

SF1625 Övning 5 - Modul 3 Transcendent funktioner

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

Viktigt att ha koll på:

- Begreppet *Invers funktion*, när är en funktion inverterbar? *Injektiv funktion (one-to-one)*
- Potenslagar:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 & a^{x+y} &= a^x a^y & a^{-x} &= \frac{1}{a^x} \\ a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} & (a^x)^y &= a^{xy} & (ab)^x &= a^x b^x \end{aligned}$$

- Loglagar: $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 & \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y & \log_a(x^y) &= y \log_a x \end{aligned}$$

- Viktiga derivator:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Uppgifter

Uppgift 1 Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

$$xe^{-x}, \quad xe^{-x^2}, \quad \ln \sqrt{1+x^2}, \quad e^{-|x|}, \quad e^{2x} \sin 3x, \quad \arcsin \sqrt{x}$$

Uppgift 2 Visa att

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Uppgift 3 Här är en uppgift om inverser.

(a) Bestäm inversen till funktionen $f(x) = 1 + e^{3x}$. Ange också inversens definitionsmängd och värdemängd.

(b) Hur kan du med hjälp av derivata visa att funktionen $g(x) = x + e^{3x}$ är inverterbar utan att räkna ut inversen?

Uppgift 4 Tenta 2011-10-11. 35%

Visa att

$$e^x \geq 1 + \sin x, \quad \text{för varje } x \geq 0$$

Uppgift 5 Ett företag vill minimera materialåtgången vid tillverkningen av cylinderformade konserverburkar av en viss volym. Vilka förhållanden ska då råda mellan burkens höjd och radie?

Uppgift 6 Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan

$$y = e^{-x^2}$$

i den punkt på kurvan som har x -koordinat -1.

Uppgift 7 På vilka intervall är funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

strängt växande?

Uppgift 8 Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan

$$y = \ln x$$

i den punkt på kurvan som har x -koordinat 1. Kan du med hjälp av tangenten ge ett närmevärde till $\ln 1.1$