1. Use the definition to find the derivative of each of the above functions

a) $f(x) = x^3 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(3a^2 + 3ah + \frac{h^2}{h} \right) = 3a^2$$

//

$$(a+h)(a+h)(a+h) = (a^2 + 2ah + h^2)(a+h) = \cancel{a^3} + a^2h + 2a^2h + 2ah^2 + ah^2 + h^3$$

$$= 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

//

b) $g(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\cancel{a} - \cancel{a} - h}{a(a+h)} \right) \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{\cancel{h}} \left(- \frac{\cancel{h}}{a(a+h)} \right) \right] =$$

$$= - \lim_{h \to 0} \frac{1}{a^2 + ah} = - \frac{1}{a^2}$$

2. Show that $f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, is not differentiable at $x = 0$

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação em X. Sabemos que

$$f'_{\pm}(a) = \lim_{h \to a^{\pm}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

são as derivadas à esquerda e direita em a. Uma condição necessária para que $f'(a)$ exista é que $f'_{+}(a) = f'_{-}(a)$. Note que

$$f'_{+}(0) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} \left[\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}}{h} - \frac{1}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0^{+}} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}}{h} - \lim \frac{1}{h}$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}}{h} + \lim \frac{1}{h}$$

ou seja $f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$. Portanto f é não derivável em 0.

4. Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.t.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

Show that f is differentiable at $x=0$ and find $f'(0)$.

//

$R = (r_n)$, $r_n \in \mathbb{Q}$

$$+ \lim_{n \to \infty} \frac{f(r_n) - f(0)}{x_n - 0} = L$$

//

Seja $R = (r_n)$ uma sequência de números racionais. Pelo Teorema da Densidade sabemos que o limite de uma sequência de números racionais converge para um número irracional i , ou seja,

$$\lim (r_n) = i \Rightarrow \lim (f(r_n)) = 0 \quad *$$

Note que por $*$ temos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(r_n) - f(0)}{r_n - 0} = 0$$

Portanto, usando a relação entre a definição de derivada com a definição de limite sequencial, concluímos que f é derivável em $x=0$.

5. Differentiate and simplify:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Seja $g(x) = x$ e $h(x) = 1+x^2$, então

$$f(x) = g(x)/h(x)$$

Aplicando a definição de derivada em g e h obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+(x+h)^2 - 1 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{1}-\cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

Deste modo, podemos aplicar a regra do quociente em f para obter

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2} = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

b) $g(x) = \sqrt{5 - 2x + x^2}$

$f(x) = 2x \qquad h(x) = x^2$

PELA DEFINIÇÃO DE DERIVADA TEMOS

$$\lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = 2x$$

TOMEMOS $w(x) := 5 - 2x + x^2$, ENTÃO $g(x) = (g \circ h)(x)$ E PORTANTO PODEMOS APLICAR A REGRA DA CADEIA

$$(g \circ h)(x) = g'(h(y))\, h'(y) = \frac{1}{2}(5 - 2x + x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x - 2) =$$

$$= \frac{(2x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

9. Prove that if $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an even function and has a derivative at every point, then f' is an odd function.

// We say that $f(x)$ is an odd function $\iff f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}$

" " even " " $f(-x) = -f(x), x \in \mathbb{R}$

$f(x) = f(-x)$, $g(x) = -x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = f'(x) -1 = -f'(x)$$

$\therefore f'(-x) = -f'(x)$ //

Tomemos $f(x) = f(-x)$ e $g(x) = -x$. Aplicando a regra da cadeia em $(f \circ g)'$ obtemos

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = -f'(x)$$

Mas $(f \circ g)'(x) = f'(-x)$, portanto $f'(-x) = -f'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, a derivada de uma função par é sempre uma função ímpar.

11. Assume that there exists a function $L: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ s.t. $L'(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}$ and $x > 0$.
Calculate the derivatives of the following functions:

a) $f(x) = L(2x+3)$, $x > 0$

Seja $h(x) = 2x+3$, então, pela regra da cadeia, temos

$$f'(x) = (L \circ h)'(x) = L'(h(x))\, h'(x) = \frac{1}{2x+3}\, 2 = \frac{2}{2x+3}$$

b) $g(x) = (L(x^2))^3$, $x > 0$

Seja $h(x) = x^2$. Pela regra da cadeia temos que

$$(L \circ h)'(x) = L'(h(x))\, h'(x) = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}$$

Além disso, tomemos $f(x) = x^3$. Então

$$g'(x) = (f \circ (L \circ h))'(x) = 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 \frac{1(2) - 0}{x^2} = \frac{12}{x^2}\left(\frac{2}{x^2}\right)$$

c) $h(x) = L(ax)$, $a > 0$, $x > 0$

Seja $f(x) = ax$, então , usando a regra da cadeia , temos que

$$(L \circ f)'(x) = L'(f(x))\, f'(x) = \frac{1}{ax}\, a = \frac{1}{x} = L'(x) = h'(x)$$

d) $k(x) = L(L(x))$, $L(x) > 0$ $x > 0$

$$(L \circ L)(x) = L'(L(x))\, L'(x) = \frac{1}{L(x)}\, \frac{1}{x} = \frac{1}{xL(x)} = k'(x)$$

18. If f is differentiable at $c \in \mathbb{R}$, show that

$$f'(c) = \lim \left(n \{ f(c + 1/n) - f(c) \} \right) = L$$

However, show by example that the existence of $L \not\Rightarrow$ the existence of $f'(c)$.

//

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$h = \frac{1}{n} \Rightarrow f'(c) = \lim_{\frac{1}{n} \to 0} n[f(c + 1/n) - f(c)]$$

$$= \lim_{n \to \infty} n[f(c + 1/n) - f(c)]$$

//

Se f é derivável em $c \in \mathbb{R}$, então existe $L \in \mathbb{R}$ t.q.

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = L$$

Tomemos $h = 1/n$, então

$$f'(c) = \lim_{\frac{1}{n} \to 0} n[f(c + 1/n) - f(c)] = \lim_{n \to \infty} n[f(c + \tfrac{1}{n}) - f(c)] =$$

$$= \lim \left(n \{ f(c + \tfrac{1}{n}) - f(c) \} \right)$$