БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Далецкий Денис Андреевич

МЕТОД РИЧАРДСОНА

Отчет по лабораторной работе №2

Студента 2 курса 10 группы

Преподаватель: Никифоров Иван Васильевич, доцент кафедры ВМ, канд. физ.-мат. наук

Минск, 2018

Постановка задачи

Построить программу решения системы линейных алгебраических уравнений методом Ричардсона.

1. Для заданной матрицы А и случайного вектора x вычислить $f=Ax$.
2. Решить СЛАУ $Ax'=f$ методом Ричардсона.
3. Сравнить полученное решение x' с правильным решением x
4. Исследовать сходимость метода Ричардсона от параметра τ. Показать зависимость количества итераций от выбранного параметра τ.

Краткая теория

Имеем систему из n уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}^0 * x_1 + a_{12}^0 * x_2 + \ldots + a_{1n}^0 * x_n = f_1^0 \\ a_{21}^0 * x_1 + a_{22}^0 * x_2 + \ldots + a_{2n}^0 * x_n = f_2^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^0 * x_1 + a_{n2}^0 * x_2 + \ldots + a_{nn}^0 * x_n = f_n^0 \end{cases}$$

Верхний индексk показывает значение на k-м шаге вычислений.

$A=\{a_{ij}\}, x=\{x_i\}, f=\{f_j\}$

Метод Ричардсона заключается в последовательном приближении решения xчленами рекуррентной последовательности $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\tau\left(f-Ax^{(k)}\right)$ (1)

<u>Теорема:</u> Пусть матрица A положительно определена, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$ - её собственные значения. Стационарный метод Ричардсона (1) сходится тогда и только тогда, когда

$0<\tau<\frac{2}{\lambda_1}$

Оптимальным выбором τ с точки зрения скорости сходимости будет $\tau=\frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$

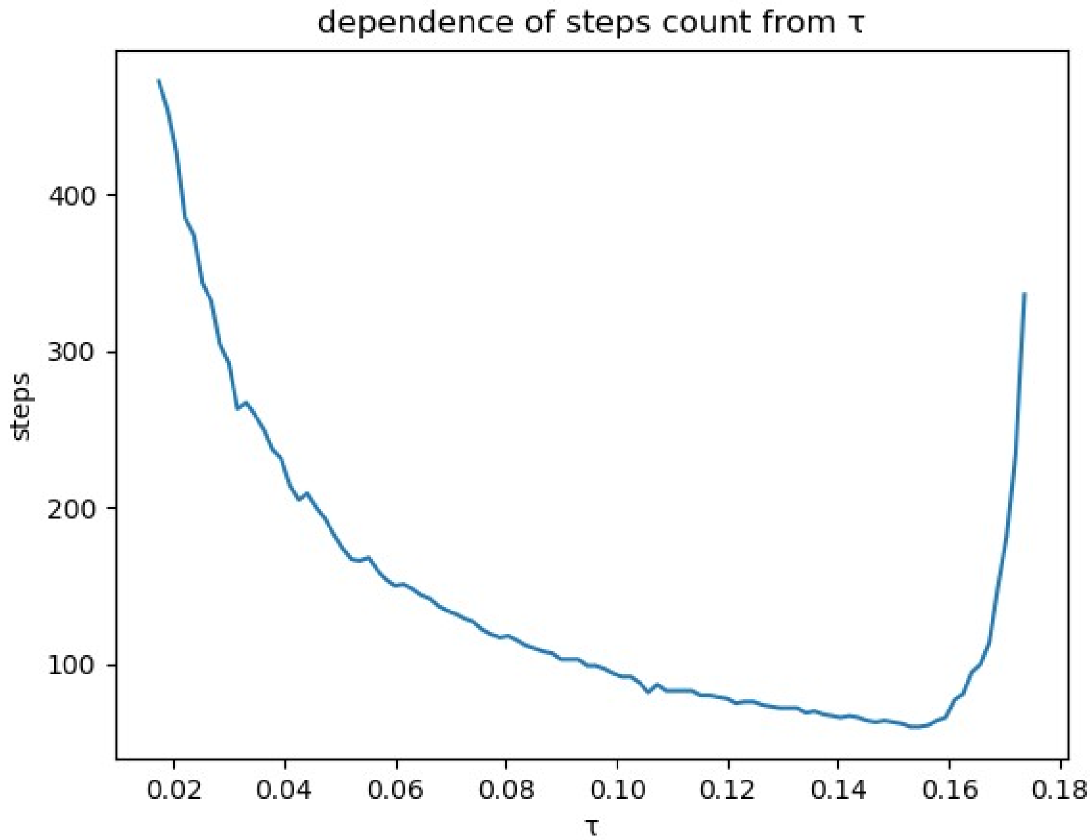
Код программы (написанной на языке Python)

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt


def richardson_step(x, A, b, lr):
  x_next = x + lr * (b - A @ x)
  return x_next


def richardson_generator(A, b, eps, lr):
  n = A.shape[0]
  x_current = np.random.normal(size=n)

  while True:
      x_next = richardson_step(x_current, A, b, lr)
      yield x_next
      if np.max(np.abs(x_current - x_next)) < eps:
          raise StopIteration
      x_current = x_next


def continuous_norm(mat):
  row_sums = np.sum(np.abs(mat), 1)
  return np.max(row_sums)


if __name__ == "__main__":
  np.set_printoptions(floatmode="fixed", precision=16)
  A = np.array([
      [8, 0, -4, 0, -2],
      [0, 7, 0, -4, 0],
      [-4, 0, 6, 0, -1],
      [0, -4, 0, 5, 0],
      [-2, 0, -1, 0, 4]
      ], dtype=float)

  x = np.round(np.random.rand(5) * 21 - 10, 2)
```

```python
b = A @ x
print(A)
print("b =", b)
print("x =", x)

eigenvals, _ = np.linalg.eigh(A)
min_eig = eigenvals[0]
max_eig = eigenvals[-1]
max_tau = 2.0 / (0.2 * min_eig + max_eig)
min_tau = max_tau / 10
opt_tau = 2.0 / (min_eig + max_eig)

steps_counts = []
taus = np.linspace(min_tau, max_tau, 100)
for tau in taus:
    xs_ = np.array(list(richardson_generator(A, b, 1e-6, tau)))
    x_ = xs_[-1]
    steps = len(xs_)
    steps_counts.append(steps)

fig, ax = plt.subplots(1, 1)
ax.plot(taus, steps_counts)
plt.title("dependence of steps count from τ")
plt.xlabel("τ")
plt.ylabel('steps')
plt.savefig("out.png")

print("x' =", x_)
print("|x - x'| = ", max(abs(x - x_)))
plt.show()
```

Результаты

График зависимости кол-ва итераций от параметра τ:



Исходная матрица: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

f = [25.6600000000000001 -30.1999999999999993 -6.3700000000000045

  -2.7200000000000060 -1.2199999999999998]

x = [5.7000000000000002 -8.5199999999999996 3.2999999999999998

 -7.3600000000000003 3.3700000000000001]

x' = [5.6999987658244500 -8.5199999994861120 3.2999994904101717

 -7.3599999993418539 3.3699991940078888]

$$|x - x'| = 1.2341755502021101\text{e-}06$$