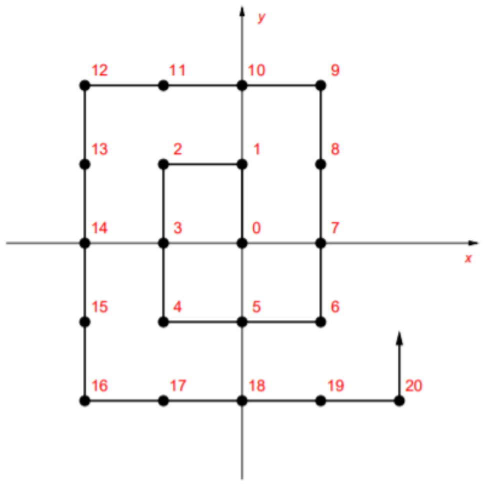
Documentação Trabalho Prático Nº 1

AEDS II

Introdução e Objetivo TP

O objetivo do trabalho prático é escrever um código (algorítimo) que seja capaz de retornar as coordenadas de um ponto da espiral abaixo (Figura 1.1) conhecendo apenas o seu número.



(Figura 1.1)

Estratégia Matemática

Observa-se, inicialmente, que os vértices da espiral pertencentes ao terceiro quadrante são representados por pontos aos quais são atribuídos números quadrados perfeitos pares (portanto, com raízes pares). Observa-se também, que ocorre semelhante com os vértices pertencentes ao primeiro quadrante, porém com quadrados perfeitos ímpares (portanto, com raízes ímpares).

Isso ocorre devido à propriedade descrita abaixo:

Considere um número n, pertencente aos naturais. n^2 é seu quadrado. Agora considere $(n+1)$. Seu quadrado pode ser escrito como $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Podemos reescrever isso da seguinte forma: $n^2+[n+(n+1)]$. Assim, o quadrado de um número é sempre escrito como a soma desse número com seu antecessor, somado ao quadrado de seu antecessor. Observa-se agora a espiral. Podemos encontrar os números associados aos seus vértices da seguinte forma:

$V_1=0$; $V_2=0+1$, $V_3=0+1+1$, $V_4=0+1+1+2$, $V_5=0+1+1+2+2$, ... $V_{x-1}=0+0+1+1+...+(n-1)+(n-1)+n$, $V_x=0+1+1+...+(n-1)+(n-1)+n+n$

Agora vamos reescrever esses vértices utilizando a propriedade acima:

$V_1=0$; $V_2=\mathbf{0^2+0+1}$, $V_3=1^2+1$, $V_4=\mathbf{1^2+1+(1+1)}$, $V_5=2^2+2$, $V_6=\mathbf{2^2+2+(2+1)}$ ... $V_{x-1}=\mathbf{(n-1)^2+(n-1)+n}$, $V_x=0+1+1+...+(n-1)+(n-1)+n+n$

Agora, observemos a localização dos vértices, considerando que V_1 é a origem do sistema de coordenadas, V_2 pertence ao sentido positivo do eixo das ordenadas e a espiral gira no sentido anti-horário:

V_1 -> Origem, V_2 -> Eixo y, V_3 -> 2ºQ, V_4 -> 3ºQ, V_5 -> 4ºQ, V_6 -> 1ºQ...

Portanto, os vértices de índice par são escritos da forma n^2 sempre e pertencem ao 1ºQ quando seu número correspondente é ímpar ou pertencem ao 3ºQ quando seu número correspondente é par.

Com essa propriedade, também se observa que o vértice de número = n^2 dista n posições do vértice anterior e n posições do próximo vértice. Assim como dista (n-1)+n posições do vértice de número $(n-1)^2$ e n+(n+1) do vértice de número $(n+1)^2$.

É possível observar que esses vértices de um mesmo quadrante também pertencem a uma mesma reta, pois a variação da coordenada x é sempre proporcional à coordenada y (isso ocorre devido à regra de desenho da espiral). Portanto, é possível encontrar facilmente as coordenadas de qualquer vértice, sabendo-se a equação dessa reta.

Agora, escolhe-se um ponto de número p de coordenadas (x_p, y_p) qualquer da espiral. Pode-se escrever esse número p como n^2+k, onde n e k são números naturais menores que p e $k<2n+1$ (garantindo, assim, que n^2 seja o maior quadrado perfeito menor do que p). Com isso, pode-se encontrar as coordenadas qualquer ponto p de maneira fácil, sabendo as coordenadas do ponto n^2, seguindo a seguinte regra.

Calcular $\sqrt{p}$ para encontrar n (maior natural menor ou igual a p). Calcula-se n^2 e encontra k. Verificar se n é par ou ímpar.

Caso n seja par:

O vértice n^2 de coordenadas (x_{n^2}, y_{n^2}) pertence ao terceiro quadrante. Observe que o primeiro vértice pertencente a esse quadrante é o de número 4 (n=2), de coordenadas (-1,-1). Obtém-se o próximo subtraindo 1 da coordenada x e 1 da coordenada y. Assim, observa-se que $x_{n^2}=y_{n^2}$ sempre. Assim, temos:

$V_0=(0,0)$, $V_4=(-1,-1)$, $V_{16}=(-2,-2)$...

Pode-se escrever uma regra para V_{n^2}. Tem-se sempre quadrados pares. Números pares podem ser escritos da forma 2a. Assim, n=2a. Para n=2, a=1; para n=4, a=2. Logo, para qualquer n, a=n/2. Observa-se também que as coordenadas x_{n^2} e y_{n^2} são iguais ao oposto desse fator a. Logo, as coordenadas de $V_{n^2}=(-n/2,-n/2)$, para n par.

Agora, observa-se o número k. Verifica-se se este é maior ou igual a n. Caso seja, sabe-se que o próximo ponto localiza-se depois ou coincide com o próximo vértice da espiral (já provado), portanto, se somarmos (varia no sentido positivo do eixo das abscissas) n unidades à x_{n^2}, teremos x_p. Caso seja menor, o valor de k será somado a x_{n^2} para obter x_p. Quando é estritamente maior, também teremos variação na coordenada y. Essa variação é no sentido positivo do eixo das ordenadas, portanto, soma-se (k-n) unidades à y_{n^2} para obter y_p.

Caso n seja ímpar:

O vértice n^2 de coordenadas (x_{n^2}, y_{n^2}) pertence ao primeiro quadrante. Observe que o primeiro vértice pertencente a esse quadrante é o de número 1 (n=1), de coordenadas (0,1). Obtém-se o próximo somando 1 à coordenada x e 1 à coordenada y. Assim, observa-se que $x_{n^2}+1=y_{n^2}$ sempre. Assim, temos:

$V_1=(0,1)$, $V_9=(1,2)$, $V_{25}=(2,3)$...

Pode-se escrever uma regra para V_{n^2}. Tem-se sempre quadrados ímpares. Números ímpares podem ser escritos da forma 2a+1. Assim, n=2a+1. Para n=1, a=0; para n=3, a=1. Logo, para qualquer n, a=(n-1)/2. Observa-se também que a coordenada x_n é sempre igual a esse fator a e y_n é igual à a+1. Logo, as coordenadas de V_{n^2}=((n-1)/2,(n+1)/2), para n ímpar.

Agora, observa-se o número k. Verifica-se se este é maior ou igual a n. Caso seja, sabe-se que o próximo ponto localiza-se depois ou coincide com o próximo vértice da espiral (já provado), portanto, se subtrairmos (varia no sentido negativo do eixo das abscissas) n unidades de x_{n^2}, teremos x_p. Caso seja menor, o valor de k será subtraído de x_{n^2} para obter x_p. Quando é estritamente maior, também teremos variação na coordenada y. Essa variação é no sentido negativo do eixo das ordenadas, portanto, subtrai-se (k-n) unidades de y_{n^2} para obter y_p.

Estratégia de montagem do algoritmo

O algoritmo é composto de 3 funções: a função *main*, a função inteira *ordenadas* e a função inteira *abscissas*. A função *ordenadas* calcula o valor da coordenada y do ponto a ser introduzido e a função abscissas calcula o valor da coordenada x desse ponto (funcionamento explicado adiante)

Primeiramente, na função *main*, são declaradas as variáveis inteiras p, x, y e raiz. A seguir, o sistema lê do usuário um valor inteiro positivo e o atribui à variável p. A variável raiz é igualada à raiz de p (corresponde à variável n tratada nas estratégias matemáticas). Caso p não seja quadrado perfeito, a variável raiz assumirá automaticamente o valor da maior raiz inteira menor que a raiz de p (fato devidamente testado no programa). A seguir, iguala-se a variável x ao retorno da função *abscissas* e a variável y ao retorno da função *ordenadas.* Tendo esses valores, o programa imprime na tela as coordenadas correspondentes.

A função *ordenadas* recebe como parâmetros a variável p e a variável raiz. Além dessas duas variáveis, são declaradas mais duas variáveis inteiras no corpo dessa função: y e erro. À variável erro corresponde à variável k tratada nas estratégias matemáticas, sendo igualada ao valor de (p - raiz). Assim, temos uma estrutura condicional para separar o caso raiz par e raiz ímpar. Dentro de cada um desses casos, a variável y é inicialmente igualada ao correspondente valor da coordenada y de raiz² (cujas respectivas fórmulas já são conhecidas e explicadas nas estratégias matemáticas) e após isso, existe outra estrutura condicional que irá checar se a variável erro é ou não maior que n. Caso ela seja, a diferença (erro – n) é acrescida ou subtraída da variável y, de acordo com a primeira condição (raiz par ou ímpar). Ao final, a função retorna o valor obtido de y.

A função *abscissas* recebe como parâmetros a variável p e a variável raiz. Além dessas duas variáveis, são declaradas mais duas variáveis inteiras no corpo dessa função: x e erro. À variável erro corresponde à variável k tratada nas estratégias matemáticas, sendo igualada ao valor de (p - raiz). Assim, temos uma estrutura condicional para separar o caso raiz par e raiz ímpar. Dentro de cada um desses casos, a variável x é inicialmente igualada ao correspondente valor da coordenada x de raiz² (cujas respectivas fórmulas já são conhecidas e explicadas nas estratégias matemáticas) e após isso, existe outra estrutura condicional que irá checar se a variável erro é ou não maior ou igual a n. Caso ela seja, o valor da raiz é acrescida ou subtraída da variável x, de acordo com a primeira condição (raiz par ou ímpar). Caso não seja, o valor a ser acrescido ou subtraído da variável x é o valor da variável erro. Ao final, a função retorna o valor obtido de x.

Conclusão

O algorítimo criado permite resolver o problema proposto em um número específico de passos, pois ele calcula o valor das coordenadas de acordo com um ponto específico (o ponto correspondente a raiz², ou n²) sem necessitar dos valores das coordenadas dos pontos anteriores a ele. Sendo assim, é um algorítimo que terá sempre a mesma eficiência independente do valor inserido pelo usuário. Isso o difere de um algorítimo que resolve o problema com número de passos dependente desse valor, já que este pode exigir muito mais tempo de execução caso o número seja muito grande.