Análisis Numérico

Nicolás Camacho Plazas , Daniela Cortes Antonio , Mateo Florido Sanchez

Agosto 2019

1 Introducción

En el presente documento se encontrará la descripción del desarrollo de los cuatro algoritmos propuestos en clase los cuales son el algoritmo de Newton, bisección, un hibrido entre ambos algoritmos y la reformulación de la cuadrática.Además de este documento, contamos con los archivos .R ,el código fuente de los mismos se encuentran en el repositorio de gitHUb de cada uno de los integrantes del grupo los cuales son: NicolasCamachoP , dcortesantonio y mateoflorido.

2 Bisección

2.1 Bisección dos parámetros

Para este algoritmo contabamos con cuatro parámetros, la función de la cual queríamos obtener su raíz, la toleracia y un intervalo [a,b] donde la función f(x) es continua.Además de esto era necesario verificar que existiera por lo menos una raíz, esto dado que la función f(x) evaluada en los valor de a y b tuvieran signo contrario.

Dada la función $x^3 - x - 1$ con un intervalo de [1,2] y una tolerancia de 10^-8 obtenemos los siguientes resultados: Cero de función en [1 , 2] aproximadamente es: 1.324718 con error mayor igual a 9.313226e-10 realizando 29 iteraciones y una predicción de 29.89735. Cada una de estas iteraciones podemos observarlas en las Figura 1.

Además al graficar la cantidad de iteraciones en x y el valor de los errores en y podemos observar que a medida que aumenta la cantidad de iteraciones la curva tiende a cero sin embargo nunca toca este valor dado que el valor de tolerancia de este error es de 10^-8 esta gráfica se encuentra en la Figura 2 , así mismo y al cambiar el valor de la tolerancia a 10^-3 observamos que el número de interaciones se reduce a 9 y además la curva que representa la relación entre el error y las iteraciones tiendea un valor mcuho menos cercano a cero, dado que es una presición mucho menor a la anterior, esta gráfica la podemos encontrar en la Figura 3.

a	b	m	Error est.
1.0000000	1.5000000	1.5000000	0.2500000
1.2500000	1.5000000	1.2500000	0.1250000
1.2500000	1.3750000	1.3750000	0.0625000
1.3125000	1.3750000	1.3125000	0.0312500
1.3125000	1.3437500	1.3437500	0.0156250
1.3125000	1.3281250	1.3281250	0.0078125
1.3203125	1.3281250	1.3203125	0.0039062
1.3242188	1.3281250	1.3242188	0.0019531
1.3242188	1.3261719	1.3261719	0.0009766
1.3242188	1.3251953	1.3251953	0.0004883
1.3247070	1.3251953	1.3247070	0.0002441
1.3247070	1.3249512	1.3249512	0.0001221
1.3247070	1.3248291	1.3248291	0.0000610
1.3247070	1.3247681	1.3247681	0.0000305
1.3247070	1.3247375	1.3247375	0.0000153
1.3247070	1.3247223	1.3247223	0.0000076
1.3247147	1.3247223	1.3247147	0.0000038
1.3247147	1.3247185	1.3247185	0.0000019
1.3247166	1.3247185	1.3247166	0.0000010
1.3247175	1.3247185	1.3247175	0.0000005
1.3247175	1.3247180	1.3247180	0.0000002
1.3247178	1.3247180	1.3247178	0.0000001
1.3247179	1.3247180	1.3247179	0.0000001
1.3247179	1.3247180	1.3247179	0.0000000
1.3247179	1.3247180	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000

Figure 1: Resultados iteraciones bisección (Dos parámetros)

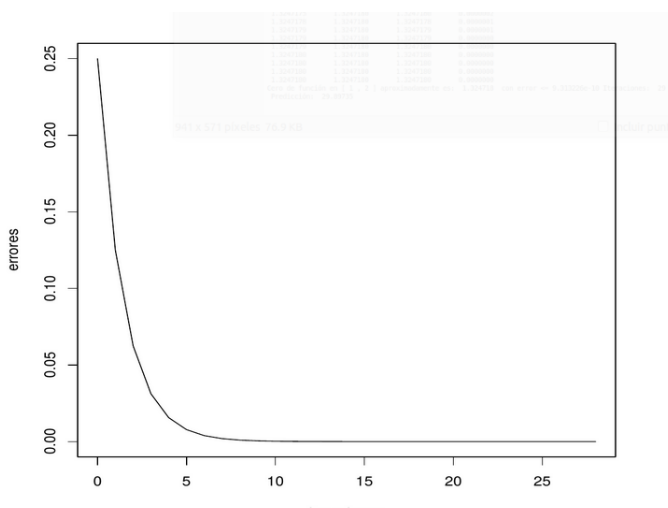

Figure 2: Gráfica errores e iteraciones, tolerancia $10^{-}8$

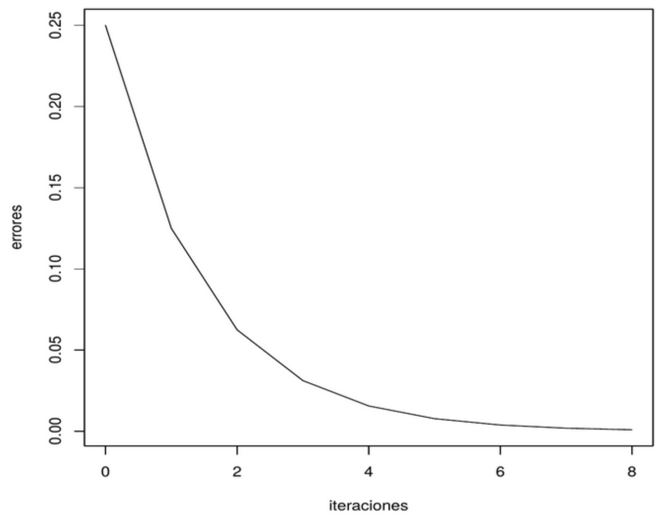

Figure 3: Gráfica errores e iteraciones, tolerancia 10^-3

2.2 Bisección tres parámetros

Para este algoritmo contamos con los mismos parámetros de la bisección de dos parámetros, sin embargo a la hora de ejecutar el algoritmo calculamos dos pivotes para poder dividir el intervalo en tres secciones y así verificando entre estos nuevos intervalos sus signos para comprobar si existe alguna raíz en estos intervalos, de esta forma en el mejor de los casos estamos descartando dos terceras partes del intervalo total haciendo este algoritmo más eficiente que el anterior, ya que para una misma función realiza una cantidad menor de iteraciones.

Dada la función $x^3 - x - 1$ con un intervalo de [1,2] y una tolerancia de 10^-8 obtenemos los siguientes resultados: Cero de función en [1 , 2] aproximadamente es: 1.324718 con error mayor igual a 4.301958e-10 realizando 19 iteraciones y una predicción de 29.89735. Cada una de estas iteraciones podemos observarlas en las Figura 4. Además en esta imagen podemos observar los valores que toman las variables m1 y m2 ya que son los dos pivotes de dividen el intervalos en tres secciones.

Al igual que la gráfica de errores e iteraciones podemos observar comparando con la Figura 2 que la curva de la Figura 5 decrese con mayor velocidad ya que toma el error toma un valor cercano a cero en un menor cantidad de iteracciones para una misma función, con un mismo valor de tolerancia y un mismo intervalo.

a	b	m1	m2	Error est.
1.0000000	1.3333333	1.3333333	1.6666667	0.1666667
1.2222222	1.3333333	1.1111111	1.2222222	0.0555556
1.2962963	1.3333333	1.2592593	1.2962963	0.0185185
1.3209877	1.3333333	1.3086420	1.3209877	0.0061728
1.3209877	1.3251029	1.3251029	1.3292181	0.0020576
1.3237311	1.3251029	1.3223594	1.3237311	0.0006859
1.3246456	1.3251029	1.3241884	1.3246456	0.0002286
1.3246456	1.3247980	1.3247980	1.3249505	0.0000762
1.3246964	1.3247472	1.3246964	1.3247472	0.0000254
1.3247134	1.3247303	1.3247134	1.3247303	0.0000085
1.3247134	1.3247190	1.3247190	1.3247247	0.0000028
1.3247171	1.3247190	1.3247153	1.3247171	0.0000009
1.3247178	1.3247184	1.3247178	1.3247184	0.0000003
1.3247178	1.3247180	1.3247180	1.3247182	0.0000001
1.3247179	1.3247180	1.3247178	1.3247179	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247179	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000
1.3247180	1.3247180	1.3247180	1.3247180	0.0000000

Figure 4: Resultados iteraciones bisección (Tres parámetros)

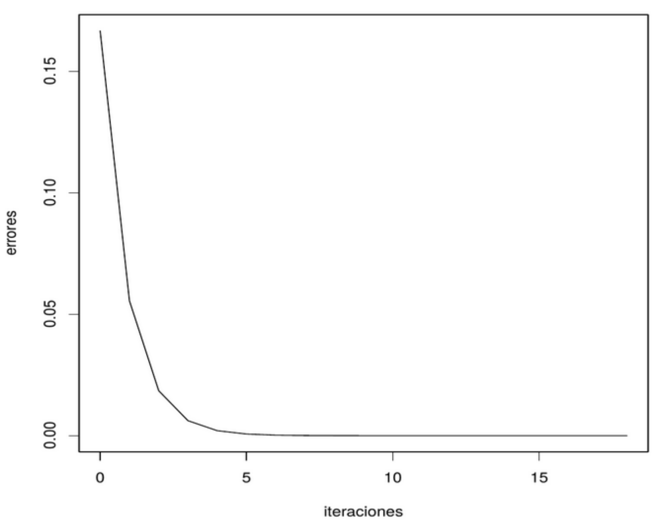

Figure 5: Gráfica errores e iteraciones, tolerancia $10^{-}8$

3 Newton

Para este algoritmo contabamos con cuatro parámetros, la función de la cual queríamos obtener su raíz, la toleracia , el valor inicial de xk es decir xinicial (el cual es un valor cercano a la raíz) y el valor máximo de iteraciones que se podrán realizar. Ya que en para este algoritmo no contamos con un intervalo donde podamos asegurar la existencia de por lo menos una raíz, tenemos un valor máximo de iteraciones el cual nos da una condición de salida para no quedarnos en un ciclo infinito.

Dada la función $x^3 - x - 1$ con un valor inicial de x de 1.5, un máximo de iteraciones igual a 4000 y una tolerancia de 10^-8, obtenemos los siguientes resultados: un valor de la raíz igual a 1.324718 y realizando 12 iteraciones.

Sin embargo, dada la función $0.2 * sin(16 * x) + 1.75$ el algoritmo sobrepasa la cantidad máxima de iteraciones y x queda un valor igual a 636869.3, ya que debido al número de iteraciones máximas no puede seguir aproximando a la raíz de la función.

4 Hibrido

Para este algoritmo contabamos con cuatro parámetros, la función de la cual queríamos obtener su raíz, la toleracia y un intervalo [a,b].Incorporando el algoritmo de bisección y el algoritmo de Newton de forma simultánea, como primer punto análizamos las ventajas que trae cada uno de los algoritmos y pudimos observar que el método de Newton tiene una convergencia local mientras que el algoritno de bisección una convergencia global en el intervalo dado. Por tanto por medio de la bisección con dos intervalos podemos ir acotando el intervalo a análizar ,además dado los signos extremos del intervalo conocer si existe o no una raíz allí y así mismo ir posicionando el xk del método de Newton para poder aplicar este método de forma simultánea.

Dada la función $e^x - pi * x$ un intervalo [0,2] y una tolerancia de 10^-8, obtenemos los siguientes resultados: un valor de la raíz igual a 0.553827 y realizando 26 iteraciones.Además la grafica (Figura 6) de errores e iteraciones presenta un comportamiento muy diferente a las demás graficas de algoritmos anteriores.

5 Cuadrática

Al calcular la raíz de una función cuadrática utilizamos la función cuadrática clásica $-b + sqrt(b^2 - 4 * a * c)/2a$, pero además al racionalizar por el conjugado esta mirma fórmula obtenemos: $-2c/b + sqrt(b^2 - 4 * a * c)$, de esta forma si b tiene valores muy grandes la función no va tender a 0.

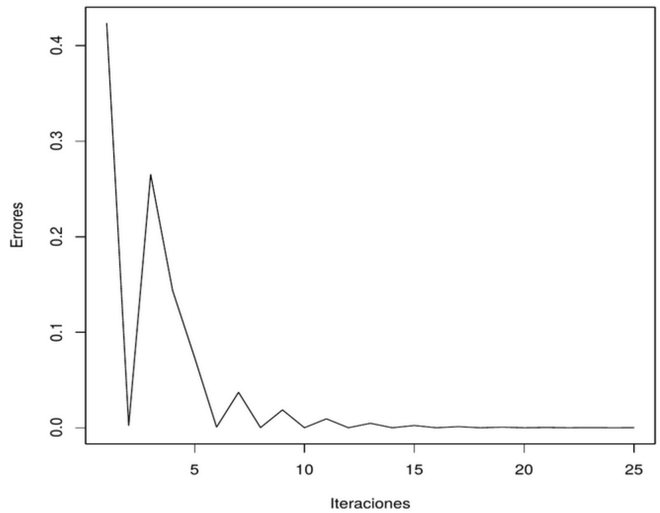

Figure 6: Gráfica errores e iteraciones, tolerancia $10^{-}8$

Por tanto teniendo los valores de la fórmula como: a=3, b=$9^{1}2$, c=-3 , obtenemos los siguienets resultados: Con 8 decimales, raíz 1: -94143178827 y raíz 2: 1.0622118e-11. Con 16 decimales raíz 1: -94143178827 y raíz 2: 1.062211848441645e-11.

6 Referencias

[1]Kim, T. Noh, W. Oh and S. Park, Applied Mathematical Sciences, Vol. 11, 11th ed. Korea, 2017, pp. 2790-2796. [2] [4]L. Rodríguez Ojeda, Análisis Numérico Básico. 2014, pp. 47-57.