

Пусть процесс водонапорного вытеснения происходит при давлениях в пласте выше давления насыщения нефти газом, т.е. в условиях применимости модели "black oil". Уравнения, описывающие фильтрацию двухфазной жидкости в предположении малости капиллярного давления, и незначительности величины гравитационных сил, имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{ox} \frac{\partial P_o}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{oz} \frac{\partial P_o}{\partial z} \right) - N_o &= m S_o B_o^* \frac{\partial P_o}{\partial t} + m \frac{\partial S_o}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{wx} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{wz} \frac{\partial P_w}{\partial z} \right) - N_w &= m S_w B_w^* \frac{\partial P_w}{\partial t} + m \frac{\partial S_w}{\partial t} \end{aligned} \quad (6)$$

где $P_i = p$, $\sigma_i = \frac{K_i}{\mu_i}$, $B_i^* = \beta_i + \beta_c$, $N_i = N_i(x, z, t)$, здесь p - давление в фазах, K_i - проницаемость i -той фазы, μ_i - вязкость i -той фазы, s_i - насыщенность i -той фазы, m - пористость коллектора, β_i^* - коэффициент сжимаемости i -той фазы, β_c^* - упругоемость скелета пласта, $N_i(x, z, t)$ - мощность объемного источника или стока i -ой фазы, i принимает значения o (нефть) и w (вода).

Просуммируем уравнения (6).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\sigma_{ox} + \sigma_{wx}) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\sigma_{oz} + \sigma_{wz}) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} - (N_o + N_w) = m (S_o B_o^* + S_w B_w^*) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (7)$$

Обозначим $N = N_o + N_w$ - мощность объемного источника жидкости в пласте, $(S_o B_o^* + S_w B_w^*) = B^*$. Сгруппируем члены

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sigma_x \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \sigma_z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} - N = m B^* \frac{\partial p}{\partial t} \quad (8)$$

где $\sigma_k = \sigma_{ok} + \sigma_{wk}$, $k = x, z$.

Данное уравнение описывает изменение поля давления в пласте. Совместно с уравнением для водонасыщенности и краевыми условиями данная задача описывает процесс совместного движения фаз в пласте.

Перейдем к безразмерным величинам: $x = L_x x^*$, $z = L_z z^*$, $p = p_0 p^*$, $s = S_w$,

$\sigma = \sigma_0 \sigma^*$, $\sigma_w = \sigma_0 \sigma_w^*$, $Z = Z_0 Z^*$, $t = \frac{L^2}{\chi_0} t^*$, $B^* = \beta_0 \beta^*$, где $\chi_0 = \frac{K_0}{\mu_0 \beta_0}$ - величина

размерности пьезопроводности, $\sigma_0 = \frac{K_0}{\mu_0}$ - величина размерности гидропроводности.

Пусть $L = L_x$. Принимая во внимание выражения для σ_0 и χ_0 , получим уравнения в безразмерном виде:

$$D \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\sigma_x^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\sigma_z^* \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) - \eta N \right\} = \frac{\partial p^*}{\partial t^*} \quad (9)$$

где $D = 1/(mB^*)$, $\Lambda = \frac{L_x^2}{L_z^2} \frac{\sigma_z^0}{\sigma_x^0}$, $\frac{L_x^2}{p_0 \sigma_x^0} = \eta$. Данное уравнение описывает изменение

давления. Для насыщенности (водонасыщенности) уравнение имеет вид:

$$\frac{\beta_0 p_0}{m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\sigma_{wx}^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\sigma_{wz}^* \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) - mB_w^* \frac{\partial p^*}{\partial t^*} - \eta N_w \right\} = \frac{\partial s}{\partial t^*} \quad (10)$$

Для решения системы уравнений воспользуемся методом IMPES. Уравнение для давления решается неявной схемой, для насыщенности - явной.

Проведем дискретизацию уравнения для давления.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\sigma_x^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \{ \sigma_{x,i+1/2,j}^* p_{i+1,j}^{*n+1} - (\sigma_{x,i+1/2,j}^* + \sigma_{x,i-1/2,j}^*) p_{i,j}^{*n+1} + \sigma_{x,i-1/2,j}^* p_{i-1,j}^{*n+1} \} \\ \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\sigma_z^* \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) &= \frac{1}{(\Delta z)^2} \{ \sigma_{z,i,j+1/2}^* p_{i,j+1}^{*n+1} - (\sigma_{z,i,j+1/2}^* + \sigma_{z,i,j-1/2}^*) p_{i,j}^{*n+1} + \sigma_{z,i,j-1/2}^* p_{i,j-1}^{*n+1} \} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} = \frac{1}{\Delta t} (p_{i,j}^{*n+1} - p_{i,j}^{*n})$$

Уравнение для давления примет вид:

$$a_k p_{i-1,j}^{*n+1} + b_k p_{i,j-1}^{*n+1} + c_k p_{i,j}^{*n+1} + d_k p_{i,j+1}^{*n+1} + e_k p_{i+1,j}^{*n+1} = h_k \quad (12)$$

где k - номер уравнения в системе линейных уравнений и

$$\begin{aligned} a &= \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \sigma_{x,i-1/2,j}^*, \quad b = \Lambda \frac{D\Delta t}{(\Delta z)^2} \sigma_{z,i,j-1/2}^*, \quad d = \Lambda \frac{D\Delta t}{(\Delta z)^2} \sigma_{z,i,j+1/2}^*, \quad e = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} \sigma_{x,i+1/2,j}^*, \\ c &= \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sigma_{x,i+1/2,j}^* + \sigma_{x,i-1/2,j}^*) + \frac{D\Delta t}{(\Delta z)^2} \Lambda (\sigma_{z,i,j+1/2}^* + \sigma_{z,i,j-1/2}^*) + 1, \quad h = \eta N_{i,j}^n D\Delta t - p_{i,j}^{*n} \end{aligned}$$

Краевые условия для давления имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1(z,t)p + \beta_1(z,t) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=a} &= f_a(z,t) \text{ для нижней границы по } x \\ \alpha_2(z,t)p + \beta_2(z,t) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=b} &= f_b(z,t) \text{ для верхней границы по } x \\ \alpha_3(x,t)p + \beta_3(x,t) \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=c} &= f_c(x,t) \text{ для нижней границы по } z \\ \alpha_4(x,t)p + \beta_4(x,t) \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=d} &= f_d(x,t) \text{ для верхней границы по } z \end{aligned}$$

где коэффициенты α_i , β_i - некоторые постоянные, определяемые условиями задачи.

Начальное условие имеет вид $p|_{t=0} = p(x, z)$.

Сеточный вид краевых условий.

$$\begin{aligned}\alpha_{1j}p_{1,j} + \beta_{1j}(p_{2,j} - p_{1,j})/\Delta x &= f_{aj} \\ \alpha_{2j}p_{N,j} + \beta_{2j}(p_{N,j} - p_{N-1,j})/\Delta x &= f_{bj} \\ \alpha_{3i}p_{i,1} + \beta_{3i}(p_{i,2} - p_{i,1})/\Delta z &= f_{ci} \\ \alpha_{4i}p_{i,M} + \beta_{4i}(p_{i,M} - p_{i,M-1})/\Delta z &= f_{di}\end{aligned}$$

Для сетки $N \times M$ краевые условия запишем в виде:

Для $i=1$

$$c_k p_{1,j} + e_k p_{2,j} = h_k, \text{ где } c_k = \alpha_{1j} - \beta_{1j}/\Delta x, \quad e_k = \beta_{1j}/\Delta x, \quad h = f_{aj},$$

для $i=N$

$$a_k p_{N-1,j} + c_k p_{N,j} = h_k, \text{ где } c_k = \alpha_{2j} + \beta_{2j}/\Delta x, \quad a_k = -\beta_{2j}/\Delta x, \quad h = f_{bj},$$

для $j=1$

$$c_k p_{i,1} + d_k p_{i,2} = h_k, \text{ где } c_k = \alpha_{3i} - \beta_{3i}/\Delta z, \quad d_k = \beta_{3i}/\Delta z, \quad h = f_{ci},$$

для $j=M$

$$b_k p_{i,M-1} + c_k p_{i,M} = h_k, \text{ где } c_k = \alpha_{4i} + \beta_{4i}/\Delta z, \quad b_k = \beta_{4i}/\Delta z, \quad h = f_{di}$$

Таким образом, матрица системы $k=M \cdot N$ уравнений состоит из k^2 элементов, большая часть которых равна 0.

Решение системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей проводилось итерационным методом Зейделя.

Для решения уравнения, определяющего водонасыщенность, воспользуемся явной схемой. Обозначим левую часть уравнения, которая содержит известные значения полей давления и насыщенности, как:

$$\Omega = \frac{\beta_0 p_0}{m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\sigma_{wx}^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\sigma_{wz}^* \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) - m B_w^* s \frac{\partial p^*}{\partial t^*} - \eta N_w \right\} \quad (13)$$

Уравнение примет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t^*} = \Omega \quad (14)$$

Дискретизируем уравнение и преобразуем

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n + \Omega_{i,j}^n \Delta t \quad (15)$$

где

$$\Omega_{i,j}^{n1} = \frac{\beta_0 p_0}{m} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} \{ \sigma_{w,x,i+1/2,j}^* p_{i+1,j}^{*n+1} - (\sigma_{w,x,i+1/2,j}^* + \sigma_{w,x,i-1/2,j}^*) p_{i,j}^{*n+1} + \sigma_{w,x,i-1/2,j}^* p_{i-1,j}^{*n+1} \} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\Delta z)^2} \Lambda \{ \sigma_{w,z,i,j+1/2}^* p_{i,j+1}^{*n+1} - (\sigma_{w,z,i,j+1/2}^* + \sigma_{w,z,i,j-1/2}^*) p_{i,j}^{*n+1} + \sigma_{w,z,i,j-1/2}^* p_{i,j-1}^{*n+1} \} - \eta N_{w,i,j}^n - \right. \\ \left. - m B_{w,i,j}^* \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} \right\}$$

Начальные условия -

$$s(x,z,t=0) = S_0(x,z)$$

Таким образом, по известным распределениям полей давления и насыщенности на первом временном слое определяется сначала поле давления на следующем временном слое (по неявной схеме), а затем рассчитывается поле насыщенности (по явной схеме). Рассмотренные выше уравнения дополняются следующими условиями.

Насыщенности пластовых флюидов связаны друг с другом соотношением:

$$\sum_{i=1}^n S_i = 1, \text{ где } n - \text{число фаз.}$$

Относительные фазовые проницаемости имеют вид:

$$k_w^* = (s - c_w)(1 - a(1 - s)) \\ k_o^* = (1 - s - c_o)(1 - bs)$$

где s - водонасыщенность.

Зависимости ОФП для $c_w = 0.1$, $c_o = 0.3$, $a = 1$, $b = 1$ приведены на рисунке 9. В данном случае, c_w , c_o – указывают на предельные значения насыщенностей воды и нефти, при которых движение соответствующих фаз прекращается. Необходимо отметить, что зависимости ОФП подбираются при адаптации модели к условиям реальных залежей.

Предположим, что движение пластовых флюидов поддерживается созданием постоянного перепада давления на входе и выходе из пласта, а кровля и подошва пласта являются непроницаемыми. На вход в пласт подается вода.

Приведем основные абсолютные и относительные параметры модели. Предполагается, что длина пласта $L_x = 100$ м, толщина $L_z = 10$ м, а его абсолютная проницаемость - $K_0 = 1$ мкм². Соотношение продольной (вдоль x) и поперечной (вдоль z) проницаемостей $K_x/K_z = 10$. Соотношение вязкостей нефти и воды $\mu_o / \mu_w = 4.16$. Значения упругоэластичности воды, нефти, скелета породы соответственно равны $\beta_w = 3.7 \cdot 10^{-10}$ Па, $\beta_o = 7.4 \cdot 10^{-9}$ Па, $\beta_c = 4.5 \cdot 10^{-10}$ Па. Пористость – 0.24 д.ед. Начальное пластовое давление $p_0 = 1.78 \cdot 10^7$ Па, давление на входе в пласт (контур ВНК) – p_0 , на выходе из пласта (забой добывающей скважины) - $0.5p_0$. Масштаб времени: 1 отн. ед. соответствует 20.6 ч. Процесс моделирования вытеснения нефти водой продолжался

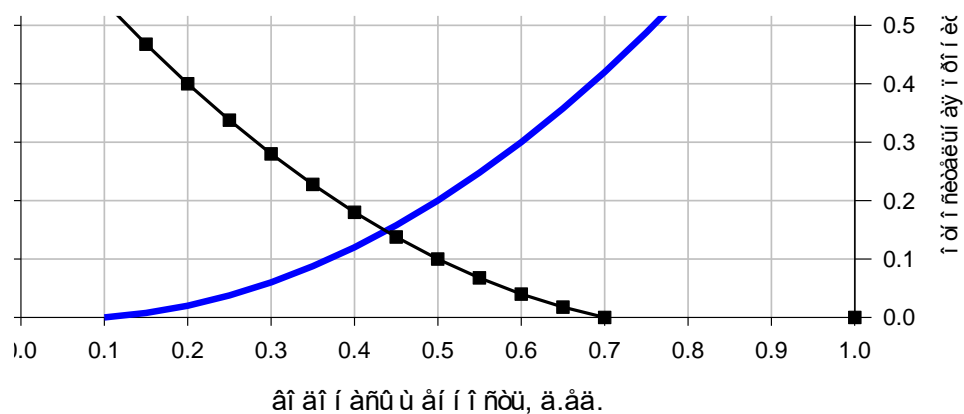


Рисунок 9. Модельные кривые относительной фазовой проницаемости

до достижения предельной обводненности жидкости на выходе из пласта (0.95 д. ед.). Необходимо отметить, что приведенные выше параметры коллектора и пластовых флюидов соответствуют реальным залежам девонских отложений Ромашкинского месторождения.