SF1625 Lösningar till Övning 1

Daniel Dalbom
ddalbom@kth.se

Uppgift 1 Denna uppgift handlar om linjer.
(a) Ange en ekvation för linjen genom (5,-1) som har riktningskoefficient -2.
Lösning: Formel för en rät linje:

$$y = kx + m \tag{1}$$

Från uppgiftstexten fås $k = -2$
$x = 5$ och $y = -1$ insatt i (1) ger:

$$\begin{aligned} -1 &= -2 \cdot 5 + m \\ -1 &= -10 + m \\ m &= 9 \end{aligned}$$

Svar: $y = -2x + 9$

(b) Ange en ekvation för linjen som går genom punkterna (1,-3) och (-2,5).
Lösning: Formel för en rät linje:

$$y = kx + m \tag{2}$$

Insättning av punkterna $(1, -3)$ och $(-2, 5)$ i (2) ger ett ekvationsystem med 2 obekanta.

$$\begin{cases} k + m = -3 \\ -2k + m = 5 \end{cases} \tag{3}$$

Multplicera den övre ekvationen med 2 och addera med den undre:

$$\begin{aligned} 2k + 2m - 2k + m &= -6 + 5 \\ 3m &= -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sätt in värdet på m i övre ekvationen i (3) för att få ut k:

$$\begin{aligned} k - \frac{1}{3} &= -3 \\ k = -3 + \frac{1}{3} &= -\frac{9}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

Svar: $y = -\frac{8}{9}x - \frac{1}{3}$

(c) Avgör om linjerna definerade i ekvationerna $8x + 16y + 5 = 0$ och $x = -2y + 33$ är parallella.
Lösning: Vi vill skriva ekvationerna på formeln $y = kx + m$ och läsa av vilket k-värde de har. Om de har samma k-värde så har de samma lutning och är således parallella.

Första ekvationen kan skrivas:

$$\begin{aligned} 8x + 16y + 5 &= 0 \\ 16y &= -8x - 5 \\ y &= -\frac{8}{16}x - \frac{5}{16} \\ k_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Andra ekvationen:

$$\begin{aligned}
x &= -2y + 33 \\
2y &= -x + 33 \\
y &= -\frac{1}{2}x + \frac{33}{2} \\
k_2 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Svar: Eftersom $k_1 = k_2$ så är linjerna parallella.

(d) Avgör om linjerna definerade av ekvationerna $8x + 9y + 5 = 0$ och $9x - 8y + 15 = 0$ är vinkelräta

Lösning: Två linjer är vinkelräta om $k_1 \cdot k_2 = -1$, där k_1 och k_2 betecknar lutningen hos linjerna. Precis som i föregående uppgift skriver vi om båda ekvationerna för att läsa av deras k-värde:

$$\begin{aligned}
8x + 9y + 5 &= 0 \\
9y &= -8x - 5 \\
y &= -\frac{8}{9}x - \frac{5}{9} \\
k_1 &= -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Andra ekvationen:

$$\begin{aligned}
9x - 8y + 15 &= 0 \\
8y &= 9x + 15 \\
y &= \frac{9}{8} + \frac{15}{8} \\
k_2 &= \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

Produkten av lutningarna blir:

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{8}{9} \cdot \frac{9}{8} = -1$$

Således är linjerna vinkelräta.

(e) Vad säger enpunktsformeln (point-slope equation) för linjens ekvation?

Lösning: Enpunktsformeln:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

Användbar då vi har en punkt och k givet och vill bestämma linjens ekvation.

Härledning: Låt (x_1, y_1) vara en given punkt, insatt i $y = kx + m$ fås då:

$$y_1 = kx_1 + m \Rightarrow m = y_1 - kx_1$$

Sätt in m i formeln för en rät linje:

$$\begin{aligned}
y &= kx + y_1 - kx_1 \\
y - y_1 &= k(x - x_1)
\end{aligned}$$

Vilket är enpunktsformeln.

Uppgift 2 Lös nedanstående ekvationer.

(a)

$$\sin(2x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lösning: Vi identifierar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ som en standardvinkeln $\sin 45°$, dvs $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} 2x &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= -\frac{\pi}{8} + \pi n \end{aligned}$$

Vi får heller inte glömma att om θ är en lösning så är även $\pi - \theta$ en lösning, dvs vi har att:

$$\begin{aligned} 2x &= \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{5\pi}{8} + \pi n \end{aligned}$$

Detta är alla lösningar till ekvationen.

(b)

$$|2x + 1| = 2$$

Lösning: Definitionen för absolutbelopp:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Vi måste alltså undersökta båda fallen, antag först att $2x + 1 > 0$, dvs $x > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 2 \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vilket är en lösning. Antag nu att $2x + 1 < 0$, dvs $x < -\frac{1}{2}$

$$-(2x + 1) = 2 \tag{6}$$
$$-2x - 1 = 2 \tag{7}$$
$$-2x = 3 \tag{8}$$
$$x = -\frac{3}{2} \tag{9}$$

Detta är alla lösningar till ekvationen.

Uppgift 3 Beräkna nedanstående gränsvärden.

(a)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x^2 - 4} \tag{10}$$

Lösning: Låt x gå mot 1, vi får då:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \{x \to 1\} = \frac{1 - 2}{1^2 - 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} \tag{11}$$

Lösning: Vi använder konjugatregeln på täljaren:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x + 2} = \{x \to 2\} = \frac{1}{4}$$

(c)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x^2-4} \tag{12}$$

Lösning: Vi ser att nämnaren går mot -4 och täljaren går mot 0 då $x \to -2$, således går uttrycket mot $-\infty$ då $x \to -2$. Alltså saknas gränsvärdet.

(d)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x-2}{x^2-4} \tag{13}$$

Lösning: Vi ser att både nämnaren och täljare växer obegränsat. Dividera med x i båda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{x-\frac{4}{x}} = \{x \to \infty\} = \frac{1-0}{\infty - 0} = 0$$

Eventuellt kan man konstatera på en gång att x^2 växer snabbare än x och således måste nämnaren gå mot ∞ snabbare än täljaren då $x \to \infty$.

Uppgift 4 Beräkna nedanstående gränsvärden.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x} \tag{14}$$

Lösning: Dividera nämnaren och täljaren med x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1} = \left\{ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right\} = \frac{1-1}{1} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x - \sin x}{x} \tag{15}$$

Lösning: Använd samma knep som i (a):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1} = \left\{ \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \right\} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Uppgift 5 Låt

$$f(x) = \frac{5x-1}{\cos 2x}$$

(a) Bestäm definitionsmängden till f.

Lösning: f är definerad överallt där $\cos 2x \neq 0$. Vi vet att cos antar värdet 0 i punkterna $\frac{\pi}{2}$ och $\frac{3\pi}{2}$. Således är f odefinerad då:

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + \pi n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{3\pi}{4} + \pi n \end{aligned}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$$

(b) I vilka punkter är f kontinuerlig?

Svar: f är kontinuerlig i alla punkter som ingår i dess definitionsmängd.

(c) Avgör om f är udda eller jämn.

Svar: f är varken udda eller jämn eftersom täljaren inte är en udda eller jämn funktion och nämnaren är jämn.

(d) Är f begränsad?

Svar: Nej, eftersom $f \to \infty$ då $\cos 2x \to 0$

Uppgift 6 Låt

$$g(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{t+1}}$$

(a) Bestäm definitionsmängden till g.

Lösning: Problem uppstår då nämnaren i bråket går mot 0 samt då uttrycket under rottecknet blir negativt. Vi har alltså att:

$$t + 1 \neq 0 \Rightarrow t \neq -1$$

Samt

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{t+1} &\geq 0 \\ 1 &\geq \frac{1}{t+1} \end{aligned}$$

Här måste vi kolla båda fallen, dels då $t + 1 \geq 0$ samt $t + 1 < 0$

$t + 1 \geq 0:$

$$\begin{aligned} t + 1 &\geq 1 \\ t &\geq 0 \end{aligned}$$

$t + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad t < -1$

$$\begin{aligned} t + 1 &< 1 \\ t &< 0 \\ t &< -1 \end{aligned}$$

Således:

$$D_f = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0 \text{ eller } t < -1\}$$

(b) I vilka punkter är g kontinuerlig?

Svar: g är kontinuerlig i alla punkter i dess definitionsmängd.

(c) Avgör om g är udda eller jämn.

g är varken en udda eller jämn funktion. Detta går att se genom att sätta in en valfri punkt och dess negativa motsvarighet i g.

(d) Är g begränsad?

Svar: Nej, eftersom $g \to \infty$ då $t \to -1$ från vänster.