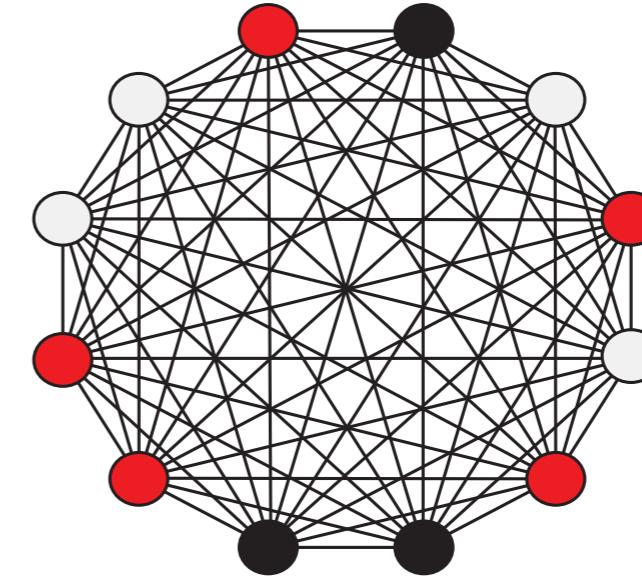


# *Sur un modèle de type proie-prédateur*



Igor Kortchemski  
DMA – École Normale Supérieure

Journées MAS – Toulouse – Août 2014

# *De quoi s'agit-il ?*

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se progage vers un sommet **vacant** voisin,

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se progage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

- 👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

- 👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition
- 👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$
<b>proie</b>	$\iff$
<b>prédateur</b>	$\iff$

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$	sommet vacant
<b>proie</b>	$\iff$	cellule saine
<b>prédateur</b>	$\iff$	cellule infectée par un virus

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$	individu normal
<b>proie</b>	$\iff$	individu propageant une rumeur
<b>prédateur</b>	$\iff$	individu tentant de faire taire cette rumeur

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$	individu normal
<b>proie</b>	$\iff$	individu propageant une rumeur
<b>prédateur</b>	$\iff$	individu tentant de faire taire cette rumeur

Ce modèle a récemment été utilisé par Cannarella & Spechler pour essayer de prédire l'activité de Facebook.

## [Facebook To Lose 80% Of Users By 2017](#)

InformationWeek - 23 janv. 2014

Online social networks spread like disease epidemics, and Facebook will lose 80% of its victims – I mean, users – by 2017, according to a study from Princeton University researchers. The study, "Epidemiological modeling of online social network dynamics" ...

## [Facebook could lose 80 percent of users by 2017, report claims](#)

Fox News - 23 janv. 2014

"Facebook has already reached the peak of its popularity and has entered a decline phase," they concluded. "The future suggests that Facebook will undergo a rapid decline in the coming years, losing 80 percent of its peak user base between 2015 and 2017" ...

## [Facebook will lose 80 percent of its users in next 4 years, Princeton study says](#)

The Star-Ledger - NJ.com - 23 janv. 2014

Most of the 874 million people across the world who sign on to Facebook will stop doing so in the next four years, according to a Princeton University study. The study predicts the social media site will lose 80 percent of the users it had at its 2010 peak ...

## [Facebook Losing Users; 30 Years of Mac Ads; Snapchat 'Ghost' Verification](#)

PC Magazine - 23 janv. 2014

Topping tech headlines Wednesday, a new study predicts a rapid decline for Facebook, which researchers said will lose 80 percent of its peak user base between 2015 and 2017. Using epidemiological models to track the spread of infectious diseases and ...



## [Facebook Might Lose 80% of Users and be the Next 'MySpace,' Study Says](#)

Morning Ledger - 23 janv. 2014

**Facebook Might Lose** 80 percent and be the Next MySpace A new study conducted and released by Princeton University has described social networks as similar to infectious diseases. It pointed out that such sites gain millions of users within just a short span ...



## [Facebook Will Lose 80 Percent of Users by 2017](#)

Guardian Liberty Voice - 23 janv. 2014

**Facebook** According to researchers at Princeton University, Facebook will lose 80 percent of its users by 2017. The researchers have also stated that that decline is already happening now and could reach the total any time within 2015 and the 2017 deadline.



## [Facebook to 'lose 80% of users by 2017'](#)

Irish Times - 23 janv. 2014

**Facebook** has spread like an infectious disease but we are slowly becoming immune to its attractions, and the platform will be largely abandoned by 2017, say researchers at Princeton University. The forecast of Facebook's impending doom was made by ...

## [Facebook will LOSE 80% of its users by 2017 – epidemiological study](#)

Register - 23 janv. 2014

According to the students' paper, Facebook is "just beginning to show the onset of an abandonment phase", after reaching its popularity peak in 2012, which will lead to it losing 80 per cent of its peak user base between 2015 and 2017. The paper, which has ...

## [Facebook Predicts Princeton Won't Exist In 2021](#)

InformationWeek - 24 janv. 2014

Princeton's report, from the university's Department of Mechanical and Aerospace Engineering, used Google search data to predict engagement trends, ultimately concluding that Facebook was set to lose a whopping 80% of users by 2017. Such a ...

## [Could Facebook Really Lose 80% of its Users?](#)

DailyFinance - 23 janv. 2014

**Facebook** has so far been the only super-hot social media network to escape the fate of former top sites like MySpace, Friendster, or even GeoCities/Tripod back in the day. And with its now-successful stock offering and seeming ubiquity among nearly every ...



## [Facebook Will Lose 80 Percent Of Users In Next Three Years, Researchers Say](#)

Opposing Views - 23 janv. 2014

People are slowly building up an immunity to Facebook and researchers predict it will lose 80 percent of its peak user base by 2017. Researchers at Princeton University compared the growth of the social media site to the spread of disease. They believe ...

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$	individu <b>sain</b> (S)
<b>proie</b>	$\iff$	individu <b>infecté</b> (I)
<b>prédateur</b>	$\iff$	individu <b>guéri ou retiré</b> (R)

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$	individu <b>sain</b> (S)
<b>proie</b>	$\iff$	individu <b>infecté</b> (I)
<b>prédateur</b>	$\iff$	individu <b>guéri ou retiré</b> (R)

Ainsi,  $\{I, S\} \xrightarrow{\lambda} \{I, I\}$ ,     $\{R, I\} \xrightarrow{1} \{R, R\}$ .

# De quoi s'agit-il ?

Sur un graphe, on s'intéresse au modèle **proie-prédateur** suivant (Kordzakhia '05, Bordenave & Ganesan '12) :

- chaque sommet est soit occupé par une **proie**, soit par un **prédateur**, soit est **vacant**,
- à taux fixe  $\lambda > 0$ , chaque **proie** se propage vers un sommet **vacant** voisin,
- à taux fixe 1, chaque **prédateur** se propage vers un sommet voisin occupé par une **proie**.

## Motivations :

👉 Modèle de deux/trois espèces en compétition

👉 On peut aussi faire l'analogie :

sommet <b>vacant</b>	$\iff$	individu <b>sain</b> (S)
<b>proie</b>	$\iff$	individu <b>infecté</b> (I)
<b>prédateur</b>	$\iff$	individu <b>guéri ou retiré</b> (R)

Ainsi,  $\{I, S\} \xrightarrow{\lambda} \{I, I\}$ ,  $\{R, I\} \xrightarrow{1} \{R, R\}$ . Il s'agit d'une modification du modèle de Daley–Kendall où on n'autorise pas  $\{I, I\} \rightarrow \{I, R\}$ .

# Plan

## I. TESTEZ VOTRE INTUITION !

# Plan

**I. TESTEZ VOTRE INTUITION !**

**II. PROIES-PRÉDATEURS SUR UN GRAPHE COMPLET**

**I. TESTEZ VOTRE INTUITION !****II. PROIES-PRÉDATEURS SUR UN GRAPHE COMPLET**

# *Vu sur le blog de Gil Kalai*

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls.

# *Vu sur le blog de Gil Kalai*

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random.

# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball.

# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball. If the ball was blue, you put it back in the box and take out a red ball.

# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball. If the ball was blue, you put it back in the box and take out a red ball.

You keep doing it until left only with balls of the same color. How many balls will be left (as a function of  $n$ ) ?

# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball. If the ball was blue, you put it back in the box and take out a red ball.

You keep doing it until left only with balls of the same color. How many balls will be left (as a function of  $n$ )?

- 1) Roughly  $\epsilon n$  for some  $\epsilon > 0$ .
- 2) Roughly  $\sqrt{n}$ .
- 3) Roughly  $\log n$ .
- 4) Roughly a constant.
- 5) Some other behavior.

# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball. If the ball was blue, you put it back in the box and take out a red ball.

You keep doing it until left only with balls of the same color. How many balls will be left (as a function of  $n$ ) ?

- 1) Roughly  $\epsilon n$  for some  $\epsilon > 0$ .
- 2) Roughly  $\sqrt{n}$ .
- 3) Roughly  $\log n$ .
- 4) Roughly a constant.
- 5) Some other behavior.

*Autre formulation (Problème O.K. Corral, Williams & McIlroy, 1998)* . Deux groupes de  $n$  personnes se tirent dessus. À chaque étape, on choisit une personne au hasard, qui tue une personne de l'autre groupe. Combien de personnes reste-il quand il n'y a plus qu'un seul groupe ?



Figure: Extrait du film “Gunfight at the O.K. Corral” (1957)

# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball. If the ball was blue, you put it back in the box and take out a red ball.

You keep as before until left only with balls of the same color. How many balls will be left (as a function of  $n$ ) ?

- 1) Roughly  $\epsilon n$  for some  $\epsilon > 0$ .
- 2) Roughly  $\sqrt{n}$ .
- 3) Roughly  $\log n$ .
- 4) Roughly a constant.
- 5) Some other behavior.

Autre formulation (Problème O.K. Corral, Williams & McIlroy, 1998). Deux groupes de  $n$  personnes se tirent dessus. À chaque étape, on choisit une personne au hasard, qui tue une personne de l'autre groupe. Combien de personnes reste-il quand il n'y a plus qu'un seul groupe ?

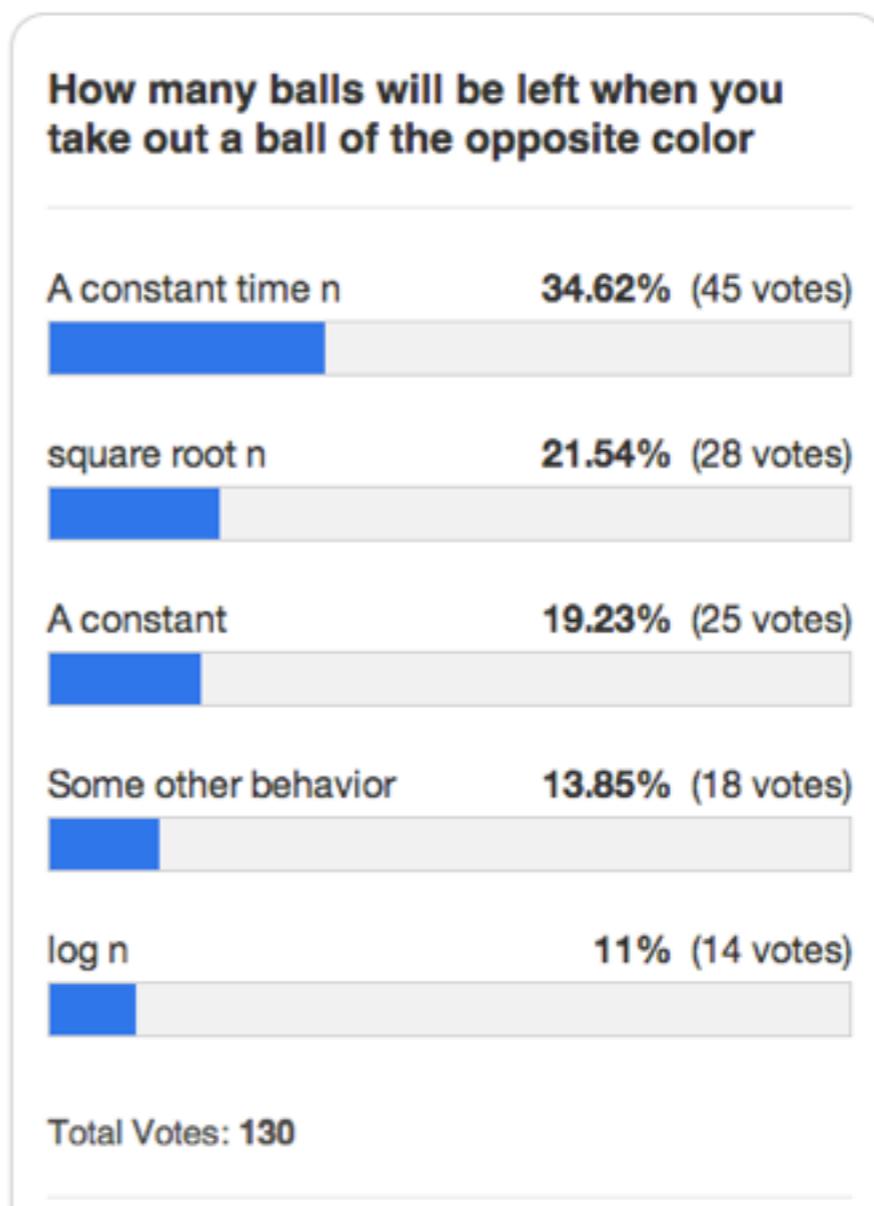
# Vu sur le blog de Gil Kalai

You have a box with  $n$  red balls and  $n$  blue balls. You take out each time a ball at random. If the ball was red, you put it back in the box and take out a blue ball. If the ball was blue, you put it back in the box and take out a red ball.

You keep as before until left only with balls of the same color. How many balls will be left (as a function of  $n$ )?

- 1) Roughly  $\epsilon n$  for some  $\epsilon > 0$ .
- 2) Roughly  $\sqrt{n}$ .
- 3) Roughly  $\log n$ .
- 4) Roughly a constant.
- 5) Some other behavior.

Autre formulation (Problème O.K. Corral). Deux groupes de  $n$  personnes se tirent dessus. Une personne au hasard, qui tue une personne, reste-t-il quand il n'y a plus qu'



. Deux  
une  
i de

# *Solution de Kingman & Volkov (1/3)*

Si l'urne A contient  $m$  boules et l'urne B contient  $n$  boules, la probabilité qu'on tire une boule de l'urne A vaut  $\frac{m}{m+n}$ . Or

$$\frac{m}{m+n} = \mathbb{P}(\text{Exp}(m) < \text{Exp}(n)).$$

# *Solution de Kingman & Volkov (2/3)*

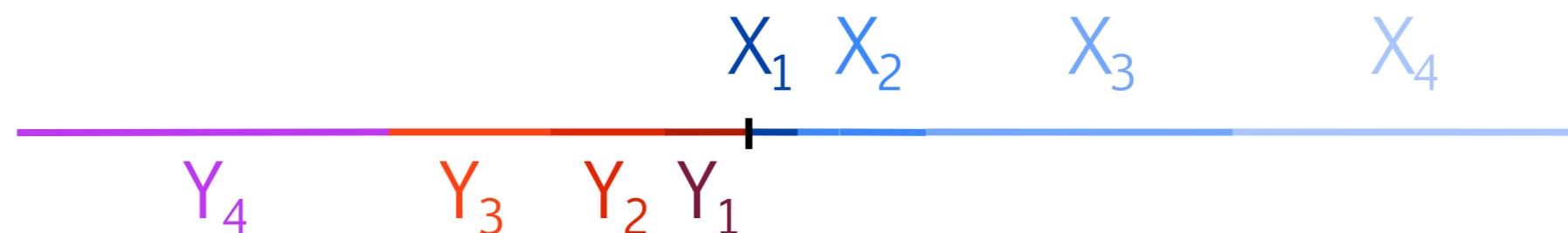
Soient  $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$  des v.a. indépendantes telles que  $X_i$  et  $Y_i$  sont des variables aléatoires exponentielles de **moyenne**  $i$ .

# Solution de Kingman & Volkov (2/3)

Soient  $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$  des v.a. indépendantes telles que  $X_i$  et  $Y_i$  sont des variables aléatoires exponentielles de **moyenne**  $i$ .

On considère un morceau de bois symbolisé par l'intervalle  $[-n, n]$  et constitué de  $2n$  bouts tels que

$$\text{longueur}([i-1, i]) = X_i, \quad \text{longueur}([-i, -i+1]) = Y_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

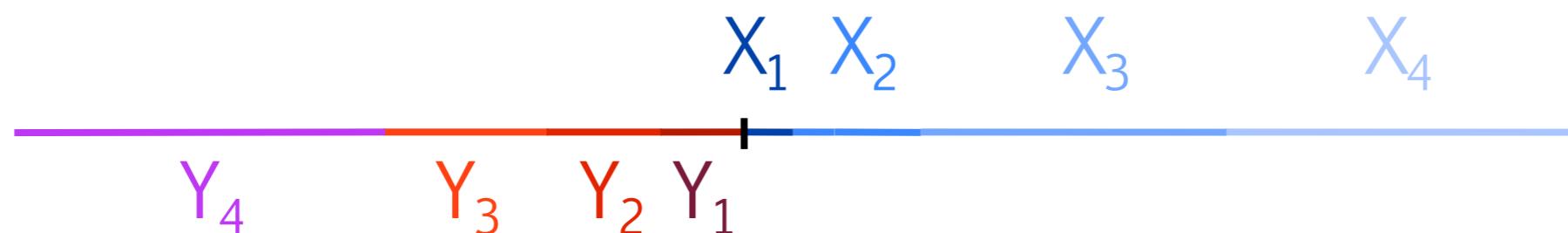


# *Solution de Kingman & Volkov (2/3)*

Soient  $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$  des v.a. indépendantes telles que  $X_i$  et  $Y_i$  sont des variables aléatoires exponentielles de **moyenne**  $i$ .

On considère un morceau de bois symbolisé par l'intervalle  $[-n, n]$  et constitué de  $2n$  bouts tels que

$$\text{longueur}([i-1, i]) = X_i, \quad \text{longueur}([-i, -i+1]) = Y_i \quad (1 \leq i \leq n).$$



On allume les deux extrémités et on arrête le feu quand il atteint l'origine.

# Solution de Kingman & Volkov (2/3)

Soient  $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$  des v.a. indépendantes telles que  $X_i$  et  $Y_i$  sont des variables aléatoires exponentielles de **moyenne**  $i$ .

On considère un morceau de bois symbolisé par l'intervalle  $[-n, n]$  et constitué de  $2n$  bouts tels que

$$\text{longueur}([i-1, i]) = X_i, \quad \text{longueur}([-i, -i+1]) = Y_i \quad (1 \leq i \leq n).$$



On allume les deux extrémités et on arrête le feu quand il atteint l'origine. On note  $R(n)$  le nombre de bouts qui reste.

# Solution de Kingman & Volkov (2/3)

Soient  $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$  des v.a. indépendantes telles que  $X_i$  et  $Y_i$  sont des variables aléatoires exponentielles de **moyenne**  $i$ .

On considère un morceau de bois symbolisé par l'intervalle  $[-n, n]$  et constitué de  $2n$  bouts tels que

$$\text{longueur}([i-1, i]) = X_i, \quad \text{longueur}([-i, -i+1]) = Y_i \quad (1 \leq i \leq n).$$



On allume les deux extrémités et on arrête le feu quand il atteint l'origine. On note  $R(n)$  le nombre de bouts qui reste. Alors  $R(n)$  a la loi du nombre de boules restantes dans le problème d'urne.

# *Solution de Kingman & Volkov (3/3)*

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

# Solution de Kingman & Volkov (3/3)

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

# Solution de Kingman & Volkov (3/3)

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

# *Solution de Kingman & Volkov (3/3)*

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

Soit  $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ .

# Solution de Kingman & Volkov (3/3)

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

Soit  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ . On a  $\mathbb{E}[S_k] \simeq k^2$

# *Solution de Kingman & Volkov (3/3)*

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

Soit  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ . On a  $\mathbb{E}[S_k] \simeq k^2$ , donc  $S_k \simeq k^2$ .

# Solution de Kingman & Volkov (3/3)

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

Soit  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ . On a  $\mathbb{E}[S_k] \simeq k^2$ , donc  $S_k \simeq k^2$ . Or, si le bout de gauche brûle en premier,  $S_{R(n)} \simeq L(n)$ .

# Solution de Kingman & Volkov (3/3)

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

Soit  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ . On a  $\mathbb{E}[S_k] \simeq k^2$ , donc  $S_k \simeq k^2$ . Or, si le bout de gauche brûle en premier,  $S_{R(n)} \simeq L(n)$ . Donc

$$R(n)^2 \simeq n^{3/2}$$

# Solution de Kingman & Volkov (3/3)

Pour estimer le nombre  $R(n)$  de bouts restants, on estime d'abord la longueur  $L(n)$  du bois qu'il reste à la fin :

$$L(n) = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right|.$$

Alors

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \sum_{j=1}^n 2j^2 \simeq n^3.$$

Donc

$$L(n) \simeq n^{3/2}.$$

Soit  $S_k = X_1 + \dots + X_k$ . On a  $\mathbb{E}[S_k] \simeq k^2$ , donc  $S_k \simeq k^2$ . Or, si le bout de gauche brûle en premier,  $S_{R(n)} \simeq L(n)$ . Donc

$$R(n)^2 \simeq n^{3/2}$$

et donc  $R(n) \simeq n^{3/4}$ .

Cette idée de découplage porte le nom de plongement d'Athreya–Karlin, qui s'applique plus généralement à des systèmes d'urnes de Pólya.

**I. TESTEZ VOTRE INTUITION !****II. PROIES-PRÉDATEURS SUR UN GRAPHE COMPLET**

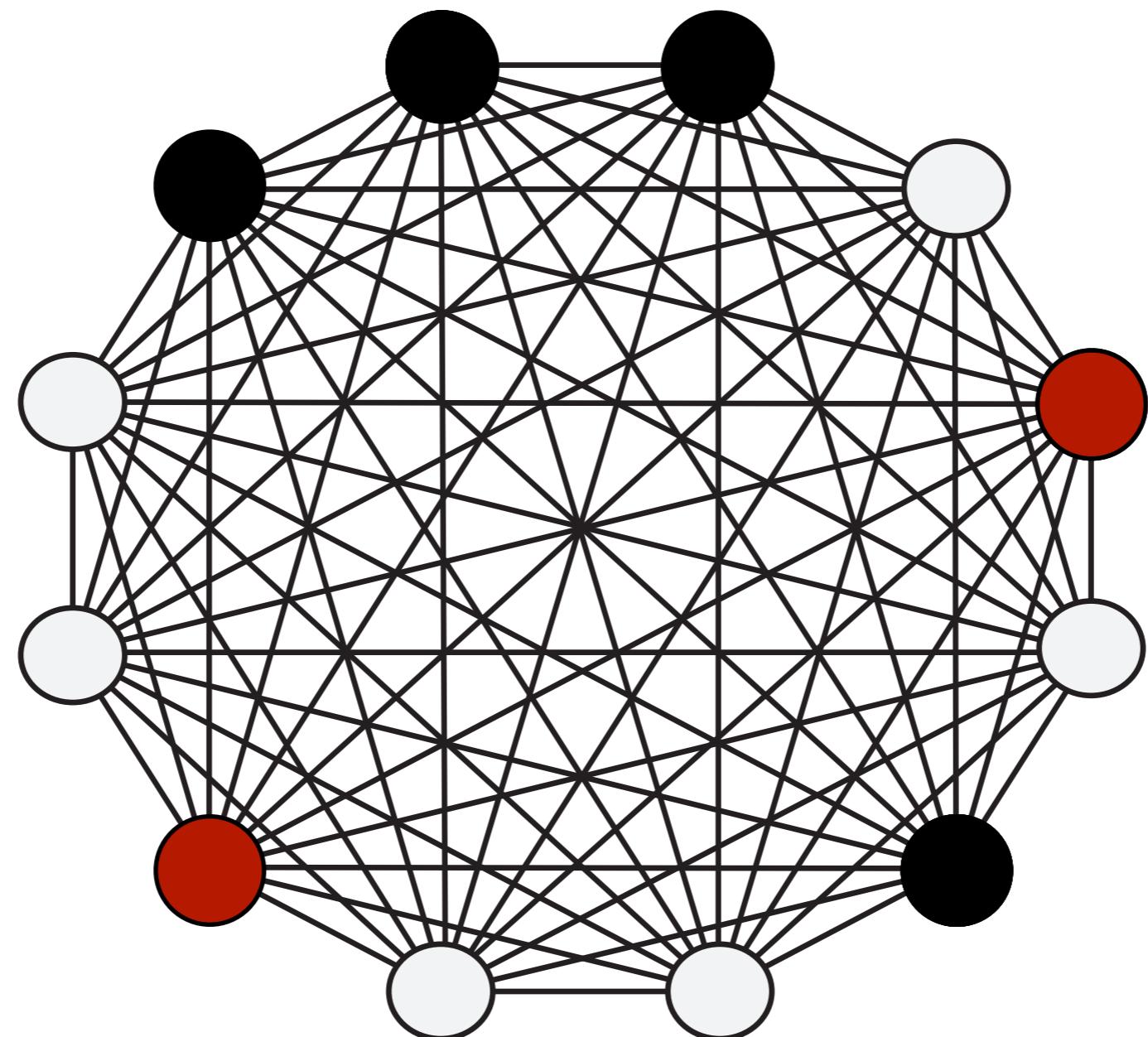
On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On rappelle les transitions

$$\{I, S\} \xrightarrow{\lambda} \{I, I\}, \quad \{R, I\} \xrightarrow{1} \{R, R\}.$$

On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet **I**, un sommet **R** et  $N$  sommets **S**.



On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On note

$$E_{ext}^N = \{\text{à un moment, il n'y a plus de sommets } S\}.$$

On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On note

$$E_{ext}^N = \{\text{à un moment, il n'y a plus de sommets } S\}.$$

**Question.** Que dire de  $\mathbb{P}(E_{ext}^N)$  quand  $N \rightarrow \infty$  ?

On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On note

$$E_{ext}^N = \{\text{à un moment, il n'y a plus de sommets } S\}.$$

**Question.** Que dire de  $\mathbb{P}(E_{ext}^N)$  quand  $N \rightarrow \infty$  ?

### Théorème.

On a

$$\mathbb{P}(E_{ext}^N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in \\ & \text{si } \lambda = \\ 1 & \text{si } \lambda > . \end{cases}$$

On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On note

$$E_{ext}^N = \{\text{à un moment, il n'y a plus de sommets } S\}.$$

**Question.** Que dire de  $\mathbb{P}(E_{ext}^N)$  quand  $N \rightarrow \infty$  ?

### Théorème.

On a

$$\mathbb{P}(E_{ext}^N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in (0, 1) \\ & \text{si } \lambda = 1 \\ 1 & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$$

On travaille sur  $K_{N+2}$ , graphe complet à  $N + 2$  sommets, commençant avec un sommet  $I$ , un sommet  $R$  et  $N$  sommets  $S$ .

On note

$$E_{ext}^N = \{\text{à un moment, il n'y a plus de sommets } S\}.$$

**Question.** Que dire de  $\mathbb{P}(E_{ext}^N)$  quand  $N \rightarrow \infty$  ?

### Théorème.

On a

$$\mathbb{P}(E_{ext}^N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } \lambda = 1 \\ 1 & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$$

## DÉCOUPLAGE EN UTILISANT LES PROCESSUS DE YULE



# Calcul des taux de transition

On note  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $R_t$  les tailles des populations à l'instant  $t$ .

Taux total d'infection  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  :

# Calcul des taux de transition

On note  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $R_t$  les tailles des populations à l'instant  $t$ .

Taux total d'infection  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  :  $\lambda \cdot S_t \cdot I_t$ .

# Calcul des taux de transition

On note  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $R_t$  les tailles des populations à l'instant  $t$ .

Taux total d'infection  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  :  $\lambda \cdot S_t \cdot I_t$ .

Taux d'infection  $\{R, I\} \rightarrow \{R, R\}$  :

# Calcul des taux de transition

On note  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $R_t$  les tailles des populations à l'instant  $t$ .

Taux total d'infection  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  :  $\lambda \cdot S_t \cdot I_t$ .

Taux d'infection  $\{R, I\} \rightarrow \{R, R\}$  :  $I_t \cdot R_t$ .

# Calcul des taux de transition

On note  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $R_t$  les tailles des populations à l'instant  $t$ .

Taux total d'infection  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  :  $\lambda \cdot S_t \cdot I_t$ .

Taux d'infection  $\{R, I\} \rightarrow \{R, R\}$  :  $I_t \cdot R_t$ .

Ainsi, à un instant  $t$ , la probabilité qu'une transition  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  ait lieu avant une transition  $\{R, I\} \rightarrow \{R, R\}$  est

$$\frac{\lambda S_t I_t}{\lambda S_t I_t + I_t R_t} = \frac{\lambda S_t}{\lambda S_t + R_t}.$$

# Calcul des taux de transition

On note  $S_t$ ,  $I_t$ ,  $R_t$  les tailles des populations à l'instant  $t$ .

Taux total d'infection  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  :  $\lambda \cdot S_t \cdot I_t$ .

Taux d'infection  $\{R, I\} \rightarrow \{R, R\}$  :  $I_t \cdot R_t$ .

Ainsi, à un instant  $t$ , la probabilité qu'une transition  $\{S, I\} \rightarrow \{I, I\}$  ait lieu avant une transition  $\{R, I\} \rightarrow \{R, R\}$  est

$$\frac{\lambda S_t I_t}{\lambda S_t I_t + I_t R_t} = \frac{\lambda S_t}{\lambda S_t + R_t}.$$

On va donc pouvoir découpler les évolutions de  $S$  et  $R$ .

# *Processus de Yule*

## Définition (Processus de Yule)

Dans un processus de Yule ( $Y(t); t \geq 0$ ) de paramètre  $\lambda$ , commençant avec un individu, chaque individu vit un temps aléatoire indépendant distribué suivant une variable exponentielle de paramètre  $\lambda$ , et à sa mort donne naissance à deux individus

# *Processus de Yule*

## Définition (Processus de Yule)

Dans un processus de Yule ( $Y(t); t \geq 0$ ) de paramètre  $\lambda$ , commençant avec un individu, chaque individu vit un temps aléatoire indépendant distribué suivant une variable exponentielle de paramètre  $\lambda$ , et à sa mort donne naissance à deux individus, et  $Y(t)$  désigne le nombre d'individus à l'instant  $t$ .

# Processus de Yule

## Définition (Processus de Yule)

Dans un processus de Yule ( $Y(t); t \geq 0$ ) de paramètre  $\lambda$ , commençant avec un individu, chaque individu vit un temps aléatoire indépendant distribué suivant une variable exponentielle de paramètre  $\lambda$ , et à sa mort donne naissance à deux individus, et  $Y(t)$  désigne le nombre d'individus à l'instant  $t$ .



En particulier, les intervalles de temps entre chaque discontinuité sont distribués suivant  $\text{Exp}(1), \text{Exp}(2), \text{Exp}(3), \dots$

# Couplage avec deux processus de Yule

On note  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  un processus de Yule de paramètre 1, et  $\mathcal{S}_N(t)$  un processus de Yule de paramètre  $\lambda$ , retourné son  $N + 1$ -ième saut.

# Couplage avec deux processus de Yule

On note  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  un processus de Yule de paramètre 1, et  $\mathcal{S}_N(t)$  un processus de Yule de paramètre  $\lambda$ , retourné son  $N + 1$ -ième saut.

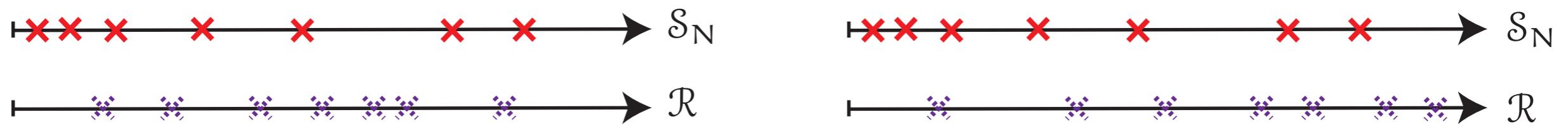


Figure: Exemple pour  $N = 7$ .

# Couplage avec deux processus de Yule

On note  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  un processus de Yule de paramètre 1, et  $\mathcal{S}_N(t)$  un processus de Yule de paramètre  $\lambda$ , retourné son  $N + 1$ -ième saut.

On peut alors décrire la dynamique proie-prédateur grâce à  $\mathcal{R}(t)$  et  $\mathcal{S}_N$ , qui indiquent dans quel ordre les discontinuités se produisent !



Figure: Exemple pour  $N = 7$ .

# Couplage avec deux processus de Yule

On note  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  un processus de Yule de paramètre 1, et  $\mathcal{S}_N(t)$  un processus de Yule de paramètre  $\lambda$ , retourné son  $N + 1$ -ième saut.

On peut alors décrire la dynamique proie-prédateur grâce à  $\mathcal{R}(t)$  et  $\mathcal{S}_N$ , qui indiquent dans quel ordre les discontinuités se produisent !



Figure: Exemple pour  $N = 7$ . Les croix rouges correspondent aux infections de  $S$  par  $I$ , et les croix violettes aux infections de  $I$  par  $R$ .

$\mathcal{T}$  est l'instant où un type ( $S$  ou  $I$ ) disparaît.

# Couplage avec deux processus de Yule

On note  $(\mathcal{R}(t))_{t \geq 0}$  un processus de Yule de paramètre 1, et  $\mathcal{S}_N(t)$  un processus de Yule de paramètre  $\lambda$ , retourné son  $N + 1$ -ième saut.

On peut alors décrire la dynamique proie-prédateur grâce à  $\mathcal{R}(t)$  et  $\mathcal{S}_N$ , qui indiquent dans quel ordre les discontinuités se produisent !

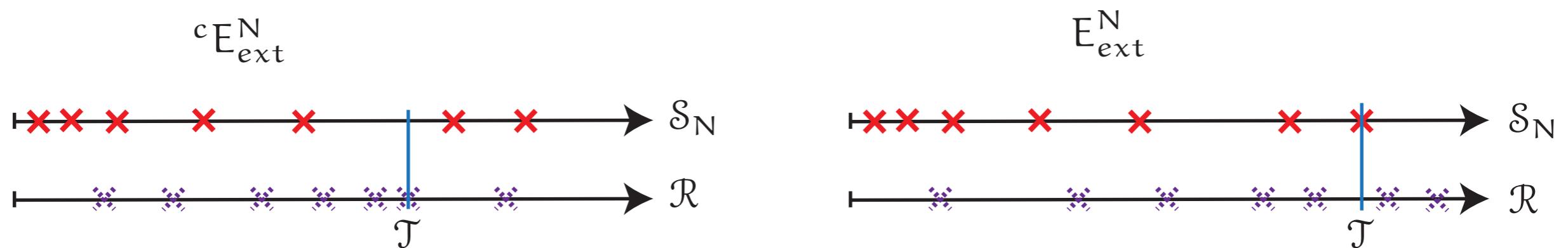


Figure: Exemple pour  $N = 7$ . Les croix rouges correspondent aux infections de  $S$  par  $I$ , et les croix violettes aux infections de  $I$  par  $R$ .

$T$  est l'instant où un type ( $S$  ou  $I$ ) disparaît.

$T$  est le plus petit entre :

- 👉 le premier moment où il y a plus de discontinuités de  $\mathcal{R}$  que de  $\mathcal{S}_N$  ( $I$  disparaît en premier,  ${}^c E_{ext}^N$ )
- 👉 la  $N$ -ième discontinuité de  $\mathcal{S}_N$  ( $S$  disparaît en premier,  $E_{ext}^N$ )

## IDENTIFICATION DU PARAMÈTRE CRITIQUE $\lambda = 1$



## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

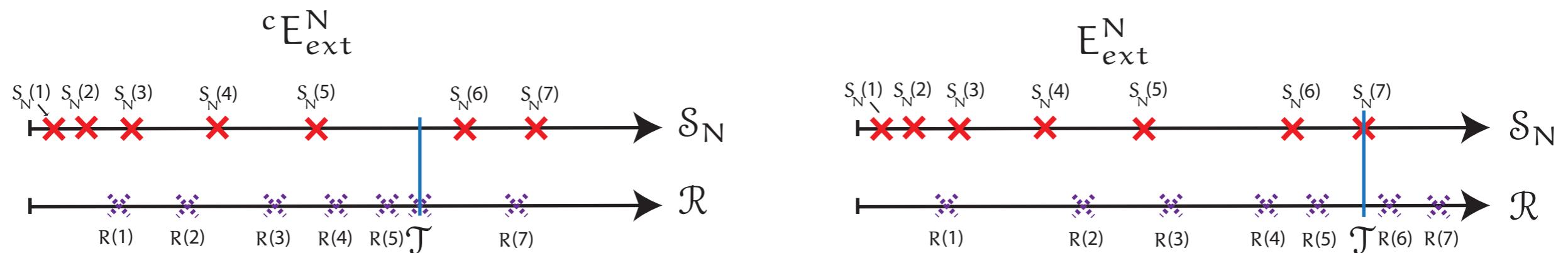


Figure: Exemple pour  $N = 7$ , où les croix symbolisent les discontinuités.

## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

## Proposition

$S_N(N)$  a la même loi que  
 $R(N)$  a la même loi que

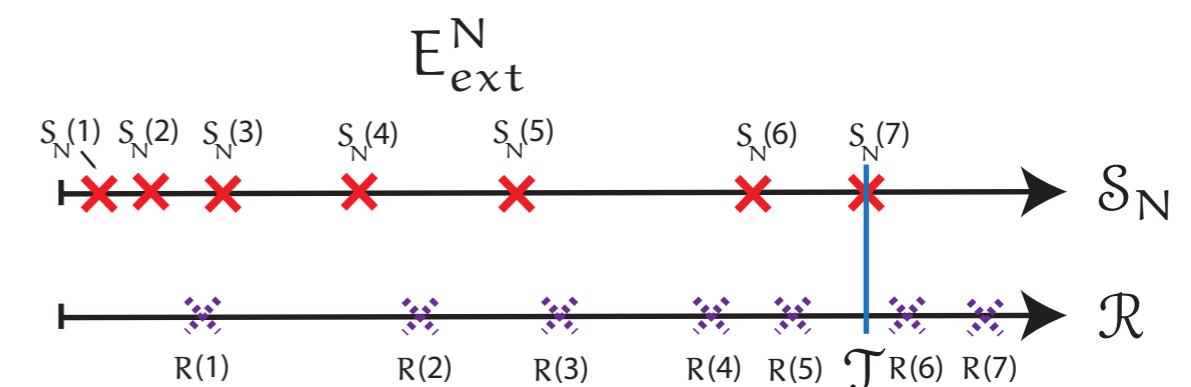
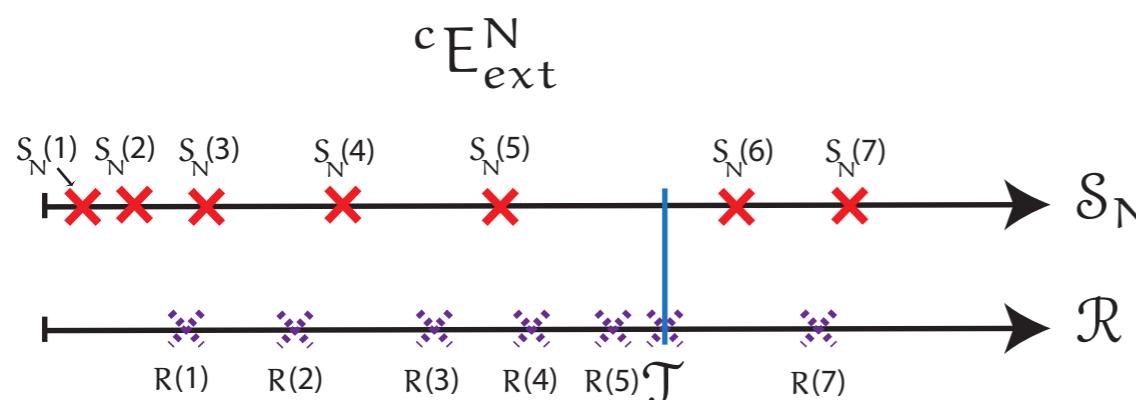


Figure: Exemple pour  $N = 7$ , où les croix symbolisent les discontinuités.

## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

## Proposition

$S_N(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(\lambda N) + \text{Exp}(\lambda(N - 1)) + \dots + \text{Exp}(\lambda)$ .  
 $R(N)$  a la même loi que

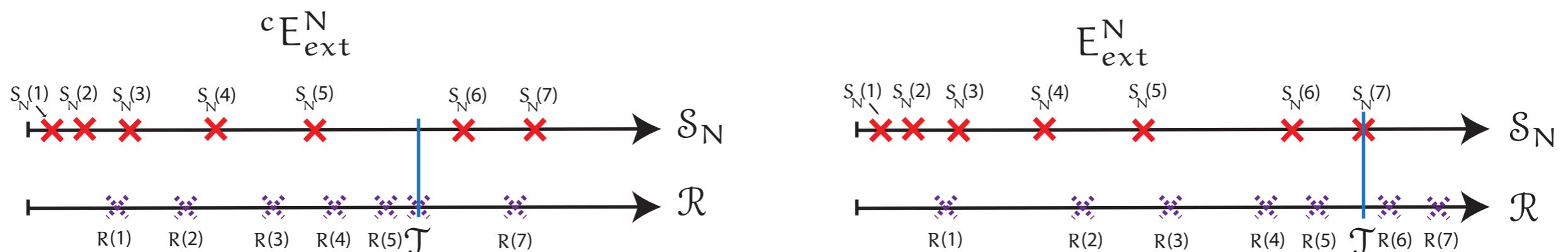


Figure: Exemple pour  $N = 7$ , où les croix symbolisent les discontinuités.

## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

## Proposition

$S_N(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(\lambda N) + \text{Exp}(\lambda(N-1)) + \dots + \text{Exp}(\lambda)$ .  
 $R(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(1) + \text{Exp}(2) + \dots + \text{Exp}(N)$ .

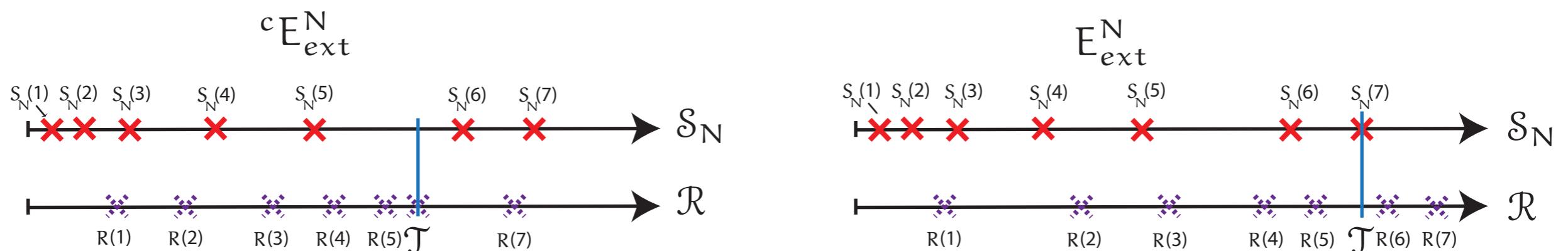


Figure: Exemple pour  $N = 7$ , où les croix symbolisent les discontinuités.

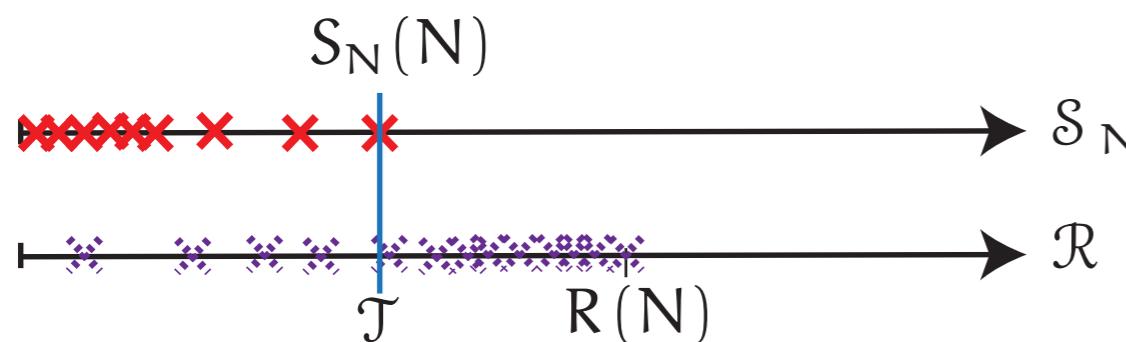
## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

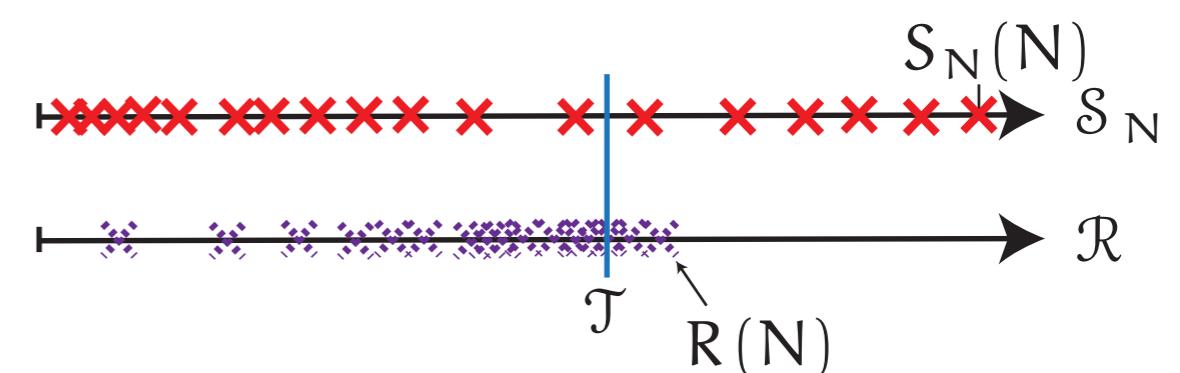
## Proposition

$S_N(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(\lambda N) + \text{Exp}(\lambda(N-1)) + \dots + \text{Exp}(\lambda)$ .  
 $R(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(1) + \text{Exp}(2) + \dots + \text{Exp}(N)$ .

Une situation typique pour  $\lambda > 1$ :



Une situation typique pour  $\lambda < 1$ :



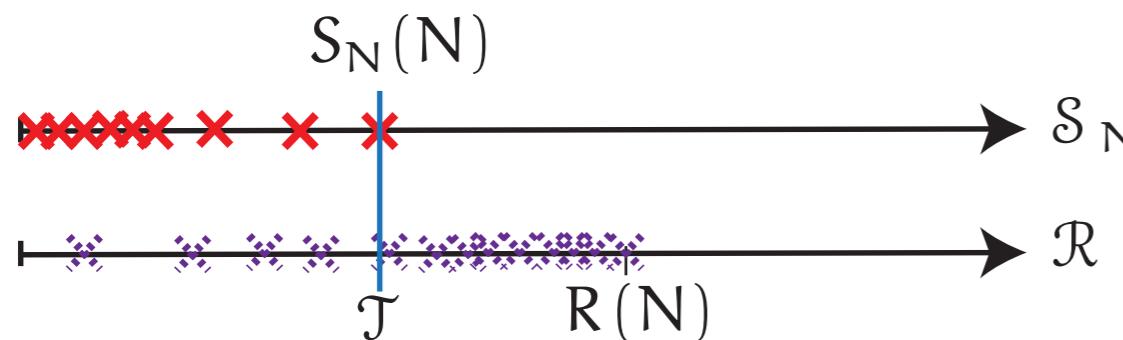
## Notation.

On note  $S_N(1), S_N(2), \dots, S_N(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{S}_N$  et  $R(1), \dots, R(N)$  les discontinuités de  $\mathcal{R}(t)$ .

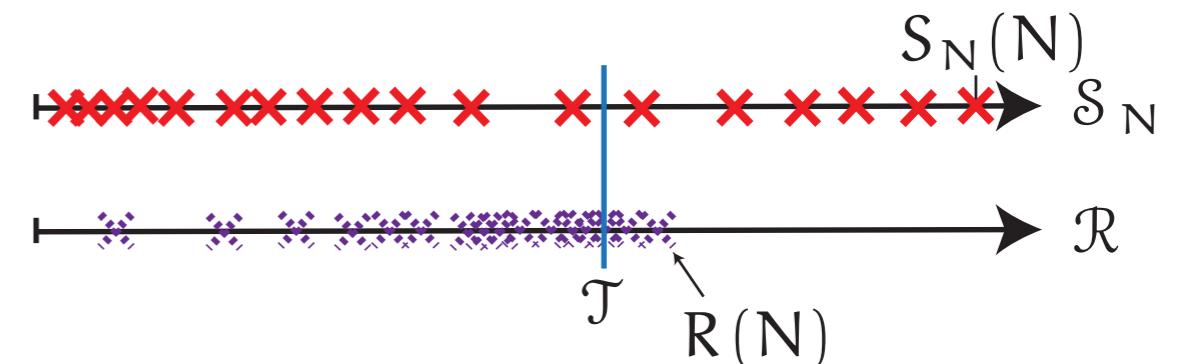
## Proposition

$S_N(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(\lambda N) + \text{Exp}(\lambda(N-1)) + \dots + \text{Exp}(\lambda)$ .  
 $R(N)$  a la même loi que  $\text{Exp}(1) + \text{Exp}(2) + \dots + \text{Exp}(N)$ .

Une situation typique pour  $\lambda > 1$ :



Une situation typique pour  $\lambda < 1$ :



On en déduit que

$$\mathbb{P}(E_{ext}^N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } \lambda = 1 \\ 1 & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$$