SF1625 Övning 8 Taylorpolynom, fortsättning

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

(KAN FÖREKOMMA SKRIVFEL)

Viktigt att ha koll på:

- *Taylorpolynomet* av grad n till $f(x)$ kring $x = a$ ges av:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$$

  Där $f^{(n)}$ betecknar den n :te ordningens derivata av f, taylorpolynomet används till att approximera en funktion $f(x)$ nära a

- *Taylors formel*

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

  där $E_x(x)$ är Lagranges restterm, används för att uppskatta storleksordningen på felet

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

  Där s är något tal mellan a och x. Notera att vi inte vet vad s är men kan med hjälp av $E_n(s)$ bestämma största möjliga felet genom att sätta in det värdet på s som ger störst fel.

- *L'Hôpitals regel*: Låt f och g vara deriverbara funktioner i en omgivning I av a sådana att

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

  Då gäller att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uppgifter

Uppgift 1 Bestäm Taylorpolynomet av grad tre i punkten 0 för

(a) $\sin x$ **(b)** e^x **(c)** $\ln(1+x)$ **(d)** e^{-x^2}

Uppgift 2, Tenta 2016-06-10 (4p)

Antag att funktionen f är tre gånger deriverbar på hela reella axeln. Antag vidare att $f(1) = 2,\ f'(1) = -3$ och $|f''(x)| \leq 5$ för alla x.

A. Bestäm ett närmevärde till $f(1.1)$ med hjälp av linjär approximation (Taylorpolynom av grad 1).

B. Bestäm så noggrant som möjligt en gräns för felet i ditt närmevärde

Uppgift 3*, Tenta 2017-12-17 (3p) Visa att

$$|e^{-x^2} - 1 + x^2| \leq \frac{x^4}{2}$$

Uppgift 4 Beräkna följande gränsvärden.

$$\textbf{(a)} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{\tan h} \qquad \textbf{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{x^2}$$

$$\textbf{(c)} \lim_{t\to 1} \frac{\sin t - \sin 1}{t-1} \qquad \textbf{(d)} \lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$$

Uppgift 5 Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{104}$ med hjälp av ett lämpligt valt Taylorpolynom. Felet ska vara mindre än $5 \cdot 10^{-5}$

Uppgift 6, Tenta 2019-01-09 (5p) Avgör om $|\ln(3/2) - \frac{3}{8}|$ är större eller mindre än 0.05.

Uppgift 7 Betrakta ekvationen

$$x^3 + x = 1$$

(a) Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.

(b) Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.

Uppgift 8 På vilka intervall är funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

strängt växande?