Notação

X : matriz — X^{-1} : inversa de X — I : identidade

X' : transposta de X — $\det(X)$: determinante de X

Def (Matriz Inversa) Seja X uma matriz quadrada. Se existir X^{-1} t.q. $XX^{-1} = I$, então X^{-1} é a inversa de X

Propriedades

1. $XX^{-1} = I \Rightarrow X^{-1}X = I$
2. Se X admite inversa $\Rightarrow X$ é **não singular**
3. X^{-1}, se existir, é única
4. $(X^{-1})^{-1} = X$
5. Se X, Y são matrizes não singulares $\Rightarrow (XY)^{-1} = X^{-1}Y^{-1}$
6. X é não singular, k escalar, $k \neq 0$, $\Rightarrow (kX)^{-1} = \frac{1}{k} X^{-1}$

Def (Matriz transposta) Seja X uma matriz. A transposta de X, denotada X^T, é a matriz X em que suas linhas viram colunas de X^T.

Propriedades

1. X e Y são matrizes t.q. $\exists\, XY \Rightarrow (XY)^T = Y^T X^T$
2. Se $X = X^T \Rightarrow X$ é **simétrica**
3. $X^T X$ e XX^T são matrizes simétricas

Def (Determinante) Seja X uma matriz quadrada.

$$\det(X) = |X| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} E & F \\ H & I \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & F \\ G & I \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & E \\ G & H \end{vmatrix}$$

$A_{m\times m}, B_{m\times m}, C_{m\times m}, D_{m\times m}$, então:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B| \quad , \text{ se } A \text{ inversível}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = |D|\,|A - BD^{-1}C| \quad , \text{ se } D \text{ inversível}$$

Propriedades

1. $A_{m\times m}, B_{m\times m} \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. $A_{m\times m}$, $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ é singular

Def (Posto de uma matriz) Seja A é matriz $m\times m$. O posto de A é a ordem da maior submatriz quadrada não singular de A.

Propriedades

1. $\text{Rank}(A) = n \Rightarrow A$ contém pelo menos um menor $n\times n$ não nulo e nenhum menor não nulo de dimensão maior que n
2. $A_{m\times p}$. Se $m > p$, $\text{Rank}(A) = \#$ mínimo de colunas lineanmente

independentes de A }, portanto $\text{rank}(A) \le p$

3. Se $\text{rank}(A) = p \Rightarrow A$ tem posto completo
4. Se $m < p$, $\text{rank}(A) = \{$ número de linhas linearmente independentes de A }, portanto $\text{rank}(A) \le m$
5. Se $\text{rank}(A) = m \Rightarrow A$ é de posto completo

Def (Vetores linearmente indep.) Seja $\{\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \dots, v_p\}$ um conjunto de p vetores cada um com m componentes, $v_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, m$. Este conjunto (os vetores) é linearmente independente se

$$c_1 \underset{\sim}{v}_1 + c_2 \underset{\sim}{v}_2 + \dots + c_p \underset{\sim}{v}_p = \underset{\sim}{0} \Rightarrow c_1, c_2, \dots, c_p = 0$$

6. $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$
7. $\text{rank}(A^TA) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A)$
8. $\text{rank}(AB) \le \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$
9. $A_{m \times m}$, $\det(A) = 0 \Leftrightarrow r(A) < m$

Def (Matriz Ortogonal) Seja P uma matriz $m \times m$. Dizemos que P é matriz ortogonal $\Leftrightarrow P^{-1} = P^T$

Propriedades

1. p_{ii} é o i-ésimo elemento de uma matriz ortogonal $\Rightarrow -1 \le p_{ii} \le 1$
2. $P_{m \times m} = [\underset{\sim}{p}_1 \; \underset{\sim}{p}_2 \; \dots \; \underset{\sim}{p}_m]^T$. P é ortogonal $\Leftrightarrow \underset{\sim}{p}_i^T \underset{\sim}{p}_i = 1$ e $\underset{\sim}{p}_i^T \underset{\sim}{p}_j = 0$, $i \ne j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$.

3. P é ortogonal $\Leftrightarrow P^T P = I$

4. Se P é ortogonal $\Rightarrow \det(P) = 1$ ou -1

Def (Vetor ortogonal) Dois vetores $m \times 1$ x, y são ortogonais se $x^T y = 0$

Operações com matrizes particionadas

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^* & B^* & C^* \\ D^* & E^* & F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+A^* & B+B^* & C+C^* \\ D+D^* & E+E^* & F+F^* \end{bmatrix}$$ soma

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE+QG \\ RE+SG \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE+QG & PF+QH \\ RE+SG & RF+SH \end{bmatrix}$$

produto

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{bmatrix}$$ transposta

inversa de matriz particionada

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} [B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}[B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1} \\ -B_{22}^{-1}B_{21}[B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}]^{-1} & [B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}]^{-1} \end{bmatrix}$$

B não-singular, $m_1 + m_2 = m$, $0 < m_1 < m$

Def (Inversa Generalizada) Seja $A_{m \times p}$ uma matriz de posto qualquer. Dizemos que A^- é <u>uma</u> inversa generalizada de A sse $AA^-A = A$

Propriedades

1. Se A é inversível $\Rightarrow A^{-1} = A^-$
2. A^- não é única
3. AA^- e A^-A são simétricas
4. $A^-AA^- = A^-$
5. $A^-AA^-A = A^-A \Rightarrow A^-A$ é idempotente
6. $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^-A) = \text{trace}(A^-A)$

↳ soma da diagonal

Def (Traço de uma matriz) O traço de uma matriz $m \times m$ A é definido por $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$

7. Se A^- existe $\Rightarrow \text{rank}(A^-) \geq \text{rank}(A)$

Solução de equações lineares através da inversa generalizada

- Um sistema de m equações em n incógnitas pode ser escrito na forma matricial como $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$, onde $A_{m \times p}$, $\underset{\sim}{x}_{p \times 1}$ e $\underset{\sim}{y}_{p \times 1}$.

Teorema 1 Se A é $m \times m$ não singular, $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ tem solução única dada por $\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{y}$.

↳ Relaciona não singularidade ($\det|A| \neq 0$) com unicidade de solução de um sistema de equações lineares

DEF (consistência de um sistema de equações lineares) Um sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ é consistente se $\underset{\sim}{y}$ pertence ao espaço linear gerado pelas colunas de A.

- Esta condição garante que se existir alguma relação linear entre as linhas de A, a mesma relação deve existir para as linhas de $\underset{\sim}{y}$

$$A = \begin{bmatrix} z & w \\ kz & kw \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{y} = a_1 \begin{bmatrix} z \\ kz \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} w \\ kw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 z + a_2 w \\ k(a_1 z + a_2 w) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$ é consistente

TEOREMA 2 O sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ tem solução $\Leftrightarrow$ é consistente

TEOREMA 3 Um sistema de equações consistente $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ tem uma solução do tipo $\underset{\sim}{x} = G\underset{\sim}{y} \Leftrightarrow G = A^{-1}$.

Teorema 4 A solução geral de um sistema consistente $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ é $\underset{\sim}{x} = A^{-}\underset{\sim}{y} + (A^{-}A - I)\underset{\sim}{z}$

Inversas Generalizadas de X^TX

Teorema Se G é inversa generalizada de X^TX então

a) G^T também é uma inversa generalizada de X^TX.

b) $XGX^TX = X$, isto é, GX^T é uma inversa generalizada de X.

c) XGX^T é invariante com G

d) XGX^T é simétrica, para qualquer G

Produtos Matriciais Especiais

$A = (a_{ij})_{m \times n}$
$B = (b_{ij})_{p \times q}$ $\Rightarrow A \otimes B = \underset{mp \times nq}{(A \otimes B)_{ij}} = a_{ij}B$

Exemplo

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad Var(\underset{\sim}{y}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \Sigma$$

$$\underset{\sim}{z} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y_1} & \underset{\sim}{y_2} & \underset{\sim}{y_3} \end{bmatrix} \Rightarrow Var(\underset{\sim}{z}) = \begin{bmatrix} Var(\underset{\sim}{y_1}) & Cov(\underset{\sim}{y_1}, \underset{\sim}{y_2}) & Cov(\underset{\sim}{y_1}, \underset{\sim}{y_3}) \\ Cov(\underset{\sim}{y_2}, \underset{\sim}{y_1}) & Var(\underset{\sim}{y_2}) & Cov(\underset{\sim}{y_2}, \underset{\sim}{y_3}) \\ Cov(\underset{\sim}{y_3}, \underset{\sim}{y_1}) & Cov(\underset{\sim}{y_3}, \underset{\sim}{y_2}) & Var(\underset{\sim}{y_3}) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I_3 \otimes \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma & 0_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & \Sigma & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & 0_{2\times2} & \Sigma \end{bmatrix}$$

Propriedades

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A+B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B+C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab\, A \otimes B$, a e b escalares
5. $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$, se as inversas existirem
7. $(A \otimes B)^{-} = A^{-} \otimes B^{-}$
8. $(A \otimes B)^{T} = A^{T} \otimes B^{T}$
9. $(A \otimes B) = (A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$

Raízes características

Def (raízes características) As raízes características de uma matriz A $m \times m$ são as soluções em λ da equação

$$\det(A - \lambda I_m) = 0$$

↳ polinômio de grau m em λ

Propriedades

1. $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

2. $\text{Trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

3. Se $\text{rank}(A) = r \Rightarrow$ zero é raiz da equação com multiplicidade $n-r$

Formas Quadráticas

Def (Forma Quadrática) A função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma forma quadrática se

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \underset{\sim}{x}' A \underset{\sim}{x}$$

, onde $\underset{\sim}{x} = [x_1 \; x_2 \dots x_n]^T$ e $A = (a_{ij})$ matriz $n \times n$ simétrica, é dita matriz de forma quadrática.

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2 = \underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} \quad \text{, para}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} \end{bmatrix}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$$

Classificação de formas quadráticas

1. $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ é **positiva definida** (P.D.) se $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} > 0$, $\forall \underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$

2. $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ é **positiva semidefinida** (P.S.D.) se $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} \geq 0$ e $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} = 0$ para pelo menos um $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{0}$

3. A é dita **não-negativa** se for positiva definida ou semidefinida

4. $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ é **negativa definida** se $-\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ é positiva definida e **negativa semidefinida** se $-\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ é positiva semidefinida

Exemplo

$\underset{\sim}{X} = [X_1 \; X_2 \; \dots \; X_n]^T \qquad Var(\underset{\sim}{X}) = \Sigma$

• Σ é não negativa definida (positiva definida ou semi-definida) pois, se

$$\underset{\sim}{a}^T = [a_1 \; a_2 \; \dots \; a_n] \Rightarrow Var(\underset{\sim}{a}^T X) = Var(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j$$

$$Cov(X_i, X_j) = \underset{\sim}{a}^T \Sigma \underset{\sim}{a} \geq 0 \quad \forall a \neq 0$$

OBS Σ é positiva definida $\Leftrightarrow$ não existem relações lineares entre as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_k$.

Forma matricial de estatísticas conhecidas

- Sejam $X_1, \ldots, X_p$ variáveis aleatórias medidas em n indivíduos, damos origem à matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$ Vetor de médias amostrais

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$ Matriz de variâncias e covariâncias amostrais

$$s_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{ki} - \bar{x}_k)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} X^T \underset{\sim}{1}$$

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{x}_i - \bar{X})(\underset{\sim}{x}_i - \bar{X})^T, \quad \underset{\sim}{x}_i = [x_{1i}\ x_{2i}\ \dots\ x_{pi}]^T$$

$$S = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{x}_i \underset{\sim}{x}_i^T - n\bar{X}\bar{X}'\right]$$

$$S = \frac{1}{n} X'\left[I - \frac{1}{n}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{1}^T\right] X$$

Transformações de formas quadráticas

- Seja $\underset{\sim}{y} = B^{-1}\underset{\sim}{x}$ uma transformação de $\underset{\sim}{x}$, onde B é não singular ($\underset{\sim}{x} = B\underset{\sim}{y}$). Então

$$Q = \underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}^T B^T A B \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}^T C \underset{\sim}{y}, \quad C = B'AB$$

É a forma quadrática nas novas variáveis.

Resultados

1. Existe D, matriz diagonal $n \times n$ t.q.

$$Q = \underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}^T B^T A B \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{y}^T D \underset{\sim}{y} = d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2$$

onde d_i, $i = 1, \dots, n$, são elementos da diagonal de D.

2. Se $\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ é positiva definida, existe uma transformação $\underset{\sim}{y} = B^{-1}\underset{\sim}{x}$ t.q.

$$x^T A x = y^T y = y_1^2 + \dots + y_m^2$$

Teorema 1 Seja A matriz $m \times m$ positiva semi definida, então

1. $\text{Rank}(A) < m$
2. Se $a_{ii} \geq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$ e se $a_{jj} = 0$, todo elemento da j-ésima linha e j-ésima coluna é zero
3. $P^T A P$ é positiva semi definida, $\forall P$ matriz $m \times m$

Teorema 2 Seja A matriz $m \times m$ positiva definida, então

1. $\text{Rank}(A) = m$
2. $a_{ii} > 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, m$
3. $P^T A P$ é positiva definida para qualquer matriz P $m \times m$ não singular

Teorema 3 A matriz A $m \times m$ é dita positiva semi definida se, e somente se

1. Existe B $m \times m$, $\text{Rank}(B) < m$, t.q. $B^T B = A$
2. As raízes características de A são não negativas (≥ 0) e no mínimo uma delas é igual a zero

Teorema 4 A matriz A $m \times m$ é dita positiva definida se, e somente se

1. Existe B $m \times m$, $\text{rank}(B) = m$, t.q. $B^T B = A$
2. As raízes características de A são todas positivas (>0)
3. $a_{11} > 0$, $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) > 0, \ldots, \det(A) > 0$

Derivadas de formas lineares ou quadráticas

Def (Derivada) Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2 \ldots x_m)^T$ e $f(\underset{\sim}{x})$ uma função real de $\underset{\sim}{x}$. A derivada de $f(\underset{\sim}{x})$ com respeito a $\underset{\sim}{x}$ é dada por

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial \underset{\sim}{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Teorema 1 Se $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2 \ldots a_m)^T$ é um vetor de constantes e $f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{a}$ (linear), então

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{a}$$

Teorema 2 Se $f(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x}$ (forma quadrática), A matriz de constantes, então

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{x})}{\partial \underset{\sim}{x}} = 2A\underset{\sim}{x}$$

Decomposição

1) $A_{m \times m}$ matriz simétrica pode ser fatorada como

$$A = LDL^T$$

L : matriz triangular inferior
L^T : " " superior
D : " diagonal

2) A é positiva definida se, e somente se, existir W não singular t.q.

$$A = WW^T$$

3) Decomposição Espectral: Qualquer matriz simétrica $A_{p \times p}$ pode ser escrita como

$$A = \Gamma D \Gamma^T$$

$D = \text{diag}(\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_p)$: raízes características de A
$\Gamma = [\underset{\sim}{x}_1\ \underset{\sim}{x}_2 \ldots \underset{\sim}{x}_p]$: vetores característicos normalizados

Se λ_i é raiz característica, a solução em x da equação

$$[A - \lambda_i I]\, x = 0$$

é o vetor característico correspondente $\underset{\sim}{x}_i$.

Verifica-se que $A = \Gamma D \Gamma^T = \lambda_1 \underset{\sim}{x}_1 \underset{\sim}{x}_1^T + \ldots + \lambda_p \underset{\sim}{x}_p \underset{\sim}{x}_p^T$