

Universidad Nacional de Colombia
Fundamentos de Mecánica
(PEAMA Sumapaz 2023-I)

Problemas Semestrales

4 de mayo de 2023

INDICACIONES

Las sesiones taller tiene como objetivo evaluar la comprensión de diversas temáticas a través la expresión escrita. Por lo tanto, la solución de cada problema debe ser un texto expositivo bien redactado, esto incluye a las ecuaciones y procedimientos matemáticos ya que estos también son texto. Como texto la solución debe tener un propósito claro (calcular, explicar, identificar, describir, relacionar. . .) y su redacción debe ser siempre coherente con tal propósito.

Teniendo en cuenta lo anterior, los criterios de evaluación de las soluciones son los siguientes:

- I) **Descripción de la situación:** Todo problema tiene un contexto o una situación específica. El estudiante debe realizar una descripción de tal contexto y hacer uso de un esquema o figura donde relaciones todos los conceptos, cantidades físicas y/o matemáticas del problema.
- II) **Redacción de la solución:** Todo argumento dado por el estudiante debe ser claro, justificado y debidamente citado o referenciado con la información dada en las clases y/o desde bibliografía relacionada.
- III) **Uso del lenguaje disciplinar y matemático:** Todos los conceptos físicos y matemáticos en la solución deben usarse bien (buen lenguaje y buen manejo de unidades físicas) y las ecuaciones deben ser parte del texto (no una lista de símbolos únicamente).
- IV) **Uso de esquemas y figuras:** El estudiante debe hacer buen uso de las imágenes, es decir que debe usar la imagen dentro del texto y todas las variables y/o cantidades que se encuentren en la imagen debe ser definidas en el texto principal.

Las soluciones a los problemas deben ser entregadas de forma **individual** a lo largo de todo el semestre.

PROBLEMAS

1. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto? Justifique su respuesta: **a)** Es posible que un objeto tenga movimiento en ausencia de fuerzas sobre el objeto. **b)** Es posible tener fuerzas sobre un objeto en ausencia de movimiento del objeto. **c)** Ni a) ni b) son correctos. **d)** Tanto a) como b) son correctos.
2. Es muy probable que usted haya estado en un elevador que acelera hacia arriba mientras se mueve a pisos superiores. En este caso, se siente más pesado. De hecho, si se para en una báscula en ese momento, la báscula mide una fuerza que tiene una magnitud mayor que su peso. Por lo tanto, tiene evidencia sensorial y medida que lo lleva a creer que es más pesado en esta situación. ¿Es usted más pesado?
3. Una persona pesa un pescado de masa m en una balanza de resorte unida al techo de un elevador, como se ilustra en la figura. Muestre que, si el elevador acelera ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza de resorte da una lectura que es diferente del peso del pescado.

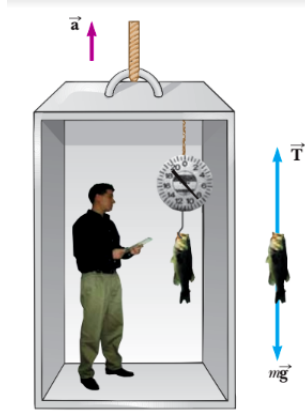


Figura 1: Esquema de un ascensor en un movimiento acelerado.

4. Un semáforo que pesa 122 N (Newtons) cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos a un soporte como en la figura. Los cables superiores forman ángulos de 37.0° y 53.0° con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación, o alguno de los cables se romperá?

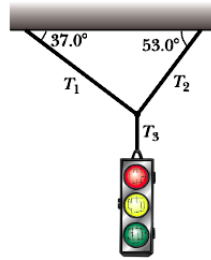


Figura 2: Esquema de un semáforo suspendido por cuerdas.

5. Una técnica común aplicada para medir la constante de fuerza de un resorte se demuestra por la configuración de la figura 5. El resorte cuelga verticalmente (figura 5a) y un objeto de masa m se une a su extremo inferior. Bajo la acción de la “carga” mg (siendo g la aceleración gravitacional), el resorte se estira una distancia d desde su posición de equilibrio (figura 5b). Si un resorte se estira 2.0 centímetros (cm) por un objeto suspendido que tiene una masa de 0.55 kg, ¿cuál es la constante de fuerza del resorte?

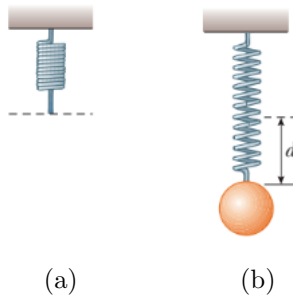


Figura 3: Esquema de un resorte.

NOTA: La **magnitud** de la fuerza F que ejerce un resorte que se comprime o se estira una distancia Δx sobre un objeto está dada por $F = -k\Delta x$, donde k es la constante del resorte.

1. Problemas Conjuntos Algebra Lineal

1. Un hombre quiere cargar un refrigerador en una camioneta con el uso de una rampa a un ángulo θ , como se muestra en la figura. Él afirma que se debe requerir menos trabajo para cargar la camioneta si la longitud L de la rampa aumenta. ¿Esta afirmación es válida?

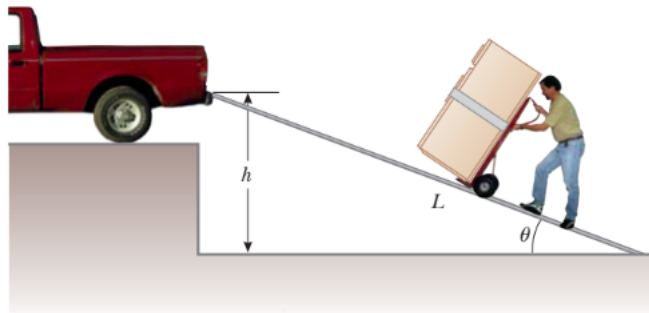


Figura 4: Persona cargando un refrigerador a lo largo de un plano inclinado.

NOTA: El trabajo es la energía transferida a un objeto por la aplicación de una fuerza que lo desplaza una cierta distancia. Cuantitativamente, si \mathbf{F} es la magnitud de la fuerza aplicada y \mathbf{d} es el vector desplazamiento del objeto, el trabajo W ejercido por la fuerza \mathbf{F} está dado por $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$.

2. Un ascensor tiene una masa de 1600 kg y transporta pasajeros con una masa combinada de 200 kg. Una fuerza de fricción constante de 4000 N retarda su movimiento. ¿Cuánta potencia debe proporcionar un motor para levantar el elevador y a sus pasajeros con una rapidez constante de 3.00 metros por segundo (m/s)? (**Pista:** La potencia P se define como la derivada de la energía E respecto al tiempo t , $P = dE/dt$. Demuestre que si el ascensor ejerce una fuerza constante \mathbf{F} , entonces $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, donde \mathbf{v} la velocidad a la que se mueve el ascensor.)
3. La cabeza de una cortadora de pasto tiene 100 gramos (g) de cuerda devanados en un carrete cilíndrico ligero con diámetro interior de 3.00 cm y diámetro exterior de 18.0 cm, como se muestra en la figura. La cuerda tiene una densidad lineal de 10.0 gramos por metro (g/m). Una sola hebra de la cuerda se extiende 16.0 cm desde el borde exterior del carrete. a) Cuando se enciende, la cortadora aumenta su velocidad de 0 a 2500 revoluciones por minuto (rev/min) en 0.215 segundos (s). ¿Qué potencia promedio entrega el motor de la cortadora a la cabeza mientras acelera?.

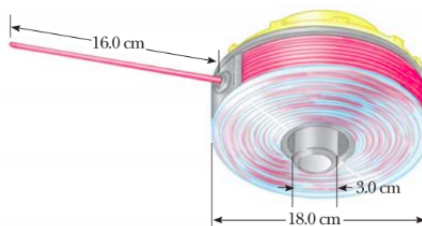


Figura 5: Esquema de la cabeza de una cortadora de pasto.

Pista: Demuestre que la potencia P en un movimiento de rotación sobre un eje fijo está dada por $P = \tau\omega$, donde τ es el torque que ejerce una fuerza para producir el giro y ω es la rapidez angular del movimiento.

4. La proyección de Mercator es una proyección cartográfica ideada por Gerardus Mercator en 1590 para elaborar mapas de la superficie terrestre. Esta proyección está dada por:

$$x = R\lambda,$$

$$y = R \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right|,$$

donde $R = 6371km$ es el radio de la tierra y, ϕ y λ son las coordenadas de latitud y longitud de la proyección. Usando esta proyección, calcule:

- a) Bogotá se encuentra ubicada aproximadamente entre 3° y 4° de latitud, y entre -73° y -74° de longitud. Determine la distancia $\Delta x = |x(\lambda = -74^\circ) - x(\lambda = -73^\circ)|$ y la distancia $\Delta y = |y(\phi = 4^\circ) - y(\phi = 3^\circ)|$. Compare estas distancias con la extensión de Bogotá.
5. La matriz de covarianza Σ entre N variables físicas X_1, X_2, \dots, X_N se define por:

$$\Sigma(X_1, X_2, \dots, X_N) = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_N) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_N) \end{bmatrix}$$

donde¹ $Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2$ es la varianza de la variable X_i y $Cov(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j)$ es la covarianza entre las variables X_i y X_j . Cada variable X_i en este contexto corresponde a un conjunto de medidas de variables físicas de algún sistema como lo pueden ser la temperatura del aire, humedad relativa del ambiente, el pH del suelo, entre otros. Teniendo en cuenta esta información:

- a) ¿Qué unidades físicas tiene la varianza y la covarianza entre dos variables? De ejemplos para responder esta pregunta.
- b) ¿Cuál es la interpretación de la varianza y la covarianza entre dos variables?
6. En una investigación científica, donde se estudian los efectos de la aplicación de micorrizas en plantas de arveja *Pisum Sativum L.*, se midieron tres características morfológicas: altura², número de hojas y número de nudos (ver Figura 6).

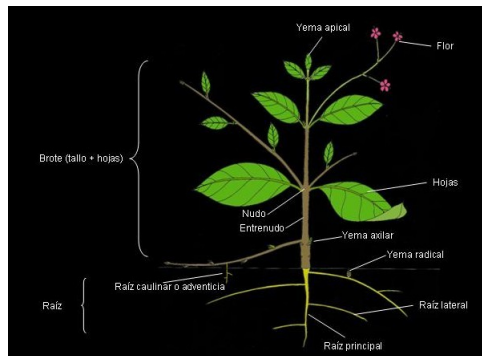


Figura 6: Características morfológicas de una planta con flor.

Los datos recolectados para diferentes plantas en el cultivo se muestran a continuación:

¹En las definiciones de la varianza y covarianza, el símbolo $E(X)$ representa el valor promedio de la variable física X .

²La altura fue medida usando un Vernier con una incertidumbre de $0,05mm$

DATO	ALTURA (cm)	No HOJAS	No de NUDOS
1	20	10	3
2	35	14	4
3	10	9	2
4	28	17	5
5	18	5	1
6	22	12	3
7	18	10	1
8	25	11	4
9	17	8	3
10	21	10	5

Tabla 1: Registro de datos del experimento.

Calcule la matriz de covarianza Σ de las variables medidas en esta investigación e interprétela.

7. La matriz de covarianza $\Sigma(X_1, X_2, \dots, X_N)$ puede diagonalizarse considerando nuevas variables independientes $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_N$, de tal forma que:

$$\Sigma(X_1, X_2, \dots, X_N) = \begin{bmatrix} Var(\tilde{X}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Var(\tilde{X}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Var(\tilde{X}_N) \end{bmatrix}$$

Usando los datos recolectados de tres cantidades físicas X_1, X_2 y X_3 importantes en su proyecto:

- Calcule la matriz de covarianza $\Sigma(X_1, X_2, X_3)$ e interprétela.
- Diagonalize la matriz obtenida y determiné la matriz de rotación R que diagonaliza a Σ
- Usando la matriz R , determine las nuevas variables \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 y \tilde{X}_3 .