\log n)$, porque solo tenemos que buscar p con una búsqueda binaria; y para hallar el costo podemos precalcular sumas acumulativas que nos van a permitir hallar la suma en un rango en $O(1)$. [2] Por lo que podemos resolver la formulación dada en $O(n \log n)$.

2.2. FussyModel

2.3. La aplicación

La aplicación nos permite entrar los conjuntos A y B; además de los límites x_1, x_2, y_1, y_2 y graficarlos. Una vez graficados es posible interactuar con el gráfico haciendo zoom o moviendo las coordenadas visibles.

[2] Más detalles sobre esto se pueden ver en el código.

3. Conclusiones

Se cumplieron los objetivos planteados, presentamos dos modelos distintos para resolver el problema inicial, así como se desarrolló una aplicación para la visualización de las instalaciones.