

SF1625 Övning 7 Taylorpolynom

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

(KAN FÖREKOMMA SKRIVFEL)

Viktigt att ha koll på:

- Begreppen *Konkav* och *Konvex*.
- Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$ kring $x = a$ ges av:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Där $f^{(n)}$ betecknar den n :te ordningens derivata av f

- Lagranges restterm $E_n(x)$, Används för att uppskatta storleksordningen på felet

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Där s är något tal mellan a och x .

Uppgifter

Uppgift 1 Betrakta funktionen

$$f(x) = xe^{-x}$$

(a) Bestäm definitionsmängden till f , gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till f . Beräkna sedan eventuella relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = f(x)$.

(b) Med hjälp av uppgift (a) kan du nu svara på dessa frågor:

- Vad är värdemängden till f ?
- Har f något största eller minsta värde, vilka är dessa i så fall?
- Finns det något tal x sådant att $f(x) = 1$?

- (c) Finn alla inflektionspunkter till f och bestäm de intervall där f är konvex (concave up) respektive konkav (concave down).
- (d) Finn alla asymptoter till kurvan $y = f(x)$.

Uppgift 2 Betrakta funktionen

$$g(x) = \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2}$$

(a) Bestäm definitionsmängden till g , gör ett teckenschema för derivatan och bestäm alla lokala extrempunkter till g . Beräkna sedan eventuella relevanta gränsvärden och skissa kurvan $y = g(x)$.

(b) Med hjälp av uppgift (a) kan du nu svara på dessa frågor:

- Vad är värdemängden till g ?
- Har g något största eller minsta värde, vilka är dessa i så fall?
- Hur många lösningar har ekvationen $g(x) = 1/10$?

Uppgift 3 Låt

$$h(t) = t - \sin t$$

- (a) Bestäm alla kritiska punkter till h .
- (b) Bestäm alla lokala extrempunkter till h .
- (c) Avgör om h antar något största respektive minsta värde.

Uppgift 4 Låt

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

- (a) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f kring punkten $x = 0$.
- (b) Använd Taylorpolynomet ovan för att approximera $\ln 2$, dvs $f(1)$.
- (c) Avgör om felet i approximationen i (b) är mindre än $1/3$.

Uppgift 5

- (a) Bestäm med hjälp av Taylorutveckling ett närmevärde till $\cos \frac{1}{10}$ med ett fel mindre än 10^{-5} .
- (b) Bestäm ett närmevärde till $\sqrt{104}$ med hjälp av ett lämpligt valt Taylorpolynom. Felet ska vara mindre än $5 \cdot 10^{-5}$.

Uppgift 6 Betrakta ekvationen

$$x^3 + x = 1$$

- (a) Visa med hjälp av derivata att ekvationen har högst en lösning.
- (b) Visa med hjälp av satsen om mellanliggande värden att ekvationen har minst en lösning som ligger mellan 0 och 1.