1

a é p.a. em X se $x \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, $x \neq a$.

Def (Função derivável) Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Dizemos f é derivável no ponto a se:

X': conjunto de p.a.

1. Para qualquer $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. se $x \in X \cap X'$ satisfaz $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$, então $\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| < \varepsilon$, $L \in \mathbb{R}$

2. O limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L$

* 3. As derivadas laterais são iguais, $f'_+(a) = f'_-(a) = L$

4. (Prop. do limite) e somente se, dado qualquer sequência de pontos $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim(x_n) = a$, tem-se $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = L$

** 5. e somente se, $f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h)$, $\lim_{h \to 0} r(h) = 0$

*** 6. (Carathéodory) e somente se, existir uma função $\varphi: X \to \mathbb{R}$, contínua em $a \in X$, que satisfaz $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$.

Dizemos que f é derivável em a e escrevemos $f'(a) = L$.

* **Def (Derivada à direita/esquerda)** Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+$. Podemos definir a derivada à direita de f no ponto a como sendo

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Analogamente temos um resultado similar para $a \in X \cap X'_-$. X'

- Escrevendo $h = x - a$ ou $x = a + h$, a derivada de f no ponto $a \in X$ torna-se o limite $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

** **Def (Derivada como polinômio de grau ≤ 1 + resto)** Se $f: X \to \mathbb{R}$ possui derivada em $a \in X \cap X'$ escrevemos $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$. Então para todo $h \neq 0$ t.q. $a + h \in X$ temos

1. $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)$, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$
2. $f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h)$, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

para qualquer constante L (1 e 2 são equivalentes).

Teorema (Derivada ⇒ continuidade) Se $f: X \to \mathbb{R}$ tem derivada em $a \in X$ então f é contínua em a.

Observações

1. continuidade $\not\Rightarrow$ diferenciabilidade (ex. função módulo)
2. Uma função pode ser contínua em toda a reta mas não diferenciável em alguns pontos (ex. função de Weierstrass)

Teorema (Álgebra com derivadas) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. Então

1. Se $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f$ é derivável em a e $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
2. $f \pm g$ é derivável em a e $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$
3. (Regra do Produto) $f \cdot g$ é derivável em a e $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. (Regra do quociente) se $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$ é derivável em a e

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Corolário 1 Se $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ deriváveis em $a \in X$, então

1. $(f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n)'(a) = f_1'(a) \pm f_2'(a) \pm \cdots \pm f_n'(a)$
2. $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)'(a) = f_1'(a) f_2(a) \cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a) f_2(a) \cdots f_n'(a)$

a) Se $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$, então $(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(a) = (f^n)'(a) = n(f(a))^{n-1} f'(a)$

Corolário 2 Se $f(a) \neq 0$ então $(1/f)'(a) = -f(a)/f(a)^2$

***

Teorema de Carathéodory Seja $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in I$. Então f é diferenciável em a se, e somente se, existe uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in X$ e satisfaz

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \quad \text{para } x \in I$$

Neste caso, dizemos que $\varphi(c) = f'(c)$

Regra da Cadeia Sejam $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$, então $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e vale

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

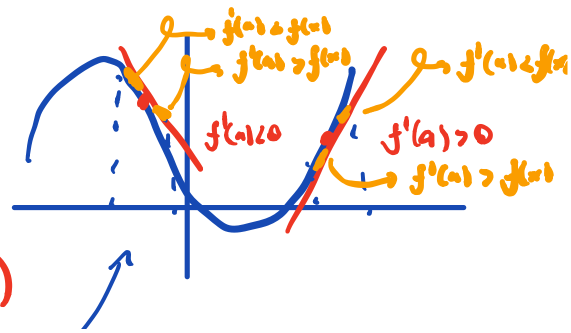
→ estritamente monótona

Corolário (Derivada de uma f^{-1}) Seja $f: X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função inversível t.q. $f^{-1} = g: Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ e g é contínua em $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. Dizemos então que

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(a))}$$

(Bartle T.6.1.8) $f: X \to \mathbb{R}$ [1] estritamente monótona e [2] contínua em X e $g: J = f(I) \to \mathbb{R}$ também [1] estritamente monótona [2] e contínua t.q. $g = f^{-1}$. Se f é diferenciável em $a \in X$ e $f'(a) \neq 0 \Rightarrow g$ é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



→ (derivada direita | esquerda)

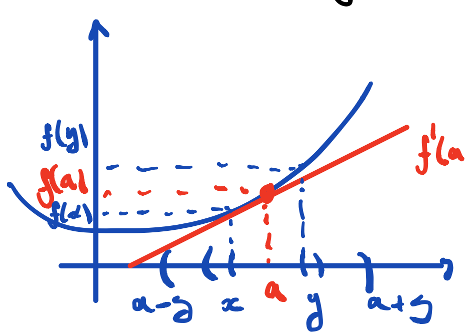
TEOREMA Seja $f: X \to \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$

1. Se $f'_+(a) > 0$, então $\exists\, \delta > 0$ t.q. se $x \in X$ satisfaz $a < x < a+\delta \Rightarrow f'(a) < f(x)$.
2. Se $f'_-(a) < 0$, então $\exists\, \delta > 0$ t.q. se $x \in X$ satisfaz $a-\delta < x < a \Rightarrow f'(a) < f(x)$
3. Se $f'_+(a) < 0$, então $\exists\, \delta > 0$ t.q. se $x \in X$ satisfaz $a < x < a+\delta \Rightarrow f'(a) > f(x)$
4. Se $f'_-(a) > 0$, então $\exists\, \delta > 0$ t.q se $x \in X$ satisfaz $a-\delta < x < a \Rightarrow f'(a) > f(x)$

↳ qualquer f diferenciável possui prop. do valor intermediário.

TEOREMA (DARBOUX) Se f é diferenciável em $I = [a,b]$ e $K \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(a) < K < f'(b)$, então $\exists\, c \in (a,b)$ t.q. $f'(c) = K$.

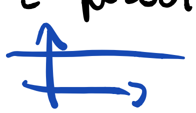
COROLÁRIO 1 Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ possui, no ponto a, uma derivada $f'(a) > 0$, então $\exists\, \delta > 0$ t.q. se $x, y \in X$ e $a-\delta < x < a < y < a+\delta \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)$.



$f'(a) < 0$

$f(y) < f(a) < f(x)$

COROLÁRIO 2 Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto a e possui máximo e mínimo local em a, então $f'(a) = 0$



②

Def (Max. Min. local) Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ possui um máximo / mínimo local no ponto $c \in I$ se existir uma vizinhança $V := V_\delta(c)$ de c t.q. $f(x) \leq (\geq) f(c)$ para todo $x \in V \cap I$.

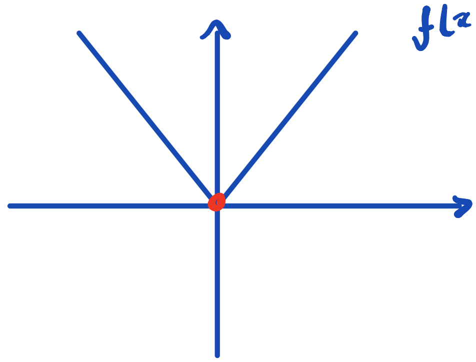
Def (Extremo local) Dizemos que $f: I \to \mathbb{R}$ tem extremo local no ponto $c \in I$ se f possui ou máximo local ou mínimo local

Teorema (Extremo Interior) Seja c um ponto interior de I onde $f: I \to \mathbb{R}$ possui um extremo local. Se a derivada de f existe em c então $f'(c) = 0$.

se é extremo local então ele é máximo ou mínimo local $\Rightarrow f'(c) = 0$

c p.I. I
f $\exists$ E.L

Corolário Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I e suponha que f possui um extremo local em um ponto interior $c \in I$. Então ou a derivada de f em c não existe ou ela vale zero.



$f(x) = |x|$, f tem extremo local em $I = [-1, 1]$ no ponto $x = 0$, mas não possui derivada neste ponto.

Além disso, f é contínua em $f(0)$.

Teorema (Valor intermediário p/ derivada) Seja $f: I \to \mathbb{R}$, $I=[a,b]$, derivável em todos os pontos $x \in I$. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe um $c \in (a,b)$ t.q. $f'(c) = d$.

$f'(a) < 0 \Rightarrow \searrow$

$> 0 \Rightarrow \nearrow$

Prova

Considere $d=0$, isto é, $f'(a) < 0 < f'(b)$. Então, pelo Teorema 4 (derivada direita/esquerda), temos $f(a) > f(x)$, para x próximo de a, e $f(b) < f(x)$, para x próximo de b. Além disso, como f é derivável em todos os pontos de I $\Rightarrow$ continuidade em I, podemos aplicar o Teorema de Weierstrass para concluir que f atinge seu ponto de mínimo, em particular o mínimo em $c \in (a,b)$. Pelo Corolário 2 do T.V.I. p/ derivada $f'(c) = 0$.

O caso geral reduz-se à função auxiliar $g(x) = f(x) - d \cdot x$.

Se $g'(c) = 0 \iff f'(c) = d$ e $g'(a) < 0 < g'(b) \Rightarrow f'(a) < d < f'(b)$

Desloca f
p/ o caso que provamos
na primeira parte.

Corolário Se $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável em I, então f' não pode ter descontinuidade de primeira espécie em I.

Note que o ponto $x = 0 \in [-1,1]$ para $f(x) = |x|$ não é descontinuidade de 1ª espécie

//

Def (Tipos de descontinuidade) Tome $f: X \to \mathbb{R}$. Dizemos que

1. f têm descontinuidade de 1ª espécie em X se
$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

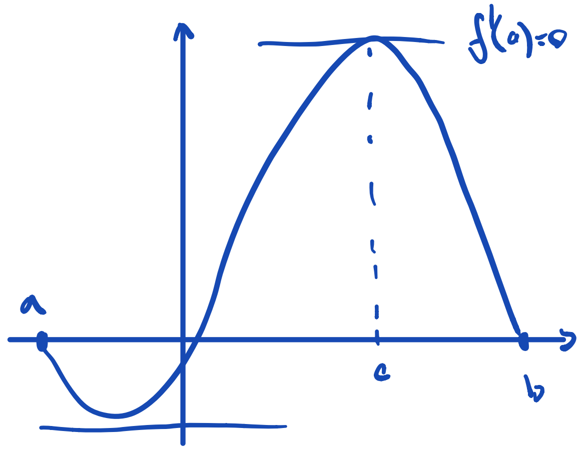
2. f têm descontinuidade de 2ª espécie em X se $x \in X'_{\pm}$ e $\nexists\, L \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = L$.

//

Teorema (Rolle) Seja $f: I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, contínua t.q. $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a,b) então existe um ponto $c \in (a,b)$ onde $f'(c) = 0$.

Prova

Se f é constante em $[a,b] \Rightarrow f'(c) = 0$ $\forall c \in (a,b)$. Caso contrário, f atingirá seu mínimo m e/ou seu máximo M num ponto interior $c \in (a,b)$. Note que como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, então f atinge m e M em $[a,b]$. Portanto, pelo Corolário do Teorema do Valor intermediário p/ derivada sabemos que $f'(c) = 0$ neste ponto c. .



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

1. contínua
2. $f(a)=f(b)$
3. derivável em $[a,b]$ (Hipótese)

Teorema (Valor {Médio / Intermediário} de Lagrange) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), então existe $c\in(a,b)$ t.q.
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Prova

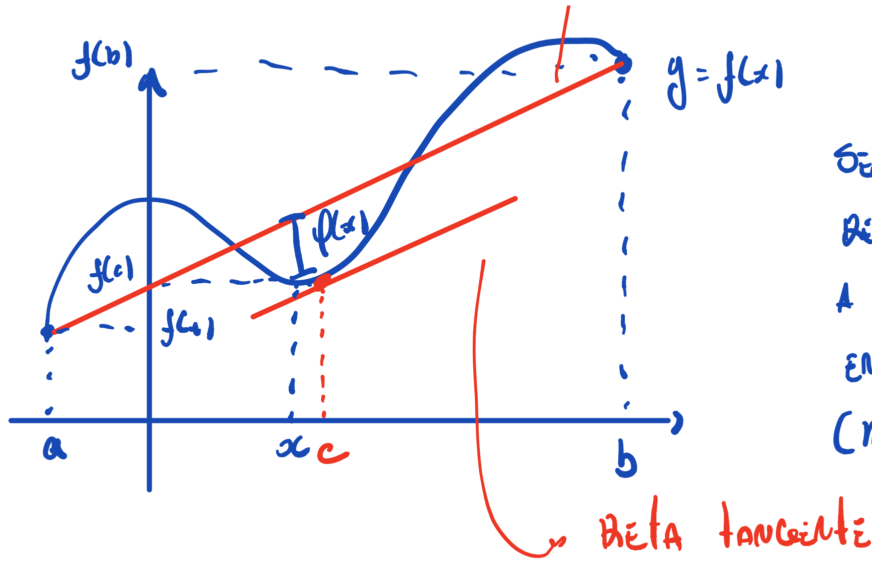
Considere a função $\varphi: I\to\mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$ (contola)

Note que $\varphi(x)$ satisfaz as Hipóteses do Teorema de Rolle (continuidade de φ em $[a,b]$, derivável, $\varphi(a)=\varphi(b)=0$), então $\exists\, c\in(a,b)$ t.q.

$$0=\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

→ Reta secante



Sempre existe uma reta tangente paralela a uma reta traçada em $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (reta secante)

Corolário 1 Se uma função contínua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos de seu domínio então f é constante em $[a,b]$

Corolário 2 Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas e deriváveis em (a,b), e $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ então existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a,b]$

↳ primitiva (integrabilidade)

Corolário 3 Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável em I aberto. Se $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.q. $|f'(x)| \le k$ p/ todo $x \in I$ então, para $\forall x, y \in I$, tem-se $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$) → função de lipschitz

- Assim, uma função que possui derivada limitada num intervalo aberto é lipschitziana → uniformemente contínua em (a,b)

Corolário 4 Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua em seu domínio e derivável em (a,b). Se $\exists\, L\in\mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a^+} f'(x)=L$ então existe $f'_+(a)$ e vale $f'_+(a)=L$.

Corolário 5 Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivável, exceto, possivelmente, num ponto $c\in(a,b)$, onde f é contínua. Se $\exists\, L\in\mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to c} f'(x)=L$, então existirá $f'(c)$ e, além disso, $f'(c)=L$.

1°

Teorema (Derivada e crescimento) Seja $f:I\to\mathbb{R}$ diferenciável em I. Então

a) f é crescente em I $\Leftrightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$

b) f é decrescente em I $\Leftrightarrow$ $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$

Def (f estritamente crescente) Uma função $f:I\to\mathbb{R}$ é dita estritamente crescente se para $\forall x_1,x_2\in I$ t.q. $x_1<x_2$ temos $f(x_1)<f(x_2)$.

Teorema (Teste da Primeira Derivada) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $c\in[a,b]$. Além disso, seja f diferenciável em (a,c) e (c,b). Então:

a) Se $\exists\,(c-\delta,c+\delta)\subseteq I$ t.q. $f'(x)\geq 0$ p/ $c-\delta<x<c$ e $f'(x)\leq 0$ p/ $c<x<c+\delta$ $\Rightarrow$ f têm máximo local em c.

b) Se $\exists (c-\delta, c+\delta) \subseteq I$ t.q. $f'(x) \leq 0$ p/ $c-\delta < x < c$ e $f'(x) \geq 0$ p/ $c < x < c+\delta \Rightarrow f$ têm mínimo local em c

OBS

1. Note que o inverso do Teorema do teste da primeira derivada não é verdadeiro

Teorema (f uniformemente derivável) Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente derivável se, e somente se, é de classe C^1

continuamente derivável

3

Def (derivada de ordem n) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. A n-ésima derivada de uma função f no ponto a é denotada $f^{(n)}(a)$.

Def (função n vezes derivável em $a \in I$) Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável em $a \in I$ quando houver um intervalo aberto J, $a \in J$, t.q. f é $n-1$ vezes derivável em $I \cap J$ e, além disso, existir $f^{(n)}(a)$.

Def (função n vezes derivável em I) Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável em I quando existir $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$. No caso em que x é uma extremidade de I temos que $f^{(n)}(x)$ é uma derivada lateral.

DEF (CLASSES DE FUNÇÕES) Dizemos que uma função $f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^n, e escrevemos $f \in C^n$, para significar que f é n vezes derivável em I e $x \mapsto f^{n}(x)$ é uma função contínua em I. Em particular se $f \in C^0 \Rightarrow f$ é contínua em I. Dizemos que f é de classe C^∞ em I quando $f \in C^n$ para todo $n = 1, 2, \dots$.

x_0 lembramos: $h = x - a$

DEF (POLINÔMIO DE TAYLOR) Dada uma função $f: I \to \mathbb{R}$, n vezes derivável em $x_0 \in I$, o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto x_0 é o polinômio

$$P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Este é o único polinômio de grau $\leq n$ cujas derivadas no ponto 0 coincidem com as derivadas correspondentes de f em x_0.

LEMA Seja $r: I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável $(n \geq 1)$ no ponto $0 \in I$. A fim de que $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$, é necessário e suficiente que $\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0$.

Teorema (Fórmula de Taylor infinitesimal) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. Então, para todo h t.q. $a+h \in I$, tem-se

$$f(a+h) = f(a) + f^{(1)}(a) \cdot h + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + r(h)$$

onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Além disso $p(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot h^i$ é o único polinômio de grau $\leq n$ t.q. $f(a+h) = p(h) + r(h)$.

Teorema de Taylor Seja $n \in \mathbb{N}$, $I = [a,b]$, e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função t.q. $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ são contínuas em I e $f^{(n+1)}$ existe em $]a,b[$. Se $x_0 \in I$, então para $\forall x \in I$ $\exists c \in [x, x_0]$ t.q.

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Aplicações da fórmula (Teorema) de Taylor

1) Máximos e mínimos locais

pontos críticos

Teorema Seja I um intervalo, $x_0 \in I$, e $n \geq 2$. Suponha que as derivadas $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ existam, são contínuas na vizinhança de x_0, e $f^{(1)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ mas $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

a) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ é mínimo local

b) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ é máximo local

c) Se n é ímpar $\Rightarrow f(x_0)$ não é mínimo nem máximo local

• Fórmula de Taylor quando $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$

$$f(a+h) = f(a) + \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + p(h) \right] \cdot h^n \quad , \quad \lim_{h \to 0} p(h) = 0$$

• n par $\Rightarrow h^n > 0$, $h \neq 0$. Se $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f(a+h) < f(a)$ MAX.

$f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a)$ MIN

• n ímpar $\Rightarrow h^n$ terá o sinal de $h \Rightarrow$ para qualquer sinal de $f^{(n)}(a)$ a diferença $f(a+h) - f(a)$ não tem sinal constante $\Rightarrow$ não é mínimo nem máximo local

2) Indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$: Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ n vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Suponha que as derivadas de f e g no ponto a até a ordem $n-1$ se anulem e que $f^{(n)}(a) \neq 0$ e $g^{(n)}(a) \neq 0$. Além disso, suponha que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ suficientemente próximo de a. Neste caso temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \quad , \quad \text{se } g^{(n)}(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty \quad , \quad \text{se } g^{(n)}(a) = 0$$

Teorema (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^{n-1}, n vezes derivável no intervalo aberto $]a,b[$. Então existe $c\in]a,b[$ t.q.

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{n}(c)}{n!}(b-a)^{n}$$

Pondo $b=a+h$, isto equivale a dizer que existe um θ, com $0<\theta<1$, t.q.

$$f(a+h)=f(a)+f^{(1)}(a)\cdot h+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\cdot h^{n}$$

Generalização do Teorema do Valor Médio.

Resto de Lagrange

$$\Leftrightarrow \;**\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\left[f'(a)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^{n-1}\right]$$

Hipóteses:

TVI	Fórmula de Taylor (Lagrange)
1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$	1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
2. f contínua em $[a,b]$	2. $f\in C^{n-1}$
3. f derivável em $]a,b[$	3. f n vezes derivável em $]a,b[$

Tese: $\exists c\in(a,b)$: t.q. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$: t.q. $**$

3) Funções convexas: Uma função f chama-se convexa quando, para $a < x < b$ arbitrários em I, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f está situado abaixo da secante que liga $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Se escrevermos a equação da secante como

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad \text{ou} \quad y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$$

então, para $a < x < b$, dizer que $(x, f(x))$ está abaixo de y implica que

$$f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \quad \text{ou} \quad f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b)$$

Def (Convexidade) Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ é dita convexa em I se para qualquer t t.q. $0 \le t \le 1$ e quaisquer pontos x_1 e x_2 em I, temos

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \le (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

Teorema (Convexidade e derivada de 2ª ordem) Seja I um intervalo aberto e seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função t.q. existe sua derivada de ordem dois. Então f é convexa em $I \iff f''(x) \ge 0 \ \forall x \in I$