Лабораторная работа №2

Решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

Лабораторная работа №2

УГАТУ

Цель работы: получить навык численного решения линейных и нелинейных начально-краевых задач для уравнений параболического типа с использованием различных конечно-разностных схем на примере задачи для одномерного уравнения теплопроводности с источником.

Начально-краевая задача

УГАТУ

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного одномерного уравнения теплопроводности с источником:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(t,x,u), \quad x \in (0,1), t > 0; \qquad (1)$$

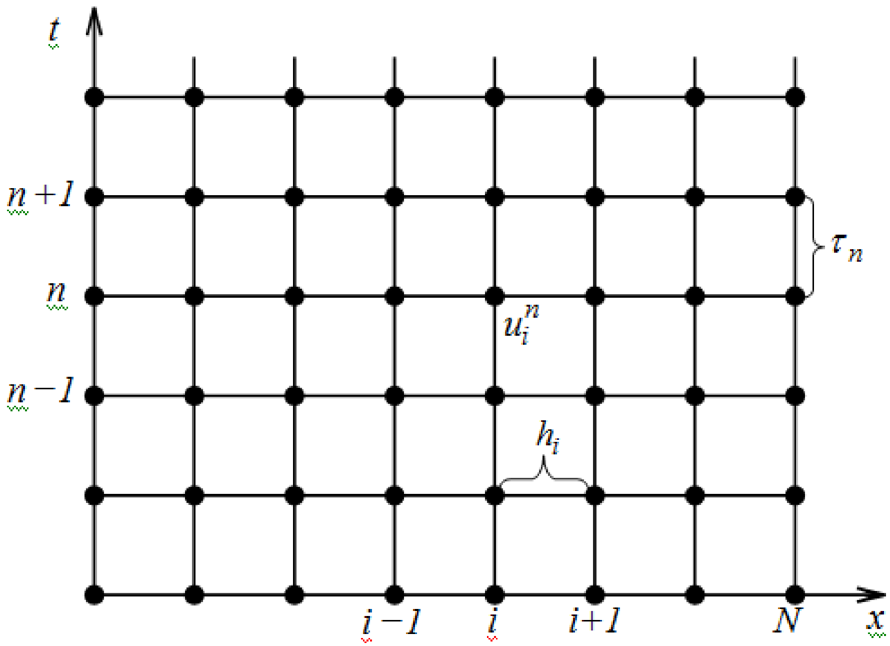
$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1]; \qquad (2)$$

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = \psi_0(t), \qquad t > 0; \qquad (3)$$

$$\alpha_1 u(t,1) + \beta_1 u_x(t,1) = \psi_1(t), \qquad t > 0. \qquad (4)$$

Разностная задача

Разностная задача строится с целью нахождения сеточной функции y^n_i, близкой к решению соответствующей дифференциальной задачи в некоторой норме.

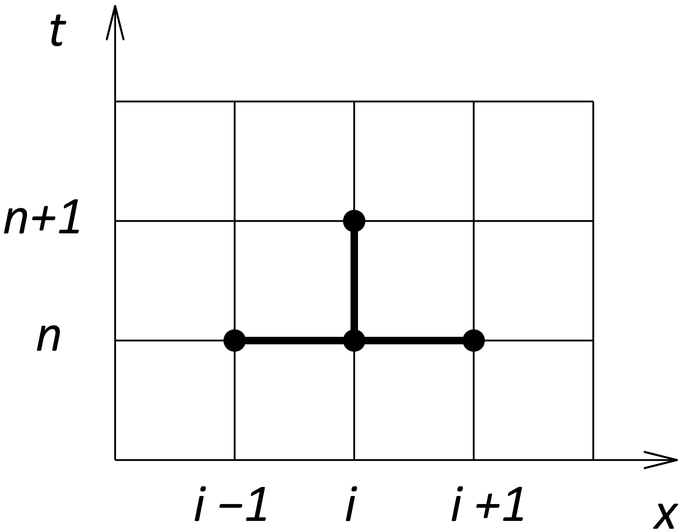


Правило написания разностных уравнений и дополнительных условий (начальных, краевых) называется разностной схемой.

Центрально-разностная явная схема

Центрально-разностная схема характеризуется наличием в разностном уравнении узловых точек с индексами *i - 1* и *i + 1*.

Явная схема позволяет вычислить значения в узловых точках на *n + 1* временном слое без решения СЛАУ.



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a\,\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}$$

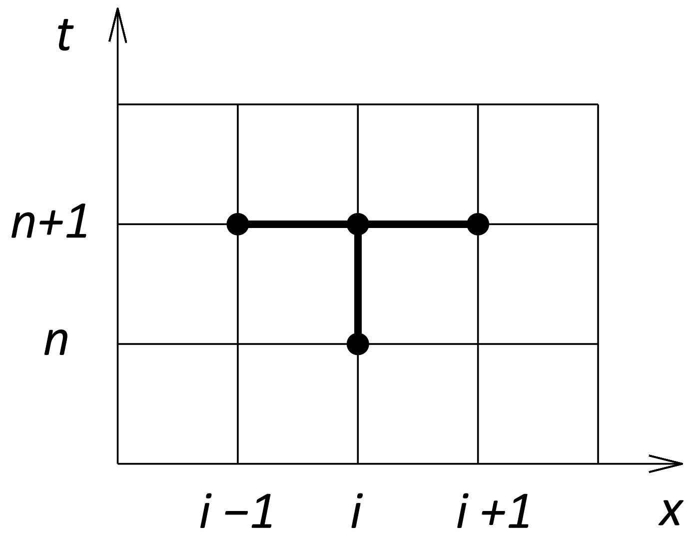
Особенностью подобных схем является преимущественно *условная устойчивость*, то есть наличие ограничения на размер дискретных шагов по времени и пространству.

Для приведённого примера: $\dfrac{\alpha\tau}{h^2} \le \dfrac{1}{2}$

Неявная конечно-разностная схема

Характерной особенностью неявных схем является наличие в разностном уравнении нескольких неизвестных (искомых величин с индексом *n + 1*).

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n}}{\tau}=a\,\frac{u_{i-1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$



Для вычисления значений в узловых точках на *n + 1* временном слое требуется решить СЛАУ.

Как правило, неявные схемы абсолютно устойчивы.

Схема Кранка – Николсон

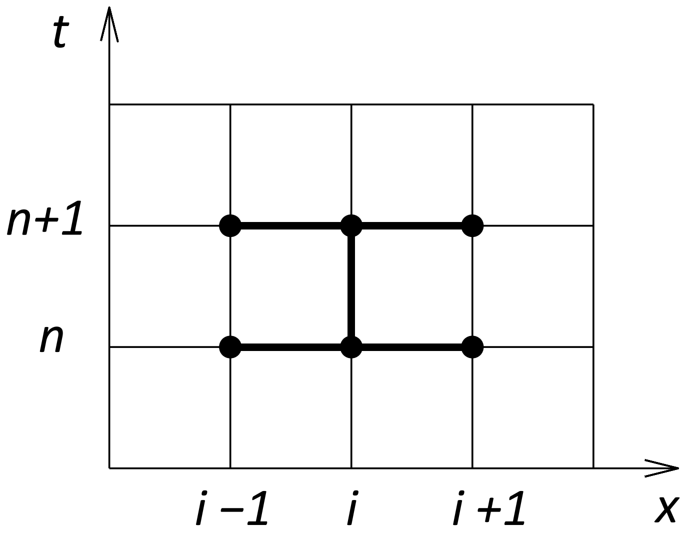
Схема Кранка – Николсон предполагает при записи конечно-разностных соотношений использовать узловые точки сразу с двух временных шагов.

Для уравнения теплопроводности:

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=\frac{a}{2}\,\frac{u_{i-1}^{n+1}+u_{i-1}^{n}-2(u_i^{n+1}+u_i^{n})+u_{i+1}^{n+1}+u_{i+1}^{n}}{h^2}$$

Такой подход приводит к увеличению порядка аппроксимации по времени.

Схемы Кранка – Николсон обычно являются абсолютно устойчивыми.

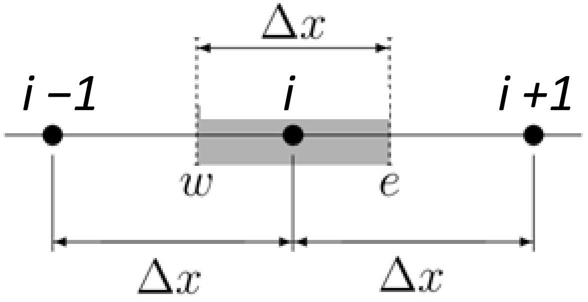


Консервативная схема

Консервативная конечно-разностная схема строится на основе законов сохранения, следствием которых является уравнение в частных производных.

Закон сохранения записывается для некоторого контрольного объёма, окружающего узел сетки, а затем записывается математически с учётом дискретной сетки.

В одномерном случае производим интегрирование уравнения теплопроводности по пространству от *w* до *e* (по отрезку Δx) и по времени от t до $t + \Delta t$, а затем заменяем интегралы их разностными аналогами.



Консервативная схема

Рассмотрим уравнение без источника (*f = 0*). Проинтегрируем уравнение:

$$\int_w^e \left(\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right) dx = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \right) dt$$

Интегрирование левой части даёт $\Delta x (u_i^{n+1} - u_i^n)$

Интегрирование правой части сначала приводит к уравнению

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[k_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - k_w \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] dt$$

При предположении о кусочно-линейном профиле функции на границе контрольного объема правая часть принимает вид

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[k_e \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - k_w \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \right] dt$$

Консервативная схема

Предположим, что

$$\int_{t}^{t+\Delta t} u_i dt = \left(\gamma u_i + (1-\gamma)u_i^0\right)\Delta t,$$

где $\gamma \in [0,1]$ – весовой коэффициент.

С учётом сказанного дискретный аналог для уравнения теплопроводности без источника записывается в виде:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) = \gamma\left[k_e \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} - k_w \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right] + (1-\gamma)\left[k_e \frac{u_{i+1}^{n} - u_i^{n}}{\Delta x} - k_w \frac{u_i^{n} - u_{i-1}^{n}}{\Delta x}\right].$$

Весовой коэффициент определяет уровень явности численной схемы:

при $\gamma = 0$ – полностью явная разностная схема;

при $\gamma = 0.5$ – полуявная схема Кранка – Николсон;

при $\gamma = 1$ – полностью неявная схема.

Консервативная схема

Нелинейные коэффициенты рассчитываются не в узлах сетки, а в так называемых полуцелых точках (*i + 0.5, i - 0.5*).

Расчет нелинейных коэффициентов:

- по значениям функции с предыдущего временного слоя

$$k_e = k\left(\frac{u_{i+1}^{n} + u_{i}^{n}}{2}\right), \quad k_w = k\left(\frac{u_{i}^{n} + u_{i-1}^{n}}{2}\right)$$

- по значениям функции с текущего временного слоя

$$k_e = k\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i}^{n+1}}{2}\right), \quad k_w = k\left(\frac{u_{i}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{2}\right)$$

Порядок выполнения работы

УГАТУ

I Сравнение конечно-разностных схем для линейной задачи

Рассматривается линейный случай уравнения теплопроводности

$$k(u) = k_0 = const, \qquad f(t,x,u) = f(t,x). \tag{5}$$

Задача 1 (2 балла)

1. Методом разделения переменных построить аналитическое решение задачи.
2. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1) – (5) с использованием **явной разностной схемы** на равномерной пространственно-временной сетке.
3. Непосредственными расчетами продемонстрировать условную устойчивость схемы и справедливость условия устойчивости.
4. Исследовать зависимость решения от величины шагов сетки по пространственной и временной переменным посредством сравнения с построенным аналитическим решением. Построить графики зависимости погрешности, оцениваемой в равномерной норме по пространственной переменной, от времени и шагов сетки.

Порядок выполнения работы

УГАТУ

I Сравнение конечно-разностных схем для линейной задачи

Рассматривается линейный случай уравнения теплопроводности

$$k(u) = k_0 = const, \qquad f(t,x,u) = f(t,x). \tag{5}$$

Задача 2 (4 балла)

1. Методом разделения переменных построить аналитическое решение задачи.
2. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1) – (5) по **полностью неявной схеме** и **схеме Кранка – Николсон** на равномерной сетке.
3. Выполнить сравнение точности получаемого решения по двум схемам с использованием точного решения. Построить графики погрешностей как функций координат и времени, а также графики норм погрешностей как функций шагов сетки.
4. Сравнить время решения задач по трем схемам (явной, полностью неявной и Кранка – Николсон), обеспечивающих получение решения с одинаковым уровнем погрешности.

Порядок выполнения работы

II Решение нелинейной задачи с использованием консервативной схемы

Решается нелинейная задача (1) – (4) с дополнительными исходными данными $k(u)$ и $F(u)$, где $f(t,x,u) = F(u)f(t,x)$.

Задача 3 (2 балла)

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ решения задачи (1)-(4) с использованием **консервативной схемы** на равномерной сетке.
2. Убедиться в корректности программы на примере задачи 1.
3. Решить нелинейную задачу, рассчитывая значения коэффициентов теплопроводности в полуцелых точках с предыдущего временного шага.
4. Исследовать зависимость получаемого решения от величины шага сетки по пространственной и временной переменным. Построить графики решений для различных значений шага.

Порядок выполнения работы

УГАТУ

II Решение нелинейной задачи с использованием консервативной схемы

Решается нелинейная задача (1) – (4) с дополнительными исходными данными $k(u)$ *и* $F(u)$, где $f(t,x,u) = F(u)f(t,x)$.

Задача 4 (2 балла)

1. Выполнить модификацию программы из задачи 3 путем организации внутренних итераций на каждом временном шаге для повышения точности вычисления нелинейных слагаемых. Условием остановки итерационного процесса является достижение заданного преподавателем уровня погрешности вычислений нелинейных функций.
2. Выполнить сравнение получаемых решений по исходной и модифицированной программам.
3. Решить задачу 2, рассчитывая значения коэффициентов теплопроводности в полуцелых точках с предыдущего временного шага.
4. Сравнить время работы двух программ для построения решений с одинаковым уровнем погрешности.