SF1625 Övning 13 Serier

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

(KAN FÖREKOMMA SKRIVFEL)

Viktigt att ha koll på:

- *Sats*: Om serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent så gäller att $a_n \to 0$ då $n \to \infty$.
- *Geometrisk serie:*
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{om } |x| < 1$$
- *Cauchys integralkriterium:* Om f är *positiv, kontinuerlig* och *avtagande* på intervallet $[N, \infty)$ så gäller att
$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k), \text{ är konvergent om och endast om } \int_N^{\infty} f(x)dx, \text{ är det.}$$
- *Jämförelsetest* och *ratiotest*

Uppgifter

Uppgift 1 Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta.

$$\textbf{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{k}, \qquad \textbf{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\arctan k}$$

Uppgift 2 Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta. Beräkna dem ifall de är konvergenta.

$$\textbf{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad \textbf{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \qquad \textbf{(c)} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j}$$

Uppgift 3 Avgör om nedanstående serier är konvergenta eller divergenta genom att jämföra med lämplig serie eller med en integral (behöver ej beräknas).

$$\textbf{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{10}{k\sqrt{k}}, \qquad \textbf{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^k}, \qquad \textbf{(c)} \sum_{j=4}^{\infty} \frac{1+j+\ln j}{j^2-1}$$

Uppgift 4 Avgör om $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ är konvergent eller divergent

Uppgift 5 Avgör om serierna är divergenta eller konvergenta, Använd lämpligt test.

$$\textbf{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \textbf{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}, \qquad \textbf{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)^3},$$

$$\textbf{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{4/3}}{2+n^{5/3}}, \qquad \textbf{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}, \qquad \textbf{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}$$

Uppgift 6* Visa att

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{\pi+1}{2}$$

Uppgift 7 Bestäm Maclaurin-serierna till

$$\textbf{(a)}\ \sin x, \qquad \textbf{(a)}\ \cos x, \qquad \textbf{(a)}\ e^x, \qquad \textbf{(a)}\ e^{x^2}$$