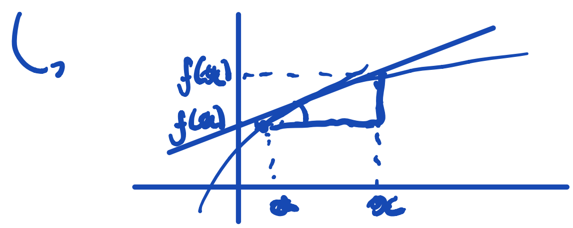
Capítulo 8 - Derivadas

1. Definições e propriedades da derivada num ponto

pontos de acumulação de X

Def (função derivável) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Dizemos que f é derivável no ponto a quando existir o limite $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Em caso afirmativo, dizemos que $f'(a)$ é a **derivada** de f no ponto a.



//

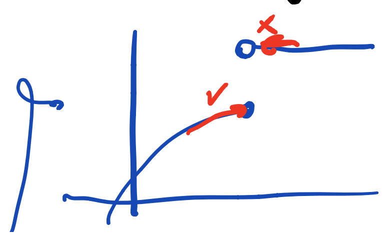
Def (ponto de acumulação) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se ponto de acumulação em X quando todo o intervalo $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ contém algum ponto $x \in X$ diferente de a.

O conjunto de pontos de acumulação de X será representado por X'.

Simbolicamente $a \in X' \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X$ s.t. $0 < |x-a| < \varepsilon$. //

- Escrevendo $h = x - a$ ou $x = a + h$, a derivada de f no ponto $a \in X \cap X'$ torna-se o limite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Def (Derivada à direita) Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+$ (a é ponto de acumulação à direita de X) podemos definir a derivada à direita de f no ponto a como sendo $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Analogamente se define a derivada à esquerda, $f'_-(a)$ quando a é um ponto de acumulação à esquerda.

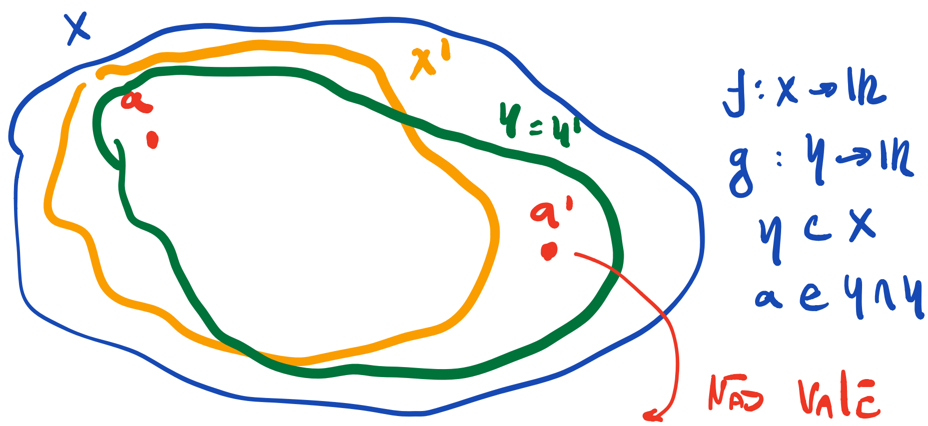
Teorema Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X$. Dizemos que $f'(a)$ existe se, e somente se, existem e são iguais as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Teorema 1 Segue-se das propriedades gerais do limite que $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a se, e somente se, dada qualquer sequência de pontos $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tem-se $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a)$.

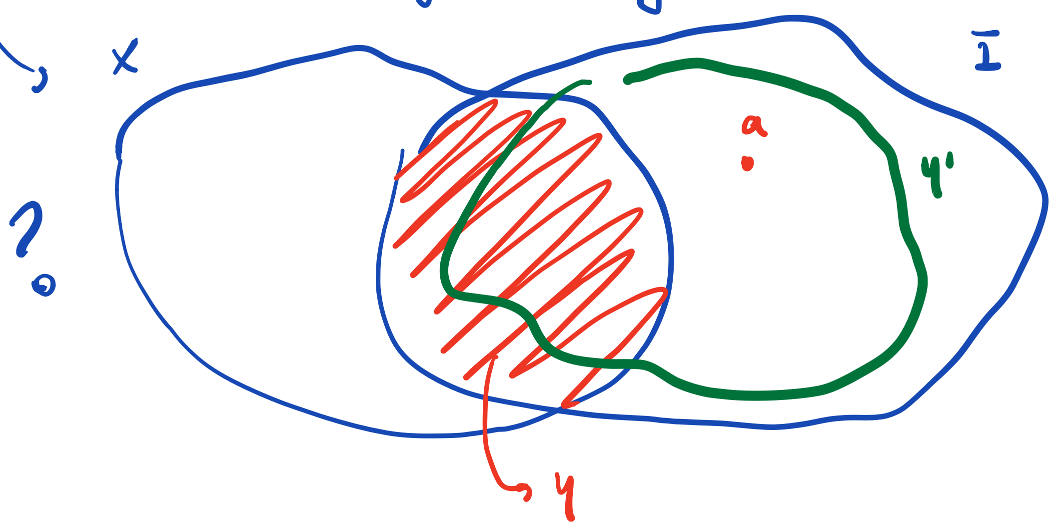
2 De forma mais geral, dada qualquer função $g: Y \to X \subset \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{y \to b} g(y) = a$, com $b \in Y'$. Se $y \neq b \Rightarrow g(y) \neq a$ então temos $\lim_{y \to b} \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} = f'(a)$

OBSERVAÇÃO Sendo definida como um limite, a derivada tem caráter local. Assim se a função $f: X \to \mathbb{R}$ possui derivada em $a \in X \cap X'$ então, dado $Y \subset X$ t.q. $a \in Y \cap Y'$, a função $g = f|_Y$ também tem derivada em a, sendo $g'(a) = f'(a)$.

Se $Y = I \cap X$, onde I é um intervalo aberto t.q. $a \in I$, então vale também a recíproca: a existência de $g'(a)$ implica a existência de $f'(a)$.



Existência de $f'(a) \Rightarrow g'(a)$



• Interpretaremos agora a existência da derivada $f'(a)$ como significando que, nas proximidades de a, a função f se exprime como um polinômio de grau ≤ 1 mais um resto que é muito pequeno

Def Se $f: X \to \mathbb{R}$ possui derivada no ponto $a \in X \cap X'$, escrevemos $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$. Então para todo $h \neq 0$, t.q. $a + h \in X$, temos

(1) $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)$, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

(2) $f(a+h) = f(a) + L \cdot h + r(h)$, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

para qualquer constante L.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L + \frac{r(h)}{h} \iff$$

$$\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L + \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h}$$

$$\Rightarrow L = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observações

1. A condição (2) é necessária e suficiente p/ a existência da derivada $f'(a)$
2. As condições (1) e (2) são equivalentes

TEOREMA 1 SE EXISTE A DERIVADA $f'(a)$ ENTÃO f É CONTÍNUA NO PONTO a

DEMONSTRAÇÃO

SE EXISTE $f'(a)$, ENTÃO EXISTE $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. NOTE QUE:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x)-f(a) \right] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \cdot (x-a) \right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)} \lim_{x \to a} (x-a) = 0$$

LOGO f É CONTÍNUA NO PONTO a.

$\square$

OBSERVAÇÃO

1. SE EXISTE APENAS UMA DERIVADA LATERAL, f PODE SER DESCONTÍNUA NO PONTO a.
2. UMA FUNÇÃO PODE SER CONTÍNUA EM TODA A RETA E NÃO DERIVÁVEL EM ALGUNS PONTOS.
3. É POSSÍVEL AINDA QUE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SEJA CONTÍNUA E NÃO POSSUIR PONTO ALGUM NA RETA.

EXEMPLOS

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = |x|$, f contínua em $\mathbb{R}$

Note que, $x = 0$ temos $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$, mas para $\forall a \neq 0$, $x \neq a$, temos

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to a} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

TEOREMA 2 Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. Então, $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são deriváveis nesse mesmo ponto. Tem-se

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + g'(a) \cdot f(a)$$

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}$$

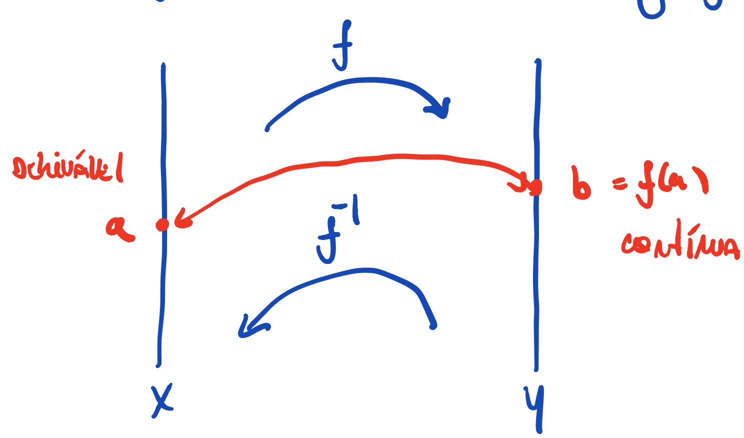
COROLÁRIO Se $c \in \mathbb{R}$ então $(c \cdot f)'(a) = c\, f'(a)$. Se $f(a) \neq 0$ então $(1/f)'(a) = -f'(a)/f(a)^2$

Teorema (Regra da Cadeia) Sejam $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$ então $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ é derivável em a, valendo

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$$

Corolário (Derivada de uma f^{-1}) Seja $f: X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g = f^{-1}: Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. No caso afirmativo, temos $g'(b) = 1/f'(a)$.

$f: X \to Y \subset \mathbb{R}$ $\qquad$ $g = f^{-1}: Y \to X \subset \mathbb{R}$

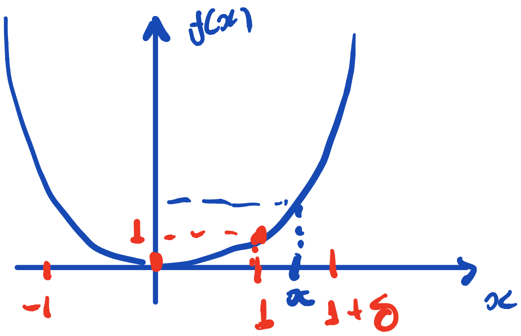


Garante que $f'(a) g'(b) = 1 \neq 0$ não ocorre

$+$ g é derivável no ponto b $\iff$ $f'(a) \neq 0$

$f'(a) = 0 \Rightarrow f(x) = c, \ \forall x \in X \Rightarrow \nexists \, f^{-1}(y)$ pois f não é injetora.

Teorema 4 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$. Se $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ t.q. $x \in X$, $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'_+(1) = 2 > 0$

Se $f'_+(a) > 0 \Rightarrow \exists x \in X$ maior que $a \Rightarrow f$ é crescente até a e continua crescendo depois de a

Observação

1. Trocando os sinais do **Teorema 4** $>$ e $<$, $+$ e $-$, obtém-se mais três teoremas análogos a este.

a) $f'_-(a) > 0 \Rightarrow f(x) < f(a) \quad \forall x \in X$ t.q. $a - \delta < x < a$

b) $f'_+(a) < 0 \Rightarrow \forall x \in X, a < x < a + \delta$, tem-se $f(x) < f(a)$

↳ f é crescente até a e decresce a partir de a

c) $f'_-(a) < 0 \Rightarrow f(x) > f(a) \quad \forall x \in X \quad a - \delta < x < a$

↳ f é decrescente até a e decresce a partir de a

Corolário 1 Seja $a \in X$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda. Se $f: X \to \mathbb{R}$ possui, no ponto a, uma derivada $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ t.q. se $x, y \in X$ e

$$a - \delta < x < a < y < a + \delta \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y).$$

Corolário 2 Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto a e possui um máximo e mínimo local neste ponto, então $f'(a) = 0$