

# SF1625 Övning 9 Integraler

Daniel Dalbom

ddalbom@kth.se

(KAN FÖREKOMMA SKRIVFEL)

## Viktigt att ha koll på:

- *Medelvärdessatsen för integraler*

Låt  $f$  vara kontinuerlig i  $[a, b]$ . Då finns det ett tal  $c \in [a, b]$  sådant att

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

- Lösa integraler med hjälp av *variabelbyte*, *partiell integration* och *partialbråksuppdelning*
- *Analysens huvudsats* Låt  $f$  vara kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  då gäller att om

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{så gäller att } F'(x) = f(x)$$

## Uppgifter

**Uppgift 1** Beräkna nedanstående integraler

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \quad \text{(c)} \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{(d)} \int \frac{dx}{x} \quad \text{(e)} \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)dx$$

**Uppgift 2** Beräkna nedanstående integraler med hjälp av angiven variabelsubstitution.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2}, \quad (\text{sätt } u = 2x) \\ \text{(b)} \quad & \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\text{sätt } t = 1+x^2) \\ \text{(c)} \quad & \int_{-1}^0 xe^{-x^2}, \quad (\text{sätt } t = x^2) \\ \text{(d)} \quad & \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx, \quad (\text{sätt } t = \ln x) \\ \text{(e)} \quad & \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}, \quad (\text{sätt } u = \sin x) \end{aligned}$$

**Uppgift 3** Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partiell integration.

$$\text{(a)} \int_0^1 xe^{-x} dx \quad \text{(b)} \int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx \quad \text{(c)} \int_0^{\pi/2} x \sin x dx \quad \text{(d)} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

**Uppgift 4** Finns det några symmetrier som gör dessa integraler lättare att beräkna? Beräkna dem!

$$i) \int_{-1}^1 \sin x \, dx \quad ii) \int_{-1}^1 e^{|x|} dx \quad iii) \int_{-1}^1 \arctan x \, dx$$

**Uppgift 5** Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partialbråksuppdelning

$$i) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 9} \quad ii) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} \quad iii)^* \int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} dx$$

**Uppgift 6** Vi ska approximera integralen  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  med Riemannsummor.

- (a) Ange en Riemannsumma med två termer som är en undersumma till integralen.
- (b) Ange en Riemannsumma med fyra termer som är en undersumma till integralen.
- (c) Använd svaret i (b) för att ge ett närmevärde till  $\ln 2$ . Förklara!

**Uppgift 7** Bevisa formeln för partiell integration

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

där  $F'(x) = f(x)$

**Uppgift 8** Bevisa analysens huvudsats, dvs om

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{så gäller att } F'(x) = f(x)$$