Localizando Instalaciones

Daniel E. Cordovés Borroto

Email: dcordb97@gmail.com

26 de noviembre de 2020

Índice

1. Introducción

En el siguiente reporte exponemos la solución a un problema de Modelos de Optimización:

- Dado dos conjuntos de instalaciones [1] se desea seleccionar un lugar para crear una nueva instalación de forma tal que esté "cerca" del primer conjunto y "lejos" del segundo.

1.1. Formalizando el problema

El problema tiene una definición informal, especialmente por el uso de palabras como cerca y lejos, por lo que es necesario hacer algunas consideraciones:

1. Consideremos a cada instalación i como un punto (x_i, y_i) en el plano.
2. Denotemos con A al conjunto del cual se quiere estar cerca.
3. Denotemos con B al conjunto del cual se quiere estar lejos.
4. Denotemos a la x del i-ésimo punto de un conjunto S de puntos con $X(S_i)$ y a la y con $Y(S_i)$.
5. Denotemos con (X, Y) al punto solución.
6. Definamos como $f_A(X, Y)$ al valor de cercanía del punto solución al conjunto A.
7. Definamos como $f_B(X, Y)$ al valor de lejanía del punto solución al conjunto B.
8. Definamos como x_1, x_2, y_1, y_2 al rectángulo (cuyo punto inferior izquierdo es (x_1, y_1) y superior derecho (x_2, y_2)) en el cual se puede encontrar el punto solución.
9. Además, de cada instalación i tenemos un peso $w_i \, (w_i \geq 1)$ que tiene asignado, que influye que tanto la solución se acerque o aleje de esta.

Ahora nuestro problema es buscar un punto (X, Y) tal que maximice $f_A(X, Y)$ y maximice $f_B(X, Y)$. A continuación proponemos dos modelos para la solución de este problema.

1.2. Sobre la aplicación

Debido a la naturaleza geométrica del problema en cuestión, desarrollamos una aplicación visual que permite mostrar la localización de cada instalación en el plano. La aplicación fue desarrollada en Python3 con el uso de las librerías Numpy, Matplotlib, PuLP y PySide2 (Qt).

[1] Por ejemplo: edificios, casas, etc.

2. Desarrollo

Proponemos los modelos FastModel y FussyModel a continuación.

2.1. FastModel

$\min f_A(X,Y) - f_B(X,Y)$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
f_A(X,Y) &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \Big[\big|X(A_i) - X\big| + \big|Y(A_i) - Y\big| \Big] \\
f_B(X,Y) &= \sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot \Big[\big|X(B_j) - X\big| + \big|Y(B_j) - Y\big| \Big] \\
x_1 \leq\ & X \leq x_2 \\
y_1 \leq\ & Y \leq y_2
\end{aligned}
$$

Este modelo opta por minimizar la diferencia entre la "cercanía" y "lejanía" de las instalaciones al punto solución.

Resulta que este modelo puede ser resuelto sin usar Simplex. Más aún, podemos decir que siempre existe un punto de solución óptimo cuyas coordenadas están entre las coordenadas de las instalaciones originales. A continuación lo explicamos.

2.1.1. Separando coordenadas

Vamos a separar las coordenadas en esa sumatoria. Efectivamente, la coordenada x es independiente de la y. Nos queda:

$$
\begin{aligned}
S_X &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \big|X(A_i) - X\big| - \sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot \big|X(B_j) - X\big| \\
S_Y &= \sum_{i=1}^{|A|} w(A_i) \cdot \big|Y(A_i) - Y\big| - \sum_{j=1}^{|B|} w(B_j) \cdot \big|Y(B_j) - Y\big|
\end{aligned}
$$

teniendo en cuenta que queremos minimizar $S_X + S_Y$, que lo logramos minimizando cada término por separado.

Vamos a resolver solo la coordenada x, de forma similar se puede resolver la y.

2.1.2. Hallando el óptimo

Queremos minimizar S_X, para esto supongamos que X es la solución y ordenemos de forma no decreciente los conjuntos A y B por su coordenada X. Centrémonos ahora en el miembro izquierdo de S_X, denotémoslos como L y al derecho como R.

Definimos p como la menor posición i $(1 \leq i \leq |A|)$ tal que $X(A_i) > X$. Entonces se cumple que:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= X \cdot (w(A_1) + \ldots + w(A_{p-1})) - X(A_1) \cdot w(A_1) - \ldots - X(A_{p-1}) \cdot w(A_{p-1}) \\
L_2 &= -X \cdot (w(A_p) + \ldots + w(A_{|A|})) + X(A_p) \cdot w(A_p) + \ldots + X(A_{|A|}) \cdot w(A_{|A|}) \\
L &= L_1 + L_2
\end{aligned}
$$

En otras palabras, las coordenadas x de las instalaciones i desde 1 hasta p son todas menores o iguales a X y el resto son mayores, por lo que podemos quitarnos el valor absoluto. Para R nos queda algo similar.

Lo importante acá es notar que tanto L como R son funciones lineales con variable X, y por tanto su suma S_X también lo es.

Ahora estamos en condiciones de concluir que X debe pertenecer a las x's originales (o x_1, x_2 que son los “bordes” del conjunto solución para esa coordenada).

Supongamos que no, entonces existen dos coordenadas que pertenecen a las originales tal que X está entre ellas, digamos que s y t $(s \leq X \leq t)$, pero como S_X es una función lineal entonces podemos mover X a s o a t, en dependencia de la pendiente de la función, y obtener una solución menor o igual. Por lo que se cumple que X pertenece a las coordenadas x's originales (o a los “bordes” x_1 y x_2).

Ahora solo tenemos que fijar un X, hay $O(n)$ de ellos, donde $n = |A| + |B|$; y hallar L y R. Dado un X fijo podemos hallar el costo correspondiente en $O(\log n)$, porque solo tenemos que buscar p con una búsqueda binaria; y para hallar el costo podemos precalcular sumas acumulativas que nos van a permitir hallar la suma en un rango en $O(1)$. [2] Por lo que podemos resolver el modelo en $O(n \log n)$.

[2] Más detalles sobre esto se pueden ver en el código.

2.2. FussyModel

$$\text{mín}\, f_A(X,Y) \tag{1}$$
$$\text{mín}\, f_B(X,Y) \tag{2}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
f_A(X,Y) &= \max_{1\leq i\leq |A|}\left\{w(A_i)\cdot\left[\left|X(A_i)-X\right|+\left|Y(A_i)-Y\right|\right]\right\} \\
f_B(X,Y) &= |X-xca|+|Y-yca|+|X-xcb|+|Y-ycb| \\
(xca,yca) &= \frac{\sum_{i=1}^{|A|} w(A_i)\cdot(X(A_i),Y(A_i))}{|A|} \qquad (3)\\
(xcb,ycb) &= \frac{\sum_{j=1}^{|B|} w(B_j)\cdot(X(B_j),Y(B_j))}{|B|} \qquad (4)\\
x_1 \leq\ & X \leq x_2 \\
y_1 \leq\ & Y \leq y_2
\end{aligned}$$

Notar que (3) y (4) son las coordenadas de los centroides de A y B respectivamente.

En este modelo tenemos dos objetivos que queremos satisfacer a la vez. Para esto usamos Teoría de conjuntos difusos y nos basamos en un resultado obtenido en [1].

La idea general es resolver (1) y (2) por separado y luego combinar ambas soluciones en un modelo nuevo que al resolverlo nos dará la solución del modelo original con dos objetivos.

2.3. Camino a la solución

En [1] exponen un esquema de solución para un problema de optimización con k objetivos. Seguimos ese esquema a continuación.

Denotemos a (1) como Z_1 y a (2) como Z_2. Entonces el primer modelo lo podemos escribir como:

$$\text{mín}\, Z_1$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
w(A_i)\cdot\left[\left|X(A_i)-X\right|+\left|Y(A_i)-Y\right|\right] &\leq Z_1 \quad \forall i\,(1\leq i\leq |A|)\\
x_1 \leq\ X &\leq x_2 \\
y_1 \leq\ Y &\leq y_2
\end{aligned}$$

Es decir, Z_1 es el máximo que queremos minimizar, por tanto las distancias desde (X, Y) hasta $(X(A_i), Y(A_i))$ tienen que ser menores o iguales a Z_1. Denotemos a la solución de este modelo como (X_1, Y_1).

2.4. Sobre la suma de valores absolutos como restricción

El modelo anterior tiene restricciones que tienen una suma de dos valores absolutos:

$$w(A_i) \cdot \Big[\big|X(A_i) - X\big| + \big|Y(A_i) - Y\big|\Big] \leq Z_1 \quad \forall i\,(1 \leq i \leq |A|)$$

Esto lo podemos resolver si introducimos variables p_i, q_i tal que:

$$\begin{aligned} p_i &\geq \big|X(A_i) - X\big| \\ q_i &\geq \big|Y(A_i) - Y\big| \end{aligned}$$

Y por tanto añadimos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} p_i &\geq X(A_i) - X \\ p_i &\geq X - X(A_i) \\ q_i &\geq Y(A_i) - Y \\ q_i &\geq Y - Y(A_i) \\ w(A_i) \cdot (p_i + q_i) &\leq Z_1 \end{aligned}$$

En el segundo modelo al quitarle los valores absolutos nos queda:

$\min Z_2$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{rcl}
Z_2 & = & t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \\
t_1 & \geq & X - xca \\
t_1 & \geq & xca - X \\
t_2 & \geq & Y - yca \\
t_2 & \geq & yca - Y \\
t_3 & \geq & X - xcb \\
t_3 & \geq & xcb - X \\
t_4 & \geq & Y - ycb \\
t_4 & \geq & ycb - Y \\
x_1 \leq & X & \leq x_2 \\
y_1 \leq & Y & \leq y_2
\end{array}
$$

Denotemos a la solución de este modelo como (X_2, Y_2).

2.5. Objetivos Difusos

En [1] definen los objetivos difusos de un problema de optimización con k objetivos con la siguiente función de pertenencia:

$$
\mu_k(Z^k(X,Y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z^k(X,Y) \leq L^k \\ \dfrac{U^k - Z^k(X,Y)}{U^k - L^k} & \text{si } L^k \leq Z^k(X,Y) \leq U^k \\ 0 & \text{si } Z^k(X,Y) \geq U^k \end{cases} \tag{5}
$$

Donde U^k es la peor cota superior del objetivo k y L^k es la mejor cota inferior del objetivo k. En nuestro problema nos quedaría:

$$
\begin{array}{ll}
U^1 = \max\left\{Z^1(X_1,Y_1), Z^1(X_2,Y_2)\right\}; & L^1 = Z^1(X_1,Y_1) \\
U^2 = \max\left\{Z^2(X_1,Y_1), Z^2(X_2,Y_2)\right\}; & L^2 = Z^2(X_2,Y_2)
\end{array}
$$

Básicamente, μ le asigna un valor real entre 0 y 1 a cada objetivo, que dice que tan bueno es, o dicho de otra forma, que tanto pertenece ese objetivo al conjunto óptimo.

Luego teniendo en cuenta los L^k, U^k y (5) estamos en condiciones de formular el modelo final, guiándonos por [1]:

$$\max \lambda$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{rcl} \lambda & \leq & \mu_1(Z_1) \\ \lambda & \leq & \mu_2(Z_2) \\ w(A_i) \cdot \Big[\big|X(A_i) - X\big| + \big|Y(A_i) - Y\big|\Big] & \leq & Z_1 \quad \forall i\,(1 \leq i \leq |A|) \\ |X - xca| + |Y - yca| + |X - xcb| + |Y - ycb| & = & Z_2 \\ x_1 \leq & X & \leq x_2 \\ y_1 \leq & Y & \leq y_2 \end{array} \tag{6}$$

Ponemos (6) con valores absolutos para ahorrar en espacio.

Notar que lo que planteamos acá no es más que maximizar el mínimo de las funciones de pertenencia de cada uno de los objetivos. La solución (X, Y) de este modelo lineal sería la solución del modelo inicialmente planteado.

2.6. La aplicación

La aplicación nos permite entrar los conjuntos A y B; además de los límites x_1, x_2, y_1, y_2 y graficarlos. Una vez graficados es posible interactuar con el gráfico haciendo zoom o moviendo las coordenadas visibles. También permite guardar y cargar los valores entrados a la aplicación para una futura visualización.

Debido a que esto es un reporte más bien teórico, no ponemos las instrucciones de la aplicación acá. Estas se pueden encontrar en el botón de ayuda de la propia aplicación.

3. Conclusiones

Se cumplieron los objetivos planteados:

- Presentamos dos modelos distintos para resolver el problema inicial.
- Desarrollamos una aplicación para el análisis y la visualización de las posiciones de las instalaciones.

Referencias

[1] Mohammad Reza Kazemi Ali Shahabi Amin Vafadar Nikjoo. *Bi-criteria single facility location problem with limited distances*. Department of Industrial Engineering, Mazandaran University of Science & Technology, Babol, Iran, 2012.