

# Métodos Matemáticos en Física

Danny Córdova

dcordova@estud.usfq.edu.ec

Departamento de Física  
Universidad San Francisco de Quito, Ecuador

Notas basadas en la clase de Métodos Matemáticos en Física, dictada por  
Alessandro Veltri en el semestre de otoño de 2024



# Índice general

Prefacio	V
Capítulo 1. Notación de Einstein	1
1.1. Introducción	1
1.2. Producto Punto	1
1.3. Producto Cruz	1
Capítulo 2. Coordenadas Curvilíneas	5
2.1. Introducción	5
2.2. Producto Punto	5
2.3. Métrica de la Transformación	6
2.4. Integrales	8
2.5. Operadores Diferenciales	8
Capítulo 3. Tensores	13
3.1. Introducción	13
3.2. Transformaciones	13
3.3. Propiedades de los tensores	17
3.4. Vectores Base	17
Capítulo 4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)	21
4.1. Introducción	21
4.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales	23
4.3. EDO de segundo orden	26
Capítulo 5. Ecuaciones Diferencial Parciales (EDP)	45
5.1. Introducción	45
5.2. EDP del primer orden	45
5.3. Condiciones de borde	46
5.4. EDP de segundo orden	47
5.5. Ecuaciones no lineales	52
5.6. Separación de Variables	54
Capítulo 6. Funciones de Legendre	61
6.1. Introducción	61
6.2. Ecuación de Legendre	61
6.3. Polinomios de Legendre	64
6.4. Ecuación Asociada de Legendre	69
Capítulo 7. Función Gamma	75
7.1. Introducción	75
7.2. Constante de Euler-Mascheroni	75
7.3. Definiciones y Propiedades	75
7.4. Relaciones Funcionales	78
Capítulo 8. Ecuación de Helmholtz en Coordenadas Esféricas	79

## 0 - Índice general

---

8.1. Introducción	79
8.2. Armónicos Esféricos	79
8.3. Parte Radial	80
Capítulo 9. Funciones de Green	83
9.1. Introducción	83
9.2. Método General	83
9.3. Teoremas de Green	84
Bibliografía	87

*A mi familia y amigos,  
sin su soporte este libro no habría sido posible.*



## Prefacio

Este libro tiene como objetivo proveer una introducción a Métodos Matemáticos en Física. El contenido dentro del mismo está pensado para cubrirse en un semestre regular de clases.

La motivación de escribir este libro vino del deseo de hacer más accesible los contenidos impartidos en el curso, dando explicaciones detalladas de los pasos que son necesarios para llegar a un resultado. El libro no se propone ser una enciclopedia con todo el contenido relevante que los estudiantes necesitan saber, ya hay muchos libros (y mucho mejores que este) que se encargan de ello. Más bien, el libro se enfoca en brindar herramientas que ayuden a la comprensión de los temas expuestos y, con esto, los estudiantes puedan atacar temas más complejos. El texto está diseñado para estudiantes de la carrera de Física (aunque no se restringe a ellos) que tengan bases sólidas en cálculo multivariado y álgebra lineal. El conocimiento en física, aunque no es necesario para comprender los temas que se exponen, es importante para hacer conexiones entre las herramientas matemáticas y los problemas físicos que pueden ayudar a resolver.

Quiero extender un agradecimiento especial a Alessandro Veltri, todo el contenido de este libro salió de sus clases.

Finalmente, espero que el libro sea de ayuda para quienes lo necesiten. Cualquier tipo de retroalimentación, corrección de errores y adición de temas, ejemplos y/o ejercicios será bienvenida.

Danny Córdova  
Quito, 05 de diciembre de 2024



## Capítulo 1

# Notación de Einstein

### 1.1. Introducción

En las anteriores clases de física, hemos usado la siguiente notación para las coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (V_x, V_y, V_z), \\ \mathbf{R} &= (x, y, z).\end{aligned}$$

Aunque esta notación sea la más natural e intuitiva, hay varias razones (que se expondrán más adelante) para cambiarla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (V_1, V_2, V_3), \\ \mathbf{R} &= (x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

### 1.2. Producto Punto

El producto punto en  $\mathbb{R}^3$  viene dado por:

$$(1.1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Se puede notar que se puede simplificar la notación. Primero, podemos omitir el símbolo de sumatoria, ya que sabemos de antemano que estamos trabajando en el espacio tridimensional y los índices repetidos nos indican implícitamente que hay una suma. Con esta simplificación tenemos

$$(1.2) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

al subíndice  $i$  se lo conoce como índice mudo, ya que se lo puede cambiar por cualquier símbolo y la ecuación mantiene su significado. A esta simplificación se la conoce como notación de Einstein o notación de índices repetidos. Si queremos más generalidad en la notación, en lugar de repetir índices podemos usar la delta de Kronecker que viene definida por

$$(1.3) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

usando esta definición escribimos

$$(1.4) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j.$$

### 1.3. Producto Cruz

Ahora, nos interesa saber si es que esta notación puede ayudarnos a simplificar el producto cruz, porque no es de mucha ayuda si es que solo simplifica la escritura del producto punto. Normalmente, se calcula el producto cruz de la siguiente manera

$$(1.5) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar un objeto que satisfaga la igualdad

$$(1.6) \quad c_i = ? a_j b_k,$$

llamemos a este objeto  $\varepsilon_{ijk}$  y veamos el caso de  $c_1$  para definir las propiedades que debe tener el objeto para cumplir la igualdad:

$$(1.7) \quad \begin{array}{cccccc} \varepsilon_{111} & \varepsilon_{112} & \varepsilon_{113} & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ c_1 = \varepsilon_{121} & \varepsilon_{122} & \varepsilon_{123} = a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ \varepsilon_{131} & \varepsilon_{132} & \varepsilon_{133} & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3. \end{array}$$

Es claro que los únicos elementos que queremos que sean  $\neq 0$  son  $\varepsilon_{123}$  y  $\varepsilon_{132}$  y que  $\varepsilon_{123}$  debe ser positivo mientras que  $\varepsilon_{132}$  debe ser negativo. Con estas consideraciones, definidos el símbolo de Levi-Civita de la siguiente manera:

$$(1.8) \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \vee i = k \vee j = k, \\ 1, & \text{si } ijk \text{ es una permutación par de } 123, \\ -1, & \text{si } ijk \text{ es una permutación impar de } 123. \end{cases}$$

Definido este símbolo, podemos escribir el producto cruz cómo

$$(1.9) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k,$$

notamos que sólo hay 2 índices que se repiten, el tercer índice, en este caso  $i$ , es el que define que el resultado es un vector y no un escalar y recorre los componentes del vector. Este símbolo es muy útil para simplificar demostraciones de propiedades de operaciones vectoriales. Dos propiedades muy importantes de este símbolo son:

$$(1.10) \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$$

y

$$(1.11) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

A continuación, unos ejemplos de la aplicación de los símbolos definidos.

EJEMPLO 1.1. Demostrar que  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ .

Pasamos todo a notación de Einstein y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\varepsilon_{ijk} b_j c_k) \\ &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k \\ &= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\ &= (\varepsilon_{ijk} a_i b_j) c_k \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) c_k \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Demostrando lo que se quería. ■

EJEMPLO 1.2. Demostrar que  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \varepsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} a_j (\varepsilon_{klm} b_l c_m), \end{aligned}$$

usando la propiedad (1.11) y conmutando tenemos:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}) a_j b_l c_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_j b_l c_m, \end{aligned}$$

por definición,  $\delta_{jm}a_jc_m = a_jc_j$  y  $\delta_{il}b_l = b_i$ . Con esto se obtiene

$$\begin{aligned}\delta_{il}\delta_{jm}a_jb_lc_m - \delta_{im}\delta_{jl}a_jb_lc_m &= b_i(a_jc_j) - c_i(a_lb_l) \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Demostrando la propiedad. ■

La notación de Einstein también es útil para definir el operador nabla y sus operaciones asociadas. Definimos el operador nabla de la siguiente manera

$$(1.12) \quad \nabla_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Con esto definimos el gradiente, la divergencia y el rotacional:

$$(1.13) \quad \nabla_j f(\mathcal{R})$$

$$(1.14) \quad \nabla_i a_i(\mathcal{R}) = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(\mathcal{R})$$

$$(1.15) \quad \varepsilon_{ijk} \nabla_j a_k(\mathcal{R}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} a_k(\mathcal{R})$$



## Capítulo 2

# Coordenadas Curvilíneas

### 2.1. Introducción

Recordemos que definimos los vectores unitarios de las coordenadas cartesianas y cilíndricas de la siguiente manera

Coordenadas Cartesianas	Coordenadas Cilíndricas
$\hat{x}_1 = (1, 0, 0)$	$\hat{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$
$\hat{x}_2 = (0, 1, 0)$	$\hat{\theta}(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$
$\hat{x}_3 = (0, 0, 1)$	$\hat{z} = (0, 0, 1)$

Notamos que los vectores unitarios en coordenadas cartesianas no dependen de ninguna coordenada espacial, mientras que  $\hat{r}, \hat{\theta}$  dependen de la coordenada espacial  $\theta$ . Si es que queremos pasar de un sistema a otro de coordenadas tenemos

$$\begin{array}{l|l} x_1 = r \cos \theta & r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2 = r \sin \theta & \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_2}{x_1} \\ x_3 = z & z = x_3 \end{array}$$

Podemos hacer lo mismo para pasar de coordenadas cartesianas a esféricas. Lo que queremos lograr es encontrar una manera general para tratar con cambios de coordenadas. A las coordenadas generales las llamamos coordenadas curvilíneas. Generalizando, podemos tener las coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$ . Estas coordenadas pueden o no ser longitudes. Además, los vectores unitarios de estas coordenadas pueden en principio depender de las 3 coordenadas espaciales, con esto se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= (q_1, q_2, q_3) \\ \hat{q}_2 &= (q_1, q_2, q_3) \\ \hat{q}_3 &= (q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

### 2.2. Producto Punto

Empecemos calculando el producto punto usando coordenadas curvilíneas. Si tenemos un campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathcal{R})$  cualquiera, lo podemos descomponer en los componentes:

$$(2.1) \quad \mathbf{V}(\mathcal{R}) = V_1(\mathcal{R})\hat{x}_1 + V_2(\mathcal{R})\hat{x}_2 + V_3(\mathcal{R})\hat{x}_3,$$

Si hacemos el producto punto  $\mathbf{V}(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{W}(\mathcal{R})$ , con  $\mathbf{W}(\mathcal{R})$  otro campo vectorial, tenemos:

$$(2.2) \quad \mathbf{V}(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{W}(\mathcal{R}) = \sum_i V_i(\mathcal{R})W_i(\mathcal{R}) = V_i(\mathcal{R})W_i(\mathcal{R}).$$

Por otro lado, un campo vectorial  $\mathbf{V}(\mathcal{R})$  en coordenadas cilíndricas se puede escribir como

$$(2.3) \quad \mathbf{V}(\mathcal{R}) = V_r(\mathcal{R})\hat{r}(\theta) + V_\theta(\mathcal{R})\hat{\theta}(\theta) + V_z(\mathcal{R})\hat{z},$$

haciendo el producto punto obtenemos:

$$(2.4) \quad \mathbf{V}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{R}) = V_r(\mathbf{R})W_r(\mathbf{R}) + V_\theta(\mathbf{R})W_\theta(\mathbf{R}) + V_z(\mathbf{R})W_z(\mathbf{R}).$$

Usando coordenadas curvilíneas generales, tenemos

$$(2.5) \quad \mathbf{V}(\mathbf{R}) = V_1(\mathbf{R})\hat{q}_1(q_1, q_2, q_3) + V_2(\mathbf{R})\hat{q}_2(q_1, q_2, q_3) + V_3(\mathbf{R})\hat{q}_3(q_1, q_2, q_3),$$

el producto punto puede simplificarse con esta notación a

$$(2.6) \quad \mathbf{V}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{R}) = V_i(\mathbf{R})W_i(\mathbf{R}).$$

### 2.3. Métrica de la Transformación

Recordemos que los vectores unitarios no tienen unidades, por lo que las unidades de longitud de cada coordenada debe salir de otro lado. El vector posición ( $\mathbf{R}$ ) se puede escribir en sus diferentes componentes:

$$\mathbf{R} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3 \text{ coordenadas cartesianas}$$

$$\mathbf{R} = r\hat{r}(\theta) + z\hat{z} \text{ coordenadas cilíndricas,}$$

como se puede notar, de manera general

$$(2.7) \quad \mathbf{R} \neq q_1\hat{q}_1 + q_2\hat{q}_2 + q_3\hat{q}_3.$$

Queremos encontrar una manera de describir los cambios de coordenadas. Para ello escribamos primero las coordenadas cartesianas en función de las curvilíneas:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3)$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3)$$

$$x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3)$$

Calculemos primero el diferencial  $dx_1$  usando regla de la cadena:

$$(2.8) \quad dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x_1}{\partial q_3}dq_3,$$

usando notación de Einstein tenemos:

$$(2.9) \quad dx_1 = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j.$$

Por teorema de Pitágoras, la distancia entre dos punto en coordenadas cartesianas es

$$(2.10) \quad dS^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad [dS^2 \equiv (dS)^2].$$

Nos interesa la distancia ya que queremos que sin importar el sistema de coordenadas esta sea invariante. Ahora, calculamos  $dx_1^2 = dx_1 \cdot dx_1$ , usamos notación de Einstein para simplificar el cálculo y ahorrar espacio:

$$(2.11) \quad dx_1^2 = \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} dq_i dq_j.$$

Calculamos de manera similar  $dx_2$  y  $dx_3$  para llegar a

$$(2.12) \quad dS^2 = \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} dq_i dq_j.$$

Definimos

$$(2.13) \quad g_{ij} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j}$$

como la métrica de la transformación. Reescribiendo (2.12) con (2.13) obtenemos

$$(2.14) \quad dS^2 = g_{ij} dq_i dq_j.$$

EJEMPLO 2.1. Encontrar la métrica de la transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial r} \right)^2 & g_{12} &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \frac{\partial x_3}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \\
 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & &= -r \sin \theta + r \sin \theta \cos \theta + 0 \\
 &= 1 & &= 0 \\
 g_{13} &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_3}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial z} & g_{21} &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} + \frac{\partial x_3}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \\
 &= 0 + 0 + 0 & &= -r \sin \theta + r \sin \theta \cos \theta + 0 \\
 &= 0 & &= 0 \\
 g_{22} &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \right)^2 & g_{23} &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \frac{\partial x_3}{\partial z} \\
 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta & &= 0 + 0 + 0 \\
 &= r^2 & &= 0 \\
 g_{31} &= \frac{\partial x_1}{\partial r} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_2}{\partial r} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_3}{\partial r} \frac{\partial x_3}{\partial z} & g_{32} &= \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \frac{\partial x_3}{\partial z} \\
 &= -r \sin \theta + r \sin \theta \cos \theta + 0 & &= 0 + 0 + 0 \\
 &= 0 & &= 0 \\
 g_{33} &= \left( \frac{\partial x_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial z} \right)^2 & & \\
 &= 0 + 0 + 1 & & \\
 &= 1 & &
 \end{aligned}$$

Con esto tenemos

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta es la métrica de la transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas. ■

Ahora, enfoquémonos en el vector

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right) dq_j$$

este es el desplazamiento diferencial en dirección  $q_1$ . Por lo tanto

$$(2.15) \quad \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right) \parallel \hat{q}_j.$$

Si es que las coordenadas son ortogonales tenemos

$$(2.16) \quad \hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \delta_{ij},$$

lo que implica que

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \frac{\partial x_3}{\partial q_j} = 0 \quad \text{con } i \neq j.$$

Esto quiere decir que, cuando las coordenadas son ortogonales tenemos

$$g_{ij} = g_{ij} \delta_{ij} = g_{ii}.$$

Definimos

$$(2.17) \quad h_i^2 \equiv g_{ii},$$

llamamos a  $h_i$  factores de escala. Con esto tenemos

$$(2.18) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{bmatrix}$$

Por definición,

$$(2.19) \quad h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Con esto reescribimos

$$(2.20) \quad dS_i^2 = g_{ii} dq_i^2 \equiv (h_i dq_i)^2 \Rightarrow dS_i = h_i dq_i.$$

Además, podemos escribir los vectores unitarios de la siguiente manera:

$$(2.21) \quad \frac{1}{h_j} \left( \frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right) = \hat{q}_j.$$

## 2.4. Integrales

Con lo que hemos definido podemos calcular integrales en funciones parametrizadas.

**2.4.1. Integral de Línea.** La integral de línea viene dada por

$$(2.22) \quad \int_C \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\mathbf{S}(q_1, q_2, q_3) = \int_C V_i h_i dq_i$$

**2.4.2. Integral de Superficie.** Definimos:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= h_2 h_3 dq_2 dq_3, & d\sigma_2 &= h_1 h_3 dq_1 dq_3, & d\sigma_3 &= h_1 h_2 dq_1 dq_2 \\ d\sigma &= d\sigma_1 \hat{q}_1 + d\sigma_2 \hat{q}_2 + d\sigma_3 \hat{q}_3. \end{aligned}$$

Con esto tenemos:

$$(2.23) \quad \iint_S \mathbf{V}(q_1, q_2, q_3) \cdot d\sigma.$$

Sobre toda una superficie cerrada podemos calcular:

$$(2.24) \quad \iint_S V_i \left| \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \right| h_i h_j dq_i dq_j$$

**2.4.3. Integral de Volumen.** La integral de volumen se calcula de manera sencilla con

$$(2.25) \quad \int_V V(q_1, q_2, q_3) h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

## 2.5. Operadores Diferenciales

**2.5.1. Divergencia.** Recordemos que concluimos que  $dS_i = h_i dq_i$ . Debido a que

$$(2.26) \quad d\mathbf{S} = S_1 \hat{q}_1 + S_2 \hat{q}_2 + S_3 \hat{q}_3$$

podemos escribir el desplazamiento diferencial en coordenadas curvilíneas como

$$(2.27) \quad d\mathbf{S} = h_1 dq_1 \hat{q}_1 + h_2 dq_2 \hat{q}_2 + h_3 dq_3 \hat{q}_3.$$

Lo que nos interesa ahora es poder crear operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas. Cuando derivamos, nos va a interesar la derivada en  $dS_i$ , debido que  $dS_i$  tiene unidades de longitud, mientras que  $q_i$  no necesariamente las tiene. Esto no quiere decir que no se pueda hacer la operación

$$\frac{d}{dq_i} f(q_1, q_2, q_3),$$

esta es una operación completamente válida. Sin embargo, en términos físicos, no es de ninguna utilidad. La operación que nos sirve para derivar es

$$(2.28) \quad \frac{1}{h_1} \frac{d}{dq_i} f(\mathbf{q}), \quad \text{definimos } \mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, q_3)$$

De esta manera podemos definir el gradiente de una función escalar de la siguiente manera

$$(2.29) \quad \nabla f(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_1} \hat{q}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_2} \hat{q}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_3} \hat{q}_3.$$

Con notación de Einstein, podemos simplificar este resultado como

$$(2.30) \quad \nabla f(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_i} \hat{q}_i.$$

**2.5.2. Divergencia.** Recordando lo visto de la clase de cálculo, definimos la divergencia de manera geométrica como el flujo sobre una superficie cerrada sobre su volumen cuando el volumen tiende a 0, es decir:

$$(2.31) \quad \text{div} \mathbf{F} = \lim_{\substack{\text{Volumen} \rightarrow 0}} \frac{\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}}{\text{Volumen de } S}.$$

Para poder calcular la divergencia en coordenadas curvilíneas, empecemos con el siguiente diagrama ilustrativo.

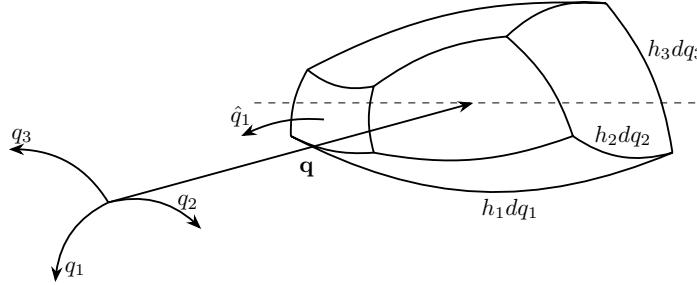


FIGURA 1. Diagrama para calcular la Divergencia

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial con  $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = F_1 \hat{q}_1 + F_2 \hat{q}_2 + F_3 \hat{q}_3$ . Calculemos el flujo que pasa por las paredes 1 y 2:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\mathbf{F}(q_1 - \frac{1}{2} dq_1) \cdot d\mathbf{A} = -F_1(q_1 - \frac{1}{2} dq_1) \sigma_1 = -F_1(q_1 - \frac{1}{2} dq_1) h_2 h_3 dq_2 dq_3, \\ \Phi_2 &= \mathbf{F}(q_1 + \frac{1}{2} dq_1) \cdot d\mathbf{A} = F_1(q_1 + \frac{1}{2} dq_1) \sigma_1 = F_1(q_1 + \frac{1}{2} dq_1) h_2 h_3 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

Notemos que se abrevió  $\mathbf{F}(q_1 - \frac{1}{2} dq_1, q_2, q_3)$  a  $\mathbf{F}(q_1 - \frac{1}{2} dq_1)$ . Esto se hizo ya que  $d\mathbf{A} = d\sigma_1 \hat{q}_1$ . Sumando las expresiones anteriores tenemos

$$\Phi_{12} = \left( F_1(q_1 + \frac{1}{2} dq_1) - F_1(q_1 - \frac{1}{2} dq_1) \right) dq_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3.$$

Multiplicamos por  $\frac{dq_1}{dq_1}$ , y por definición de derivada obtenemos

$$\Phi_{12} = \frac{\partial F_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Hacemos el mismo procedimiento para las superficies faltantes y llegamos a

$$d\Phi = \left[ \frac{\partial F_1(\mathbf{q})}{\partial q_1} h_2 h_3 + \frac{\partial F_2(\mathbf{q})}{\partial q_2} h_1 h_3 + \frac{\partial F_3(\mathbf{q})}{\partial q_3} h_1 h_2 \right] dq_1 dq_2 dq_3,$$

este es el flujo sobre la superficie diferencial. Algo importante que se está pasando por alto es que los factores de escala ( $h_i$ ) también dependen de las coordenadas espaciales. Si es que esto no se toma en cuenta se caería en el error de tomar a  $h_i$  como constantes, por lo que expresamos la derivada de manera no ambigua cómo:

$$d\Phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [F_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q})] + \frac{\partial}{\partial q_2} [F_2(\mathbf{q})h_1(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q})] + \frac{\partial}{\partial q_3} [F_3(\mathbf{q})h_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})] \right\} dq_1 dq_2 dq_3$$

Dividimos ahora para  $dV$ , es decir  $d^3S$  y obtenemos la divergencia:

$$(2.32) \quad \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \frac{d\Phi}{dV} = \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} [F_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q})] + \frac{\partial}{\partial q_2} [F_2(\mathbf{q})h_1(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q})] + \frac{\partial}{\partial q_3} [F_3(\mathbf{q})h_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})] \right\} \frac{1}{h_1(\mathbf{q})h_2(\mathbf{q})h_3(\mathbf{q})}.$$

Con notación de Einstein y poniendo como implícita la dependencia en  $\mathbf{q}$  tenemos:

$$(2.33) \quad \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left| \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \right| \frac{\partial}{\partial q_i} [F_i h_j h_k].$$

**2.5.3. Laplaciano.** Para el laplaciano ocupamos las definiciones de gradiente y divergencia que hemos visto y tenemos:

$$(2.34) \quad \nabla \cdot \nabla \phi(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right]$$

Con notación de Einstein:

$$(2.35) \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{q}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left| \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \right| \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right]$$

**2.5.4. Rotacional.** Para calcular el rotacional usamos su definición geométrica:

$$(2.36) \quad \text{rot} \mathbf{F} = \frac{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{dA}.$$

Empezamos con la siguiente figura

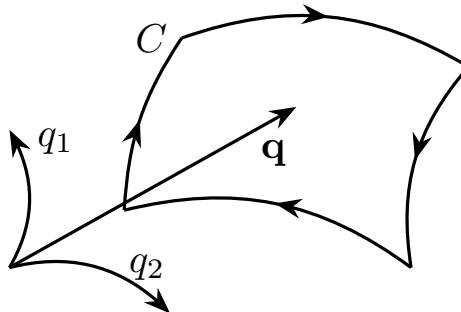


FIGURA 2. Diagrama para calcular el rotacional

Sea  $\mathbf{B}$  un campo vectorial con  $\mathbf{B} = B_1\hat{q}_1 + B_2\hat{q}_2 + B_3\hat{q}_3$ . Calculemos la circulación a lo largo del camino señalado en el plano  $q_1q_2$ .

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_1 \left( q_2 - \frac{1}{2}dq_2 \right) h_1 \left( q_2 - \frac{1}{2}dq_2 \right) q_1 \\ - B_1 \left( q_2 + \frac{1}{2}dq_2 \right) h_1 \left( q_2 + \frac{1}{2}dq_2 \right) q_1 \\ - B_2 \left( q_1 - \frac{1}{2}dq_1 \right) h_2 \left( q_1 - \frac{1}{2}dq_1 \right) q_2 \\ + B_2 \left( q_1 + \frac{1}{2}dq_1 \right) h_2 \left( q_1 + \frac{1}{2}dq_1 \right) q_2,$$

multiplicamos por  $\frac{dq_2}{dq_2}$  la primera parte y por  $\frac{dq_1}{dq_1}$  la segunda. Por definición de derivada parcial obtenemos:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial q_2}[B_1 h_1] + \frac{\partial}{\partial q_1}[B_2 h_2].$$

Si es que dividimos para  $dA$ , en este caso  $dA = \sigma_3 = h_1 h_2 q_1 q_2$  obtenemos:

$$(2.37) \quad (\nabla \times \mathbf{B})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1}(B_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(B_1 h_1) \right],$$

este es el tercer componente del vector del rotacional. Si es que seguimos el mismo proceso para los planos restantes obtenemos:

$$(2.38) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} h_1 \hat{q}_1 & h_2 \hat{q}_2 & h_3 \hat{q}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 B_1 & h_2 B_2 & h_3 B_3 \end{vmatrix} \frac{1}{h_1 h_2 h_3}$$



## Capítulo 3

# Tensores

### 3.1. Introducción

Tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$a_n \frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \cdots + a_0 f = 0.$$

Conocemos que esta ecuación va a tener  $n$  soluciones independientes. Puedo construir la solución general como

$$(3.1) \quad f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n,$$

donde los  $c_i$  son constantes que dependen de los valores de frontera. Aunque sean funciones, podemos manejarlas como si fueran vectores en un espacio n-dimensional, con un producto interno definido. En este caso, definimos el producto interno como

$$(3.2) \quad \langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)dx.$$

Debido a esta generalización (y por otras razones que se verán más adelante), nos es útil definir una extensión de los vectores y matrices: los tensores.

### 3.2. Transformaciones

Los tensores se definen en dependencia de como transforman en el sistema de coordenadas. Definimos a un tensor por grados. Si es que estamos en el espacio tridimensional tenemos:

- Tensor de grado 0: Escalar
- Tensor de grado 1: Vector
- Tensor de grado 2: Matriz  $3 \times 3$
- Tensor de grado 3: Cubo  $3 \times 3 \times 3$ ,

y así sucesivamente para grados superiores. Definimos ahora las coordenadas:

Coordenadas Cartesianas	Nuevas Coordenadas
$x_1 = x_1(x'_1, x'_2, x'_3)$	$x'_1 = x'_1(x_1, x_2, x_3)$
$x_2 = x_2(x'_1, x'_2, x'_3)$	$x'_2 = x'_2(x_1, x_2, x_3)$
$x_3 = x_3(x'_1, x'_2, x'_3)$	$x'_3 = x'_3(x_1, x_2, x_3)$

Analicemos cómo cambian estos sistemas de coordenadas con respecto a algunas transformaciones.

**3.2.1. Traslaciones.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que la traslación solo se realiza en la coordenada  $x_1$ , una distancia  $a$ , es decir:

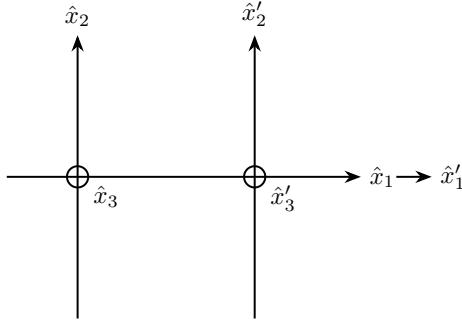


FIGURA 1. Traslación

Con esto tenemos las coordenadas y vectores unitarios:

$$\begin{array}{l|l|l} x'_1 = x_1 - a & x_1 = x'_1 + a & \hat{e}'_1 = \hat{e}_1 \\ x'_2 = x_2 & x_2 = x'_2 & \hat{e}'_2 = \hat{e}_2 \\ x'_3 = x_3 & x_3 = x'_3 & \hat{e}'_3 = \hat{e}_3 \end{array}$$

Notamos que

$$(3.3) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij}$$

Para evaluar la función escalar  $\phi$  en las nuevas coordenadas solo calculamos

$$(3.4) \quad \phi'(\mathcal{R}') = \phi(\mathcal{R}(\mathcal{R}')).$$

Para un campo vectorial  $\mathbf{A}$  se trabaja de la misma manera:

$$(3.5) \quad \mathbf{A}'(\mathcal{R}') = \mathbf{A}(\mathcal{R}(\mathcal{R}')).$$

**EJEMPLO 3.1.** Se tiene una carga positiva y puntual  $q$  en el origen. Calcular el campo producido por la misma en los dos sistemas de coordenadas usados.

Para el sistema cartesiano normal tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathcal{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathcal{R}}{[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{3/2}}.$$

Para las coordenadas trasladadas tenemos en cambio:

$$\mathbf{E}'(\mathcal{R}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x'_1 + a, x'_2, x'_3)}{[(x'_1 + a)^2 + x'_2^2 + x'_3^2]^{3/2}}.$$

Notamos que la traslación transforma escalares y vectores de la misma manera. ■

**3.2.2. Rotaciones.** Se tiene una rotación del sistema de coordenadas de la siguiente manera:

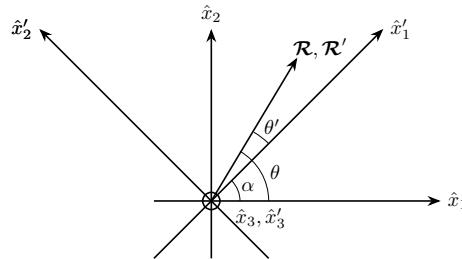


FIGURA 2. Rotación del sistema de coordenadas

Se puede observar de inmediato una diferencia crucial entre la rotación y traslación: la rotación cambia los vectores unitarios, es decir que

$$(3.6) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \neq \delta_{ij}$$

Sin embargo, el tamaño del vector no cambia. Con esto podemos escribir las coordenadas:

$$\begin{array}{ll} x'_1 = r \cos \theta' & | \quad x_1 = r \cos \theta \\ x'_2 = r \sin \theta' & | \quad x_2 = r \sin \theta \\ x'_3 = x_3 & | \quad x_3 = x'_3 \end{array}$$

Por la gráfica tenemos que  $\theta' = \theta - \alpha$ . Usando resta de ángulos del seno y coseno tenemos:

$$\begin{aligned} x'_1 &= r \cos \theta' = r \cos(\theta - \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha \\ x'_2 &= r \sin \theta' = r \sin(\theta - \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Reemplazando los  $x_i$  en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha \\ x'_1 &= -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Con esto, los vectores unitarios cambian a

$$\begin{aligned} \hat{e}_1' &= \cos \alpha \hat{e}_1 + \sin \alpha \hat{e}_2 \\ \hat{e}_2' &= -\sin \alpha \hat{e}_1 + \cos \alpha \hat{e}_2. \end{aligned}$$

Si calculamos  $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ , notamos que podemos escribir las nuevas coordenadas como:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{\partial x'_1}{x_1} x_1 + \frac{\partial x'_1}{x_2} x_2 + \frac{\partial x'_1}{x_3} x_3 \\ x'_2 &= \frac{\partial x'_2}{x_1} x_1 + \frac{\partial x'_2}{x_2} x_2 + \frac{\partial x'_2}{x_3} x_3 \\ x'_3 &= \frac{\partial x'_3}{x_1} x_1 + \frac{\partial x'_3}{x_2} x_2 + \frac{\partial x'_3}{x_3} x_3. \end{aligned}$$

Para calcular una función escalar en el nuevo sistema de coordenadas seguimos usando (3.4). Sin embargo, para calcular una función vectorial tenemos que tener en cuenta el cambio en los vectores unitarios, es decir:

$$\begin{aligned} A'_1 &= \mathbf{A}(\mathcal{R}(\mathcal{R}')) \cdot \hat{e}_1' = \mathbf{A} \cdot (\cos \alpha \hat{e}_1 + \sin \alpha \hat{e}_2) = A_1 \cos \alpha + A_2 \sin \alpha \\ A'_2 &= \mathbf{A}(\mathcal{R}(\mathcal{R}')) \cdot \hat{e}_2' = \mathbf{A} \cdot (-\sin \alpha \hat{e}_1 + \cos \alpha \hat{e}_2) = -A_1 \sin \alpha + A_2 \cos \alpha \\ A'_3 &= \mathbf{A}(\mathcal{R}(\mathcal{R}')) \cdot \hat{e}_3' = \mathbf{A} \cdot \hat{e}_3 = A_3 \end{aligned}$$

**3.2.3. Vectores Contravariantes.** A todos los vectores que transforman de esta manera se los llama vectores contravariantes. A estos vectores se los identifica con el índice en la parte superior. Todas las coordenadas son contravariantes, por lo que desde este momento en lugar de escribir  $(x_1, x_2, x_3)$ , se escribirá  $(x^1, x^2, x^3)$ . De manera abreviada, decimos que un vector es contravariante si cumple con

$$(3.7) \quad A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j \quad \text{Contravariante}$$

**3.2.4. Vectores Covariantes.** Miremos ahora cómo escribir el gradiente bajo una transformación. Por definición, se tiene que el gradiente viene dado por

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\hat{e}_3, \\ \nabla'\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x'^1}\hat{e}'_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x'^2}\hat{e}'_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x'^3}\hat{e}'_3.\end{aligned}$$

Usando regla de la cadena, podemos escribir

$$(3.8) \quad \frac{\partial\phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\frac{\partial x_1}{\partial x'^1} + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\frac{\partial x_2}{\partial x'^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\frac{\partial x_3}{\partial x'^3},$$

de forma abreviada:

$$(3.9) \quad \frac{\partial\phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^j}\frac{\partial x_j}{\partial x'^i}.$$

A los vectores que transforman de esta manera, es decir, los vectores que cumplen con

$$(3.10) \quad A'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'^i}A_j \quad \text{Covariante}$$

los llamamos vectores covariantes. A estos vectores los caracterizamos con el índice en la parte inferior.

**3.2.5. Tensores de Rango 2.** Cuando se sube el rango en los tensores se aumenta el número de variantes que puede tener el mismo. Para los escalares (rango 0) no hay ninguna variante. Para los vectores (rango 1) hay 1 variante, y son los vectores contra y covariantes. Para las matrices (rango 2) hay 2 variantes: las ya conocidas variantes y contravariantes y los tensores mixtos. Las variantes del tensor de rango 2 se pueden escribir de la siguiente manera

$$(3.11) \quad A'^{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A^{kl} \quad \text{Contravariante}$$

$$(3.12) \quad B'^i_j = \sum_{kl} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} B^k_l \quad \text{Mixto}$$

$$(3.13) \quad C'_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} C_{kl} \quad \text{Covariante}$$

Un ejemplo de un tensor de rango 2 es la ya conocida delta de Kronecker. En particular, es un tensor mixto.

EJEMPLO 3.2. *Probar que la delta de Kronecker es un tensor mixto.*

Por definición de delta de Kronecker tenemos que

$$\delta^k_l \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j},$$

por regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j}.$$

Recordemos que las coordenadas  $x'^i$  y  $x'^j$  son independientes, por lo que la variación de una con respecto a la otra será 0 a menos que sean las mismas coordenadas. Esto quiere decir que

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \delta'^i_j.$$

Por transitividad concluimos que

$$\delta'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \delta^k_l.$$

Esta es la definición de tensor mixto, por lo que queda demostrado que la delta de Kronecker es un tensor mixto. ■

### 3.3. Propiedades de los tensores

**3.3.1. Simetría y antisimetría.** Un tensor simétrico cumple con la propiedad

$$(3.14) \quad A^{mn} = A^{nm}.$$

Por otro lado, un tensor antisimétrico cumple con

$$(3.15) \quad A^{mn} = -A^{nm}.$$

Esta propiedad es importante para los tensores de rango 2, ya que podemos escribir cualquier tensor de rango 2 en la forma

$$(3.16) \quad A^{mn} = \frac{1}{2}(A^{mn} + A^{nm}) + \frac{1}{2}(A^{mn} - A^{nm})$$

dividiendo al tensor en una parte simétrica y otra antisimétrica. Esta propiedad se aplica en mecánica cuántica.

### 3.4. Vectores Base

**3.4.1. Vectores Contravariantes.** Pasemos ahora a una revisión más extensa de los tensores de rango 1 (vectores), ya que son los elementos más usados en física. Tenemos un sistema al que se le somete al siguiente cambio de coordenadas:

$$\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3) \rightarrow \mathcal{R} = (x^1, x^2, x^3).$$

Recordemos que la métrica de la transformación viene dada por

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}$$

Cuando las coordenadas son ortogonales, se cumple que

$$g_{ij} = g_{ij}\delta_j^i = h_i^2\delta_j^i,$$

es decir, estamos transformando coordenadas curvilíneas cualesquiera a cartesianas.

A los vectores unitarios del espacio  $\mathbf{q}$  los podemos escribir como

$$(3.17) \quad \hat{q}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q^i}. \quad \text{no suma}$$

Definimos los vectores base  $\varepsilon_i$  de la siguiente manera

$$(3.18) \quad \varepsilon_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q^i}.$$

Podemos definir ahora los vectores base en función de los vectores unitarios como

$$(3.19) \quad \varepsilon_i = h_i \hat{q}_i.$$

**EJEMPLO 3.1.** Calcular los vectores base en la transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

Usando la definición de vectores base tenemos

$$\begin{array}{l} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = z \end{array} \left| \begin{array}{l} \varepsilon_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \hat{e}_r \\ \varepsilon_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) = r \hat{e}_\theta \\ \varepsilon_z = (0, 0, 1) = \hat{e}_z \end{array} \right.$$

De esta manera hemos calculado los vectores base de la transformación requerida. ■

Debido a que toda transformación de sistema de coordenadas transforma de forma contravariante, tenemos:

$$(3.20) \quad V'^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} V^j.$$

Notamos que podemos expandir  $\varepsilon_i$  de la siguiente manera

$$(3.21) \quad \varepsilon_i = \left( \frac{\partial x^1}{\partial q^i}, \frac{\partial x^2}{\partial q^i}, \frac{\partial x^3}{\partial q^i} \right).$$

Con esto, podemos construir el vector transformado  $\mathbf{V}'$  cómo:

$$(3.22) \quad \mathbf{V}' = V^j \varepsilon_j = V^1 \varepsilon_1 + V^2 \varepsilon_2 + V^3 \varepsilon_3.$$

Notamos que  $\varepsilon_j$  es un vector covariante.

**3.4.2. Vectores Covariantes.** Ahora, recordemos que definimos el gradiente como

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial q^j},$$

sea  $V'_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  y  $V_j = \frac{\partial}{\partial q^j}$ . Definamos ahora

$$(3.23) \quad \varepsilon^i = \left( \frac{\partial q^i}{\partial x^1}, \frac{\partial q^i}{\partial x^2}, \frac{\partial q^i}{\partial x^3} \right)$$

con lo que la condición de que un vector sea covariante queda expresada como

$$(3.24) \quad \mathbf{V}' = V_j \varepsilon^j.$$

Notamos que  $\varepsilon^j$  es contravariante.

**3.4.3. Propiedades de los vectores base.** Las propiedades más importantes de los vectores base son:

$$(3.25) \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \frac{\partial x_k}{\partial q^i} \frac{\partial x_k}{\partial q^j} = g_{ij}$$

$$(3.26) \quad \varepsilon^i \cdot \varepsilon^j = \frac{\partial q^i}{\partial x_k} \frac{\partial q^j}{\partial x_k} = g^{ij}$$

$$(3.27) \quad g^{ij} \varepsilon_j = \varepsilon^i$$

$$(3.28) \quad g_{ij} \varepsilon^j = \varepsilon_i$$

EJEMPLO 3.2. Demostrar la propiedad (3.27).

Por definición de  $g^{ij}$  y  $\varepsilon_j$  tenemos:

$$\begin{aligned} g^{ij} \varepsilon_j &= \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial q^j}{\partial x^k} \left( \frac{\partial x^1}{\partial q^j}, \frac{\partial x^2}{\partial q^j}, \frac{\partial x^3}{\partial q^j} \right) \\ &= \left( \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^1}{\partial x^k}, \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^2}{\partial x^k}, \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^3}{\partial x^k} \right) \\ &= \left( \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \delta_k^1, \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \delta_k^2, \frac{\partial q^i}{\partial x^k} \delta_k^3 \right) \\ &= \left( \frac{\partial q^i}{\partial x^1}, \frac{\partial q^i}{\partial x^2}, \frac{\partial q^i}{\partial x^3} \right) \\ &= \varepsilon^i, \end{aligned}$$

demonstrando lo que se quería. ■

Debido a que cualquier vector  $F$  se puede descomponer en sus vectores base, de manera general se tiene que

$$(3.29) \quad g^{ij} F_j = F^i$$

$$(3.30) \quad g_{ij} F^j = F_i$$



## Capítulo 4

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

### 4.1. Introducción

Antes de atacar ecuaciones diferenciales, debemos definir claramente los términos que se van a utilizar.

**DEFINICIÓN 4.1.** Se dice que una variable es independiente cuando su valor no depende de ningún parámetro fuera de ella misma. Por ejemplo:  $\mathbf{R}, t$ .

**DEFINICIÓN 4.2.** Se dice que una variable es dependiente cuando su valor depende de otra variable, puede depender del espacio, del tiempo, de ambos o de cualquier otro parámetro. Por ejemplo:  $V(\mathbf{R}), \mathbf{v}(t), \mathbf{E}(\mathbf{R}), \mathbf{F}(\mathbf{R}, t)$ .

**DEFINICIÓN 4.3.** Una ecuación diferencial es ordinaria (EDO) cuando sus derivadas son con respecto a una sola variable. Por ejemplo:

$$m \frac{d^2\mathbf{R}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{R}(t)).$$

**DEFINICIÓN 4.4.** Una ecuación diferencial es parcial (EDP) cuando sus derivadas son con respecto a dos o más variables. Por ejemplo:

$$\nabla^2 V(\mathbf{R}) = 0.$$

**DEFINICIÓN 4.5.** El orden de una ecuación diferencial es la derivada más alta que hay en la ecuación.

**DEFINICIÓN 4.6.** Una ED es homogénea cuando la función y sus derivadas son los únicos términos en la ecuación. Por ejemplo:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} + af(x) = 0.$$

**DEFINICIÓN 4.7.** Una ED es no homogénea cuando hay un término de fuente, es decir, cuando hay otras funciones además de la función y sus derivadas. Por ejemplo:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} - c(x) = 0$$

La diferencia entre ED homogéneas y no homogéneas es que para el caso de la homogénea debe haber una condición inicial  $\neq 0$  para que la solución sea  $\neq 0$ . Esto se puede ver usando una aproximación a la ED. Tomando la ecuación de la Def.4.6 y haciendo una aproximación tenemos:

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} + af_n = 0 \rightarrow f_{n+1} = f_n - a\Delta x f_n,$$

notamos que  $f_n = 0$ , la solución será 0. Por otro lado, approximando la ecuación de la Def. 4.7 tenemos:

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} = c_n \rightarrow f_{n+1} = f_n + \Delta x c_n,$$

en cambio en esta ecuación notamos que aunque  $f_n = 0$ , el término de fuente ( $c(x)$ ) no permite que la solución sea 0 incluso si la condición inicial es 0.

## 4 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

---

**DEFINICIÓN 4.8.** Se dice que una ED es lineal cuando su operador diferencial es lineal. Es decir, el operador diferencial  $L$  cumple con

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)]$$

**DEFINICIÓN 4.9.** Una ED es no lineal cuando su operador diferencial no es lineal.

**DEFINICIÓN 4.10.** Se dice que dos funciones  $f, g$  son independientes si es que cumplen con

$$\langle f|g \rangle = \int f(x)g(x)dx$$

Antes de ver métodos para resolver EDO, comencemos con uno de los ejemplos más conocidos en física: el oscilador armónico.

**EJEMPLO 4.1.** *Encontrar la solución para la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + f(x) = 0.$$

Conocemos que esta EDO tiene 2 soluciones independientes:

$$g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos x.$$

Podemos comprobar que estas soluciones son independientes calculando el producto punto entre ellas en el intervalo de interés, es decir:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0.$$

La solución general de la EDO viene dada por una combinación lineal de estas soluciones:

$$f(x) = ag(x) + bh(x) = a \sin x + b \cos x.$$

Puedo explorar todo el espacio de soluciones con esta base, por lo que puedo pensar en las soluciones independientes como coordenadas ortogonales de un espacio de funciones. Se llega a una solución cuando se toman en cuenta las condiciones de borde.

Veamos ahora como se comporta una EDO no homogénea.

**EJEMPLO 4.2.** *Encontrar la solución de la EDO*

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + f(x) = F_0 \sin x.$$

Para esta EDO, además de la solución de la homogénea, se va a tener la solución particular  $p(x)$ . Por la forma de la ecuación, intentemos buscar una solución de la forma

$$p(x) = c(x) \cos x.$$

Calculemos la primera y segunda derivada de  $p(x)$ :

$$\frac{dp(x)}{dx} = -c(x) \sin x + \frac{dc(x)}{dx} \cos x$$

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = -c(x) \cos x - 2 \frac{dc(x)}{dx} \sin x + \frac{d^2c(x)}{dx^2} \cos x.$$

Ponemos como condición que

$$\frac{d^2c(x)}{dx^2} = 0,$$

esta condición es impuesta debido a que al lado derecho tenemos un seno multiplicado por una constante, por lo que esperaríamos que  $c(x)$  sea, máximo, una ecuación lineal. Reemplazando  $p(x)$  en la ecuación tenemos:

$$-c(x) \cos c - 2 \frac{dc(x)}{dx} \operatorname{sen} x + c(x) \cos = F_0 \operatorname{sen} x \rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = -\frac{F_0}{2}.$$

Resolviendo para  $c(x)$  tenemos:

$$c(x) = -\frac{F_0}{2}x.$$

Por lo tanto, la solución particular será:

$$p(x) = -\frac{F_0}{2}x \cos x.$$

Ahora que vimos estos ejemplos, que seguramente el estudiante se ha topado más de una vez hasta el momento, veamos cómo resolver una EDO en casos concretos.

## 4.2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales

**4.2.1. Ecuaciones Separables.** Una EDO es separable cuando tiene la forma

$$(4.1) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x)}{Q(y)}.$$

Esta EDO se resuelve fácilmente calculando

$$(4.2) \quad \int_{x_0}^x P(x')dx' + \int_{y_0}^y Q(y')dy' = 0.$$

**4.2.2. Diferencial Exacto.** Sea la EDO

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Si es que el diferencial es exacto, podemos igualar el lado izquierdo de la ecuación anterior con

$$(4.3) \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy,$$

esto implica que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y) \quad \wedge \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x, y).$$

Si es que queremos saber que esto existe calculamos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Esto significa que  $d\phi$  es un diferencial y se puede resolver la EDO de esta manera si y solo si

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Si es que se cumple con esta condición, la solución viene dada por

$$(4.4) \quad \phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(x', y_0)dx' + \int_{y_0}^y Q(x_0, y')dy' = \text{const.}$$

**4.2.3. EDO homogénea de orden m.** Si el orden combinado de  $x, y$  en todos los términos se suma como  $m$  se puede sustituir

$$(4.5) \quad y = xv.$$

EJEMPLO 4.1. *Resolver la EDO*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x+y}{x} = 0.$$

Reescribimos la ecuación a

$$(2x+y)dx + xdy = 0$$

El orden de ambos términos es 2, por lo que podemos usar la sustitución

$$y = xv \Rightarrow dy = vdx + xdv,$$

con esto tenemos:

$$\begin{aligned} (2+v)x dx + x(vdx + xdv) &= 0 \\ (2+2v)dx + xdv &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= -\frac{1}{2} \frac{dv}{1+v}. \end{aligned}$$

Esta es una EDO separable, por lo que se considera resuelto el problema.

**4.2.4. Ecuación Isobárica.** Se le asigna un peso diferente a  $x, y$ . Se le asigna a  $x$  un peso de 1 y a  $y$  un peso de  $m$ . Con esto se calcula el valor de  $m$  igualando los pesos de los términos de la ecuación para hacer la sustitución

$$(4.6) \quad y = x^m v.$$

EJEMPLO 4.2. *Resolver la EDO*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - y}{x} = 0$$

Reescribimos la ecuación:

$$(x^2 - y)dx + xdy = 0.$$

Tenemos que  $x^2 dx$  es de orden 3 y  $ydx, xdy$  son de orden  $1+m$ . Por lo tanto  $1+m=3 \Rightarrow m=2$  y podemos usar la sustitución

$$y = x^2 v \Rightarrow dy = 2xvdx + x^2 dv,$$

reemplazamos en la ecuación para obtener:

$$\begin{aligned} (1-v)x^2 dx + x^2(xdv + 2vdx) &= 0 \\ (1+v)dx + xdv &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= -\frac{dv}{1+v} \end{aligned}$$

esta es una EDO separable, por lo que consideramos como resuelta la ecuación.

**4.2.5. EDO con coeficientes constantes.** Los ejemplos anteriores nos sugieren una manera de atacar a las EDO de la forma

$$(4.7) \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = F(x),$$

donde  $a_i$  son coeficientes constantes. Podemos buscar las soluciones de la homogénea con la función

$$(4.8) \quad f(x) = e^{mx},$$

dónde  $m$  es la solución de

$$(4.9) \quad m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0.$$

Luego de esto se busca la solución particular  $p(x)$ . Con esto, la solución general queda de la siguiente manera:

$$(4.10) \quad f(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{m_i x} + p(x).$$

Si es que  $F(x) = cte$ , el sistema va a tender a llegar a un estado de equilibrio. Si es que  $F(x)$  oscila, el sistema buscará un estado de equilibrio para la envoltura de la onda.

**4.2.6. EDO lineales con coeficientes no constantes.** Sea la EDO de la forma

$$(4.11) \quad \frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x).$$

Para resolver esta ecuación trato de usar el método del diferencial exacto. Si es que no se puede resolver de esta manera, multiplico por una función  $\alpha(x)$  para que lo sea. Es decir,

$$\alpha(x) \frac{dy(x)}{dx} + \alpha(x)p(x)y(x) = \alpha(x)q(x).$$

Defino  $\alpha(x)$  de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}[\alpha(x)y(x)] = \alpha(x) \frac{dy(x)}{dx} + \alpha(x)p(x)y(x).$$

Por regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d}{dx}[\alpha(x)y(x)] = \alpha(x) \frac{dy(x)}{dx} + \frac{d\alpha(x)}{dx}y(x).$$

Comparando ambas ecuaciones, llegamos a

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = \alpha(x)p(x),$$

resolviendo la ecuación separable,

$$\int \frac{d\alpha(x)}{\alpha(x)} = \int p(x)dx \rightarrow \alpha(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Ahora, por definición,

$$\frac{d}{dx}[\alpha(x)y(x)] = \alpha(x)q(x),$$

integrando obtenemos:

$$\alpha(x)y(x) = \int \alpha(x)q(x) + C.$$

Reemplazando la expresión para  $\alpha(x)$  encontramos la solución

$$(4.12) \quad y(x) = e^{-\int^x p(z)dz} \left[ \int e^{\int^x p(z)dz} q(x)dx + C \right].$$

Como notamos, esta solución se compone de dos partes,  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ . La función  $y_2$ , i.e.

$$(4.13) \quad y_2(x) = ce^{-\int^x p(z)dz}$$

es la solución de la homogénea asociada.

Ahora, se enunciarán dos teoremas importantes sobre las EDO lineales.

**TEOREMA 4.1.** *Si existen dos soluciones independientes de la EDO lineal*

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

*su diferencia es solución a la homogénea.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $y_1, y_2$  soluciones independientes de la EDO lineal. Con esto tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} y'_1 + py_1 &= q \\ y'_2 + py_2 &= q \end{aligned}$$

Si restamos la primera ecuación a la segunda obtenemos

$$(y_2 - y_1)' + p(y_2 - y_1) = 0.$$

Entonces  $\Delta y = y_2 - y_1$  es la solución de la homogénea. ■

**TEOREMA 4.2.** *Si  $y_1, y_2$  son soluciones para la EDO lineal y homogénea*

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0,$$

*entonces  $y_1 = cy_2$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Dadas las soluciones se tiene

$$\frac{y'_1}{y_1} = -p \quad , \quad \frac{y'_2}{y_2} = -p,$$

igualando las ecuaciones:

$$\frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2} \Rightarrow \ln y_1 = \ln y_2 + c_1.$$

Por propiedades de los logaritmos:

$$\ln y_2 + c_1 = \ln cy_2, \quad \text{con } c_1 = \ln c.$$

Finalmente, llegamos a

$$\ln y_1 = \ln cy_2 \Rightarrow y_1 = cy_2. \quad \blacksquare$$

Esto es todo lo que se va a discutir sobre las EDO lineales. A continuación, vamos a desarrollar técnicas que nos permitirán atacar a EDO de segundo orden, que son las ecuaciones más comunes e importantes en física.

### 4.3. EDO de segundo orden

**4.3.1. Puntos Singulares.** Para las EDO de segundo orden no hay un método que funcione siempre. Empecemos analizando las EDO de segundo orden homogéneas, es decir, ecuaciones de la forma

$$(4.14) \quad y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0.$$

Lo primero que vamos a hacer es analizar si es que la ecuación tiene puntos singulares. Definamos primero qué es un punto singular.

**DEFINICIÓN 4.1.** Se dice que el punto  $x_0$  es singular regular si es que

$$(4.15) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = \infty,$$

y los siguientes límites convergen:

$$(4.16) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)P(x) = p \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2Q(x) = q, \quad p, q < +\infty$$

**DEFINICIÓN 4.2.** El punto  $x_0$  es un punto singular irregular si es que

$$(4.17) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)P(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2Q(x) = \infty.$$

La misma ecuación diferencial puede tener más de un punto singular. Usualmente, los puntos singulares aparecen en el 0 y en  $\infty$ . Para tratar de mejor manera con los límites al infinito definimos el cambio de variable

$$(4.18) \quad z = \frac{1}{x}.$$

Definimos además

$$(4.19) \quad w(z) = y(z^{-1}).$$

Con este cambio de variable calculamos la primera derivada de  $y$ :

$$y' = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2} w' = -z^2 w.$$

Además, la segunda derivada de  $y$  es:

$$y'' = \frac{d}{dx}(-z^2 w') = z^4 w'' + 2z^3 w'.$$

Reemplazamos esto en la ecuación diferencial para obtener:

$$z^4 w'' + 2z^3 w' - P(z^{-1}) z^2 w' + Q(z^{-1}) w(z) = 0,$$

dividiendo todo para  $z^4$  obtenemos:

$$(4.20) \quad w'' + \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} w' + \frac{Q(z^{-1})}{z^4} w = 0.$$

Defino ahora

$$(4.21) \quad \mathcal{P}(z) = \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2}, \quad \mathcal{Q}(z) = \frac{Q(z^{-1})}{z^4}.$$

Con esto podemos probar los límites para  $x \rightarrow \infty$  de manera más sencilla, ya que mandar a  $x$  al infinito es equivalente a  $z \rightarrow 0$ .

**EJEMPLO 4.1.** Encontrar los puntos singulares de la EDO

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Bessel.

Primero, tenemos que

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2},$$

calculamos los límites cuando  $x \rightarrow 0$  para ver si 0 es un punto singular y, si lo es, ver de qué tipo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xP(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 Q(x) = -n^2.$$

Por lo tanto 0 es un punto singular regular. Ahora veamos qué pasa con  $\infty$ . Encuentremos primero  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ .

$$\mathcal{P}(z) = \frac{2z - z}{z^2} = \frac{1}{z} \mathcal{Q}(z) = \frac{1}{z^4} (1 - \nu^2 z^2) = \frac{1}{z^4} - \frac{\nu^2}{z^2}.$$

Tomamos los respectivos límites:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{P}(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{Q}(z) = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \mathcal{P}(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \mathcal{Q}(z) = \infty.$$

Por lo tanto,  $\infty$  es un punto singular irregular. ■

**4.3.2. Método de Frobenius.** El método de Frobenius es una técnica para resolver EDO de segundo orden alrededor de un punto que no es singular o que es singular regular. La solución que nos da este método viene en forma de serie de potencias. Lo que hacemos, es tratar de buscar una solución de la forma

$$(4.22) \quad y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^{s+i}, \quad a_0 \neq 0$$

Usualmente, la solución se busca alrededor del 0, por lo que la solución se simplifica a

$$(4.23) \quad y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{s+i}.$$

La primera y segunda derivada de  $y$  vienen dadas por

$$(4.24) \quad y'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (s+i)a_i x^{s+i-1},$$

$$(4.25) \quad y''(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (s+i-1)(s+i)a_i x^{s+i-2},$$

respectivamente. Veamos un ejercicio para saber cómo se aplica este método.

EJEMPLO 4.2. *Encontrar la solución de la EDO  $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ .*

Aunque usar el método de Frobenius para esta ecuación es como matar a un hámster con un bomba nuclear (esta EDO tiene coeficientes constantes, no tiene ninguna irregularidad en el 0 y conocemos su solución desde el colegio), este ejemplo es solo para entender cómo funciona este método.

Reemplazamos los valores de  $y(x)$  y  $y''(x)$  en la EDO y obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (s+i-1)a_i x^{s+i-2} + \omega^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{s+i} = 0,$$

como el índice de las sumatorias es el mismo, podemos escribir

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(s+i-1)(s+i)a_i x^{s+i-2} + \omega^2 a_i x^{s+i}] = 0.$$

Veamos qué pasa con el término en corchetes cuando cambiamos el índice para ver si podemos encontrar un patrón:

$$\begin{aligned} \text{Con } i = 0 : & \quad s(s-1)a_0 x^{s-2} + \omega^2 a_0 x^s \\ \text{Con } i = 1 : & \quad (s+1)s a_1 x^{s-1} + \omega^2 a_1 x^{s+1} \\ \text{Con } i = 2 : & \quad (s+2)(s+1)a_2 x^s + \omega^2 a_2 x^{s+2} \\ \text{Con } i = 3 : & \quad (s+3)(s+2)a_3 x^{s+1} + \omega^2 a_3 x^{s+3}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Para que el resultado sea 0, se deben cancelar los términos que tengan el  $x$  elevado el mismo grado. Notamos que desde  $x^s$  se pueden cancelar los términos entre sí. Sin embargo,  $x^{s-2}, x^{s-1}$  no tienen ninguna pareja, por lo que se debe imponer condiciones para que el resultado sea 0. Para  $x^{s-2}$  tenemos:

$$s(s-1)a_0 x^{s-2} = 0,$$

debido a que se impuso que  $a_0 \neq 0$  y  $x^{s-2}$  es una variable, la condición que se debe cumplir es que

$$s(s-1) = 0 \rightarrow s = 0 \vee s = 1.$$

A esta ecuación cuadrática que nos da los valores de  $s$  se la conoce como la ecuación característica o indicial. Para la segunda condición tenemos:

$$(s + 1)s a_1 = 0,$$

ya tenemos dos valores de  $s$  dados por la primera condición. Si es que  $s = 0$ ,  $a_1$  puede tener cualquier valor. Pero si es que  $s = 1$ ,  $a_1 = 0$  necesariamente. Recordemos que no estamos buscando una solución general, solo queremos una solución, por lo que elegimos que  $a_1 = 0$  para que se pueda usar el valor de  $s = 1$ . Ahora que tenemos esto, busquemos un patrón para los coeficientes que acompañan a cada  $x^{s+j}$ , ya que queremos que estos sean iguales a 0. Es decir,

$$\sum_j B_j x^{s+j} = 0 \Rightarrow B_j = 0.$$

Escribamos los primeros términos para encontrar el patrón

$$\begin{aligned} B_0 &= \omega^2 a_0 + (s+2)(s+1)a_2 \\ B_1 &= \omega^2 a_1 + (s+3)(s+2)a_3 \end{aligned}$$

De manera general, notamos que

$$B_n = \omega^2 a_n + (n+s+2)(n+s+1)a_{n+2},$$

Con la condición de que  $B_n = 0$  se tiene

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+s+2)(n+s+1)},$$

a esta relación se la conoce como relación de recurrencia, y es lo que nos permitirá encontrar la solución. Debido a que  $a_1 = 0$ , debido a la relación de recurrencia tenemos que

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{2n+1} = 0.$$

Esto nos deja únicamente con los coeficientes  $a_{2n}$ . Usando el primer valor de  $s$ ,  $s = 0$  tenemos:

$$a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Calculando los primeros términos se tiene

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\omega^2}{2!} a_0 \\ a_4 &= -\frac{\omega^2}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{\omega^2}{4 \cdot 3} \left( -\frac{\omega^2}{2!} a_0 \right) = \frac{\omega^4}{4!} a_0 \\ a_6 &= -\frac{\omega^2}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{\omega^2}{6 \cdot 5} \left( \frac{\omega^4}{4!} a_0 \right) = -\frac{\omega^6}{6!} a_0, \end{aligned}$$

de manera general:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0.$$

Poniendo esto en la solución tenemos:

$$y_0(x) = a_0 \sum_n (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

recordando expansión en series de Taylor, vemos que esta suma de polinomios es el coseno, por lo tanto

$$y_0(x) = a_0 \cos(\omega x).$$

Hacemos el mismo proceso para  $s = 1$  y vamos a llegar a:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0$$

$$y_1(x) = \frac{a_0}{\omega} \sum_n (-1)^n \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega x).$$

De esta manera hemos encontrado las dos soluciones independientes de la EDO, la solución general viene dada por

$$y(x) = a_0 \cos(\omega x) + b_0 \sin(\omega x),$$

que es la solución que ya conocíamos. ■

#### 4.3.3. Limitaciones del Método de Frobenius.

4.3.3.1. *Puntos singulares irregulares.* El método de Frobenius funciona en la mayoría de los casos en puntos que no son singulares o son singulares regulares. Cuando el punto es singular irregular, el método, por lo general, falla y no da ninguna solución.

EJEMPLO 4.3. *Usar el método de Frobenius para hallar la solución de la EDO*

$$y'' - \frac{6}{x^3}y = 0.$$

Debido a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 Q(x) = \infty,$$

0 es un punto singular irregular. Usando  $y(x) = \sum_i a_i x^{s+i}$  se tiene:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (s+i-1)(s+i)a_i x^{s+i-2} - \frac{6}{x^3} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{s+i} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(s+i-1)(s+i)a_i x^{s+i-2} - 6a_i x^{s+i-3}] = 0$$

Analizando los primeros términos tenemos:

$$\begin{aligned} i = 0 : \quad & s(s-1)a_0 x^{s-2} - 6a_0 x^{s-3} \\ i = 1 : \quad & (s+1)s a_1 x^{s-1} - 6a_1 x^{s-2} \\ i = 2 : \quad & (s+2)(s+1)a_2 x^s - 6a_2 x^{s-1} \end{aligned}$$

Desde  $x^{s-2}$  todos los términos tienen una pareja, por lo que debemos condicionar el término que acompaña a  $x^{s-3}$ :

$$-6a_0 x^{s-3} = 0 \Rightarrow a_0 = 0.$$

Nuestra única asunción para usar el método de Frobenius es que  $a_0 \neq 0$ , por lo que el método falla en encontrar una solución a esta EDO. ■

4.3.3.2. *Una sola solución.* Aunque este método nos da una solución a la EDO, no nos asegura que encontremos las dos soluciones independientes a la ecuación.

EJEMPLO 4.4. *Resolver la EDO*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Reescribimos la ecuación como

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{x} \right)^2 \right] y = 0,$$

esto no afecta al resultado, solo es por cuestiones estéticas de dejar solo al término de segundo orden. Asumimos una solución de la forma  $y(x) = \sum_i a_i x^{s+i}$  y reemplazamos en la ecuación

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \{(s+i-1)(s+i)a_i x^{s+i-2} + (s+i)a_i x^{s+i-2} + a_i x^{s+i} - \nu^2 a_i x^{s+i-2}\} &= 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} \{a_i x^{s+i-2} [(s+i)^2 - \nu^2] + a_i x^{s+i}\} &= 0 \end{aligned}$$

Miramos los primeros términos:

$$\begin{aligned} i = 0 : \quad &a_0 x^{s-2} (s^2 - \nu^2) + a_0 x^s \\ i = 1 : \quad &a_1 x^{s-1} [(s+1)^2 - \nu^2] + a_1 x^{s+1} \\ i = 2 : \quad &a_2 x^s [(s+2)^2 - \nu^2] + a_2 x^{s+2} \\ i = 3 : \quad &a_3 x^{s+1} [(s+3)^2 - \nu^2] + a_3 x^{s+3}. \end{aligned}$$

Desde  $x^s$  hay una pareja para cada potencia, por lo que se debe cumplir que

$$\begin{aligned} a_0 x^{s-2} (s^2 - \nu^2) = 0 &\Rightarrow s = \pm \nu, \\ a_1 x^{s-1} [(s+1)^2 - \nu^2] = 0 &\Rightarrow a_1 = 0. \end{aligned}$$

Buscamos la relación de recurrencia usando

$$\sum_j B_j x^{s+j} = 0 \Rightarrow B_j = 0,$$

expandiendo los primeros términos tenemos:

$$\begin{aligned} B_0 &= a_0 + a_2 [(s+2)^2 - \nu^2], \\ B_1 &= a_1 + a_3 [(s+3)^2 - \nu^2], \\ B_j &= a_j + a_{j+2} [(s+j+2)^2 - \nu^2] = 0, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$a_{j+2} = -a_j \frac{1}{(s+j+2)^2 - \nu^2}.$$

Escogemos el valor de  $s = \nu$  y obtenemos:

$$a_{j+2} = -a_j \frac{1}{(\nu+j+2)^2 - \nu^2} = -a_j \frac{1}{(j+2)(2\nu+j+2)}.$$

Debido a que  $a_1 = 0$ , tenemos que  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$ . Para los términos pares tenemos:

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \frac{\nu!}{2^2 1! (\nu+1)!}, \\ a_4 &= -a_2 \frac{1}{4 \cdot 2(\nu+2)} = a_0 \frac{\nu!}{2^4 2! (\nu+2)!}, \\ a_6 &= -a_4 \frac{1}{6 \cdot 2(\nu+3)} = -a_0 \frac{\nu!}{2^6 3! (\nu+3)!}, \\ a_{2p} &= (-1)^p a_0 \frac{\nu!}{2^{2p} p! (\nu+p)!}, \end{aligned}$$

en forma de suma la solución queda

$$y(x) = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\nu! x^{\nu+2j}}{2^{2j} j! (\nu+j)!}$$

$$(4.26) \quad J_n(x) \equiv y(x) = a_0 2^\nu \nu! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j!(\nu+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2j}.$$

A esta función se la conoce como la función de Bessel de primer orden y de grado  $\nu$ . Ahora, calculemos la solución para  $s = -\nu$ . Con esto la relación de recurrencia queda:

$$\begin{aligned} a_{j+2} &= -a_j \frac{1}{(-\nu + j + 2)^2 - \nu^2} \\ &= -a_j \frac{1}{(-2\nu + j + 2)(j + 2)}, \end{aligned}$$

con  $j + 2 = 2\nu$ , la suma diverge, pues el denominador es igual a 0. Por lo tanto, no podemos encontrar otra solución en serie convergente a la ecuación de Bessel usando el método de Frobenius. Hay algunos métodos que se usan para poder encontrar la segunda solución, los cuales se discutirán más adelante. ■

#### 4.3.4. Teorema de Fuchs.

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = 0,$$

en este caso, 0 es un punto singular regular. Si usamos el método de Frobenius, llegamos a lo siguiente:

$$\sum_n [(s+n)(s+n-1) - 6] a_n x^{s+n-2} = 0.$$

Aunque el punto es singular regular, no es posible construir una relación de recurrencia. Si es que escogemos  $n = 0$ , llegamos a la ecuación indicial:

$$s(s-1) - 6 = 0 \Rightarrow s(s-1) = 6,$$

lo que da como resultado  $s_1 = 3, s_2 = -2$ . Ya que no hay relación de recurrencia, las soluciones serían

$$y_1(x) = a_0 x^3, \quad y_2(x) = \frac{a_0}{x^2},$$

si es que reemplazamos estas funciones en la ecuación, vemos que son soluciones de la EDO. Por ahora, hemos visto ejemplos de varias EDO que se han resuelto por el método de Frobenius, algunas veces hemos obtenido las 2 soluciones independientes, otras solo hemos obtenido una solución y otras no hemos podido obtener ninguna. Por esta razón es necesaria una manera de generalizar nuestro conocimiento de cuándo el método de Frobenius nos entrega, o no, la solución de una EDO del segundo orden.

**TEOREMA 4.1. (Teorema de Fuchs).** *Si es que se está expandiendo alrededor de un punto ordinario, o singular regular, la serie obtenida por el método de Frobenius producirá por lo menos una solución. Después de obtener la ecuación indicial, si es que  $s_1 = s_2$ , solo obtendremos una solución. Por otro lado, si es que  $s_1 \neq s_2$  tendremos dos casos:*

- $|s_1 - s_2| = \eta, \eta \notin \mathbb{Z}$ . Se producen dos soluciones necesariamente.
- $|s_1 - s_2| = N, N \in \mathbb{N}$ . El  $\max(s_1, s_2)$  produce una solución, el otro, no necesariamente.

**4.3.5. Simetría de las Soluciones.** Conocemos que las soluciones independientes del oscilador armónico, sacadas con el método de Frobenius, son

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0 \cos(\omega x), \\ y_2(x) &= \frac{a_0}{\omega} \sin(\omega x). \end{aligned}$$

Notamos que las soluciones cumplen tienen la siguiente característica:

$$\begin{aligned} y_1(-x) &= y_1(x) && \text{Paridad Par} \\ y_2(-x) &= -y_2(x) && \text{Paridad Impar} \end{aligned}$$

Esta característica de las soluciones no es casual. Escribamos el operador diferencial de esta ecuación:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{d}{dx^2} + \omega^2, \quad \mathcal{L}(x)y(x) = 0$$

Notamos que, para este caso

$$\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(x),$$

demostremos este resultado formalmente.

**TEOREMA 4.2.** *Sea  $x' = -x$ , entonces*

$$(4.27) \quad \frac{d}{dx'} = -\frac{d}{dx} \quad y \quad \frac{d^2}{dx'^2} = \frac{d^2}{dx^2}.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Con el cambio de variable  $x' = -x$  usamos regla de la cadena y tenemos

$$\frac{d}{dx'} = \frac{dx}{dx'} \frac{d}{dx} = -\frac{d}{dx}.$$

Para la segunda derivada tenemos:

$$\frac{d^2}{dx'^2} = \frac{d}{dx'} \left( -\frac{d}{dx} \right) = \frac{dx}{dx'} \frac{d}{dx} \left( -\frac{d}{dx} \right) = -\frac{d}{dx} \left( -\frac{d}{dx} \right) = \frac{d^2}{dx^2}.$$

Demostrando de esta manera lo que se quería. ■

Para el operador diferencial del oscilador armónico tenemos

$$\frac{d^2}{d(-x)^2} + \omega^2 = \frac{d}{dx^2} + \omega^2,$$

usando el Teorema 4.1. Por lo que llegamos a la conclusión que  $\mathcal{L}(-x) = \mathcal{L}(x)$ , es decir, el operador diferencial tiene paridad par. Con esto podemos obtener el siguiente resultado.

**TEOREMA 4.3.** *Si el operador diferencial  $\mathcal{L}(x)$  tiene paridad y  $y(x)$  es una solución a la EDO  $\mathcal{L}(x)y(x) = 0$ , entonces  $y(-x)$  también es solución a la EDO.*

**DEMOSTRACIÓN.** Separamos la prueba en dos casos. Para el primer paso supongamos que  $\mathcal{L}(x)$  tiene paridad par. Hacemos el cambio de  $x$  a  $-x$  y tenemos:

$$\mathcal{L}(-x)y(-x) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(x)y(-x) = 0,$$

debido a que  $\mathcal{L}(x)$  es par. En el caso de que  $\mathcal{L}(x)$  sea impar, tenemos en cambio

$$\mathcal{L}(-x)y(-x) = 0 \Rightarrow -\mathcal{L}(x)y(-x) = 0,$$

el negativo se absorbe multiplicando ambos lados por -1 y obtenemos que  $y(-x)$  también solución de la EDO. ■

Para estas soluciones, podemos tener dos posibilidades:

1.  $y(x)$  y  $y(-x)$  son l.d., es decir:

$$y(-x) = \alpha y(x),$$

siendo  $\alpha$  un número cualquiera, pero solo nos interesa los casos en los que  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ .

2.  $y(x)$  y  $y(-x)$  son l.i.

En el caso de que las soluciones sean l.i., son las soluciones que queríamos encontrar y no se necesita calcular nada más. Por el otro lado, cuando las soluciones son l.d., puedo construir una función par e impar independientes de la siguiente manera:

$$(4.28) \quad y_{\text{par}}(x) = y(x) + y(-x),$$

$$(4.29) \quad y_{\text{impar}}(x) = y(x) - y(-x).$$

De manera general, cualquier EDO homogénea de segundo orden puede ser par, impar, o ninguna de las 2, i.e., no tiene paridad. Esto depende de la paridad que tengan  $P(x)$  y  $Q(x)$ . Los resultados de la paridad se resumen en la siguiente tabla:

$Q(x)/P(x)$	Par	Impar	Cero	Ninguna
Par	Sin Paridad	Paridad Par	Paridad Par	Sin Paridad
Impar	Sin Paridad	Sin Paridad	Sin Paridad	Sin Paridad
Cero	Sin Paridad	Paridad Par	Paridad Par	Sin Paridad
Ninguna	Sin Paridad	Sin Paridad	Sin Paridad	Sin Paridad

TABLA 1. Paridad del operador diferencial según los valores de  $P(x)$  y  $Q(x)$

**4.3.6. Wronskiano.** Supongamos ahora que un amigo nos da entrega  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  soluciones de una ecuación diferencial. ¿Cómo sabemos si estas soluciones son l.d. o l.i.? Si que la solución  $\phi_j$  es l.d., tenemos:

$$\phi_j = \sum_{i \neq j} a_i \phi_i,$$

reescribiendo tenemos:

$$(4.30) \quad \sum_{\lambda} k_{\lambda} \phi_{\lambda} = 0, \quad \text{con por lo menos un } k_{\lambda} \neq 0$$

Aplicamos la derivada a este resultado. Usualmente en física, las funciones se comportan de buena manera, por lo que si tenemos  $n$  ecuaciones, todas las  $\phi_j \in C^{n-1}(\mathbb{R})$ , es decir, las funciones pertenecen al espacio de funciones cuya  $n-1$ -ésima derivada existe y es continua. Con esto, podemos encontrar información sobre los  $k_{\lambda}$ , si resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} \phi_1 k_1 + \phi_2 k_2 + \cdots + \phi_n k_n &= 0 \\ \phi'_1 k_1 + \phi'_2 k_2 + \cdots + \phi'_n k_n &= 0 \\ \phi''_1 k_1 + \phi''_2 k_2 + \cdots + \phi''_n k_n &= 0 \\ &\vdots \\ \phi_1^{n-1} k_1 + \phi_2^{n-1} k_2 + \cdots + \phi_n^{n-1} k_n &= 0 \end{aligned}$$

Todos los  $k_i$  son constantes desconocidas. No nos sirve de nada resolver el sistema para calcular los  $k_i$ , sino que queremos saber si estas ecuaciones son l.d. o

l.i. Para esto podemos calcular el siguiente determinante:

$$(4.31) \quad W(x) \equiv \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \phi'_1 & \phi'_2 & \cdots & \phi'_n \\ \phi''_1 & \phi''_2 & \cdots & \phi''_n \\ \vdots & & & \\ \phi_1^{n-1} & \phi_2^{n-1} & \cdots & \phi_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Definimos este determinante como el wronskiano. Si es que  $W(x) = 0$ , las soluciones son dependientes, en cambio, si  $W(x) \neq 0$  las soluciones son independientes. De esta manera, podemos saber si es que un conjunto de soluciones de una EDO es l.d. o l.i.

Por otro lado, si es que tenemos dos conjuntos de soluciones l.i. podemos demostrar que si las soluciones son independientes, también son ortogonales.

**TEOREMA 4.4.** *Dos conjuntos de soluciones son l.i. si y solo si son ortogonales.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean los conjuntos de soluciones  $k_1\phi_1, \dots, k_\lambda\phi_\lambda$  y  $k_1^*\phi_1^*, \dots, k_\mu\phi_\mu$ . Calculemos el siguiente producto

$$\left\langle \sum_{\lambda} k_{\lambda}\phi_{\lambda} \middle| \sum_{\mu} k_{\mu}\phi_{\mu} \right\rangle = \sum_{\lambda\mu} k_{\lambda}k_{\mu}\langle \phi_{\lambda} | \phi_{\mu} \rangle,$$

por linealidad del producto punto. Luego tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\mu} k_{\lambda}k_{\mu}\langle \phi_{\lambda} | \phi_{\mu} \rangle &= \sum_{\lambda\mu} k_{\lambda}k_{\mu}\delta_{\mu\lambda} \\ &= \sum_{\lambda} |k_{\lambda}|^2, \end{aligned}$$

si es que la única manera de que la suma sea 0 es que todos los  $k_{\lambda}$  sean 0, entonces, además de ser soluciones independientes, son soluciones ortogonales. ■

**4.3.7. Wronskianos Parciales.** Supongamos que tenemos el conjunto de soluciones de una EDO homogénea de segundo orden  $y_1, y_2, y_3$ . Puedo calcular wronskianos parciales entre dos de las soluciones:

$$(4.32) \quad W_{jk} = y_j y'_k - y'_j y_k.$$

Si es que tomamos la derivada de este resultado obtendremos:

$$\begin{aligned} W'_{jk} &= y'_j y'_k + y_j y''_k - y'_j y'_k - y''_j y_k \\ &= y_j y''_k - y''_j y_k, \end{aligned}$$

con esto, se puede demostrar que no hay 3 soluciones independientes de una EDO de segundo orden.

**TEOREMA 4.5.** *La ecuación  $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$  no tiene 3 soluciones independientes  $y_1, y_2, y_3$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Divido a la ecuación por  $y(x)$  y se obtiene:

$$\frac{y''}{y} + P \frac{y'}{y} + Q = 0,$$

omitiendo la dependencia en  $x$ . Despejando  $-Q$  y reemplazando las soluciones  $y_j, y_k$  en la ecuación se tiene:

$$\frac{y''_j}{y_j} + \frac{y'_j}{y_j}P = \frac{y''_k}{y_k} + \frac{y'_k}{y_k}P,$$

multiplicando por  $y_j y_k$  y separando los términos que comparten la  $P$  tenemos:

$$y_j y''_k - y''_j y_k = -P(y_j y'_k - y'_j y_k).$$

Notamos que el lado izquierdo de la ecuación corresponde con  $W'$ , mientras que al lado derecho, el término en paréntesis, corresponde con  $W$ . Con esto, llegamos al resultado

$$(4.33) \quad W'_{jk} = -PW_{jk}.$$

Ahora, calculemos el Wronskiano del conjunto de soluciones:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} \\ &= -y'_1 W'_{23} + y'_2 W'_{13} - y'_3 W'_{12} \\ &= P(y'_1 W_{23} - y'_2 W_{13} + y'_3 W_{12}) \\ &= P[y'_1(y_2 y'_3 - y'_2 y_3) - y'_2(y_1 y'_3 - y'_1 y_3) + y'_3(y_1 y'_2 - y'_1 y_2)] \\ &= P[y_1(y'_2 y'_3 - y'_2 y'_3) + y_2(y'_1 y'_3 - y'_3 y'_1) + y_3(y'_1 y'_2 - y'_2 y'_1)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado, por definición del Wronskiano, que las 3 soluciones no son soluciones independientes de la EDO. ■

#### 4.3.8. Segunda Solución.

4.3.8.1. *Método Integral.* Para hallar la segunda solución independiente de una EDO del segundo orden, la podemos hallar usando integrales. Para esto, el resultado

$$W'(x) = -P(x)W(x)$$

obtenido en la sección anterior tiene un rol fundamental. Ahora, tenemos dos casos: el simplificado en el que  $P(x) = 0$  y el general en el que  $P(x) \neq 0$ . Para el primer caso, tenemos una ecuación de la forma

$$y''(x) + Q(x)y(x) = 0,$$

debido a que  $P(x) = 0$ . Además, tenemos que

$$(4.34) \quad W' = 0 \Rightarrow W = cte,$$

escrito de diferente manera tenemos que:

$$(4.35) \quad W(x) = W(a).$$

Podemos reescribir el Wronskiano de manera más conveniente (pero formalmente igual a la definición propuesta) para este caso como

$$(4.36) \quad W(x) = y_1^2(x) \left[ \frac{y'_2}{y_1} - \frac{y_2}{y_1^2} y'_1 \right] = y_1^2(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right],$$

si despejamos el término de la derivada, nos quedamos con la EDO:

$$(4.37) \quad \frac{d}{dx} \left[ \frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right] = \frac{W(a)}{y_1^2}.$$

Como notamos, el único término que desconocemos es  $y_2(x)$ , la segunda solución<sup>1</sup>. Si integramos a ambos lados la EDO anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \int_b^x \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} dx_1 \right] &= W(a) \int_b^x \frac{dx_1}{y_1^2(x_1)}, \\ \frac{y_2(x)}{y_1(x)} - \frac{y_2(b)}{y_1(b)} &= W(a) \int_b^x \frac{dx_1}{y_1^2(x_1)}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Aunque sea evidente, cabe recalcar que el método de la segunda solución solo sirve si es que ya conocemos la primera. No hay manera de hallar la segunda solución si desconocemos la primera.

por el Teorema Fundamental del Cálculo. Despejando  $y_2(x)$  y renombrando las constantes  $W(a) \equiv A, y_2(b)/y_1(b) \equiv B$  tenemos:

$$y_2(x) = Ay_1(x) \int_b^x \frac{dx_1}{y_1^2(x_1)} + By_1(x).$$

Recordemos que podemos expresar la solución general de una EDO homogénea del segundo orden como

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

por tanto, el término  $By_1(x)$  no nos brinda ninguna información adicional, pues es solo un múltiplo de  $c_1 y_1(x)$ . Además, las constantes se determinan por las condiciones de borde del problema, por lo que también podemos omitir la constante  $A$  y quedarnos solo con la parte funcional. Con esto, podemos expresar la segunda solución como la familia de funciones:

$$(4.38) \quad y_2(x) = y_1(x) \int_x \frac{dx_1}{y_1^2(x_1)}.$$

**EJEMPLO 4.5.** Encontrar la segunda solución del oscilador armónico,  $y'' + \omega^2 y = 0$ , conociendo que la primera solución es  $y_1(x) = \sin(\omega x)$

Este ejemplo es trivial e innecesario, ya que conocemos la segunda solución, además de que la obtuvimos con el método de Frobenius. Sin embargo, para saber como es la mecánica del método integral para encontrar la segunda solución, hagamos el cálculo. Tenemos que

$$\int_x \frac{dx_1}{\sin^2(\omega x_1)} = -\frac{1}{\omega} \cot(\omega x),$$

reemplazando esto en la segunda solución, y usando la definición de la cotangente como  $\cos(\omega x)/\sin(\omega x)$  nos lleva a

$$y_2(x) = \sin(\omega x) \left[ -\frac{1}{\omega} \frac{\cos(\omega x)}{\sin(\omega x)} \right] = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega x).$$

Obteniendo de esta manera la tan inesperada solución del coseno. ■

En el caso general, en el que  $P(x) \neq 0$ , vamos a tener

$$(4.39) \quad \frac{dW(x)}{dx} = -P(x)W(x),$$

usando separación de variables, pues ya no es posible simplificar esta expresión, vamos a tener

$$\int_{W(a)}^{W(x)} \frac{dW}{W} = - \int_a^x P(x_1) dx_1.$$

Desarrollando esta expresión y despejando  $W(x)$  llegamos a

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x P(x_1) dx_1 \right].$$

Reemplazando la expresión anterior en la ecuación 4.36 e integrando ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\int_b^x \frac{d}{dx_1} \left[ \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} dx_1 \right] = W(a) \int_b^x \frac{\exp \left[ - \int_a^{x_2} P(x_1) dx_1 \right]}{y_1^2(x_2)} dx_2.$$

Despejamos  $y_2(x)$  de esta expresión como hicimos en el caso simplificado y usamos las constantes  $A, B$  definidas para el caso anterior. Con esto tenemos:

$$y_2(x) = Ay_1(x) \int_b^x \frac{\exp \left[ - \int_a^{x_2} P(x_1) dx_1 \right]}{y_1^2(x_2)} dx_2 + By_1(x),$$

por el mismo argumento que en caso más sencillo, el término  $By_1(x)$  no aporta ninguna información. Podemos omitir las constantes de integración en ambas integrales, dejándonos solo con la parte funcional:

$$(4.40) \quad y_2(x) = y_1(x) \int_x \frac{\exp \left[ - \int_{x_2} P(x_1) dx_1 \right]}{y_1^2(x_2)} dx_2.$$

En el caso de que  $P(x) = 0$ , el término exponencial se vuelve 1, dejándonos con el caso más simple propuesto anteriormente. Como es de esperarse, este método es más complicado mientras más difíciles sean las integrales, pero si se tiene ayuda de un software matemático para estas operaciones nos puede resultar de gran ayuda.

*4.3.8.2. Método de series.* Hemos visto cómo poder calcular la segunda solución usando integrales. Ahora, vamos a ver otro método, el cual usa series de potencias para poder hallar la segunda solución. Para esto, escribimos  $P(x), Q(x)$  de la siguiente manera:

$$(4.41) \quad P(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i, \quad Q(x) = \sum_{i=-2}^{\infty} q_i x^i.$$

La elección de los límites inferiores de las sumatorias no es al alzar. Recordemos que un punto es singular regular si es que  $\lim_{x \rightarrow 0} xP(x) = l \wedge \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x) = m$ ; con  $l, m < \infty$ . Que la expansión en serie de potencias de  $P(x)$  empiece en -1 y la de  $Q(x)$  en -2 nos asegura que el punto en el que vamos a expandir la solución sea ordinario o singular regular. Este método es de gran utilidad si es que  $P$  y  $Q$  son polinomios. Ahora, con el método de Frobenius hayamos la primera solución suponiendo que tiene la forma

$$y(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+s}.$$

Si reemplazamos esto en la ecuación  $y'' + Py' + Qy = 0$ , junto con la expansión polinomial de  $P$  y  $Q$  llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda + s)(\lambda + s - 1) a_{\lambda} x^{\lambda+s-2} &+ \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda + s) a_{\lambda} x^{\lambda+s-1} \\ &+ \sum_{i=-2}^{\infty} q_i x^i \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+s} = 0. \end{aligned}$$

Notamos que la menor potencia de  $x$  es  $s-2$ , y la obtenemos cuando  $\lambda = 0, i(p) = -1, i(q) = -2$ . Reemplazando estos valores en la ecuación anterior nos lleva a

$$(4.42) \quad a_0 x^{s-2} [s(s-1) + p_{-1}s + q_{-2}] = 0.$$

Debido a que  $a_0, x^{s-2} \neq 0$ , obtenemos la ecuación indicial:

$$(4.43) \quad s(s-1) + p_{-1}s + q_{-2} = 0.$$

Sabemos, por el teorema de Fuchs, que la ecuación tiene dos soluciones:

$$s_1 = \alpha, \quad s_2 = \alpha - n,$$

con  $n \in \mathbb{N}$ . Esto implica que

$$(s - \alpha)(s - \alpha + n) = 0.$$

Desarrollando esta expresión tenemos:

$$(4.44) \quad s^2 + (n - 2\alpha)s + \alpha(\alpha - n) = 0.$$

Comparando 4.43 con 4.42 tenemos que

$$(4.45) \quad p_{-1} - 1 = n - 2\alpha.$$

Por el teorema de Fuchs, el método de Frobenius nos tiene que dar la primera solución con valor indicial más alto, por lo que:

$$y_1(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+\alpha} = x^{\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda}.$$

Ya sabemos que podemos encontrar la segunda solución de manera integral con

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x \frac{\exp \left[ - \int_{x_2} P(x_1) dx_1 \right]}{y_1^2(x_2)} dx_2.$$

, por lo tanto, reemplazamos  $y_1(x)$  y nuestra expansión en potencias de  $P(x)$  para obtener:

$$(4.46) \quad y_2(x) = y_1(x) \int_x \frac{\exp \left[ - \int_{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 \right]}{x_2^{2\alpha} [\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda}]^2} dx_2.$$

Si resolvemos la integral del exponente tenemos:

$$\int_{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 = p_{-1} \ln(x_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1}.$$

Ahora, recordemos que la función exponencial se puede expresar como serie de potencias usando series de Taylor, es decir:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

con esto en mente y con la integral del exponencial resuelta, podemos escribir

$$\begin{aligned} \exp \left[ - \int_{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 \right] &= \exp \left[ -p_{-1} \ln(x_2) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} \right] \\ &= \exp \left[ \ln^{-p_{-1}}(x_2) \right] \exp \left[ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} \right] \\ &= x_2^{-p_{-1}} \left[ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} - \frac{1}{2!} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

El término en corchetes es una serie, la cual podemos reescribir como

$$1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} - \frac{1}{2!} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} x_2^{k+1} \right)^2 + \dots \equiv \sum_{\gamma=0}^{\infty} \pi_{\gamma} x_2^{\gamma},$$

dónde  $\pi_{\gamma}$  es una constante que depende de los  $p_k$  y constantes de la suma anterior.

Es decir, los primeros valores para  $\pi_{\gamma}$  son:

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_1 = -p_0, \quad \pi_2 = \frac{1}{2!}(p_0^2 - p_1), \quad \pi_3 = \frac{1}{3!}(3p_0p_1 - p_0^3 - 2p_2), \quad \dots$$

estos términos se obtuvieron expandiendo la sumatoria anterior y juntando todas las constantes que compartían cierto  $x^{\gamma}$ . Con esto, concluimos que

$$(4.47) \quad \exp \left[ - \int_{x_2} \sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1 \right] = x_2^{-p_{-1}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \pi_{\gamma} x_2^{\gamma}.$$

El término en el denominador lo podemos arreglar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{x_2^{2\alpha} [\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda}]^2} = x_2^{-2\alpha} \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda} \right]^{-2} = x_2^{-2\alpha} [a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots]^{-2}.$$

Si sacamos factor común  $a_0$ , la expresión en corchetes la podemos escribir como:

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots = a_0 \left( 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{a_{\lambda}}{a_0} x_2^{\lambda} \right).$$

Si a la expresión anterior elevamos a cualquier potencia, notamos que tiene la forma de la expansión binomial. Por lo tanto, podemos escribir:

$$\frac{1}{x_2^{2\alpha} [\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda}]^2} = x_2^{-2\alpha} \frac{1}{a_0^2} \left[ 1 - 2 \frac{a_1}{a_0} x_2 + \left( \frac{3a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} \right) x_2^2 + \cdots \right].$$

Con un razonamiento similar al ya usado, podemos reescribir la serie

$$\frac{1}{a_0^2} \left[ 1 - 2 \frac{a_1}{a_0} x_2 + \left( \frac{3a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} \right) x_2^2 + \cdots \right] \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} x_2^{\lambda},$$

dónde los  $b_{\lambda}$  dependen de los valores  $a_{\lambda}$  y constantes de la suma anterior. Es decir,

$$b_0 = \frac{1}{a_0^2}, \quad b_1 = -2 \frac{a_1}{a_0^3}, \quad b_2 = \frac{3a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^4}, \quad \dots$$

Usando lo anterior llegamos a

$$(4.48) \quad \frac{1}{x_2^{2\alpha} [\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x_2^{\lambda}]^2} = x_2^{-2\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} x_2^{\lambda}.$$

Juntando las expresiones 4.47 y 4.48, podemos escribir la segunda solución como

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x x_2^{-(p-1+2\alpha)} \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} x_2^{\lambda} \right] \left[ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \pi_{\gamma} x_2^{\gamma} \right] dx_2.$$

La multiplicación de dos series es también una serie, por lo que definimos:

$$\sum_{\delta=0}^{\infty} c_{\delta} x_2^{\delta} \equiv \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda} x_2^{\lambda} \right] \left[ \sum_{\gamma=0}^{\infty} \pi_{\gamma} x_2^{\gamma} \right], \quad \text{con } c_{\delta} = \sum_{\gamma=0}^{\delta} \pi_{\gamma} b_{\delta-\gamma}.$$

Reescribimos así la segunda solución como

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x x_2^{-(p-1+2\alpha)} \sum_{\delta=0}^{\infty} c_{\delta} x_2^{\delta} dx_2,$$

por la ecuación 4.44 tenemos:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x x_2^{-n-1} \sum_{\delta=0}^{\infty} c_{\delta} x_2^{\delta} dx_2,$$

expandiendo la serie tenemos:

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x (c_0 x_2^{-n-1} + c_1 x_2^{-n} + c_2 x_2^{-n+1} + \cdots + c_n x_2^{-1} + \cdots) dx_2$$

Notamos que todos los términos, excepto el que está elevado a la  $-1$ , van a tener una integral de la forma:

$$\int_x c_i x_2^{i-n-1} = \frac{c_i x_2^{i-n}}{i-n} = \frac{c_{l+n}}{l} x^l, \quad \text{definiendo } l \equiv i-n.$$

Esta expresión es válida  $\forall i$ , excepto para  $n$  y se puede simplificar más definiendo  $g_l \equiv c_{l+n}/l$ . Para el caso en que  $i = n$  tenemos:

$$\int_x \frac{c_n}{x_2} dx_2 = c_n \ln |x|.$$

Tomamos el valor absoluto por cuestiones de paridad. Con los resultados anteriores, tenemos:

$$y_2(x) = y_1(x) \left[ c_n \ln |x| + \sum_{l=-n}^{\infty} g_l x^l \right],$$

desarrollando la expresión tenemos:

$$y_2(x) = c_n y_1(x) \ln(x) + \left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\alpha+\lambda} \right] \left[ \sum_{l=-n}^{\infty} g_l x^l \right].$$

Multiplicando ambas series obtendremos:

$$\left[ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\alpha+\lambda} \right] \left[ \sum_{l=-n}^{\infty} g_l x^l \right] = \sum_{j=-n}^{\infty} \tilde{d}_j x^{j+\alpha}, \quad \tilde{d}_j = \sum_{\lambda=-n}^j g_{\lambda} a_{j-\lambda}.$$

Finalmente, sacamos factor común  $c_n$  y definimos  $d_j \equiv \tilde{d}_j/c_n$  para obtener (solo la parte funcional):

$$(4.49) \quad y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + \sum_{j=-n}^{\infty} d_j x^{j+\alpha}$$

De esta manera, hayamos la segunda solución de una EDO homogénea de segundo orden.

**EJEMPLO 4.6.** Encontrar la segunda solución para la ecuación de Bessel de orden 0

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0.$$

Notamos que

$$P(x) = x^{-1}, \quad Q(x) = 1,$$

por lo tanto,  $p_{-1} = 1, q_0 = 1$ ; el resto de  $p_i, q_i$  son 0. Recordando que la primera solución de la ecuación de Bessel de orden 0, sacada de la ecuación 4.26 (tomando la constante  $a_0 = 1$ ) viene dada por

$$(4.50) \quad y_1(x) = J_0 = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{(j!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - O(x^6).$$

Usando la expresión 4.46 tenemos:

$$y_2(x) = J_0(x) \int_x \frac{\exp \left[ - \int_{x_2} x_1^{-1} dx_1 \right]}{\left[ 1 - x_2^2/4 + x_2^4/64 - \dots \right]^2} dx_2.$$

Para el numerador de la integral se tiene

$$\exp \left[ - \int_{x_2} \frac{dx_1}{x_1} \right] = \exp[-\ln x_2] = \frac{1}{x_2}.$$

Para el denominador, usando expansión en series binomial tenemos:

$$\left[ 1 - \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_2^4}{64} - \dots \right]^{-2} = 1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + \dots,$$

con lo que tenemos:

$$y_2(x) = J_0(x) \int_x \frac{1}{x_2} \left[ 1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{5x_2^4}{32} + \dots \right] dx_2,$$

integrando, llegamos finalmente a

$$(4.51) \quad y_2(x) = J_0(x) \left[ \ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots \right].$$

Por linealidad de la solución, podemos añadir múltiplos de  $J_0$  y también multiplicar a toda la solución por una constante, con esto, llegamos a la formulación usual de la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden 0:

$$(4.52) \quad N_0(x) \equiv y_2(x) = \frac{2}{\pi} [\ln x - \ln 2 + \gamma] J_0(x) + \frac{2}{\pi} J_0(x) \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \dots \right\},$$

llamamos a  $N_0$  la función de Neumann de orden 0 y  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni definida por

$$(4.53) \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=1}^n m^{-1} - \ln(n) \right].$$

**EJEMPLO 4.7.** Encontrar la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden  $\nu$  dada por

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

Para este caso, vamos a usar directamente la ecuación 4.49. Con esto, tenemos una solución de la forma

$$y_2(x) = J_\nu(x) \ln |x| + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} d_j x^{j+\nu},$$

recordemos que  $n$  era la separación entre los dos índices de la ecuación indicial, como en este caso teníamos  $s_1 = \nu, s_2 = -\nu \Rightarrow n = -2\nu$ . Además, el índice más alto  $\alpha$  en este caso es  $\nu$ . Calculando la primera y segunda derivada de esta solución obtenemos:

$$\begin{aligned} y'_2(x) &= J'_\nu(x) \ln x + \frac{J_\nu(x)}{x} + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} (j+\nu) d_j x^{j+\nu-1}, \\ y''_2(x) &= J''_\nu(x) \ln x + 2 \frac{J'_\nu(x)}{x} - \frac{J_\nu(x)}{x^2} + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} (j+\nu)(j+\nu-1) d_j x^{j+\nu-2}. \end{aligned}$$

Si reemplazamos estas expresiones en la ecuación de Bessel obtendremos:

$$\begin{aligned} [x^2 J''_\nu + x J'_\nu + (x^2 - \nu^2) J_\nu] \ln x - J_\nu + J_\nu + 2x J'_\nu + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} j(j+2\nu) d_j x^{j+\nu} \\ + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} d_j x^{j+\nu+2} = 0. \end{aligned}$$

El término en corchetes se hace 0 debido a que  $J_\nu$  es solución de la ecuación de Bessel,  $J_\nu$  se cancela y nos quedamos con

$$2x J'_\nu + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} j(j+2\nu) d_j x^{j+\nu} + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} d_j x^{j+\nu+2} = 0.$$

Ahora, podemos escribir  $2x J'_\nu$  como una serie:

$$2x J'_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\nu}.$$

Si hacemos la operación del lado derecho de la igualdad nos saldrá que

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j (\nu + 2j)}{j! (\nu + j)! 2^{\nu+2j-1}}.$$

Con lo que tenemos:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+\nu} + \sum_{j=-2\nu}^{\infty} j(j+2\nu) d_j x^{j+\nu} + \sum_{j=-2\nu+2}^{\infty} d_{j-2} x^{j+\nu} = 0,$$

aquí cambiamos el límite inferior de la tercera suma para que todos los términos tengan el mismo exponente. Notamos un problema, no podemos agrupar la sumatoria debido a que los límites inferiores no coinciden. Por lo tanto, buscamos la potencia más baja para ver qué restricciones podemos poner en los coeficientes.

- Para la primera sumatoria con  $j = 0$ , tenemos  $a_0 x^n$ .
- Para la segunda sumatoria con  $j = -2\nu$ , tenemos  $0 * d_{-2\nu} x^{-n}$ , es decir, este término desaparece. Probamos con  $j = -2\nu + 1$  y obtenemos  $(-2\nu + 1)(1)d_{-2\nu+1} x^{-\nu+1}$ .
- Por último, para la tercera sumatoria con  $j = -2n+2$  sacamos  $d_{-2\nu} x^{-n+2}$ .

Es evidente que la segunda sumatoria con  $j = -2\nu + 1$  da el exponente más bajo. Por lo que tenemos

$$(4.54) \quad (-2n+1)d_{-2\nu+1} x^{-n+1} = 0 \Rightarrow d_{-2\nu+1} = 0.$$

Ahora, para el coeficiente  $x^\nu$  se tiene

$$(4.55) \quad a_0 x^\nu + d_{-2} x^\nu = 0 \Rightarrow d_{-2} = -a_0.$$

Para las potencias de  $x$  desde  $-\nu+2$  a  $\nu$  tenemos  $-2\nu+2 \leq j < 0$ . Esto nos da la condición

$$d_j = -\frac{d_{j-2}}{j(j+2\nu)},$$

usando la condición 4.54, escribimos:

$$(4.56) \quad d_{j+2} = -\frac{d_j}{(j+2)(j+2\nu+2)}.$$

Por último, para  $j \geq 0$ , tenemos la condición:

$$(4.57) \quad d_j = \frac{-a_j - d_{j-2}}{j(j+2\nu)}$$

Notamos que para  $j = 0$  tenemos una indeterminación para  $d_0$ . Sin embargo, siempre podemos añadir un término  $k J_\nu$  de tal manera que  $d_0 = 0$ . Con esto, podemos escribir los coeficientes de la siguiente manera:

$$(4.58) \quad d_j = \begin{cases} d_{j-2} = -j(j+2\nu)d_j, & \text{si } -2\nu+2 \leq j < 0, \\ d_0, & \text{si } j = 0 \\ \frac{-a_j - d_{j-2}}{j(j+2\nu)}, & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

Si calculamos los coeficientes vamos a tener la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden  $\nu$  de la siguiente manera:

$$(4.59)$$

$$N_\nu = (x) \equiv J_\nu(x) \ln|x| + \sum_{j=-2\nu+2}^{-2} \frac{(-1-j/2)!}{(\nu+j/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{j+\nu} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^{2k+j+1}(\nu+2k)}{k(\nu+k)j!(j+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu},$$

siendo  $N_\nu$  la ecuación de Neumann de orden  $\nu$ . Esta es una forma de la solución totalmente válida. Sin embargo, no es la manera estándar de escribirla. Para  $\nu \notin \mathbb{N}$ , la solución se puede escribir como

$$(4.60) \quad N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

Para  $\nu \in \mathbb{N}$  en cambio, tenemos:

$$(4.61) \quad N_\nu(x) = -\frac{1}{\pi}(\nu-1)! \left(\frac{2}{x}\right)^\nu + \cdots + \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\nu!} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots.$$

## Capítulo 5

# Ecuaciones Diferencial Parciales (EDP)

### 5.1. Introducción

En el anterior capítulo vimos como atacar EDOs lineales y de segundo orden, las cuales son las más comunes en física. Las EDOs se caracterizan por tener una función y derivadas de esa función con respecto a una sola variable. Las EDPs en cambio están en función de dos o más variables y sus respectivas derivadas. En cuanto a las derivadas, si es que definimos una función de dos variables  $\phi(x)$  podemos tener

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n \phi}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^n \phi}{\partial x^m \partial y^{n-m}}, \dots$$

El concepto de orden de la ecuación es el mismo que para las EDOs: el el grado de la derivada más alta. En física, usualmente, no aparecen las derivadas mixtas. De forma general, una EDP puede escribirse con el operador  $\mathcal{L}$  de la siguiente manera

$$\mathcal{L}\phi(x, y) = F(x, y),$$

si es que  $F(x, y) = 0$ , decimos que la ecuación es homogénea, mientras que si  $F(x, y) \neq 0$ , la ecuación es no homogénea. La aparición más común en física de las EDPs se debe al laplaciano, ya que este se encuentra en varias ecuaciones, como por ejemplo:

### 5.2. EDP del primer orden

Sea el operador diferencial

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}.$$

Una EDP lineal (de primer orden) homogénea con coeficientes constantes vendrá dada por

$$(5.1) \quad \mathcal{L}f(x, y) = 0, \quad a \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Lo primero que vamos a intentar es usar todo lo que ya sabemos de resolución de EDOs lineales. Por lo tanto, intentaremos hacer un cambio de variable que convierta la EDP lineal en una EDO lineal. Para ello hacemos el cambio

$$(x, y) \rightarrow (s, t),$$

donde definimos

$$\begin{aligned} s &= ax + by, \\ t &= bx - ay. \end{aligned}$$

Con esto, tendremos la nueva función

$$\hat{f}(s, t) = f(x(s, t), y(s, t)).$$

Por lo tanto, la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  y  $y$  será

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = a \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} + b \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = b \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} - a \frac{\partial \hat{f}}{\partial t},\end{aligned}$$

respectivamente. Si reemplazamos estas derivadas en la EDP original, obtenemos

$$a(a \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} + b \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}) + b(b \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} - a \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}) = 0,$$

desarrollando la expresión obtenemos finalmente

$$(a^2 + b^2) \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} = 0.$$

Esto implica que  $\hat{f}$  es una función constante con respecto a  $s$ . Por otro lado, no hay ninguna restricción para  $t$ , por lo que  $\hat{f}$  es una función de  $t$  únicamente. Por lo tanto, la solución general de la EDP original es

$$(5.2) \quad f(x, y) = \hat{f}(t) = f(bx - ay).$$

**EJEMPLO 5.1.** Probar que la función  $f(x, y) = e^{bx-ay}$  es solución de la EDP

$$a \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Para probar que  $f(x, y) = e^{bx-ay}$  es solución de la EDP dada, debemos reemplazarla en la EDP y verificar que se cumple la igualdad. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}a \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= a \frac{\partial e^{bx-ay}}{\partial x} + b \frac{\partial e^{bx-ay}}{\partial y} \\ &= a(be^{bx-ay}) + b(-ae^{bx-ay}) \\ &= abe^{bx-ay} - abe^{bx-ay} \\ &= (ab - ab)e^{bx-ay} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado que  $f(x, y) = e^{bx-ay}$  es solución de la EDP dada.

### 5.3. Condiciones de borde

En el plano  $xy$ , si fijamos un valor para  $t$  obtendremos rectas de la forma

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{t}{a}.$$

Dentro de estas líneas, la función  $f(x, y)$  se mantiene constante debido a que tanto  $s$  como  $t$  lo son. También podemos dejar que  $t$  varíe. Estas curvas, en las que  $t$  varía, se llaman curvas características. Para el caso que estamos discutiendo, estas curvas tendrán la forma:

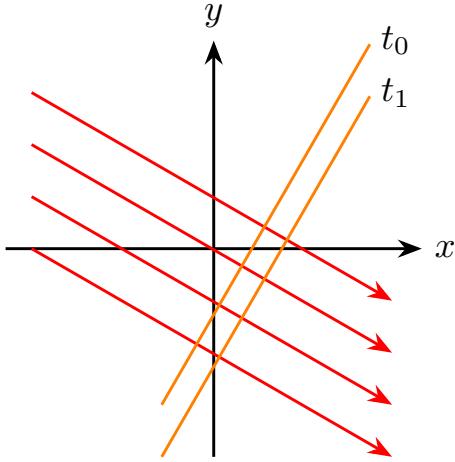


FIGURA 1. En tomate se encuentran las curvas en las que  $t = cte$ .  
En rojo se denotan las curvas características  $t = bx - ay$ .

Ya conocemos que para conocer la solución de una ecuación diferencial se necesitan los valores de frontera. En el caso de las EDOs, con la información de  $n$  puntos se podía encontrar la solución a la ecuación de orden  $n$ . Ahora, para las EDPs, no es suficiente puntos para delimitar las condiciones de borde, sino curvas para una EDP de 2 variables, superficies para una de 3 y así sucesivamente. Las condiciones de borde, para ser útiles y poder delimitar la función, deben cumplir con la siguiente propiedad.

**TEOREMA 5.1.** *Si la condición de frontera en  $\mathbb{R}^2$ , dada por una curva, no es una curva característica, entonces esta condición define las constantes de la solución.*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que conozco un punto  $(x_0, y_0)$  por el que pasa la función  $f(x, y)$ . Si hago la expansión de Taylor alrededor de este punto y truncando en el primer exponente, se obtiene:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x_0}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y_0}(y - y_0).$$

Ahora, definamos  $l$  como la dirección de la curva. Si es que derivamos  $f$  en función de  $l$  obtenemos:

$$(5.3) \quad \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l}.$$

Si acoplamos (5.3) con (5.1) obtendremos

$$\left| \begin{array}{c} \frac{dx}{dl} \\ \frac{dy}{dl} \end{array} \right| = b \frac{dx}{dl} - a \frac{dy}{dl} = \frac{d}{dl}(bx - ay) = \frac{dt}{dl}.$$

Si es que la condición de frontera está especificada a lo largo de una curva característica  $t$  será constante. Por lo tanto,  $dt/dl = 0$ , es decir, no puedo encontrar la solución con el valor de borde igual a una curva característica. ■

#### 5.4. EDP de segundo orden

Después de ver una manera de resolver EDP de primer orden, podemos ver el caso para EDP del segundo orden. El caso más sencillo de una EDP del segundo orden, con una función  $\psi(x, y)$  es

$$(5.4) \quad a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Lo que podemos hacer es factorizar esta expresión para obtener

$$\left[ a \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ a \frac{\partial}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} [a \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y}] \psi_1 &= 0 \\ [a \frac{\partial}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial y}] \psi_2 &= 0. \end{cases}$$

Como podemos observar, la EDP de segundo orden se simplificó a dos EDP lineales homogéneas, lo cual ya sabemos como manejar. La solución de esta EDP será entonces,

$$(5.5) \quad \psi_1(x, y) = f(cx - ay), \quad \psi_2(x, y) = g(cx + ay).$$

Ahora, la ecuación

$$(5.6) \quad a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

se puede factorizar como

$$\left[ a \frac{\partial}{\partial x} + ic \frac{\partial}{\partial y} \right] \left[ a \frac{\partial}{\partial x} - ic \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi(x, y) = 0.$$

En este caso, se producirán curvas características complejas. Notamos que solo un cambio de signo puede cambiar totalmente a la solución de una EDP. Por lo tanto, debemos caracterizar qué tipos de EDP podemos tener para poder atacar a cada uno.

**5.4.1. Clases de EDP del segundo orden.** Sea el operador diferencial de las EDP del segundo orden

$$(5.7) \quad \mathcal{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Definimos el discriminante  $\Delta$  como

$$(5.8) \quad \Delta = b^2 - 4ac,$$

con esto, podemos reescribir (5.7) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \left( \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2c^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} + c^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2c^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} + c^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Con el discriminante definido de esta manera, podemos caracterizar las EDP de segundo orden en 3 casos:

- $\Delta > 0$ , se dice que la EDP es hiperbólica.
- $\Delta < 0$ , se dice que la EDP es elíptica.
- $\Delta = 0$ , se dice que la EDP es parabólica.

Usando esta caracterización, la ecuación (5.4) es hiperbólica y la (5.6) es elíptica.

**5.4.2. Matriz Parte principal.** Definimos la matriz  $M$  de la siguiente manera

$$(5.9) \quad M = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

Usando esta matriz, podemos escribir  $\mathcal{L}$  como en la ecuación (5.7) de la siguiente manera:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{b}{2} \frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \mathcal{L}.$$

Es decir, recordando que

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \nabla^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

el operador diferencial  $\mathcal{L}$  se puede escribir como

$$(5.10) \quad \mathcal{L} = \nabla^T M \nabla$$

Además,  $M$  cumple la propiedad

$$(5.11) \quad \det(M) = ac - \frac{b^2}{4} \Rightarrow \Delta = -4 \det(M).$$

**5.4.3. EDP del segundo orden en  $\mathcal{R} = (x, y, z)$ .** El operador diferencial  $\mathcal{L}$  para este caso será

$$(5.12) \quad \mathcal{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2}{\partial z^2} + d \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + e \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + f \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}.$$

La matriz principal será

$$(5.13) \quad M = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz como

$$\det(M) = a \left( bc - \frac{f^2}{4} \right) + \frac{d}{2} \left( \frac{ef}{4} - \frac{cd}{2} \right) + \frac{e}{2} \left( \frac{df}{4} - \frac{bl}{2} \right) = abc - \frac{1}{4}(af^2 + cd^2 + be^2 - def).$$

Si calculamos el discriminante usando (5.11), tenemos

$$(5.14) \quad \Delta = af^2 + cd^2 + be^2 - 4abc - def.$$

Aquí hacemos la misma caracterización de acuerdo a si  $\Delta$  es positivo negativo o 0 como lo hicimos en la sección anterior.

**5.4.4. EDP de primer orden en 3 dimensiones.** Sea la ecuación diferencial

$$(5.15) \quad a \frac{\partial \psi}{\partial x} + b \frac{\partial \psi}{\partial y} + c \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Definimos la coordenadas

$$\begin{aligned} s &= ax + by + cz = (a, b, c) \cdot \mathcal{R}, \\ t &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \mathcal{R}, \\ u &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \cdot \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Si  $s, t, u$  son coordenadas ortogonales, entonces

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 0, \\ (a, b, c) \cdot (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= 0, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot (\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, calculamos las siguientes derivadas usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= a \frac{\partial \psi}{\partial s} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= b \frac{\partial \psi}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= c \frac{\partial \psi}{\partial s} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta_3 \frac{\partial \psi}{\partial u}. \end{aligned}$$

Reemplazando las anteriores expresiones en (5.15) tenemos:

$$a \left( a \frac{\partial \psi}{\partial s} + \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + b \left( b \frac{\partial \psi}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + c \left( c \frac{\partial \psi}{\partial s} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta_3 \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) = 0.$$

## 5 - Ecuaciones Diferencial Parciales (EDP)

---

Factorizando esta expresión tenemos:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} + (a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3) \frac{\partial \psi}{\partial t} + (a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3) \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0.$$

Por las condiciones de ortogonalidad:

$$(5.16) \quad (a^2 + b^2 + c^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0.$$

Para este caso, las condiciones iniciales van a ser un plano. Una condición inicial es buena cuando las líneas características atraviesan la misma. Es decir cuando se tiene

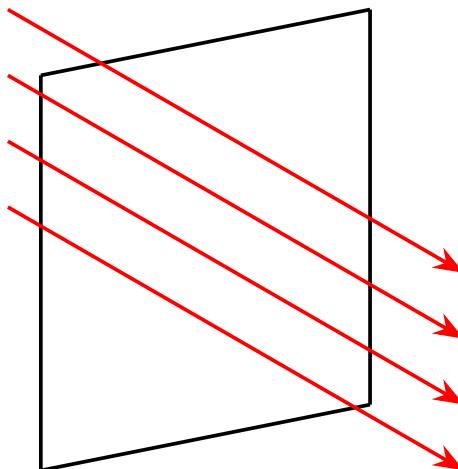


FIGURA 2. Condiciones iniciales de una EDP de primer orden en 3 dimensiones

Si la condición inicial no es buena, se tiene un gráfico de la forma:

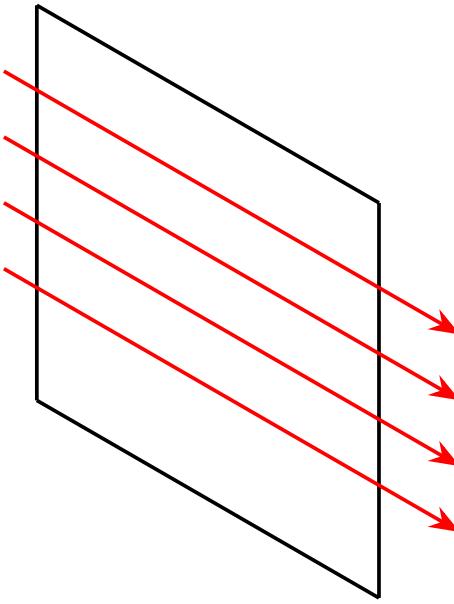


FIGURA 3. Malas condiciones iniciales de una EDP de primer orden en 3 dimensiones

Si conozco la solución sobre una superficie, puedo propagar la solución en dos direcciones (independientes)  $l$  y  $l'$ . Si calculamos la derivada de la función  $\psi$  con respecto a estas dos direcciones tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial l} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} \\ \frac{\partial \psi}{\partial l'} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l'} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l'} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l'}\end{aligned}$$

Calculando el siguiente determinante tenemos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial l} & \frac{\partial y}{\partial l} & \frac{\partial z}{\partial l} \\ \frac{\partial x}{\partial l'} & \frac{\partial y}{\partial l'} & \frac{\partial z}{\partial l'} \\ a & b & c \end{vmatrix} \neq 0$$

**5.4.5. Caracterización de condiciones de borde.** Además de la caracterización con el determinante que se hizo previamente, se pueden clasificar las EDP con:

- **Condiciones de borde de Cauchy.** El valor de una función y su derivada normal están especificadas en el borde.
- **Condiciones de borde de Dirichlet.** El valor de una función está especificada en el borde.
- **Condiciones de borde de Neumann.** La derivada normal de una función está especificada en el borde.

Si conectamos estas condiciones con la caracterización que hicimos para EDP del segundo orden tenemos:

Condiciones de frontera	Tipo de ecuación diferencial parcial		
	Elíptica	Hiperbólica	Parabólica
Laplace, Poisson en $(x, y)$	Ecuación de onda en $(x, t)$	Ecuación de difusión en $(x, t)$	Ecuación de difusión en $(x, t)$
<b>Cauchy</b>			
Superficie abierta	Resultados no físicos (inestabilidad)	Solución única y estable	Demasiado restrictivo
Superficie cerrada	Demasiado restrictivo	Demasiado restrictivo	Demasiado restrictivo
<b>Dirichlet</b>			
Superficie abierta	Insuficiente	Insuficiente	Solución única y estable en una dirección
Superficie cerrada	Solución única y estable	Solución no única	Demasiado restrictivo
<b>Neumann</b>			
Superficie abierta	Insuficiente	Insuficiente	Solución única y estable en una dirección
Superficie cerrada	Solución única y estable	Solución no única	Demasiado restrictivo

Para una superficie abierta se necesitan dos informaciones para definir las condiciones de frontera correctamente, mientras que para una superficie cerrada solo se necesita una.

## 5.5. Ecuaciones no lineales

Una ecuación no lineal tiene términos de la forma

$$\psi^2, \quad \psi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \frac{\partial^m \psi}{\partial y^m}, \quad f(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \dots$$

**5.5.1. Ecuación de Kortweg-de Vries.** Esta ecuación es una ecuación de onda no lineal que modela la propagación, sin pérdidas, de ondas de agua en agua poco profunda. Si  $\eta(x, t)$  es la elevación de la onda que depende de la posición (en este caso, unidimensional) y el tiempo, la ED que modela esta variable viene dada por

$$(5.17) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0,$$

dónde  $c_0 = \sqrt{gh}$  es la velocidad lineal de la onda,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $h$  es la altura del agua en reposo. Si es que el sistema de referencia que estamos tomando se mueve con velocidad constante  $c_0$  podemos hacer el cambio de variable

$$x \rightarrow \xi = x - c_0 t, \quad \eta(\xi, t) = \eta(\xi(x, t), t).$$

La derivada de  $\eta$  con respecto a la coordenada espacial será

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi},$$

y así para las derivadas de orden superior. Sin embargo, para la derivada temporal tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta(\xi(t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial \eta(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi(t)}{\partial t} + \frac{\partial \eta(\xi, t)}{\partial t} \\ &= -c_0 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si sustituimos esta expresión en (5.17) obtendremos:

$$(5.18) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0.$$

Esta ecuación es la manera convencional en la que se encuentra a la ecuación de Kortweg-de Vries y tiene una solución de solitón.

**5.5.2. Ecuación de tasa de láser.** Para modelar el comportamiento de un láser en un material de ganancia usamos la ecuación de inversión de la población. El funcionamiento de un láser, de manera cualitativa, es que un material de ganancia, es decir, un material en el que se el que sus componentes están en un nivel de energía más alto que su estado estable, se incide luz. La intensidad de la luz aumenta en este medio, ya que por cada fotón que incide en un átomo del material, se expulsan dos fotones más por que el material vuelve a su estado estable. De esta manera, se logra un crecimiento exponencial. Esta ecuación viene dada por

$$(5.19) \quad \frac{dN}{dt} + \frac{N - \tilde{N}}{\tau_1} = -B\Phi,$$

dónde  $N$  es la fracción de partículas que están en estado excitado,  $(N - \tilde{N})/\tau_1$  es energía externa que se le pone al material de ganancia y  $\Phi$  es la densidad de fotones.  $N$  toma valores entre -1 y 1, siendo 1 que todas las partículas están en estado excitado y -1 que ninguna de ellas lo están. La densidad de fotones sigue la siguiente ecuación:

$$(5.20) \quad \frac{d\Phi}{dt} = B\Phi N - C\Phi,$$

dónde  $B\Phi N$  es la emisión estimulada y  $-C\Phi$  es la tasa de pérdida. Si es que el término de la derecha de (5.19) es 0, es decir, la densidad de fotones es 0 (algo que no es físico),  $N \rightarrow \tilde{N}$  en  $\tau_1$ . Con esto, la ecuación (5.20) se convierte en

$$(5.21) \quad \frac{d\Phi}{dt} = (B\tilde{N} - C)\Phi,$$

que permite la solución

$$\Phi(t) = e^{(B\tilde{N} - C)t}.$$

Cuando  $B\tilde{N} > C$ , la solución es una exponencial creciente, algo que no puede modelar algo físico, ya que va hacia el infinito rápidamente. Sin embargo, cuando consideramos la parte derecha de (5.19) cuando  $N$  llega a su estado estable (SS por su nombre en inglés *steady state*), tenemos:

$$N_{SS} - \tilde{N} = -B\tau_1 - \Phi \Rightarrow N_{SS} = \tilde{N} - B\Phi,$$

con la anterior expresión en la ecuación de densidad de fotones tenemos:

$$(5.22) \quad \frac{d\Phi}{dt} = (B\tilde{N} - B^2\Phi - C)\Phi.$$

La ecuación anterior es una ecuación no lineal, aunque tanto la ecuación de inversión de población como la de densidad de fotones no parezcan a primera vista ecuaciones no lineales. El hecho de que estas ecuaciones están acopladas hace que la ecuación sea no lineal. Para  $\Phi \approx 0$ , tendremos el crecimiento exponencial, pero cuando  $\Phi$  llegue a su estado estable, tendremos

$$(B\tilde{N} - B^2\Phi_{SS} - C)\Phi_{SS} = 0,$$

que tiene la solución trivial  $\Phi = 0$ , pero esta solución no es estable ya que el 0 matemático no existe en el mundo físico. Se tiene la otra solución

$$(5.23) \quad \Phi_{SS} = \frac{B\tilde{N} - C}{B^2}.$$

A esta parte de la solución se la llama saturación.

### 5.6. Separación de Variables

Este método consiste en dividir una EDP de  $n$  variables en  $n$  EDOs, para luego proponer una solución de la EDP que sea la multiplicación de funciones que sean de una sola variable. La solución obtenida por este método no es la ecuación general, sino que provee de una base para a partir de ahí construir la ecuación general. Se usará la ecuación de Helmholtz

$$(5.24) \quad \Delta^2\psi(\mathbf{R}) + k^2\psi(\mathbf{R}) = 0$$

como ejemplo para usar este método. En cada sistema de coordenadas tenemos diferentes variables, por lo que vamos a analizar los tres más importantes: coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

**5.6.1. Coordenadas Cartesianas.** En coordenadas cartesianas, la ecuación de Helmholtz toma la forma

$$(5.25) \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial^2x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2z} + k^2\psi = 0.$$

Vamos a probar una solución de la forma

$$(5.26) \quad \psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

y sustituirla en (5.26). Este método usualmente funciona si no hay términos mixtos ( $\frac{\partial\psi}{\partial x_i \partial x_j}, i \neq j$ ) y cuando las condiciones de frontera se pueden separar de igual manera en diferentes factores. Sin embargo, este método es un intentemos y veamos que pasa. Si sustituimos la ecuación tenemos

$$(5.27) \quad YZ \frac{d^2X}{dx^2} + XZ \frac{d^2Y}{dy^2} + XY \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0,$$

si dividimos para XYZ y restanto a ambos lados tenemos

$$(5.28) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}.$$

Notamos que el lado derecho de la ecuación depende de  $x, y$  mientras que el izquierdo depende de  $z$ . Debido a que las coordenadas son independientes, la única manera en la que la igualdad se cumpla es que ambas partes sean iguales a la misma constante. Esto nos da dos ecuaciones:

$$(5.29) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + k^2 = \text{cte},$$

$$(5.30) \quad -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \text{cte}.$$

No tenemos ninguna restricción para la constante, por lo que puede ser positiva o negativa. Definimos a la constante como  $\text{cte} = \pm k_z^2$  y con esto tenemos dos casos para la ecuación (5.30).

Caso positivo ( $\text{cte}=k_z^2$ ):

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0.$$

Caso negativo (cte= $k_z^2$ ):

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k_z^2 Z = 0.$$

Buscamos soluciones de la forma  $Z = e^{\alpha z}$  y obtenemos, respectivamente:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \alpha^2 + k_z^2 &= 0 \Rightarrow \alpha = \pm ik_z, \\ \alpha^2 - k_z^2 &= 0 \Rightarrow \alpha = \pm k_z. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que para cte= $k_z^2$  tendremos una ecuación oscilante y para cte= $-k_z^2$  una ecuación exponencial creciente o decreciente. Debemos elegir el signo de la constante de acuerdo a las condiciones de frontera de mi sistema físico, no hay una respuesta universal para cualquier ejercicio.

En este caso, a modo de ejemplo, elegimos  $k_z^2$ , con lo que tenemos:

$$(5.32) \quad Z(z) = e^{\pm ik_z z}.$$

Con la constante definida, la ecuación (5.29) nos da:

$$(5.33) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + k^2 - k_z^2 = -\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2}.$$

El lado izquierdo de la igualdad solo depende de  $x$  y el derecho solo de  $y$ . Por el mismo razonamiento que hicimos anteriormente, la única manera de que la igualdad se cumpla es sea igual a una constante. Definimos ahora a la constante  $k_y^2$  (positiva), con lo que tenemos:

$$(5.34) \quad Y(y) = e^{\pm ik_y y}.$$

Ahora, solo nos queda buscar la solución en  $x$ :

$$(5.35) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + k^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0.$$

Queremos una solución oscilante, por lo que definimos

$$(5.36) \quad k_x^2 = k^2 - k_y^2 - k_z^2,$$

con lo que finalmente obtenemos la ecuación:

$$(5.37) \quad X(x) = e^{\pm ik_x x}$$

Notamos que ya tenemos las ecuaciones separadas de la solución que buscamos. Si definimos  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  tendremos las soluciones

$$(5.38) \quad \begin{aligned} \psi^+(\mathcal{R}) &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathcal{R}}, \\ \psi^-(\mathcal{R}) &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Notamos que esta es la solución de onda plana. Podemos elegir cualquier de las dos soluciones, pues lo único que cambia es la dirección en la que se propaga la onda. Tenemos completa libertad para el valor de  $\mathbf{k}$ , lo único que debemos fijar es su módulo al cuadrado  $k^2$ , es decir:

$$(5.39) \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

lo que implica que la solución dependerá de dos parámetros, pues el tercero depende de estos. Si es que hacemos que  $k_z$  dependa de  $k_x, k_y$  tendremos:

$$(5.40) \quad \psi_{k_x k_y}(\mathcal{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathcal{R}}.$$

Como se mencionó al inicio de la sección, la solución obtenida no es la solución general de la ecuación. Para la solución general debemos tomar una combinación lineal de la ecuación (5.40) y obtendremos

$$(5.41) \quad \Psi(\mathcal{R}) = \sum_{k_x k_y} a_{k_x k_y} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathcal{R}},$$

dónde los coeficientes  $a_{k_x k_y}$  se determinan por los valores de frontera. En el caso de que en lugar de valores discretos tengamos un continuo de  $k_x k_y$ , tendremos la solución

$$(5.42) \quad \Psi(\mathcal{R}) = \int a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathcal{R}} d^3 k.$$

La parte derecha de la ecuación es una transformada de Fourier, esto nos dice que podemos encontrar una solución del espacio real (tridimensional) en el espacio  $\mathbf{k}$ , un resultado que es muy profundo.

**5.6.2. Coordenadas Cilíndricas.** La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas viene dada por (revisar la sección 2.5.3 para el cálculo del laplaciano en coordenadas curvilíneas):

$$(5.43) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0.$$

Asumimos ahora una solución de la forma

$$(5.44) \quad \psi(\mathcal{R}) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Sustituimos (5.44) en (5.43) para obtener:

$$(5.45) \quad \frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + P\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0.$$

Si dividimos todo para  $P\Phi Z$  y restando  $\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}$  a ambos lados tenemos:

$$(5.46) \quad \frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}.$$

De igual manera que en coordenadas cartesianas, al lado izquierdo de la igualdad tenemos una función que depende de  $\rho, \varphi$  y a la derecha una que solo depende de  $z$ , por lo que la única manera en la que la igualdad se cumpla es que sean iguales a una constante. Esto quiere decir que

$$(5.47) \quad \frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 = \text{cte},$$

$$(5.48) \quad -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \text{cte}.$$

Definimos a la constante  $\pm l^2$ . Ahora,  $Z$  puede ser periódica o tener forma exponencial, depende de la elección del signo de la constante, pues se puede tener

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + l^2 Z = 0 \quad , \quad \frac{d^2Z}{dz^2} - l^2 Z = 0.$$

La elección, de nuevo, dependerá de las condiciones de frontera del problema. Escojamos que la constante sea negativa, lo que implica una  $Z$  exponencial. Además, supongamos que  $Z$  decae exponencialmente,

$$(5.49) \quad Z(z) = e^{-lz}.$$

Con la definición de la constante, (5.47) se modifica a:

$$(5.50) \quad \frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -l^2.$$

Si definimos

$$(5.51) \quad k^2 + l^2 = n^2,$$

y multiplicando todo para  $\rho^2$  tenemos:

$$(5.52) \quad \frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

De esta manera, tenemos al lado derecho una ecuación solo de  $\rho$  y en el izquierdo una solo de  $\varphi$ . Por lo tanto, debe ser igual a una constante para que se cumpla la igualdad. Sin embargo, no podemos escoger un signo arbitrario para la constante, ya que  $\varphi$  es naturalmente una constante periódica. Por esto, necesariamente, la constante será positiva para admitir la solución oscilante. Definimos a la constante como  $m^2$  y tenemos:

$$(5.53) \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = e^{im\varphi}.$$

La parte radial, con la definición de  $m^2$  y multiplicando todo por  $P$  nos da:

$$(5.54) \quad \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2) P = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable

$$x = n\rho \quad , \quad y(x) = P(\rho(x)),$$

por regla de la cadena y sustitución directa obtendremos:

$$(5.55) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0,$$

reconocemos inmediatamente (o eso se espera), a la ecuación de Bessel de orden  $m$ , con lo que tenemos:

$$(5.56) \quad P = J_m(n\rho)$$

Con todo esto, notamos que (5.49) depende del parámetro  $l$ , (5.53) de  $m$  y (5.56) de  $m, n$ . Además, recordemos que establecimos (5.51), por lo que  $n$  puede ser función de  $l$ . Por lo tanto, podemos escribir la solución general de la EDP

$$(5.57) \quad \Psi(\mathcal{R}) = \sum_{lm} a_{lm} P_{lm}(\rho) \Phi_m(\varphi) Z_l(z).$$

**5.6.3. Coordenadas Esféricas.** Por último, tenemos las coordenadas esféricas. En este sistema, la ecuación de Helmholtz se convierte en

$$(5.58) \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + k^2 \psi = 0.$$

Asumimos ahora una solución de la forma

$$(5.59) \quad \psi(\mathcal{R}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Seguimos el mismo proceso que en los sistemas de coordenadas anteriores. Reemplazo (5.58) en (5.57) para obtener:

$$(5.60) \quad \frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0.$$

Multiplicamos por  $r^2 \sin^2 \theta$  para aislar a  $\Phi$ :

$$(5.61) \quad \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + k^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}.$$

Como siempre, el lado izquierdo de la igualdad depende solo de  $r, \theta$ , mientras que el derecho depende de  $\varphi$ . Como en el caso de las coordenadas cilíndricas,  $\varphi$  es naturalmente periódica. Esto es, la constante que definamos que va a ser igual a (5.61) debe ser positiva, necesariamente. Definimos a la constante como  $m^2$ . Con esto tenemos

$$(5.62) \quad -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2 \Rightarrow \Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$$

Dividimos ahora (5.61) para  $\sin^2 \theta$  (después de definir (5.62) para obtener

$$(5.63) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}.$$

Notamos que el lado izquierdo depende solo de  $r$  y el derecho solo de  $\theta$ . La función  $\Theta$  dependerá tanto de  $m$  como de la nueva constante que definamos. Definimos a la nueva constante como  $\lambda$ , ya que es difícil establecer su signo por el momento. Con esto tenemos

$$(5.64) \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = \lambda,$$

$$(5.65) \quad \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -\lambda.$$

Multiplicamos a (5.64) por  $R$  y (5.65) por  $\Theta$  para obtener, respectivamente

$$(5.66) \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [r^2 k^2 - \lambda] R = 0,$$

$$(5.67) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0.$$

Hacemos el cambio de variable

$$(5.68) \quad \Theta(\theta) = P(\cos \theta) = P(t),$$

con el que la ecuación (5.67), aplicando regla de la cadena y con  $\sin^2 \theta = 1 - t^2$ , queda

$$(5.69) \quad (1-t^2)P''(t) - 2tP'(t) + \left[ \lambda - \frac{m^2}{1-t^2} \right] P(t) = 0.$$

Daremos un nombre a esta ecuación después de encontrar el valor de  $\lambda$ . Para hallar dicho valor, usamos (5.66) en su forma más sencilla, i.e.,  $k = 0$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0,$$

aplicando la derivada tenemos:

$$(5.70) \quad r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0.$$

Usamos el método de Frobenius para hallar soluciones de la forma

$$R = \sum_n a_n r^{n+s}.$$

Calculamos las derivadas y reemplazamos en la ecuación (5.70) para obtener:

$$\sum_n a_n r^{n+s} [(n+s)(n+s-1) + 2(n+s) - \lambda].$$

Es evidente que no vamos a tener una ecuación de recurrencia, pero podemos encontrar una ecuación indicial con  $n = 0$ :

$$(5.71) \quad s(s-1) + 2s - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = s(s+1).$$

Definimos a  $\lambda$  como

$$(5.72) \quad \lambda = l(l+1),$$

lo que nos da los valores de  $s$

$$(5.73) \quad s = l \quad , \quad s = -(l+1).$$

Esto quiere decir que, en el caso de que  $k = 0$ ,  $R$  tendrá la forma

$$(5.74) \quad R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}.$$

Con  $\lambda$  definido, (5.69) toma la forma

$$(5.75) \quad \frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dP(t)}{dt} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] P(t) = 0,$$

a esta ecuación se la conoce como la ecuación asociada de Legendre, con solución

$$(5.76) \quad P(t) = P_l^m(\cos \theta),$$

Ahora nos queda (5.66), reemplazando el valor de  $\lambda$  y calculando la derivada tenemos:

$$(5.77) \quad r^2 R'' + 2rR' + [(kr)^2 - l(l+1)] R = 0.$$

Realizamos el cambio de variable

$$(5.78) \quad R(r) = \frac{Z(kr)}{\sqrt{kr}} = \frac{Z(x)}{x^{1/2}}.$$

Con este cambio, usando regla de la cadena y sustitución directa, (5.77) toma la forma

$$(5.79) \quad x^2 Z'' + xZ' + \left[ x^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0.$$

Por simple inspección, notamos que esta es la ecuación de Bessel, con soluciones:

$$Z_1(x) = J_{l+1/2}(x) \quad , \quad Z_2(x) = Y_{l+1/2}(x).$$

A estas funciones se las denomina funciones de Bessel esféricas y se las define usualmente como

$$(5.80) \quad j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} J_{l+1/2}(x),$$

$$(5.81) \quad y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}} Y_{l+1/2}(x),$$

Con esto, vamos a tener las siguientes soluciones.

- Laplace:

$$(5.82) \quad \psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1}) P_l^m(\cos \theta) (A'_{lm} \sin m\varphi + B'_{lm} \cos m\varphi).$$

- Helmholtz:

$$(5.83) \quad \psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} [A_{lm} j_l(kr) + B_{lm} y_l(kr)] \times P_l^m(\cos \theta) (A'_{lm} \sin m\varphi + B'_{lm} \cos m\varphi).$$

En el siguiente capítulo se discutirá la ecuación asociada de Legendre y sus soluciones.

## Capítulo 6

# Funciones de Legendre

### 6.1. Introducción

En física, en la resolución de ecuaciones diferenciales, hay varias ecuaciones que se repiten o cuya forma es parecida. Las soluciones de estas ecuaciones están bien estudiadas y caracterizadas, por lo que es importante tener un catálogo de estas funciones que en algún momento nos podrán servir para resolver una ecuación diferencial.

### 6.2. Ecuación de Legendre

Como vimos en el capítulo anterior, la ecuación de Legendre surge cuando resolvemos ecuaciones de la forma

$$(6.1) \quad \nabla^2 \varphi + [\lambda - V(r)]\varphi = 0$$

en coordenadas esféricas. Por el método de separación de variables, asumimos una solución de esta ecuación de la forma

$$\varphi(\mathbf{R}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi).$$

El resultado que obtuvimos para la parte angular de la solución fue que tomando en cuenta la periodicidad de  $\phi$  se tenía

$$(6.2) \quad \Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi},$$

y para  $\theta$  teníamos la ecuación asociada de Legendre

$$(6.3) \quad (1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0,$$

dónde

$$\Theta(\theta) = P(\cos \theta) = P(x), \quad x = \cos \theta.$$

Consideremos primero el caso en el que existe simetría azimutal ( $m = 0$ ), con lo que se tiene la ecuación de Legendre

$$(6.4) \quad (1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + l(l+1)P(x) = 0,$$

por la simetría azimutal notamos que la ecuación no depende de la constante  $m$  que se obtuvo en la ecuación para  $\Phi$ . Analizamos esta ecuación en busca de puntos singulares cómo lo vimos en la sección 3.1. Como recordatorio, la ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden<sup>1</sup>

$$(6.5) \quad y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

---

<sup>1</sup>En la sección 3.1 se denotaban a  $p(x), q(x)$  con las letras mayúsculas  $P(x), Q(x)$ . Sin embargo, para evitar confusiones con la función de Legendre  $P$ , se cambió la notación.

tiene un punto singular  $x_0$  si

$$(6.6) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = \infty,$$

Este punto es singular regular si

$$(6.7) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) = a \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2q(x) = b,$$

dónde  $a, b \in \mathbb{R} < \infty$ . Por otro lado, la EDO tiene un punto singular irregular si

$$(6.8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)p(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2q(x) = \infty.$$

Notamos que la ecuación de Legendre (6.4) con

$$(6.9) \quad p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2},$$

tiene puntos singulares en 1 y -1. Recordemos que  $x = \cos \theta$ , por lo que  $x \in [-1, 1]$  y, por ende, toma los valores con los que se obtiene una singularidad. Veamos si los puntos son singulares regulares o irregulares para  $x_0 = 1$  y  $x_0 = -1$ . Podemos factorizar  $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ . Para  $p(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{-2x}{(1 - x)(1 + x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \frac{-2x}{(1 - x)(1 + x)} = 1.$$

Para  $q(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{l(l+1)}{(1 - x)(1 + x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)^2 \frac{l(l+1)}{(1 - x)(1 + x)} = 0.$$

Por lo tanto, 1 y -1 son puntos singulares regulares. Debido a esto, buscamos una solución con el método de Frobenius. Asumimos una solución de la forma

$$P(x) = \sum_j a_j x^{j+s},$$

reemplazando la función y sus derivadas en (6.4) tenemos:

$$\sum_j \{a_j(s+j)(s+j-1)x^{s+j-2} - a_j[(s+j)(s+j-1) + 2(s+j) - l(l+1)]x^{s+j}\} = 0.$$

Si tomamos  $j = 0$ , tenemos un término  $x^{s-2}$  que no se combina con ningún otro término, por lo que necesariamente

$$a_0 s(s+1)x^{s-2} = 0,$$

como  $a_0 \neq 0$  y  $x$  es variable, solo nos queda la opción

$$s(s-1) = 0 \Rightarrow s = 0, s = 1.$$

Ahora, para  $j = 1$ , siguiendo un razonamiento similar tenemos

$$a_1 s(s+1)x^{s-1} = 0,$$

como ya tenemos los valores de  $s$  por la ecuación indicial, para que se cumpla la igualdad en la expresión anterior  $a_1 = 0$ . Tomamos primero  $s = 0$  para encontrar una relación de recurrencia

$$\sum_j a_j j(j-1)x^{j-2} - \sum_j a_j [j(j-1) + 2j - l(l+1)]x^j = 0,$$

reemplazando en la primera sumatoria  $j$  por  $j + 2$  tenemos

$$\sum_j a_{j+2}(j+2)(j+1)x^j - \sum_j a_j[j(j-1) + 2j - l(l+1)]x^j = 0.$$

Si factorizamos  $x_j$ , para que la suma sea 0, término por término nos tiene que dar 0, lo que nos da la relación de recurrencia

$$(6.10) \quad a_{j+2} = a_j \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+1)}.$$

Para  $j = l$  tenemos

$$a_{l+2} = a_l \frac{l(l+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+1)} = 0,$$

esto quiere decir que la serie se trunca en  $l$ . Por tanto, la solución de la ecuación de Legendre tiene la forma

$$(6.11) \quad P_l(x) = \sum_{j=0}^l a_j x^j.$$

Ahora, si usamos  $s = 1$  tendremos:

$$\sum_j a_j j(j+1)x^{j-1} - \sum_j a_j[(j+1)j + 2(j+1) - l(l+1)]x^{j+1} = 0,$$

reemplazando en la primera sumatoria  $j$  por  $j + 2$  tenemos:

$$\sum_j a_{j+2}(j+2)(j+3)x^{j+1} - \sum_j a_j[(j+1)j + 2(j+1) - l(l+1)]x^{j+1} = 0.$$

Con esto llegamos a la relación de recurrencia

$$(6.12) \quad a_{j+2} = a_j \frac{(j+2)(j+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+3)}.$$

Cuando  $j = l - 1$ , tenemos:

$$a_{l+1} = a_{l-1} \frac{l(l+1) - l(l+1)}{(j+2)(j+3)} = 0,$$

es decir, la serie se trunca en  $l - 1$ . Con esto tenemos la solución

$$(6.13) \quad P_l(x) = \sum_{j=0}^{l-1} a_j x^{j+1}.$$

La expresión (6.11) es para los polinomios pares de Legendre y (6.14) es para los impares, con lo que tenemos:

$$(6.14) \quad P_{2l}(x) = \sum_{j=0}^l a_j x^{2j}, \quad P_{2l-1}(x) = \sum_{j=0}^{l-1} b_j x^{2j+1}.$$

En la siguiente sección veremos la forma que toman los polinomios de Legendre y sus coeficientes.

### 6.3. Polinomios de Legendre

Sea  $g$  la función generatriz de los polinomios de Legendre, dada por

$$(6.15) \quad g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_n P_n(x)t^n.$$

¿Por qué razón esta es la función generatriz de los polinomios de Legendre? Esto lo probaremos con el siguiente teorema.

TEOREMA 6.1. *La ecuación*

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}$$

*satisface la EDP*

$$(6.16) \quad (1 - x^2)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial g}{\partial x} + t\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(tg) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Calculamos las derivadas como

$$\frac{\partial g}{\partial x} = t(1 - 2xt + t^2)^{-3/2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 3t^2(1 - 2xt + t^2)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(tg) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} - (t^2 - xt)(1 - 2xt + t^2)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tg) = (2x - 3t)(1 - 2xt + t^2)^{-3/2} + 3(t^3 - 2t^2x + tx^2)(1 - 2xt + t^2)^{-5/2}.$$

Reemplazando las derivadas en (6.16) y con  $\gamma \equiv 1 - 2xt + t^2$  tenemos:

$$\begin{aligned} & (1 - x^2)3t^2\gamma^{-5/2} - 2xt\gamma^{-3/2} + 3t^2(t^2 - 2xt + x^2)\gamma^{-5/2} \\ &= 3t^2\gamma^{-5/2}(1 - x^2 + t^2 - 2xt + x^2) - 2xt\gamma^{-3/2} + 2xt\gamma^{-3/2} - 3t^2\gamma^{-3/2} \\ &= 3t^2\gamma^{-5/2}\gamma - 3t^2\gamma^{-3/2} \\ &= 3t^2\gamma^{-3/2} - 3t^2\gamma^{-3/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo que hemos demostrado el teorema. ■

COROLARIO 6.1. *La función generatriz (6.15) implica la ecuación de Legendre*

$$(6.17) \quad (1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior, ya sabemos que  $g$  cumple con la EDP (6.16). Ahora, definimos  $\delta \equiv 2xt - t^2$  y hacemos expansión de Taylor alrededor de 0 de  $(1 - \delta)^{-1/2}$  y tenemos:

$$(6.18) \quad (1 - \delta)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\delta + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2!}\delta^2 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{3!}\delta^3 + \dots$$

Usando la definición de  $\delta$  en (6.18) tenemos

$$\begin{aligned}
 (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}(2xt - t^2) + \frac{3}{8}(2xt - t^2)^2 + \dots \\
 &= 1 + xt - \frac{t^2}{2} + \frac{3}{8}(4x^2t^2 - 4xt^3 + t^4) + \dots \\
 &= 1 + xt + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots \\
 &= g_0(x) + g_1(x)t + g_2(x)t^2 + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n.
 \end{aligned}$$

Esta sumatoria también satisface la EDP (6.16), esto porque es solo otra manera de escribir la función  $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ . Por esto tenemos:

$$\begin{aligned}
 (1 - x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n \right) - 2x \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n \right) + t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( t \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n \right) &= 0 \\
 (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} g_n''(x)t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} g_n'(x)t^n + t \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^{n-1}(n+1)n &= 0.
 \end{aligned}$$

Uniendo las sumatorias y sacando de factor común  $t^n$  tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n [(1 - x^2)g_n''(x) - 2xg_n'(x) + n(n+1)g_n(x)] = 0.$$

Para que la igualdad se cumpla, se debe cumplir término a término y como  $t$  es una variable, la única forma en la que se cumpla la igualdad es si

$$(1 - x^2)g_n''(x) - 2xg_n'(x) + n(n+1)g_n(x) = 0,$$

es decir, hemos llegado a la ecuación de Legendre. Por lo tanto,  $g_n(x) = P_n(x)$ , terminando la demostración. ■

La función generatriz es muy útil porque nos puede dar información importante de los polinomios antes de que encontremos una manera de calcularlos. Por ejemplo, si queremos saber la escala dada a  $P_n$  solo fijamos  $x = 1$  y usamos expansión de series de Taylor para tener

$$(6.19) \quad g(1, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2t + t^2}} = \frac{1}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n,$$

por lo que  $P_n(1) = 1$ . En otras palabras, todos los polinomios de Legendre cuando  $x = 1$  tienen el valor de 1.

Ahora, si calculamos  $g(-x, -t)$  nos damos cuenta de que no cambiamos nada, por lo que tenemos

$$(6.20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = g(x, t) = g(-x, -t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n,$$

lo que demuestra que

$$(6.21) \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

Por este resultado  $P_n(-1) = (-1)^n$  y  $P_n(x)$  tendrá la misma paridad de  $x^n$ . Otro valor importante es  $P_n(0)$ . Si escribimos  $P_{2n}$  y  $P_{2n+1}$  para distinguir polinomios pares e impares. Debido a que  $P_{2n+1}$  tiene paridad impar, deberíamos tener que  $P_{2n+1} = 0$ . Para obtener  $P_{2n}$  usamos la expansión binomial

$$(6.22) \quad g(0, t) = (1 + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0) t^{2n}.$$

Para evaluar el coeficiente binomial, usamos

$$(6.23) \quad \binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

dónde !! representa el doble factorial que se define como

$$(6.24) \quad n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2, & \text{si } n \text{ es par} \\ n(n-2)(n-4)\cdots 3 \cdot 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Con lo anterior tenemos

$$(6.25) \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Es importante también caracterizar los términos dominantes de los polinomios. Para eso aplicamos el teorema binomial para a la función generatriz,

$$(6.26) \quad (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-2xt + t^2)^n,$$

donde notamos que la máxima potencia de  $x$  que multiplica  $t^n$  es  $x^n$ . Además, vemos que los términos serán alternantes. Debido a esto, es evidente que  $P_0 = \text{cte}$  y  $P_1 = \text{cte} * x$ . Por el factor de escalamiento que ya calculamos (el valor de escala es 1) se sigue que  $P_0 = 1$  y  $P_1 = x$ .

**6.3.1. Fórmulas de Recurrencia.** Ahora que tenemos las características generales de los polinomios de Legendre encontraremos una manera de calcularlos usando relaciones de recurrencia y los valores ya conocidos de  $P_0$  y  $P_1$ . Usando  $\partial g / \partial t$  podemos construir la ecuación diferencial

$$(6.27) \quad (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0,$$

si hacemos la expansión los términos, los cambios de variable  $n+1 \rightarrow n, n-1 \rightarrow n$  y agrupamos todo lo que es igual llegamos a

$$(6.28) \quad (2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Podemos usar la expresión anterior para calcular todos los polinomios de Legendre conociendo que  $P_0 = 1$  y  $P_1 = x$ . Esta fórmula es muy útil para calcular los polinomios con la ayuda de una computadora. Los primeros polinomios de Legendre vienen dados por

TABLA 1. Polinomios de Legendre

$n$	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$

Ya que tenemos la fórmula de recurrencia para hallar el  $n$ -ésimo polinomio de Legendre, veamos si encontramos una fórmula de recurrencia para sus derivadas. Para ello notamos que  $\partial g / \partial x$  satisface la ecuación

$$(6.29) \quad (1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n = 0.$$

Con el mismo proceso anterior, llegamos la relación de recurrencia

$$(6.30) \quad 2xP'_n(x) + P_n(x) = P'_{n+1} + P'_{n-1}(x).$$

Hay una manera más útil de construir esta relación y es calcular  $\partial / \partial x$  de (6.28) y multiplicar por 2 para luego restarlo para (6.30) multiplicado para  $2n - 1$ . Con esto tenemos:

$$(6.31) \quad P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n + 1)P_n(x).$$

Podemos tener otras maneras de expresar la relación de recurrencia:

$$(6.32) \quad P'_{n+1}(x) = (n + 1)P_n(x) + xP'_n(x),$$

$$(6.33) \quad P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x),$$

$$(6.34) \quad (1 - x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x),$$

$$(6.35) \quad (1 - x^2)P'_n(x) = (n + 1)xP_n(x) - (n + 1)P_{n+1}(x).$$

Todas estas maneras son equivalentes.

**6.3.2. Ortogonalidad.** Los polinomios tienen una característica importante y es que son todos ortogonales entre sí. Esto lo probaremos de la siguiente manera.

**TEOREMA 6.2.** *Los polinomios de Legendre  $P_n(x), P_m(x)$  con  $n \neq m$  son ortogonales.*

**DEMOSTRACIÓN.** Empecemos con la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)] + n(n + 1)P_n(x) = 0,$$

dónde  $P_n$  es el polinomio de Legendre de orden  $n$ , por lo que satisface la ecuación. Ahora, multiplicamos la ecuación anterior por  $P_m$  dónde  $P_m$  es el polinomio de Legendre de orden  $m$ . Con esto tenemos:

$$(6.36) \quad \frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)]P_m(x) + n(n + 1)P_n(x)P_m(x) = 0.$$

Hacemos el mismo procedimiento, solo que ahora con  $P_m$  en la ecuación de Legendre y tenemos:

$$(6.37) \quad \frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)]P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) = 0.$$

Si hacemos la operación (6.37)-(6.36) vamos a tener

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)]P_n(x) - \frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_n(x)]P_m(x) + [m(m+1)-n(n+1)]P_m(x)P_n(x) = 0,$$

usando regla de la cadena y factorizando el segundo término, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)[P'_m(x)P_n(x) - P'_n(x)P_m(x)]\} + (m-n)(m+n+1)P_m(x)P_n(x) = 0.$$

Si integramos de -1 a 1 (que es dónde está definido  $x$ ) el primer término se hará 0 (aplicamos el Teorema Fundamental del cálculo, luego el factor  $1-x^2$  se hace 0 con  $x=1, -1$ ). Lo que nos deja con el resultado

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0.$$

Por hipótesis,  $n \neq m$ , por lo que el término  $(m-n)(m+n+1) \neq 0$ , por lo tanto, la única manera en la que se cumpla la igualdad de arriba es si

$$(6.38) \quad \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0.$$

Demostrando de esta manera que los polinomios de Legendre  $P_n, P_m$  con  $n \neq m$  son ortogonales por definición de ortogonalidad del espacio de funciones. ■

Ahora podemos discutir el caso  $m = n$ , estableciendo también la normalización de  $P_n$ . Empecemos elevando al cuadrado la función generatriz

$$(6.39) \quad (1-2xt+t^2)^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right]^2.$$

Si integramos de  $x = -1$  a  $x = 1$  tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 t^{m+n} P_n P_m dx.$$

Por ortogonalidad, los términos mezclados se hacen 0, por lo que tenemos

$$(6.40) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx.$$

Haciendo la sustitución  $y = 1-2tx+t^2$ , con  $dy = -2tdx$ , obtenemos:

$$(6.41) \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right).$$

Aplicando la propiedad  $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$  y con la expansión en serie de Taylor

$$(6.42) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

podemos calcular

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) &= \frac{1}{t} \left( t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots \right) - \frac{1}{t} \left( -t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \cdots \right) \\ &= 2 \left( 1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}\end{aligned}$$

Si igualamos los coeficientes con (6.40) tenemos:

$$(6.43) \quad \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Combinando la condición de ortogonalidad con la ecuación anterior tenemos

$$(6.44) \quad \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}.$$

#### 6.4. Ecuación Asociada de Legendre

La ecuación asociada de Legendre tiene la forma

$$(6.45) \quad (1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = 0.$$

Notamos que la ecuación tiene un problema cuando  $x = 1, -1$  por el denominador  $1-x^2$ . Nos podemos deshacer de este problema con la sustitución

$$(6.46) \quad P = (1-x^2)^{m/2} \mathcal{P}.$$

Esta sustitución me la dictaron en un sueño. Después de reemplazar esta sustitución en la ecuación original y de un largo y tedioso proceso de álgebra (ejercicio para el lector) podemos llegar a la ecuación

$$(6.47) \quad (1-x^2)\mathcal{P}'' - 2x(m+1)\mathcal{P}' + [l(l+1) - m(m+1)]\mathcal{P} = 0.$$

Podemos usar ahora el método de Frobenius para conocer algunas propiedades de  $\mathcal{P}$ . Como siempre, probamos la solución  $\mathcal{P} = \sum_j a_j x^{k+j}$ . Reemplazando en (6.47) obtenemos:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty} a_j (k+j)(k+j-1)x^{k+j-2} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j [l(l+1) - m(m+1) - 2(m+1)(k+j) - (k+j)(k+j-1)]x^{k+j} = 0.\end{aligned}$$

Notamos que la potencia más baja la obtenemos cuando  $j = 0$ . Este valor de  $j$  nos da la ecuación indicial

$$a_0 k(k+1) = 0,$$

por lo que  $k = 0, 1$ . Para  $k = 0$  tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j j(j-1)x^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j [l(l+1) - m(m+1) - 2(m+1)j - j(j-1)]x^j = 0.$$

Para  $j = 1$  la primera sumatoria nos da  $a_1 \cdot 0 = 0$ , por lo que el término  $a_1$  es libre. Por conveniencia lo escogemos como 0. Ahora podemos hacer el cambio de variable

$j \rightarrow j + 2$  para la primera serie y así poder juntar las sumatorias en una sola. Con esto tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{a_{j+2}(j+2)(j-1) + a_j[l(l+1) - m(m+1) - j^2 - 2mj - j]\}x^j = 0.$$

La única manera de que se cumpla la igualdad es si se cumple término a término de la sumatoria, por lo que obtenemos la relación de recurrencia

$$(6.48) \quad a_{j+2} = \frac{j^2 + j(2m+1) - [l(l+1) - m(m+1)]}{(j+1)(j+2)}.$$

La serie de potencias convergerá si se trunca con algún coeficiente  $j$ . Notamos que la expresión se vuelve 0 cuando

$$j^2 + j(2m+1) = l(l+1) - m(m+1).$$

La igualdad se cumple para  $j = l - m$  (esto también me lo dijeron en un sueño). El lector puede comprobar que la igualdad se cumple para este valor de  $j$ . Como  $j$  debe ser positivo, tendremos una solución convergente si se cumple que

$$(6.49) \quad -l \leq m \leq l.$$

Ahora que sabemos esta característica importante que debe cumplir la solución asociada de Legendre, podemos encontrar qué forma tiene la solución. Recordemos que la solución que estamos buscando es

$$(6.50) \quad P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \mathcal{P}_l^m(x).$$

Para obtener la relación entre  $P_l^m$  y los polinomios de Legendre  $P_l$  podemos usar la fórmula de Leibniz

$$(6.51) \quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}f(x)}{dx^{n-k}} \frac{d^kg(x)}{dx^k},$$

dónde

$$(6.52) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Aplicando (6.51) a la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0.$$

Primero definimos

$$(6.53) \quad u(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Para el primer término tenemos

$$\frac{d^m}{dx^m}[(1-x^2)P_l''(x)] = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} P_l''(x)$$

para las derivadas de  $(1-x^2)$  tenemos:

$$\frac{d^k}{dx^k}(1-x^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 2, \\ -2 & \text{si } k = 2, \\ -2x & \text{si } k = 1, \\ 1-x^2 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, la suma se trunca en 2 y tenemos:

$$\frac{d^m}{dx^m}[(1-x^2)P_l''(x)] = \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} \frac{d^k}{dx^k}(1-x^2) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} P_l''(x)$$

$$(6.54) \quad = \binom{m}{0} (1-x^2) \frac{d^m}{dx^m} P_l''(x) + \binom{m}{1} (-2x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l''(x) + \binom{m}{2} (-2) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} P_l''(x).$$

Sabiendo que

$$\binom{m}{0} = 1, \quad \binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{1}{2}m(m-1),$$

la expresión (6.54) queda de la forma

$$(6.55) \quad (1-x^2) \frac{d^m}{dx^m} P_l''(x) - 2mx \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l''(x) - m(m-1) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} P_l''(x).$$

Usando el hecho de que

$$P_l''(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2} P_l(x)$$

y usando la definición (6.53) podemos reescribir (6.55) de la siguiente manera

$$(6.56) \quad (1-x^2)u''(x) - 2mxu'(x) - m(m-1)u(x).$$

Para el segundo término repetimos el mismo proceso y tenemos

$$(6.57) \quad \frac{d^m}{dx^m}[2xP_l'(x)] = 2xu'(x) + 2mu(x).$$

Para el tercer término solo hacemos sustitución directa con de la ecuación (6.53) ya que el término que acompaña a  $P_l$  es constante. Combinando los 3 términos llegamos a

$$(1-x^2)u''(x) - 2mxu'(x) - m(m-1)u(x) - 2xu'(x) - 2mu(x) + l(l+1)u(x) = 0,$$

reagrupando términos llegamos a

$$(6.58) \quad (1-x^2)u''(x) - 2x(m+1)u'(x) + [l(l+1) - m(m+1)]u(x) = 0.$$

Notamos inmediatamente que esta es la ecuación (6.47), lo que implica que  $u(x) = \mathcal{P}_l^m(x)$  por lo que tenemos

$$(6.59) \quad \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \mathcal{P}_l^m(x),$$

con (6.46) obtenemos finalmente la relación

$$(6.60) \quad P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

dónde  $(-1)^m$  es un factor agregado para que los armónicos esféricos tengan la convención de fase usual. Con esto, podemos calcular los polinomios asociados de Legendre.

**6.4.1. Polinomios asociados de Legendre.** Para encontrar relaciones de recurrencia que nos ayuden a calcular los polinomios asociados de Legendre de manera más sencilla podemos aplicar (6.59) a la función generatriz de  $P_l$  (6.15) para obtener la función generatriz de  $P_l^m$

$$(6.61) \quad g_m(x, t) = \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{P}_{s+m}^m(x) t^s.$$

Si diferenciamos (6.61) con respecto a  $t$  tenemos:

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} = \frac{(-1)^m (2m-1)!! (2m+1)(x-t)}{(1-2xt+t^2)^{m+3/2}}.$$

Notamos que la por la expresión anterior y  $g_m$  se satisface la ecuación

$$(6.62) \quad (1-2xt+t^2) \frac{\partial g_m}{\partial t} = (2m+1)(x-t)g_m$$

con lo que podemos calcular la relación de recurrencia, usando la sustitución  $l = s + m$

$$(6.63) \quad (l - m + 1)\mathcal{P}_{l+1}^m - (2l + 1)x\mathcal{P}_l^m + (l + m)\mathcal{P}_{l-1}^m = 0.$$

Ahora, calculamos

$$g_{m+1} = \frac{(-1)^m(2m+1)!!}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2+1}}.$$

Notamos que la expresión anterior cumple con la ecuación

$$(6.64) \quad (1-2xt+t^2)g_{m+1} = -(2m+1)g_m.$$

Si aplicamos esto a la función generatriz en su forma de serie obtenemos la relación de recurrencia

$$(6.65) \quad \mathcal{P}_{l+1}^{m+1}(x) - 2x\mathcal{P}_l^{m+1}(x) + \mathcal{P}_{l-1}^{m+1}(x) = -(2m+1)\mathcal{P}_l^m(x).$$

**6.4.2. Funciones asociadas de Legendre.** Con las relaciones de recurrencia (6.63) y (6.65) podemos calcular

(6.66)

$$\mathcal{P}_l^{m+1}(x) + \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}\mathcal{P}_l^m(x) + (l+m)(l-m+1)\mathcal{P}_l^{m-1}(x) = 0,$$

$$(6.67) \quad (2l+1)x\mathcal{P}_l^m(x) = (l+m)\mathcal{P}_{l-1}^m(x) + (l-m+1)\mathcal{P}_{l+1}^m(x),$$

$$(6.68) \quad (2l+1)(1-x^2)^{1/2}\mathcal{P}_l^m(x) = \mathcal{P}_{l-1}^{m+1}(x) - \mathcal{P}_{l+1}^{m+1}(x),$$

$$(6.69) \quad (1-x^2)^{1/2}(\mathcal{P}_l^m(x))' = \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\mathcal{P}_l^{m-1}(x) - \frac{1}{2}\mathcal{P}_l^{m+1}(x).$$

La expresión (6.68) puede desarrollarse como

$$\begin{aligned} (2l+1)(1-x^2)^{1/2}\mathcal{P}_l^m(x) &= \mathcal{P}_{l-1}^{m+1}(x) - \mathcal{P}_{l+1}^{m+1}(x) \\ &= (l-m+1)(l-m+2)\mathcal{P}_{l+1}^{m-1}(x) \\ &\quad - (l+m)(l+m-1)\mathcal{P}_{l-1}^{m-1}(x). \end{aligned}$$

Y la expresión (6.69) puede reescribirse a

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{1/2}(\mathcal{P}_l^m(x))' &= \frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\mathcal{P}_l^{m-1}(x) - \frac{1}{2}\mathcal{P}_l^{m+1}(x) \\ &= (l+m)(l-m+1)\mathcal{P}_l^{m-1}(x) + \frac{mx}{(1-x^2)^{1/2}}\mathcal{P}_l^m(x). \end{aligned}$$

Con estas relaciones de recurrencia se puede usar un programa para calcular el  $\mathcal{P}_l^m$  que queramos. Las primeras funciones asociadas de Legendre vienen dadas por

TABLA 2. Funciones de Legendre Asociadas

$l, m$	$\mathcal{P}_l^m(x)$
1, 1	$-\sqrt{1-x^2} = -\sin \theta$
2, 1	$-3x\sqrt{1-x^2} = -3 \cos \theta \sin \theta$
2, 2	$3(1-x^2) = 3 \sin^2 \theta$
3, 1	$-\frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2} = -\frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$
3, 2	$15x(1-x^2) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$
3, 3	$-15(1-x^2)^{3/2} = -15 \sin^3 \theta$
4, 1	$-\frac{5}{2}(7x^3-3x)\sqrt{1-x^2} = -\frac{5}{2}(7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \sin \theta$
4, 2	$\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2) = \frac{15}{2}(7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta$
4, 3	$-105x(1-x^2)^{3/2} = -105 \cos \theta \sin^3 \theta$
4, 4	$105(1-x^2)^2 = 105 \sin^4 \theta$

**6.4.3. Paridad.** La paridad de  $P_l^m$  dependerá de  $l, m$  de la siguiente manera

$$(6.70) \quad P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x).$$

**6.4.4. Ortogonalidad.** Se puede demostrar que las funciones asociadas de Legendre cumple con la regla de ortogonalidad

$$(6.71) \quad \int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2p+1} \frac{(p+m)!}{(p-m)!} \delta_{pq}.$$



## Capítulo 7

# Función Gamma

### 7.1. Introducción

La función Gamma aparece muchas veces en problemas físicos. Para valores enteros aparece en toda expansión de Taylor y es usada para las funciones de Bessel de orden no entero.

Se ha demostrado que esta función pertenece a una clase más general de funciones que no satisfacen ninguna ecuación diferencial con coeficientes racionales. Como la mayoría de teorías físicas están gobernadas por ecuaciones diferenciales, la función gamma (por sí misma) no describe una cantidad física de interés, pero aparece como un factor en expansiones de las cantidades físicas relevantes.

### 7.2. Constante de Euler-Mascheroni

Antes de discutir la función gamma, primero recordemos la definición de la constante de Euler-Mascheroni:

$$(7.1) \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \int_1^\infty \left( \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx,$$

dónde  $\lfloor x \rfloor = \text{floor}(x)$  es el mayor entero que es menor o igual a  $x$ . Esta constante es un número irracional y se puede aproximar con el valor de

$$(7.2) \quad \gamma = 0,5772156649015328606065120900824024\dots$$

Con esta constante definida, podemos hablar sobre la definición de la función gamma.

### 7.3. Definiciones y Propiedades

**7.3.1. Límite Infinito.** La primera definición que tenemos de la función gamma (atribuída a Euler) es

$$(7.3) \quad \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

$z$  puede representar un real o un número complejo. Esta definición es útil para obtener derivadas de  $\Gamma(z)$ , además de que con ella podemos obtener

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)(z+n+1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{z+n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{n \left( \frac{z}{n} + \frac{1}{n} + 1 \right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

s Con lo que hemos obtenido una de las propiedades más importantes de la función gamma:

$$(7.4) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Además, con la definición (7.3) podemos calcular

$$(7.5) \quad \Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Con (7.5) y (7.4) podemos calcular el resto de valores para  $x \in \mathbb{Z}^+$  de la siguiente manera:

$$(7.6) \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**7.3.2. Integral definida.** Una segunda definición (por Euler, de nuevo) viene dada por la integral

$$(7.7) \quad \Gamma(z) \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

La restricción impuesta es para evitar la divergencia de la integral. La definición (7.7) tiene algunas variaciones, las más comunes son:

$$(7.8) \quad \Gamma(z) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

o

$$(7.9) \quad \Gamma(z) = \int_0^1 \left[ \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Cuando  $z = \frac{1}{2}$ , notamos que (7.8) es la integral de Gauss, por lo que tenemos

$$(7.10) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ahora, demostraremos la equivalencia entre (7.3) y (7.7).

**TEOREMA 7.1.** *Las expresiones (7.3) y (7.7) dadas por*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

respectivamente, son equivalentes y son iguales a  $\Gamma(z)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos primero la función de dos variables

$$(7.11) \quad F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0,$$

con  $n$  un número entero. Usamos la propiedad

$$(7.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}.$$

Aplicando (7.12) en (7.11) obtenemos la ecuación (7.7)

$$(7.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \equiv \Gamma(z).$$

Ahora consideremos la sustitución  $u = t/n$ . Entonces tenemos

$$(7.14) \quad F(z, n) = n^2 \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{z-1} du.$$

Si aplicamos integración por partes obtenemos

$$(7.15) \quad \frac{F(z, m)}{n^z} = (1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du,$$

debido a que  $z > 0$  la parte integrada desaparece en ambos extremos. Repitiendo este proceso  $n$  veces llegamos a

$$F(z, n) = n^z \frac{n(n-1)\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z.$$

Tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  llegamos a

$$(7.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(z, m) = F(z, \infty) \equiv \Gamma(z),$$

con lo que hemos demostrado la equivalencia de ambas definiciones. ■

**7.3.3. Producto Infinito.** La tercera manera de definir a la función Gamma (esta vez dada por Weistrass, al fin alguien que no es Euler) es dada por el producto infinito

$$(7.17) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m},$$

dónde  $\gamma$  es la constante de Euler-Mascheroni definida anteriormente. Usamos

$$(7.18) \quad \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} = \left(\frac{m+z}{m}\right)^{-1} = \left(\frac{m}{m+z}\right),$$

para calcular

$$(7.19) \quad \prod_{m=1}^n \left(\frac{m}{m+z}\right) = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{2}{2+z} \cdots \frac{n}{n+z}$$

$$(7.20) \quad = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)},$$

con lo que podemos escribir

$$(7.21) \quad \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} n^z.$$

Calculando el recíproco de (7.21) y usando

$$(7.22) \quad n^{-z} = e^{-\ln n} z$$

llegamos a

$$(7.23) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(-\ln n)z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right).$$

Si multiplicamos y dividimos al lado derecho de (7.23) por

$$(7.24) \quad \exp \left[ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) z \right] = \prod_{m=1}^n e^{z/m}$$

obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(z)} &= z \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) z \right] \right\} \\
 &\quad \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z/m} \right] \\
 &= z \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left[ \left( \sum_{k=1}^n k^{-1} - \ln n \right) z \right] \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left( 1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z/m} \right] \\
 &= ze^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{m} \right) e^{-z/m},
 \end{aligned}$$

en el último paso cambiamos  $m$  por  $n$ , ya que es solo una etiqueta y usamos la definición (7.1) de  $\gamma$ . De esta manera demostramos que (7.17) también es equivalente a las anteriores definiciones.

#### 7.4. Relaciones Funcionales

La función Gamma tiene varias propiedades o relaciones funcionales que la hacen muy útil para los problemas. Una de ellas es la ya conocida

$$(7.25) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Otra propiedad muy importante es la fórmula de reflexión

$$(7.26) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

Por último, tenemos la fórmula de duplicación de Legendre

$$(7.27) \quad \Gamma(1+z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z+1)$$

## Capítulo 8

# Ecuación de Helmholtz en Coordenadas Esféricas

### 8.1. Introducción

En la Sección 5.6 discutimos el método de separación de variables para resolver una EDP, en particular, usamos la ecuación de Helmholtz para desarrollar la técnica. Cuando llegamos a las coordenadas esféricas, para la el ángulo polar hicimos uso de los polinomios de Legendre antes de definirlos. Con los capítulos 6 y 7 ahora estamos listos para dar una solución más detallada para la ecuación de Helmholtz

$$(8.1) \quad (\nabla^2 + k^2)\psi = 0$$

en coordenadas esféricas. Empecemos con la parte angular de la solución.

### 8.2. Armónicos Esféricos

Recordemos que el método de separación de variables dividía la solución en el producto de funciones que contenía solo una de las coordenadas, es decir

$$(8.2) \quad \psi(\mathbf{R}) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta).$$

La función para  $\Phi$ , tomando en cuenta que es naturalmente periódica, descubrimos que tiene la forma de

$$(8.3) \quad \Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Podemos normalizar la función de la siguiente manera

$$(8.4) \quad \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}.$$

Ahora, para la parte polar  $\Theta$  vimos que esta dependía de los valores de  $l, m$  que cumplían con la relación  $-l \leq m \leq l$ . Por la condición de ortogonalidad de las funciones de Legendre asociadas (6.71) podemos obtener la solución normalizada

$$(8.5) \quad \Theta_{lm}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta).$$

El producto  $\Phi_m \Theta_{lm}$  es conocido como un armónico esférico y se define como

$$(8.6) \quad Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Los armónicos esféricos aparecen en una gran variedad de problemas y son muy importantes, ya que, aunque cambiemos la dependencia radial o incluso añadamos un término  $V(r)\psi$  a la EDP la parte angular se mantendrá intacta y definida por (8.6).

### 8.3. Parte Radial

Ahora describamos lo más a detalle la solución de la parte radial. Recordemos que para la parte radial llegamos a la ecuación

$$(8.7) \quad r^2 R'' + 2rR' + [k^2 r^2 - l(l+1)]R = 0,$$

que con el cambio de variable

$$R(r) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}} = \frac{Z(x)}{\sqrt{x}}$$

se puede reescribir como

$$(8.8) \quad x^2 Z''(x) + xZ'(x) + \left[ x^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] Z = 0.$$

Ya discutimos que las soluciones para esta ecuación iban a ser las funciones de Bessel y Neumann esféricas, las cuales podemos normalizar cómo

$$(8.9) \quad j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x)$$

$$(8.10) \quad y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x)$$

respectivamente. Por lo que la solución de la parte radial vendrá dada por

$$(8.11) \quad R_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l y_l(kr).$$

Detuvimos nuestro análisis aquí y nos dimos por satisfechos. Sin embargo, hay un par de puntos por arreglar.

**8.3.1. Funciones de Bessel y Neumann de órdenes no enteros.** La función de Bessel

$$(8.12) \quad J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2s}$$

es válida para  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Sin embargo, para un  $\nu \notin \mathbb{Z}^+$  tenemos un problema, ya que  $(\nu + s)!$  no está definido para valores racionales. Este problema no puede ser ignorado ya que  $J_{l+1/2}$  es de orden no entero necesariamente, pues  $l$  es entero. Para poder resolver este problema recurrimos a la función generatriz

$$(8.13) \quad g(x, t) = \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right].$$

Siguiendo el mismo proceso que usamos en el capítulo 6 para encontrar relaciones de recurrencia para los polinomios de Legendre, podemos llegar a las relaciones

$$(8.14) \quad J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x),$$

$$(8.15) \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x).$$

Con estas relaciones o, de manera más sencilla, recordando que la función Gamma es como la extensión del factorial (o por inspiración divina, también es válido) podemos calcular la función de Bessel de orden no entero como

$$(8.16) \quad J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(\nu+s+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{\nu+2s}.$$

Si  $\nu = n \in \mathbb{Z}^+$  recuperamos la ecuación (8.12). Además, se puede demostrar por sustitución directa de (8.16) en la ecuación de Bessel que efectivamente esta función cumple con la ecuación de Bessel (ejercicio para el lector). Además, para órdenes no

enteros,  $J_\nu$  y  $J_{-\nu}$  son independientes (ejercicio para el lector), por lo que podemos definir a las funciones de Neumann de orden no entero de la siguiente manera

$$(8.17) \quad Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

**8.3.2. Funciones de Bessel y Neumann esféricas.** Ahora que ya tenemos bien definidas las funciones de Bessel y de Neumann para el caso en el que su orden no sea entero, podemos usar las funciones de Bessel y Neumann esféricas dadas por (8.9) y (8.10). En el caso de la función de Neumann esférica, usando la ecuación (8.17) podemos escribirla como

$$(8.18) \quad y_l(x) = \frac{\cos[(l + \frac{1}{2})\pi] j_l(x) - j_{-(l+1)}(x)}{\sin[(l + \frac{1}{2})\pi]}.$$

**8.3.3. Funciones de Hankel Esféricas.** De manera general, quisiéramos que todas las soluciones de una ecuación diferencial se porten “bien” tanto en el 0 como en el infinito. Para lograr esto con las funciones de Bessel y de Neumann esféricas, definimos una función que es combinación lineal de ambas y se la conoce como función de Hankel esférica. Tenemos dos tipos de esta función:

$$(8.19) \quad h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + iy_l(x),$$

$$(8.20) \quad h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - iy_l(x).$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$  (no tomamos el límite, solo analizamos el comportamiento de la función para valores de  $x$  muy grandes) las funciones de Hankel se comportan de la siguiente manera

$$(8.21) \quad h_l^{(1)} \rightarrow (-i)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x},$$

$$(8.22) \quad h_l^{(2)} \rightarrow i^{l+1} \frac{e^{-ix}}{x}.$$

La expresión (8.21) describe un comportamiento de una onda esférica que se propaga por el espacio y (8.22) describe una onda que se comprime en el origen.



## Capítulo 9

# Funciones de Green

### 9.1. Introducción

Las funciones de Green son una herramienta muy poderosa para atacar ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas. Esta herramienta surge de una intuición física para luego generalizarla en el campo de las matemáticas. Para empezar entonces, consideremos la ecuación de Poisson que describe el potencial generado por una distribución de cargas electrostáticas

$$(9.1) \quad \nabla^2 \psi(\mathbf{R}) = -\frac{\rho(\mathbf{R})}{\epsilon_0}.$$

Conocemos que la solución de esta ecuación diferencial viene dada por

$$(9.2) \quad \psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{R}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} d^3\mathbf{R}'.$$

Si definimos la función de Green  $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  como

$$(9.3) \quad G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|},$$

podemos transformar (9.1) a

$$(9.4) \quad \mathcal{L}\psi(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}),$$

dónde  $\mathcal{L} = -\nabla^2$  es el operador diferencial y  $f(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R})/\epsilon_0$  es el término de fuente. Esto quiere decir, que puedo calcular el potencial usando

$$(9.5) \quad \psi(\mathbf{R}) = \int G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') f(\mathbf{R}') d^3\mathbf{R}'.$$

En otras palabras, podemos calcular el potencial  $\psi$  si conocemos su función de Green y el término de fuente.

### 9.2. Método General

En la introducción encontramos la función de Green para la ecuación de Poisson. Esto fue fácil porque ya conocíamos de antemano cuál era la forma de la solución para el potencial. En el caso de que no tengamos esta ventaja (que tristemente es casi todo el tiempo) debemos seguir el siguiente proceso. Supongamos que tenemos una ecuación lineal no homogénea de la forma

$$(9.6) \quad \mathcal{L}\psi(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}),$$

dónde  $\mathcal{L}$  es un operador lineal cualquiera y  $f(\mathbf{R})$  un término de fuente arbitrario. Suponemos además que  $\psi(\mathbf{R})$  tiene solución de la forma

$$(9.7) \quad \psi(\mathbf{R}) = \int G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') f(\mathbf{R}') d^3\mathbf{R}'.$$

Si aplicamos el operador  $\mathcal{L}$  a (9.7) tendremos

$$(9.8) \quad \mathcal{L}\psi(\mathbf{R}) = \mathcal{L} \int G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') f(\mathbf{R}') d^3\mathbf{R}'.$$

Por la definición (9.6) y la linealidad del operador, (9.8) se transforma en

$$(9.9) \quad f(\mathbf{R}) = \int [\mathcal{L}G(\mathbf{R}, \mathbf{R}')] f(\mathbf{R}') d^3\mathbf{R}'.$$

Ahora, definimos la delta de Dirac  $\delta(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  cómo

$$(9.10) \quad f(\mathbf{R}) = \int \delta(\mathbf{R}, \mathbf{R}') f(\mathbf{R}') d^3\mathbf{R}'.$$

Notamos que las ecuaciones (9.9) y (9.10) implican que

$$(9.11) \quad \mathcal{L}G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \delta(\mathbf{R}, \mathbf{R}'),$$

todas las funciones de Green deben cumplir con la ecuación diferencial anterior.

EJEMPLO 9.1. *Encontrar la función de Green para la ecuación de Poisson*

$$-\nabla^2\psi(\mathbf{R}) = \frac{\rho(\mathbf{R})}{\epsilon_0}.$$

Por (9.11) se cumple que

$$-\nabla^2G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \delta(\mathbf{R}, \mathbf{R}').$$

La ecuación anterior tiene la solución

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} + F(\mathbf{R}, \mathbf{R}'),$$

dónde  $F(\mathbf{R}, \mathbf{R}')$  es la solución de la ecuación homogénea (en este caso, la ecuación de Laplace). ■

### 9.3. Teoremas de Green

Recordemos que el teorema de la divergencia nos dice que

$$(9.12) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3\mathbf{R} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2\mathbf{R}.$$

Este teorema funciona para cualquier campo vectorial  $\mathbf{A}$ , por lo que también debe servir para

$$(9.13) \quad \mathbf{A} = \phi \nabla \psi,$$

dónde  $\phi$  y  $\psi$  son funciones escalares. Por propiedades vectoriales, tenemos que

$$(9.14) \quad \nabla \cdot [\phi \nabla \psi] = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi,$$

(se puede comprobar esta fórmula usando notación de Einstein) y también

$$(9.15) \quad \phi \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \phi (\nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

dónde  $\nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \partial \psi / \partial n$  es la derivada direccional de  $\psi$  en dirección  $n$ . Usando (9.13)-(9.15) en (9.12) obtenemos el Primer Teorema de Green:

TEOREMA 9.1. (*Primer Teorema de Green*). *Si  $\phi$  y  $\psi$  son funciones escalares bien portadas (continuamente diferenciables) y conociendo la derivada direccional de  $\psi$  en dirección  $n$  entonces las funciones cumplen con la ecuación*

$$(9.16) \quad \int_V [\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] d^3\mathbf{R} = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} d^2\mathbf{R}.$$

El orden de las funciones en (9.13) no tiene nada de especial, por lo que podemos usar el mismo procedimiento con  $\mathbf{A} = \psi \nabla \phi$ , restar el resultado con (9.16) y así obtendremos:

**TEOREMA 9.2. (*Segundo Teorema de Green*).** *Si  $\phi$  y  $\psi$  son funciones escalares bien portadas (continuamente diferenciables) y conociendo la derivada direccional de  $\psi$  y  $\phi$  en dirección  $n$  entonces las funciones cumplen con la ecuación*

$$(9.17) \quad \int_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] d^3 \mathcal{R} = \oint_S \left[ \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] d^2 \mathcal{R}.$$

Con el anterior teorema obtenemos el siguiente corolario:

**COROLARIO 9.1.** *Si  $\phi(\mathcal{R}) = \Phi(\mathcal{R})$  y  $\psi(\mathcal{R}) = G(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$  con  $\Phi(\mathcal{R})$  una función escalar que cumple con  $\nabla^2 \Phi(\mathcal{R}) = -f(\mathcal{R})$ . Entonces, por el Teorema 9.2 obtenemos*

$$(9.18) \quad \Phi(\mathcal{R}) = \int_V G(\mathcal{R}, \mathcal{R}') f(\mathcal{R}') d^3 \mathcal{R}' - \oint_s \left[ \Phi(\mathcal{R}') \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial \Phi(\mathcal{R}')}{\partial n'} \right] d^2 \mathcal{R}'.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Usamos el hecho de que  $\nabla^2 G(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = -\delta(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$  y que  $G(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = G(\mathcal{R}', \mathcal{R}) \wedge \delta(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \delta(\mathcal{R}', \mathcal{R})$ , es decir,  $G$  y  $\delta$  son simétricos para cambiar la variable de integración de  $\mathcal{R}$  a  $\mathcal{R}'$  en (9.17). Luego usamos la definición de la delta de Dirac (9.10) y la linealidad de la integración para llegar finalmente a (9.18). ■

El corolario es muy importante ya que la fórmula (9.18) nos dice cómo encontrar el potencial para un volumen finito. El término

$$\Phi(\mathcal{R}')$$

es una condición de frontera de tipo Dirichlet (conocemos el valor del potencial en el borde), mientras que

$$\frac{\partial \Phi(\mathcal{R}')}{\partial n'}$$

es una condición de frontera de tipo Neumann (conocemos el valor de la derivada normal del potencial en el borde). Para resolver un problema solo es necesario conocer una de estas dos condiciones de frontera, pues tener estas dos condiciones a la vez puede llevar a una sobre determinación del problema. Además, la ecuación (9.18) hace evidente que si no conocemos las condiciones iniciales, el potencial no puede calcularse de forma completa.



## Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., Weber, H. J., & Harris, F. E. (2012). *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide* (7th ed.). Academic Press.
- [2] Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1963). *Equations of Mathematical Physics*. Pergamon Press.
- [3] Boas, M. L. (2006). *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (3rd ed.). Wiley.
- [4] Hassani, S. (2013). *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer Science & Business Media.
- [5] Riley, K. F., Hobson, M. P., & Bence, S. J. (2006). *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. Cambridge University Press.
- [6] Courant, R., & Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics* (Vol. 1 & 2). Wiley-VCH.
- [7] Morse, P. M., & Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill.
- [8] Matthews, J., & Walker, R. L. (1970). *Mathematical Methods of Physics*. W. A. Benjamin.
- [9] Shankar, R. (1994). *Principles of Quantum Mechanics*. Plenum Press.
- [10] Byron, F. W., & Fuller, R. C. (1992). *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Publications.
- [11] Bender, C. M., & Orszag, S. A. (1999). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I*. Springer Science & Business Media.
- [12] Wyld, H. W. (1999). *Mathematical Methods for Physics*. Perseus Books.
- [13] Dennery, P., & Krzywicki, A. (1996). *Mathematics for Physicists*. Dover Publications.
- [14] Stone, M., & Goldbart, P. (2009). *Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*. Cambridge University Press.
- [15] Appel, W. (2007). *Mathematics for Physics and Physicists*. Princeton University Press.
- [16] Cahill, K. (2013). *Physical Mathematics*. Cambridge University Press.
- [17] Altland, A., & Simons, B. D. (2010). *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press.
- [18] Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press.
- [19] Vladimirov, V. S. (1971). *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker.
- [20] Gelfand, I. M., & Fomin, S. V. (1963). *Calculus of Variations*. Prentice-Hall.
- [21] Butkov, E. (1968). *Mathematical Physics*. Addison-Wesley.
- [22] Snieder, R. (2004). *A Guided Tour of Mathematical Methods for the Physical Sciences*. Cambridge University Press.
- [23] Lang, S. (2012). *Complex Analysis*. Springer Science & Business Media.
- [24] Zettili, N. (2009). *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley.
- [25] Reed, M., & Simon, B. (1980). *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press.
- [26] Frankel, T. (2011). *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press.
- [27] Stakgold, I., & Holst, M. J. (2011). *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. SIAM.
- [28] Ablowitz, M. J., & Fokas, A. S. (2003). *Complex Variables: Introduction and Applications*. Cambridge University Press.
- [29] Saff, E. B., & Snider, A. D. (2003). *Fundamentals of Complex Analysis*. Pearson Education.
- [30] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. Wiley.