

## Лабораторная работа № 2

### РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

**Цель работы:** получить навык численного решения линейных и нелинейных начально-краевых задач для уравнений параболического типа с использованием различных конечно-разностных схем на примере задачи для одномерного уравнения теплопроводности с источником.

#### Задания на лабораторную работу

##### *Начально-краевая задача*

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(t, x, u), \quad x \in (0, 1), t > 0; \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (2)$$

$$\alpha_0 u(t, 0) + \beta_0 u_x(t, 0) = \psi_0(t), \quad t > 0; \quad (3)$$

$$\alpha_1 u(t, 1) + \beta_1 u_x(t, 1) = \psi_1(t), \quad t > 0. \quad (4)$$

#### *I. Сравнение конечно-разностных схем для линейной задачи*

Рассматривается линейный случай уравнения теплопроводности (1):

$$k(u) = k_0 = \text{const}, \quad f(t, x, u) = f(t, x). \quad (5)$$

Параметры задачи выбираются в соответствии с индивидуальным заданием (Таблица 1).

Методом разделения переменных построить аналитическое решение задачи.

##### *Задача 1 (2 балла).*

- 1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(5) с использованием явной разностной схемы на равномерной пространственно-временной сетке.
- 2) Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
- 3) Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики зависимости

погрешности, оцениваемой в равномерной норме по пространственной переменной, от времени и шагов сетки.

**Задача 2 (4 балла).**

- 1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(5) по полностью неявной схеме и схеме Кранка-Николсона на равномерной сетке.
- 2) Выполнить сравнение точности получаемого решения по двум схемам с использованием точного решения. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.
- 3) Сравнить время решения задач по трем схемам (явной, полностью неявной и Кранка-Николсона), обеспечивающих получение решения с одинаковым уровнем погрешности.

**Индивидуальные задания к задачам 1 и 2**

Таблица 1

№ в-та	$k_0$	$f(t, x)$	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\varphi(x)$	$\psi_0(x)$	$\psi_1(x)$
1	$\pi^{-2}$	$x$	1	0	1	0	$\sin(\pi x)$	0	$t$
2	1	$(\pi^2 t + 1) \cos(\pi x)$	0	1	1	0	$x$	1	$1 - t$
3	0.5	$-x^2 \cos t$	1	0	0	1	1	$\cos t$	$-2 \sin t$
4	$\pi^{-1}$	$(\pi t + 1) \cos(\pi x) + \frac{x}{2}$	0	1	0	1	$\sin(\pi x)$	$t$	$-\pi e^{-\pi t}$
5	$\pi^{-2}$	$\cos(\pi x) - x e^{-t}$	1	1	1	0	$x$	1	$2e^{-t} - 1$
6	1	$x^2 - 2t$	1	1	0	1	$x$	1	$2t + 1$
7	1	0	1	1	1	1	$\operatorname{sh} x$	$e^t$	$e^{t+1}$
8	$(4\pi^2)^{-1}$	$\sin(2\pi x) - \frac{1}{2\pi^2}$	1	0	1	1	$x^2$	$2\pi(1 - e^{-t})$	1
9	1	$tx^2 - t^2$	0	1	1	1	$x$	1	$\frac{3}{2}t^2 + 2$
10	1	$e^{-t}x$	1	-1	1	0	$\frac{\sin x + \cos x}{\sin 1} - x$	$e^{-t}$	$e^{-t} \operatorname{ctg} 1$
11	1	$x - x^2 + 2t$	1	-1	0	1	$\frac{\sin \pi x}{\pi}$	$-e^{-\pi^2 t} - t$	$-e^{-\pi^2 t} - t$
12	$\frac{1}{2}$	$(x^2 + t) \cos t$	1	-1	1	1	$x$	$t \sin t - 1$	$(3 + t) \sin t + 2$
13	1	$(1 - x)^2 - x \sin t - 2t$	1	0	-1	-1	$x$	$t$	$-2 \cos t$
14	$(18\pi^2)^{-1}$	$\frac{\sin(3\pi x)}{6\pi}$	0	1	-1	-1	1	$e^{-\frac{t}{2}} - 1$	$-e^{-\frac{t}{2}}$
15	1	$x^3 - 6tx + 2$	1	-1	1	-1	$x(1 - x)$	-1	$1 - 2t$

## II. Решение нелинейной задачи с использованием консервативной схемы

Решается нелинейная задача (1)-(4) с дополнительными исходными данными  $k(u)$  и  $F(u)$  из таблицы 2, где

$$f(t, x, u) = F(u)f(t, x),$$

а функция  $f(t, x)$  и остальные данные берутся из таблицы 1.

### Задача 3 (2 балла).

- 1) Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(4) с использованием консервативной схемы на равномерной сетке.
- 2) Убедиться в корректности программы на примере задачи 1.
- 3) Исследовать зависимость получаемого решения от величины шага сетки по пространственной и временной переменным. Построить графики решений для различных значений шага.

### Задача 4 (2 балла).

- 1) Выполнить модификацию программы из задачи 3 путем организации внутренних итераций на каждом временном шаге для повышения точности вычисления нелинейных слагаемых. Условием остановки итерационного процесса является достижение заданного преподавателем уровня погрешности вычислений нелинейных функций.
- 2) Выполнить сравнение получаемых решений по исходной и модифицированной программам.
- 3) Сравнить время работы двух программ для построения решений с одинаковым уровнем погрешности.

### Индивидуальные задания к задаче 2

Таблица 2

<b><i>B-m</i></b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
$k(u)$	$u^2$	$u$	$u^2$	$u$	$u^3$	$u^2 + u$	$u^2 + 1$	$u$
$F(u)$	$\sin u$	$u^2$	$u^3$	$\cos u$	$u$	$u^2$	$u^3$	$u^3$

<b><i>B-m</i></b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
$k(u)$	$\sin u$	$\cos u$	$\sin u$	$\cos u$	$\sin u$	$\cos u$	$\sin u$
$F(u)$	$u$	$u$	$u^2$	$u^2$	$u^3$	$u^3$	$\cos u$

## Теоретическая часть

<i>Номер задачи</i>	<i>Литература</i>
1,2	[1] (Глава XI, §1) [2] (Глава VII, §1) [3] (Глава 10, §5)
3,4	[1] (Глава XI, §1) [2] (Глава VII, §2)

1. Калиткин Н.Н. Численные методы.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.

***По каждой решенной задаче в обязательном порядке оформляется отчет. Лабораторная работа считается выполненной, если набрано 6 и более баллов.***