2. If $n \in \mathbb{N}$ and $H_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in [a,b]$, show that the FTCI implies that $\int_a^b x^n dx = \dfrac{(b^{n+1} - a^{n+1})}{(n+1)}$.

//

TFC I

1. $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$
2. Conjunto finito $E \subset [a,b]$
3. $F$ contínua em $[a,b]$
4. $F'(x) = f(x)$ para $\forall x \in [a,b] \setminus E$

$\Big\}$ Condições

$f(x) = x^n$, $E = \{\emptyset\}$

//

Tomemos as seguintes funções

$$F'(x) = f(x) = x^n, \quad x \in [a,b]$$

e $E = \{\emptyset\}$. Além disso suponha

$$F(x) = H_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in [a,b]$$

Como $F, f$ são contínuas em $[a,b]$ e o conjunto vazio pertence a qualquer conjunto, então segue-se pelo TFC I

$$\int_a^b x^n\, dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

3) If $g(x) = \begin{cases} x, & |x| \geq 1 \\ -x, & |x| < 1 \end{cases}$ and $G(x) = \frac{1}{2}|x^2 - 1|$.

Show that $\int_{-2}^{3} g(x)\, dx = G(3) - G(-2) = \frac{5}{2}$

Seja $G'(x) := g(x)$ definida como no enunciado e $G(x)$ da mesma forma. Além disso, vamos definir $E := \{0\}$. Note que $g$ é contínua em $[a,b] \setminus E$ e $G$ é contínua em $\mathbb{R}$. Portanto, segue-se pelo TFC1 que

$$\int_{-2}^{3} g(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\,|3^2 - 1| - |(-2)^2 - 1|\,\right] = \frac{5}{2}$$

5. Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ and let $c \in \mathbb{R}$

a) If $\phi(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ is an antiderivative of $f$ on $[a,b]$, show that $\phi_c(x) = \phi(x) + c$ is also an antiderivative of $f$ on $[a,b]$