SF1625 Övning 11 Generaliserade integraler och rotationskroppar

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

(KAN FÖREKOMMA SKRIVFEL)

Viktigt att ha koll på:

- Integralen över ett obegränsat intervall defineras som

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

- Integralen över ett intervall $[a, b]$ där integranden växer obegränsat i punkten a defineras som:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

- Användbar sats: Integralen

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} = \begin{cases}\text{Konvergent om } p > 1\\ \text{Divergent om } p \leq 1\end{cases}$$

  Där $0 < a < \infty$

- Låt f vara en funktion definierad på intervallet $[a, b]$.
  Rotationsvolymen vid rotation kring x-axeln ges av:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

  Rotationsvolymen vid rotation kring y-axeln ges av:

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

Uppgifter

Uppgift 1 Ange på vilket sätt dessa integraler är generaliserade beräkna dem.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_1^\infty xe^{-x}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$$

Uppgift 2 Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta

$$i)\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx, \qquad ii)\int_{10}^\infty \frac{x+\ln x}{x^2}dx, \qquad iii)\int_0^\infty x\sin x\, dx$$

$$iv)\int_2^\infty \frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x^3}dx, \qquad v)\int_{30}^\infty \frac{x\sqrt{x}+x}{1-x^3}dx, \qquad vi)\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$$

Uppgift 3 Avgör om det obegränsade område som ligger mellan kurvorna

$$y = 1 \quad \text{och} \quad y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$$

när $0 \leq x < \infty$, har ändlig area. Beräkna arean om den är ändlig.

Uppgift 4 Härled formlerna för rotationsvolym runt x- respektive y-axeln och beräkna sedan den rotationsvolym som genereras när området mellan kurvan $y = x^3$ och x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv runt

(a) x-axeln **(b)** y-axeln

Uppgift 5 Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

(a) Volymen V av ett klot med radie r som ges av

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

(b) Volymen V av en kon med basradie r och höjd h som ges av

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Uppgift 6* Visa att

$$\int_0^\infty \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x^2} dx = \pi$$