1. Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Show that $f \notin \mathcal{R}[a,b] \iff \exists\, \varepsilon_0 > 0$ s.t. for $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists\, \dot{P}_m$ and $\dot{Q}_m$ with $\|\dot{P}_m\| < 1/m$ and $\|\dot{Q}\| < 1/m$ s.t.

$$|S(f,\dot{P}_m) - S(f,\dot{Q}_m)| \geq \varepsilon_0$$

(i) $(\Rightarrow)$

Se $f \notin \mathcal{R}[a,b]$, então, pelo Critério de Cauchy, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ e $M_{\varepsilon_0} > 0$ t.q. se $\dot{P}$ e $\dot{Q}$ são duas partições rotuladas de $[a,b]$ t.q. $\|\dot{P}\| < M_{\varepsilon_0}$ e $\|\dot{Q}\| < M_{\varepsilon_0}$ então

$$|S(f,\dot{P}) - S(f,\dot{Q})| \geq \varepsilon_0 \quad *$$

Em particular, se tomarmos as partições rotuladas indexadas por $\forall m \in \mathbb{N}$ t.q. $\|\dot{P}_m\| < \frac{1}{m}$ e $\|\dot{Q}_m\| < \frac{1}{m}$, como $\frac{1}{m} > 0$, então $*$ ainda vale.

(ii) $(\Leftarrow)$

Se para $\forall m \in \mathbb{N}$, $\dot{P}_m$ e $\dot{Q}_m$ são duas partições rotuladas de $[a,b]$ com $\|\dot{P}_m\| < M_{\varepsilon_0}$ e $\|\dot{Q}_m\| < M_{\varepsilon_0}$ t.q. $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ que satisfaz

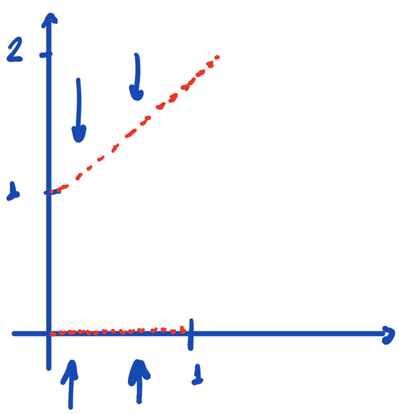
$$|S(f;\dot{P}_m) - S(f;\dot{Q}_m)| \geq \varepsilon_0$$

Então, pelo Critério de Cauchy, f não pode ser Riemann Integrável. Em particular, se $M_{\varepsilon_0} = \frac{1}{m}$, então vale a volta.

2. Consider the function $h:[0,1] \to \mathbb{R}$ defined as

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Show that $h \notin \mathcal{R}[a,b]$.



$\dot{P}$ com rótulos em $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

$\dot{Q}$ com rótulos em $[0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Note que precisamos mostrar que $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall \eta > 0$ existem partições rotuladas $\dot{P}$ e $\dot{Q}$ com $\|\dot{P}\| < \eta$ e $\|\dot{Q}\| < \eta$ t.q.

$$|S(h;\dot{P}) - S(h;\dot{Q})| \geq \varepsilon_0$$

Tomemos $\varepsilon_0 > 0$ e definamos

$$\dot{P} = \{(x_{i-1}, x_i), t_i \in \mathbb{Q}\}_{i=1}^{n}$$

$$\dot{Q} = \{(x_{i-1}, x_i), t_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}_{i=1}^{n}$$

então

$$S(h;\dot{Q}) = 0$$

E

$$S(h,\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} h(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i}(x_i - x_{i-1}) \quad , t_i \in \mathbb{Q}$$

Portanto, como

$$|S(h;\dot{P}) - S(h;\dot{Q})| = \left| \sum \frac{1}{t_i}(x_i - x_{i-1}) \right|$$

para provar o enunciado basta mostrar que

$$\left| \sum \frac{1}{t_i}(x_i - x_{i-1}) \right| > 0$$

Note que

$$\frac{1}{t_i} > 0, \quad t_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

e, pela densidade dos racionais,

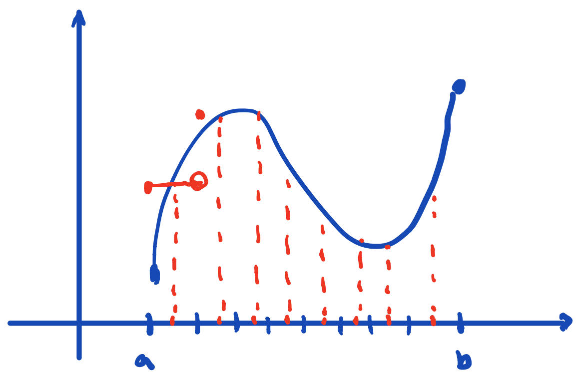
$$|x_i - x_{i-1}| > 0 \quad , \quad x_i \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

Portanto $h \notin \mathcal{R}[0,1]$

7. If $S(f,\dot{P})$ is any Riemann sum of $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, show that there exist a step function $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.t. $\int_a^b \varphi = S(f,\dot{P})$

//

$$S(f,\dot{P}) = \int_a^b \varphi$$



$$\dot{P} = \{(x_{i-1}, x_i), t_i\}_{i=1}^{n} \Rightarrow \varphi(x) = f(t_i), \quad x_{i-1} < x < x_i$$ //

Seja $\dot{P}$ uma partição rotulada definida como

$$\dot{P} = \{((x_{i-1}, x_i), t_i)\}_{i=1}^{n}$$

e tomemos a seguinte função degrau

$$\varphi(x) = f(t_i), \quad x_{i-1} < x < x_i$$

Então

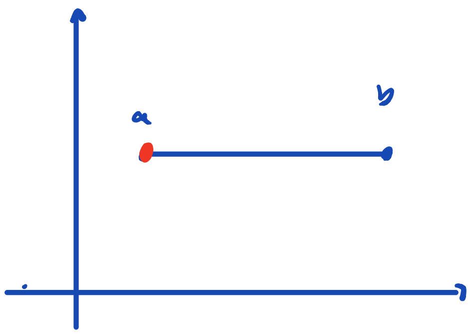
$$S(\varphi,\dot{P}) = \sum \varphi(t_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum f(t_i)(x_{i-1} - x_i) = S(f,\dot{P})$$

Além disso, notemos que, pelo Teorema da Integrabilidade da função degrau, sabemos que $\varphi \in R[a,b]$. Portanto, concluímos que para $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| \sigma(f, \dot{P}) - \int_a^b \varphi \right| < \varepsilon$$

8. Suppose that f is continuous on $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, and that $\int_a^b f = 0$.

Prove that $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$.



$f(x) = 1$, $x \in [a,b]$

$$\int_a^b f = x\Big|_a^b = (b-a) = 0 \Rightarrow b = a$$

+ $Z \subset \mathbb{R}$ null set

$\forall \epsilon > 0$ $\exists \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ s.t.

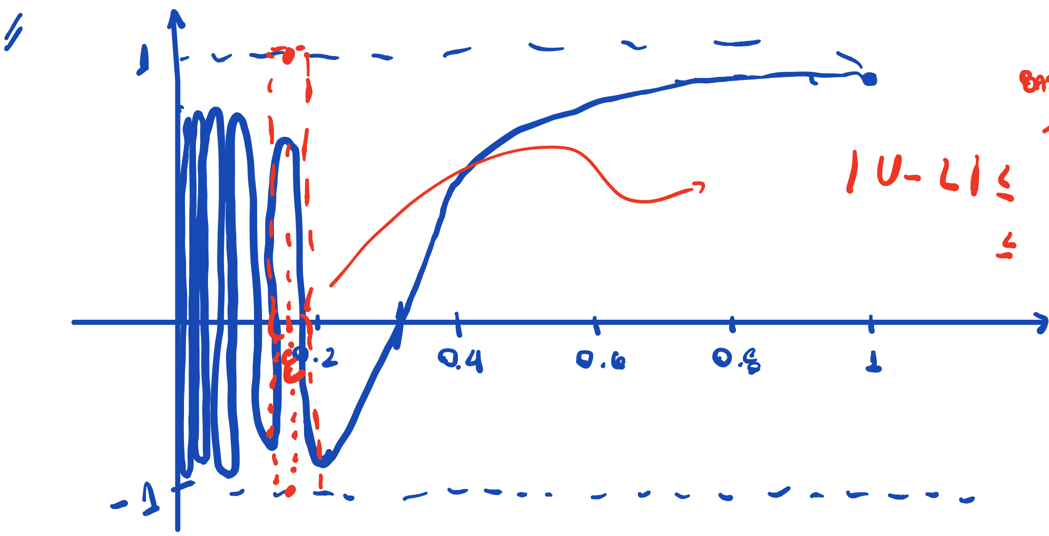
$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ & $\sum (b_k - a_k) \leq \epsilon$

12. Show that

$$g(x)=\begin{cases}\sin(1/x), & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

belongs to $\mathcal{R}[0,1]$.

Poderia usar o critério de integração de Lebesgue?



base altura

$$|U-L| \leq \varepsilon[1-(-1)]$$
$$\leq 2\varepsilon$$

Seja $\dot{P}$ uma partição rotulada de $[0,1]$, $\overline{S}(g;\dot{P})$ a soma superior de g, e $\underline{S}(g;\dot{P})$ sua soma inferior. Sabemos que $g\in\mathcal{R}[0,1]$ se existe um $\varepsilon>0$ t.q. para qualquer partição rotulada temos

$$|\overline{S}-\underline{S}| < \varepsilon$$

Não deveria ser a mesma 2ε?

Considere os intervalos $[0,\varepsilon]$ e $[\varepsilon,1]$. Note que g é limitada e contínua em $[\varepsilon,1]$, então pelo Teorema da continuidade e integrabilidade $\exists\, \dot{P}_1$ t.q. $g\in\mathcal{R}[\varepsilon,1]$. Note ainda que, para qualquer partição rotulada $\dot{P}_\varepsilon$ definida em $[0,\varepsilon]$, como g é limita em $[-1,1]$ então

$$|\bar{S} - \underline{S}| \leq 2\varepsilon$$

TOMEMOS AGORA A PARTIÇÃO $\dot{P}$ EM $[0,1]$ COMO A UNIÃO DE $\dot{P}_1$ E $\dot{P}_\varepsilon$. DESTA FORMA, TEMOS QUE

$$|\bar{S} - \underline{S}| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$$

Como ε é arbitrário, concluimos que $g \in R[0,1]$

15. If f is bounded and there exists a finite set E s.t. f is continuous for every point of $[a,b] \setminus E$, show that $f \in R[a,b]$.

(1)

Notemos que como f é limitada e contínua em $[a,b] \setminus E$ então $f \in R\{[a,b] \setminus E\}$. Além disso, seja $A = [a,b] \cup E$, então $f \in R\{A\}$ e

$$\int_A f = \int_a^b f - \int_E f \implies \int_a^b f = \int_A f + \int_E f \qquad (\ldots)$$

(2)

Seja $g : [a,b] \setminus E \to \mathbb{R} = f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Por hipótese g é limitada e contínua, então $g \in R\{[a,b] \setminus E\}$. Além disso $f(x) = g(x)$ exceto por um número finito de pontos em E. Portanto, podemos usar o Teorema da Consistência da Integral de Riemann para concluir que $f \in R[a,b]$.