УГАТУ

Лабораторная работа №1

Решение начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Лабораторная работа №1

Цель работы: получить навык численного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием различных методов на примере

• задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка,

• краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Задача Коши для системы ОДУ

Рассматривается задача Коши для системы уравнений движения материальной точки в потенциальном поле *U(x)*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = v, & x(0) = x_0, \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -\dfrac{1}{m}\dfrac{dU}{dx}, & v(0) = v_0. \end{cases}$$

Рассматриваемые численные методы решения

1. Метод Эйлера с постоянным шагом.
2. Явная двухшаговая схема Адамса.
3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ первого порядка

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = g.$$

Обозначим за *h* шаг сетки и грубо аппроксимируем приращение функции:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + hu'(t_n).$$

Подставляя исходное уравнение в правую часть и заменяя переменную и функцию сеточными функциями, получим схему для метода Эйлера:

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n),$$
$$u_0 = g.$$

Замечание. Здесь и далее для систем ОДУ функции *u(t)* и *f(t)* считаются вектор-функциями.

Метод Адамса

УГАТУ

Аппроксимируем приращение функции более точно:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \int_0^h u'(t_n + z)dz = u(t_n) + \int_0^h f(t_n + z, u(t_n + z))dz.$$

Экстраполируем функцию *f(t,u(t))* линейно по уже известным двум значениям в точках t_{n-1} и t_n и проинтегрируем. После преобразований* получим явную схему Адамса второго порядка:

$$u_{n+1} = u_n + \left(3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})\right)\frac{h}{2}$$

Т.к. схема для расчета нового значения требует два предыдущих, дополним начальное условие значением, посчитанным, например, методом Эйлера:

$$u_1 = u_0 + hf(t_0, u_0)$$

$$u_0 = u_0$$

*повторить самостоятельно

Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Данный метод строит четырехчленную схему на основе разложения функции погрешности в ряд Тейлора и приравнивания первых четырех ее производных к нулю.

Наиболее употребительная схема**:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}\right)$$

$$k_{1,n} = f\left(t_n, u_n\right)$$

$$k_{2,n} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\right)$$

$$k_{3,n} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{2,n}\right)$$

$$k_{4,n} = f\left(t_n + h, u_n + hk_{3,n}\right)$$

**изучить вывод самостоятельно

Задача Коши для системы ОДУ

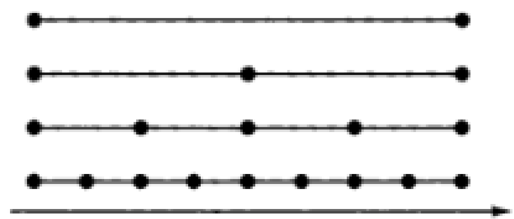
Порядок выполнения работы

1. Обезразмерить систему уравнений:
   выполнить замену переменных $t = C_1 \tilde{t}, x = C_2 \tilde{x}, y = C_3 \tilde{y}$
   в уравнениях и выбрать значения констант C_1, C_2, C_3, чтобы коэффициенты уравнений отличались на минимальное количество порядков.
   Убедиться, что функция потенциала имеет потенциальную яму.
2. Построить решение в каком-либо математическом пакете с помощью метода высокого порядка точности (например, Рунге-Кутта 4–5). Определить время расчета (2-3 колебания).
3. Реализовать численные методы в виде отдельных функций:
   a. метод Эйлера с постоянным шагом (2 балла),
   b. явную двухшаговую схему Адамса с постоянным шагом (2 балла),
   c. метод Рунге-Кутта 4-го порядка (2 балла).

Задача Коши для системы ОДУ

УГАТУ

Порядок выполнения работы

4. Для каждого рассмотренного метода исследовать зависимость решения от шага временной сетки (процесс Эйткена):
   a. решить задачу для разбиения интервала на N, 2N, 4N, … отрезков (расчет на сгущающихся сетках с общими узлами),
   
   b. построить графики разности решений,
   c. построить график невязки для последовательности сеток (разность решений в евклидовой или максимальной строчной норме), определить эффективный порядок точности.

5. Для каждого рассмотренного метода выполнить сравнение полученных численных решений с решением, построенным в п.2. Построить графики разности решений.

6. Для метода Эйлера проверить применимость правила Рунге (на сетках из п.4) и с его помощью повысить точность решения.

Краевая задача для ОДУ

Решается краевая задача для неоднородного ОДУ второго порядка:

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x), \quad x\in[a,b]$$
$$\alpha_0 u(a)+\alpha_1 u'(a)=A$$
$$\beta_0 u(b)+\beta_1 u'(b)=B$$

Рассматриваемые численные методы решения

1. Конечно-разностный метод.
2. Метод стрельбы (пристрелки).

Конечно-разностный метод

УГАТУ

Вводится равномерная сетка из N отрезков длиной h.

Все функции заменяются сеточными функциями, а производные любого порядка - конечными разностями (через значения решения в узлах сетки)****.

После подстановки их в ОДУ и группировки получим систему уравнений:

$$a(x_n)u_{n-1} + b(x_n)u_n + c(x_n)u_{n+1} = d(x_n) \quad n = 1 \ldots N-1$$

Дополнительные два уравнения получаются аналогичной аппроксимацией граничных условий.

$$b(x_0)u_0 + c(x_1)u_1 = d(x_0), \quad a(x_{N-1})u_{N-1} + b(x_N)u_N = d(x_N)$$

Замечание. Порядок аппроксимации граничных условий должен быть не меньше порядка аппроксимации основного уравнения.

В результате получена система N алгебраических уравнений с N неизвестными, которая может быть решена методом прогонки.

****изучить вывод (с учетом порядка аппроксимации) самостоятельно

Метод стрельбы

Краевая задача для системы уравнений сводится к некоторой задаче Коши для той же системы. Например, в качестве начального условия рассматривается левое граничное условие, которое дополняется произвольным условием простого вида

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x), \quad x\in[a,b]$$

$$\alpha_0 u(a)+\alpha_1 u'(a)=A$$

$$u(a)=\eta$$

Решение задачи Коши *y(x)* можно получить, например, методом Рунге-Кутты.

Необходимо проварьировать параметр η так, чтобы на правом конце решение удовлетворяло оставшемуся граничному условию.

для этого можно использовать метод дихотомии, Ньютона или секущих.

Метод стрельбы

Случай линейного уравнения

Для линейной задачи можно уменьшить объем вычислений: найти общее решение уравнения как сумму частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Если $u_0(x)$ - решение задачи Коши при $\eta = 0$, а $u_1(x)$ - решение задачи Коши без правой части при $\eta = 1$, то

$$u(x) = u_0(x) + Cu_1(x)$$

где С может быть определено из правого граничного условия.

Краевая задача для ОДУ

УГАТУ

Порядок выполнения работы

1. Реализовать решение краевой задачи конечно-разностным методом (2 балла)
   a. Вывести конечно-разностную схему второго порядка аппроксимации для основного уравнения и граничных условий, заменяя производные разностными соотношениями***.
   b. Сформировать матрицу и вектор свободных членов для полученной СЛАУ. Убедиться, что система имеет трехдиагональный вид.
   c. Реализовать метод прогонки для трехдиагональной матрицы и решить им полученную СЛАУ.
   d. Исследовать зависимость решения от шага временной сетки (аналогично п. 4 предыдущего задания).

Краевая задача для ОДУ

УГАТУ

Порядок выполнения работы

2. Реализовать решение краевой задачи методом стрельбы (2 балла)
   a. Привести краевую задачу к задаче Коши, убрав правое граничное условие и дополнив оставшуюся систему дополнительным уравнением на левой границе.
   b. Решить полученную задачу Коши методом Рунге-Кутты, варьируя параметр в дополнительном начальном условии до тех пор, пока решение не станет удовлетворять правому граничному условию с требуемой точностью.
3. Выполнить сравнение полученных решений с численным решением в каком-либо математическом пакете. Построить графики разности решений.