SF1625 Övning 6 - Differentialekvationer

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

(KAN FÖREKOMMA SKRIVFEL)

Viktigt att ha koll på:

- *Homogena linjära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Metod för att lösa (1):

1) Ansats: $y = e^{rt} \quad \Rightarrow \quad$ Karakteristisk ekvation $ar^2 + br + c = 0$

2) Lös karakteristisk ekvation för att hitta rötterna r_1 och r_2

3a) Fall 1: Två reella rötter r_1 och $r_2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$
3b) Fall 2: En dubbelrot $r_1 = r_2 = r \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ate^{rt} + Be^{rt}, \quad A, B \in \mathbb{R}$
3c) Fall 3: Två imaginära rötter: $r = k \pm i\omega \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{kt}\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big), \quad A, B \in \mathbb{R}$

- *Inhomogena linjära differentialekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Lösningen till (2) ges av $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$, där $y_h(t)$ är lösningen till den homogena ekvationen och $y_p(t)$ är någon partikulärlösning som hittas genom en ansats.

  - Om $f(t)$ är ett polynom, ansätt ett polynom av samma grad
  - Om $f(t)$ är en trigonometrisk funktion , ansätt $y_p = C\cos(kt) + D\sin(kt), \quad k, C, D \in \mathbb{R}$
  - Notera att dessa ansatser inte alltid fungerar, kan ibland behöva pröva sig fram

- *Differentialekvationer med begynnelsevilkor*

Använd begynnelsevillkoren för att bestämma konstaterna A och B

Uppgifter

Uppgift 1 Lös följande differentialekvationer.

(a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$
(b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10$
(c) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$
(d) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = t + 1$

Uppgift 2 Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Uppgift 3* Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Uppgift 4 (Tenta 2017-03-17 Uppgift 4)
Newtons avsvalningslag säger att ett varmt objekt svalnar i en takt som är proportionell mot temperaturskillnaden mot omgivningen. Låt $y(t)$ vara temperaturen i ett vattenkärl, vid tiden t i minuter. När vattnet kokar ställt kärlet utomhus i $-20°$. Temperaturen $y(t)$ uppfyller differentialekvationen på formen $y'(t) = k(y(t) + 20)$. Vi vet också att temperaturen är $40°$ efter 10 minuter.
(a) Lös differentialekvationen (Ledning: Substituera $u(t) = y(t) + 20$). **(3p)**
(b) När är temperaturen $25°$? **(1p)**

Uppgift 5 På vilka intervall är funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

strängt växande?

Uppgift 6 Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan

$$y = \ln x$$

i den punkt på kurvan som har x-koordinat 1. Kan du med hjälp av tangenten ge ett närmevärde till $\ln 1.1$