Def (Partição) Se $I = [a,b]$ é um intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$, então uma partição de I é um conjunto finito e ordenado $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ de pontos em I t.q.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Def (Ínfimo e supremo de uma partição) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P uma partição em $[a,b]$. Para cada $i = 1, \dots, n$, indicamos m_i como o ínfimo e M_i como o supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Def (Norma de uma partição) Definimos a norma de uma partição P como

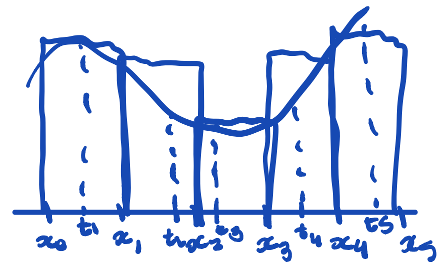
$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

Def (Rótulos e partições rotuladas) Seja $I = [a,b]$ um intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$ e P uma partição de I. Um rótulo de I é um $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Uma partição rotulada de I é um conjunto de pares ordenados

$$\dot{P} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$$

Def (Soma de Riemann) Se $\dot{P}$ é uma partição rotulada, definimos a soma de Riemann de uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ como

$$S(f;\dot{P}) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$



Obs

1. Se para $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$, então $S(f;\dot{P})$ é a soma das áreas dos retângulos sob f

Def (Soma inferior e superior) Definimos a soma inferior $\underline{S}(f;P)$ e a soma superior $\overline{S}(f;P)$ como

$$\underline{S}(f;P) = m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{S}(f;P) = M_i(x_i - x_{i-1})$$

Teorema Se m é ínfimo e M supremo de f em $[a,b]$, então temos

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f;P) \leq \overline{S}(f;P) \leq M(b-a)$$

para toda partição P em $[a,b]$.

Teorema (Integrabilidade e somas sup/inf) Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada chama-se integrável quando

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = \int_{a}^{\overline{b}} f = L = \int_a^b f$$

e este valor comum L é chamado de integral de f.

Def (Integral de Riemann) Uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é dita Riemann integrável em $[a,b]$ se $\exists\, L\in\mathbb{R}$ t.q. $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta(\varepsilon)>0$ t.q. se $\dot{P}$ é qualquer partição rotulada de I com $\|\dot{P}\|<\delta_\varepsilon$ então

$$|S(f;\dot{P})-L|<\varepsilon \qquad (1)$$

Denotamos $R[a,b]$ o conjunto de todas as funções Riemann integráveis e escrevemos $\int_a^b f = L$.

OBS

1. Apesar de parecer que L é limite de $S(f;\dot{P})$ quando $\|\dot{P}\|\to 0$ isto não é verdade, pois $S(f;\dot{P})$ não é uma função de $\|\dot{P}\|$

   $(x_{i-1}-x_i)$?

Def (Integral sup/inf) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

a) Definiremos a integral inferior como $\underline{\int_a^b} f = \sup\limits_{P} \underline{S}(f,P)$

b) Definiremos a integral superior como $\overline{\int_a^b} f = \inf\limits_{P} \overline{S}(f,P)$

Ambos são relativos a todas as partições P de $[a,b]$.

Teorema (Unicidade de L) Se $f\in R[a,b]$, então L é único.

↳ Neste caso L é a integral de Riemann de f em $[a,b]$ e escrevemos $L=\int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA (Robustez da integral de Riemann) Se $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $f(x)=g(x)$ exceto por um número finito de pontos em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

Exemplos

1) Qualquer função constante em $[a,b]$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$

$f(x) = k \Rightarrow S(f,\dot{P}) = k(b-a)$

Objetivo: Determinar $\delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $|S - k(b-a)| < \varepsilon$

① $f(x) = k$, $x \in [a,b]$

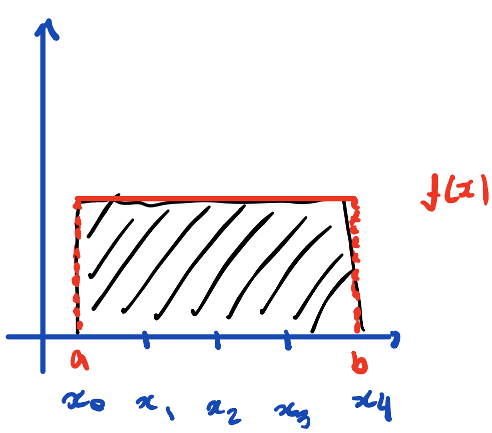
② $\dot{P} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n} \in [a,b]$

$$\Rightarrow S(f;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} k(x_{i-1} - x_i) =$$

$$= k \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1} - x_i) = k(b-a)$$

③ Para $\forall \varepsilon > 0$, escolha $\delta_\varepsilon := 1$ t.q. $\|\dot{P}\| < \delta_\varepsilon$

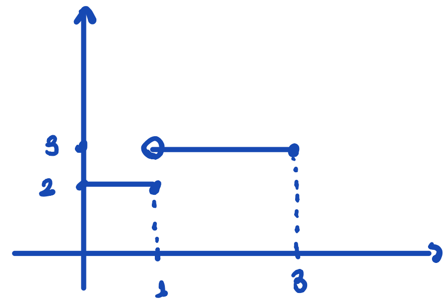
$$\Rightarrow |S(f;\dot{P}) - L| = |S(f;\dot{P}) - k(b-a)| = 0 < \varepsilon$$



Para qualquer δ_ε no máximo $(b-a)$

2) Seja $g:[0,3]\to\mathbb{R}$ t.q.

$$g(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1\\ 3, & 1<x\le 3\end{cases}$$



Prove que $g\in\mathcal{R}[0,3]$.

$$\int_0^3 g = \int_0^1 g + \int_1^3 g = 2x\Big|_0^1 + 3x\Big|_1^3 = 2+(9-3)=8$$

Objetivo: Determinar $\delta(\varepsilon)>0$ t.q. $|S(f,\dot{P})-8|<\varepsilon$

① $S(g,\dot{P}) = \underbrace{S(g,\dot{P}_1)}_{[0,1[} + \underbrace{S(g,\dot{P}_2)}_{]1,3]}$

② $U_1 = \bigcup_i\{\text{subintervalos em } \dot{P}_1\} \Rightarrow [0,1-\delta]\subset U_1\subset[0,1+\delta]$

$U_2 = \bigcup_i\{\text{subintervalos em } \dot{P}_2\} \Rightarrow [1+\delta,3]\subset U_2\subset[1-\delta,3]$

③ Como $g(t_k)=2$ para $t_k\in\dot{P}_1$, $g(t_k)=3$ para $t_k\in\dot{P}_2$,

e ②

$$\Rightarrow \quad 2(1-\delta)\le S(g,\dot{P}_1)\le 2(1+\delta)$$

$$3(2-\delta)\le S(g,\dot{P}_2)\le 3(2+\delta)$$

$\overset{①}{\Rightarrow}$ $8-5\delta\le S(g,\dot{P})\le 8+5\delta \iff |S(g,\dot{P})-8|\le 5\delta \;\therefore\; \delta_\varepsilon<\varepsilon/5$

3) Seja $h(x) := x$, $x \in [0,1]$. Mostre que $h \in R[0,1]$

① $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ qualquer partição de $[0,1]$

② Escolha o rótulo intermediário de I_i, $q_i := \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ e defina a nova partição $\dot{Q} = \{(I_i, q_i)\}_{i=1}^{n}$

$$\Rightarrow S(h,\dot{Q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})(x_{i-1} - x_i) = \sum \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2)$$

③ Note que $*$ é uma soma telescópica

$$\Rightarrow S(h,\dot{Q}) = \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

④ Seja $\dot{P} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ partição rotulada arbitrária de $[0,1]$ e note que $t_i, q_i \in [0,1]$

$$\Rightarrow |t_i - q_i| < \delta$$

Desigualdade triangular

$$\Rightarrow \left| S(h,\dot{P}) - S(h,\dot{Q}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - x_{i-1}) \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum |t_i - q_i|(x_i + x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \delta \sum (x_i - x_{i-1}) = \delta(x_n - x_0) = \delta$$

$$\therefore \delta_\varepsilon = \varepsilon, \quad \left| S(h,\dot{P}) - \frac{1}{2} \right| < \delta_\varepsilon$$

Propriedades da Integral de Riemann

Teorema Suponha $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Então

a) Se $k \in \mathbb{R}$, então $k \cdot f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b k f = k \int_a^b f$

b) $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

c) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Teorema (limitada) Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$

↳ integrável de Riemann $\Rightarrow$ limitação de f

Teorema (Critério de Cauchy) Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertence ao conjunto $\mathcal{R}[a,b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ $\exists \eta_\varepsilon > 0$ t.q. se $\dot{P}$ e $\dot{Q}$ são qualquer partição de $[a,b]$ t.q. $\|\dot{P}\| < \eta_\varepsilon$ e $\|\dot{Q}\| < \eta_\varepsilon$ então

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| < \varepsilon$$

EXAMPLE

a) Usando o critério de Cauchy, mostre que $g : [0,3] \to \mathbb{R}$ t.q.

$$g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{R}[0,3]$.

Lembremos que se $\dot{P}$ é uma partição rotulada em $[0,3]$ com norma $\|\dot{P}\| < \delta$, então

$$8 - 5\delta \leq S(g;\dot{P}) \leq 8 + 5\delta$$

Note que o mesmo vale para uma outra partição $\dot{Q}$ que satisfaça $\|\dot{Q}\| < \delta$, ou seja, vale

$$8 - 5\delta \leq S(g;\dot{Q}) \leq 8 + 5\delta$$

o que implica em

$$|S(g;\dot{P}) - S(g;\dot{Q})| \leq 0 < \varepsilon$$

Portanto, pelo critério de Cauchy $g \in \mathcal{R}[0,3]$.

b) Use o Critério de Cauchy para mostrar que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ não Riemann integrável para qualquer f.

Note que precisamos mostrar que $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall M > 0$ existem as partições rotuladas $\|\dot{P}\| < M$ e $\|\dot{Q}\| < M$ t.q.

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| \geq \varepsilon_0$$

Para isso, tomemos a função de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Desta forma, tome $\varepsilon_0 > 0$. Se $\dot{P} = \{(x_{i-1}, x_i), t_i \in \mathbb{Q}\}_{i=1}^{n}$ e $\dot{Q} = \{(x_{i-1}, x_i), t_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}_{i=1}^{n}$ então

$$|S(f;\dot{P}) - S(f;\dot{Q})| = |1 - 0| = 1 > 0$$

Portanto, pelo critério de Cauchy $f \notin R[a,b]$, para $\forall f$.

OBS Até aqui notamos as seguintes dificuldades com a definição de integral de Riemann

1. Para cada partição, existem infinitas maneiras de se escolher um rótulo
2. Existem infinitas partições com norma menor do que a quantidade especificada

↳ O Teorema do Confronto tenta amenizar essas dificuldades

Teorema (Confronto) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Então $f \in R[a,b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ $\exists \, \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon \in R[a,b]$ com

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad , \quad x \in [a,b]$$

e t.q.

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \varepsilon$$

↳ Sem precisar definir qualquer $\dot{P}$ ou δ t.q $\|\dot{P}\| < \delta$, provamos que $f \in R[a,b]$ se f estiver entre duas funções integráveis em $[a,b]$

Lemma Se J é um subintervalo em $[a,b]$ tendo como pontos finais $c < d$ e se

endpoints

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

função salto

então $\varphi_J \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b \varphi_J = d - c$.

Teorema (Integrabilidade da função degrau) Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função degrau, então $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$.

Example

a) Mostre que

$$g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

é Riemann integrável e compute $\int_0^3 g$.

Note que g é uma função degrau e portanto pelo Teorema da Integrabilidade da função degrau $g \in \mathcal{R}[0,3]$ e

$$\int_0^3 g = 2(1-0) + 3(3-1)$$

Teorema (Integrabilidade e Continuidade) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, então $f\in R[a,b]$

Teorema (Integrabilidade e Monotonicidade) Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é monótona em $[a,b]$, então $f\in R[a,b]$

Algumas Propriedades

Teorema (Aditividade) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ and let $c\in\,]a,b[$. Então $f\in R[a,b]$ se, e somente se, suas restrições a $[a,c]$ e $[c,b]$ são ambas Riemann integráveis. Neste caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

↳ f é integrável $\Rightarrow$ qualquer restrição de f em seu domínio é integrável

Corolário Se $f\in R[a,b]$ e se $[c,d]\subseteq[a,b]$, então a restrição de f em $[c,d]$ está em $R[c,d]$.

↳ se f é integrável $\Rightarrow$ qualquer restrição de f em seu domínio é integrável

Corolário Se $f\in R[a,b]$ e se $a=c_0<c_1<\dots<c_m=b$, então as restrições de f a cada subintervalo $[c_{i-1}, c_i]$ são Riemann integráveis e

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{m}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f$$

Def (Integral de Riemann Geral) Se $f \in R[a,b]$ e $\alpha, \beta \in [a,b]$ com $\alpha < \beta$ nós definimos

$$\int_\beta^\alpha f := -\int_\alpha^\beta f \quad \text{e} \quad \int_\alpha^\alpha f = 0$$

↳ Geral no sentido de que vale para $a < b$ e $-a > -b$

Teorema Se $f \in R[a,b]$ e se $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ quaisquer, então

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f$$

ou seja, a existência de qualquer duas integrais deste tipo implica na existência da terceira integral.

OBS

1. Note que, diferentemente do Teorema da aditividade, aqui provamos a existência de uma integral em uma restrição de f usando outras duas restrições

Teorema Fundamental do Cálculo (Primeira forma) Suponha a existência de um conjunto finito E em $[a,b]$, e suponha que existem duas funções $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q.

a) F é contínua

b) $F'(x) = f(x)$ para $\forall x \in [a,b] \setminus E$ → não quer dizer que F é diferenciável em todo ponto? b) ⇒ a) ?

c) $f \in R[a,b]$

Então temos que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

OBS

1. Se F é diferenciável em todo ponto de $[a,b]$, então F é contínua em $[a,b]$ e vale a)
2. Se f não está definida para algum ponto $c \in E$, tomamos $f(c) = 0$
3. Note que, mesmo se F for diferenciável em todo ponto de $[a,b]$, a condição c) pode não ser satisfeita, pois $\exists F$ t.q. F' não é Riemann Integrável

EXAMPLES

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [a,b]$. Compute $\int_a^b f(x)dx$

Note que

$$F'(x) = x, \quad x \in [a,b]$$

e $F' = f$ é contínua, então $F' = f \in R[a,b]$. Portanto, pelo TFC1 temos que

$$\int_a^b x\, dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

c) $A(x) = |x|$, $x \in [-10, 10]$. Compute $\int_{-10}^{10} a(x)\,dx$

A primeira derivada de $A(x)$ é dada por

$$A'(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-10, 0[\\ 1, & x \in]0, 10] \end{cases} = \text{sign}(x), \quad x \in [-10,10] \setminus \{0\}$$

Note que $A'(x) = a(x)$ é uma função degrau, então $A' = a \in R[-10, 10] \setminus \{0\}$. Desta forma, pelo TFC1 temos

$$\int_{-10}^{10} \text{sign}(x)\,dx = A(10) - A(-10) = 0$$

d) $H(x) = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, b]$. Compute $\int_0^b h(x)\,dx$.

A primeira derivada de H é dada por

$$H'(x) = 2 \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} , \quad x \in [0, b]$$

Como h não é limitada em $]0, b]$, então $h \notin R[0, b]$, não importa como definimos $h(0)$. Deste modo,

h não limitada $\Rightarrow h \notin R[0, b]$?

↳ Teorema $h \in R[0, b] \Rightarrow h$ é limitada

$\not\Leftarrow$?

e) $k(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x\in(0,1]$ e $k(0)=0$

Pela regra do produto temos

$$k'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + \cancel{x^2}\,\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x\in(0,1]$$

$$k'(0) = 0$$

Então, k é contínua e diferenciável para todo ponto de $[0,1]$. Apesar disso a função k' não é limitada em $[0,1]$, então $k'\notin \mathcal{R}[0,1]$ e o TFC1 não se aplica.

Def (Integral Indefinida) Se $f\in\mathcal{R}[a,b]$, então a função definida por

$$F(z) = \int_a^z f, \quad \text{para } z\in[a,b] \qquad (3)$$

é chamada de integral indefinida de f com ponto base a.
↳ Basepoint

OBS

1. Note que é possível que outro ponto base seja usado além de a

Teorema A integral indefinida (3) é contínua em $[a,b]$. De fato, se $|f(x)|\leq M$ para qualquer $x\in[a,b]$, então

$$|F(z)-F(w)| \leq M|z-w|, \quad \forall z,w\in[a,b]$$

ou seja, a integral (3) é Lipschitz contínua.

Teorema Fundamental do Cálculo (Segunda forma) Seja $f \in R[a,b]$ e contínua em $\underline{c} \in [a,b]$. Então a integral indefinida (3) é diferenciável em $\underline{c}$ e $F'(c) = f(c)$.

↳ A integral indefinida (3) é diferenciável em qualquer <u>ponto</u> que f seja contínua

- Se f é contínua em todo $x \in [a,b]$, então temos o seguinte resultado

Teorema (Diferenciabilidade de (3)) Se f é contínua em $[a,b]$, então a integral indefinida F (3) é diferenciável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$ para qualquer $x \in [a,b]$.

- Podemos reescrever o teorema acima da seguinte forma: Se f é contínua em $[a,b]$ $\Rightarrow$ sua integral indefinida é a antiderivada de f.

↳ f contínua em $[a,b]$ $\Rightarrow F(z) = \int_a^z f = F(x)$?

EXAMPLES

a) $f(x) = \text{sign}(x)$, $x \in [-1,1]$

Como f é uma função salto, então $f \in R[-1,1]$. Apesar disso, notemos que $F'(0)$ não existe, então pelo TFC2 temos que F não é a antiderivada de f em $[-1,1]$.

Teorema (Substituição de variáveis) Seja $J := [\alpha, \beta]$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua em J. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua em um intervalo $I \supseteq \varphi(J)$, então

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$$

EXAMPLES

a) $\int_1^4 \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$

Apliquemos a substituição

$\varphi(t) = \sqrt{t}$, $t \in [1,4]$ t.q. $\varphi'(t) = 1/2\sqrt{t}$

contínua em $[1,4]$. Deste modo, para $x = \sqrt{t}$, temos

$$\int_1^2 2 \sin x\, dx = -2 \cos x \Big|_1^2 = 2(\cos 1 - \cos 2)$$

b) $\int_0^4 \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

Como $\varphi(t) := \sqrt{t}$ não tem derivada contínua em $[0,4]$, o teorema da substituição não se aplica para esta substituição. A despeito disso, podemos aplicar o TFCL com $E = \{0\}$ e a mesma substituição.

← null set

Def (conjunto nulo)

a) O conjunto $Z \subset \mathbb{R}$ é dito um conjunto nulo se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma coleção contável $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ de intervalos abertos t.q.

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq \varepsilon$$

b) Se $Q(x)$ é uma afirmação sobre os pontos $x \in I$, dizemos que $Q(x)$ vale para quase todo ponto $x \in I$ se existir um conjunto nulo $Z \subset I$ t.q. $Q(x)$ vale para todo $x \in I \setminus Z$. Neste caso escrevemos

$$Q(x) \quad \text{para q.t.} \quad x \in I$$

Obs

1. Um subconjunto de um conjunto nulo é também um conjunto nulo
2. A união de conjuntos nulos é também um conjunto nulo

example

a) Os racionais $\mathbb{Q}_1$ definidos em $[0,1]$ é um conjunto nulo

Seja $\mathbb{Q}_1 = \{r_1, r_2, \dots\}$ o conjunto dos racionais no intervalo $[0,1]$. Dado um $\varepsilon > 0$, note que o intervalo aberto

$$J_k := \left] r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right[$$

contém r_k e têm comprimento $\varepsilon / 2^k$, para $k = 1, 2, \dots$. Desta forma, a união $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ contém todos os pontos de $\mathbb{Q}_1$. Além disso a soma dos comprimentos é dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon / 2^k) = \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, então $\mathbb{Q}_1$ é o conjunto nulo.

Teorema (critério de integração de Lebesgue) Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável se, e somente se, ela é contínua em quase todo ponto em $[a,b]$.

↳ Uma função limitada em um intervalo é integrável $\iff$ os seus pontos de descontinuidade formam um conjunto finito.

EXAMPLE

a) $g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$

Note que g é contínua em todo ponto exceto $x = 1$. Portanto, segue do critério de integração de Lebesgue que $g \in \mathcal{R}[0,3]$.

De fato, como toda função degrau tem no máximo um conjunto finito de descontinuidades, então toda função degrau em $[a,b]$ é Riemann integrável.

b) Riemann integrabilidade de funções monótonas

Pelo Teorema (5.6.4) da continuidade e monotonicidade o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função monótona é sempre contável. Portanto, pelo critério de integração de Lebesgue concluímos que toda função monótona em $[a,b]$ é Riemann integrável.

Teorema (integrabilidade da função composta) Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ com $f([a,b]) \subseteq [c,d]$ e seja $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a composição $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

↳ qualquer composição de uma função Riemann integrável é Riemann integrável

Corolário Suponha que $f \in R[a,b]$. Então $|f| \in R[a,b]$, e

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b-a)$$

onde $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Teorema (do produto) Se f e g pertencem a $R[a,b]$, então o produto $f \cdot g \in R[a,b]$.

Teorema (Integral por Partes) Se F, G funções diferenciáveis em $[a,b]$ e sejam $f := F'$ e $g := G'$ duas funções pertencentes a $R[a,b]$. Então

$$\int_a^b f \cdot G = F \cdot G\Big|_a^b - \int_a^b F \cdot g$$

OBS

1. Um caso especial do Teorema acima é quando f e g são contínuas em $[a,b]$ e F e G são integrais indefinidas $F(x) := \int_a^x f$ e $G(x) := \int_a^x g$

Teorema (Taylor e Riemann) Suponha $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ exitem em $[a,b]$ e $f^{(n+1)} \in R[a,b]$. Então temos

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n$$

e a função resto é dada por

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n \, dt$$

↳ uma função Riemann integrável pode ser computada usando o Teorema de Taylor