6.4. Taylor's Theorem

Applications of Taylor's Theorem

Taylor's Theorem Let $n \in \mathbb{N}$, $I := [a,b]$, and $f : I \to \mathbb{R}$ be s.t. f and it's derivatives $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ are continuous on I and that $f^{(n+1)}$ exists on $]a,b[$. If $x_0 \in I$, then for $\forall x \in I$ there exists a point $c \in [x, x_0]$ s.t.

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Resto de Lagrange

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

① Aproximação

EXAMPLES 6.4.2

a) Use Taylor's theorem to approximate $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x > -1$ with $n = 2$

Seja $f:]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x}$$

Q: Ser aberto é um problema?

E suponha $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ são contínuas em $I :=]-1, \infty[$ e $f^{(n+1)}$ está definida em I. Se $x_0 \in I$, então $\exists c \in [x, x_0]$ t.q.

$$f(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}{2!}$$

Tomemos $x_0 = 0$, então como

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{3}(1+x_0)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}(1+x_0)^{-2/3} = \frac{1}{3}$$

$$f^{(2)}(x_0) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3} = -\frac{2}{9}$$

Então

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_2(x)$$

b) Approximate the number e with an error less than 10^{-5}

Seja $g:]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$ definida como

$$g(x) := e^{x}$$

e tomemos $x_0 = 0$ e $x = 1$. Pelo Teorema de Taylor existe $c \in [0,1]$ t.q.

$$g(x) = g(x_0) + g^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \frac{g^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{g^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

Precisamos determinar o valor de n t.q. $|R_n(1)| < 10^{-5}$. Como $g'(x) = e^{x} \Rightarrow g^{(n)}(x) = e^{x}$ para todo $n \in \mathbb{R} \Rightarrow g^{(n)}(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste o polinômio de Taylor é dado por

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

e o resto para $x = 1$ é

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{c}}{(n+1)!}, \quad c \in [0,1]$$

Como $c \leq 1 \Rightarrow e^{c} \leq 3$. Deste modo, temos que encontrar n t.q.

$$\frac{e^{c}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Rightarrow n = 9$$

2 Derivações de desigualdades

a) Prove that $1-\frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ for all $x \in \mathbb{R}$

Seja $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$. Pelo Teorema de Taylor existe um $c \in [0,x]$ t.q.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x)$$

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{\sin c}{6}x^3$$

Note que, se $0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq c \leq \pi$ e, como $\sin c > 0$ e $x^3 > 0$, então $R_2(x) \geq 0$ e $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$. Além disso se $-\pi \leq x \leq 0 \Rightarrow -\pi \leq c \leq 0$ e, como $\sin c \leq 0$ e $x^3 \leq 0$, então $R_2(x) \geq 0$ e $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Por fim, notemos que se $|x| \geq \pi$ $\Leftrightarrow -\pi \leq c \leq \pi$ caindo nos casos anteriores. Portanto para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$